Digitaltechnik – Aufgaben + Lösungen 2: Zahlen und Arithmetik

Aufgabe 1

Wandeln Sie die folgenden Zahlen in Binärzahlen und Hexadezimalzahlen

a) 4_D
b) 13_D
c) 118_D
d) 67_D

Lösung:

Teilen durch die Basis des Zahlensystems. Der jeweilige Rest ergibt die Ziffer.

a)
Umwandlung in das Binärsystem => Basis ist 2 und es muß durch 2 dividiert werden.
4:2 = 2 Rest 0
2:2 = 1 Rest 0
1:2 = 0 Rest 1
=> Lösung ist 100_B . Probe: $1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+0\cdot 2^0 = 4_D$

Umwandlung in das Hexadezimalsystem => Basis ist 16.
4:16 = 0 Rest 4
=> Lösung ist 4_H

b)
Binärsystem
13:2 = 6 Rest 1
6:2 = 3 Rest 0
3:2 = 1 Rest 1
1:2 = 0 Rest 1
=> Lösung ist 1101_B

Hexadezimalsystem
13:16 = 0 Rest 13
=> Lösung ist D_H

c)
Umwandlung in das Binärsystem
118:2 = 59 Rest 0
59:2 = 29 Rest 1
29:2 = 14 Rest 1
14:2 = 7 Rest 0
7:2 = 3 Rest 1
3:2 = 1 Rest 1
1:2 = 0 Rest 1
=> Lösung ist 1110110_B

Umwandlung in das Hexadezimalsystem
118:16 = 7 Rest 6
7:16 = 0 Rest 7

=> Lösung ist 76_H
Alternativ und einfacher, da die Binärdarstellung schon vorhanden ist, ist die Ziffernweise Umwandlung aus dem Binärsystem:
$0111_B = 7_H$
$0110_B = 6_H$
=> Lösung ist 76_H

d)
Umwandlung in das Binärsystem
67:2 = 33 Rest 1
33:2 = 16 Rest 1
16:2 = 8 Rest 0
8:2 = 4 Rest 0
4:2 = 2 Rest 0
2:2 = 1 Rest 0
1:2 = 0 Rest 1
=> Lösung ist 1000011_B

Hexadezimal:
67:16 = 4 Rest 3
4:16 = 0 Rest 4
=> Lösung ist 43_H
oder alternativ ziffernweise.

Aufgabe 2

Die folgenden Zahlen sind in binärer Sign-Magnitude Darstellung kodiert. Geben Sie den jeweiligen Dezimalwert an.

a) 1101_B
b) 0001_B
c) 10001_B
d) 111_B

Lösung:
Die erste Stelle gibt jeweils das Vorzeichenbit an. „0“ = positiv und „1“ = negativ. Die folgenden Stellen geben den Betrag der Zahl in konventioneller Binärdarstellung an.
a) -5_D, da $1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 5_D$ und die erste Stelle eine „1“ ist => Die Zahl ist negativ.
b) $+1_D$
c) -1_D
d) -3_D

Aufgabe 3

Stellen Sie die folgenden Zahlen in der 2er Komplementdarstellung dar. Geben Sie an, wieviele binäre Stellen Sie für die Darstellung mindestens benötigen und die jeweils kleinste und größte mögliche Zahl an, die mit der angegebene Zahl von Stellen darstellbar ist.

a) 4_D
b) 13_D
c) 118_D
d) 67_D

e) -4_D
f) -13_D
g) -118_D
h) -67_D

Lösung
a-d) Binärdarstellung der positiven Zahlen wie in Aufgabe 1. Die erste Ziffer der Binärdarstellung muss allerdings 0 sein.

a) Es werden vier Stellen benötigt (0b0100). Die grösste darstellbare Zahl ist 0b0111 = $+7_D$ und die kleinste darstellbare Zahl ist 0b1000 = -8_D.

b) Es werden fünf Stellen benötigt (0b01101). Die größte darstellbare Zahl ist 0b01111 = $+15_D$ und die kleinste darstellbare Zahl ist 0b10000 = -16_D.

c) Es werden acht Stellen benötigt (0b01110110). Die größte darstellbare Zahl ist $+127_D$ und die kleinste darstellbare Zahl ist -128_D.

d) Es werden acht Stellen benötigt. Größte und kleinste Zahl wie in c)

e)-h)
Die 2er Komplementdarstellung der negativen Zahlen wird durch Invertierung des Betrags der Zahl und Addition von +1 berechnet. Damit die Rechnung korrekt funktioniert muss die erste Stelle der Binärdarstellung der positiven Zahl eine „0" sein. Nach der Rechnung können alle führenden 1en bis auf eine

e) 4_D ist in Binärdarstellung 0b0100. Logisch invertiert ist dies 0b1011. 0b1011 + 0b1001 ist gleich 0b1100. -4_D ist in 2er Komplementdarstellung ist 0b100, da die erste führende „1" gestrichen werden kann. Zur Darstellung werden also 3 Stellen benötigt. Die kleinste darstellbare Zahl mit dieser Stellenzahl ist -4_D und die größte darstellbare Zahl ist 0b011 = 3_D.

f) 13_D in Binärdarstellung ist 0b01101. Invertiert 0b10010. 0b10010 + 0b00001 ist gleich 0b10011.

g) 118_D in Binärdarstellung ist 0b01110110. Invertiert 0b10001001. Und +1: 0b10001010. Die Lösung ist also 0b10001010. Es sind acht Stellen erforderlich.

h) 67_D in Binärdarstellung ist 01000011_B. Invertiert 0b10111100. Und +1: 0b10111101. Der Wert R für die 2er Komplementdarstellung mit 8 Stellen ist $2^8 = 256_D$. $256_D - 67_D$ ist 189_D. Und 189_D ist 0b10111101 in Binärdarstellung. Die Rechnung war demnach korrekt. Es sind acht Stellen erforderlich.

In Aufgabe 3a und 3e ist der besondere Fall eingetreten, dass die darzustellende negative Zahl genau die kleinste überhaupt darzustellende Zahl im 2er Komplementsystem mit 3 Stellen ist. Die entsprechende positive Zahl +4 lässt sich mit 3 Stellen nicht darstellen, wie in 3a gezeigt.

Aufgabe 4

Die folgenden Zahlen sind im 2er Komplement dargestellt. Geben Sie den jeweiligen Dezimalwert an.

a) 0b1110
b) 0b111110

c) 0b1111111110
d) 0b111111111111111110

Lösung:
Die erste Ziffer der Zahl ist „1“, d.h. es handelt sich um eine negative Zahl. Um diese Zahl in eine positive Zahl umzuwandeln, wird wieder das 2er Komplement berechnet, denn es gilt: -(-x) = x. Die positive Zahl kann dann wie bisher in eine Dezimalzahl umgewandelt werden.

a) 0b1110 invertiert ist 0b0001. +1 ergibt 0b0010 und das ist $+2_D$. Die gesuchte Zahl ist also -2_D.
b)-d) Diese Zahlen unterscheiden sich von der Zahl in a) nur durch führende Einsen. Führende Einsen entsprechen den führenden Nullen bei der Darstellung von positiven Zahlen. Auch die Zahlen b)-d) haben den Wert -2_D.

Aufgabe 5

In aktuellen Rechnern werden häufig Zahlendarstellungen für ganze Zahlen mit 32 Bit oder 64 Bit gewählt. Bitte geben Sie für eine vorzeichenlose Darstellung für nur positive Zahlen und eine Darstellung im 2er Komplement für positive und negative Zahlen die jeweils kleinste und größte mögliche darstellbare Zahl an.

Lösung:

Die kleinste Zahl in vorzeichenloser Darstellung einer Binärzahl mit n Stellen ist 0 und die größte $2^n - 1$.
Die kleinste Zahl in der 2er Komplementdarstellung ist -2^{n-1} und die größte ist $2^{n-1} - 1$

32 Bit:
Vorzeichenlose Darstellung: Kleinste Zahl ist 0. Größte Zahl ist $2^{32} - 1 = 4294967295$.
2er Komplement: Kleinste Zahl ist $-2^{31} = -2147483648$. Größte Zahl ist $2^{31} - 1$.

64 Bit:
Vorzeichenlose Darstellung: Kleinste Zahl ist 0. Größte Zahl ist $2^{64} - 1 = 18446744073709551615$.
2er Komplement: Kleinste Zahl ist $-2^{63} = -9223372036854775808$. Größte Zahl ist $2^{63} - 1$.

Aufgabe 6

Zeichnen Sie eine Schaltung, die aus einer 5 Bit Zahl in 2er Komplement Darstellung jeweils die negative Zahl berechnet. Aus einem Eingangswert von $+3_D$ = 0b00011 soll also der Ausgangswert -3_D = 0b11101 berechnet werden.

Lösung:

Aus einer Zahl x in 2er Komplementdarstellung kann -x berechnet werden, in dem wiederum das 2er Komplement der Zahl gebildet wird. Das 2er Komplement wird durch Invertierung der einzelnen Stellen und Addition von 1 gebildet.

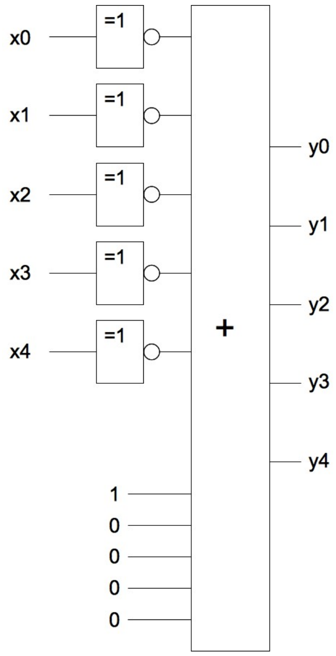

Abbildung 1: Schaltung zur Multiplikation mit -1

Da der eine Summand des Addierers eine Konstante ist, kann die Schaltung des Addierers gegenüber einer Implementierung mit zwei variablen Eingängen noch minimiert werden.

Aufgabe 7

In der Vorlesung wurde die Volladdiererschaltung (Full Adder) vorgestellt. Mit dieser Schaltung kann ein Addierer mit beliebiger Bitbreite aufgebaut werden, beispielsweise mit einer Ripple-Carry Architektur. Dieser Volladdierer hat als Eingangsvariablen die beiden Bits der Summanden „a“ und „b“, sowie den carry Eingang „cin“. Die Ausgangsvariablen sind das Summationsbit „s“ und der Carry Ausgang „cout“.

a) Geben Sie eine Schaltung für einen Volladdierer an, bei dem das Bit des einen Summanden b immer den logischen Wert „0“ hat.

b) Geben Sie eine Schaltung an, bei dem das Bit b immer den logischen Wert „1“ hat.

Lösung:

a)
Das Summationsbit s wird „1“, wenn genau einer der Eingänge „a“ und „cin“ „1“ ist.

=> $s = a' \cdot cin + a \cdot cin'$

Der Ausgang cout wird „1“, wenn a und cin gleichzeitig „1“ ist.

=> $cout = a \cdot cin$

b)
Das Summationsbit wird „1“, wenn beide Eingänge gleichzeitig „0“ oder gleichzeitig „1“ sind.
=> $s = a \cdot cin + a' \cdot cin'$
Der Ausgang cout wird „1“, wenn mindestens ein Eingang „1“ ist.
=> $cout = a + cin$