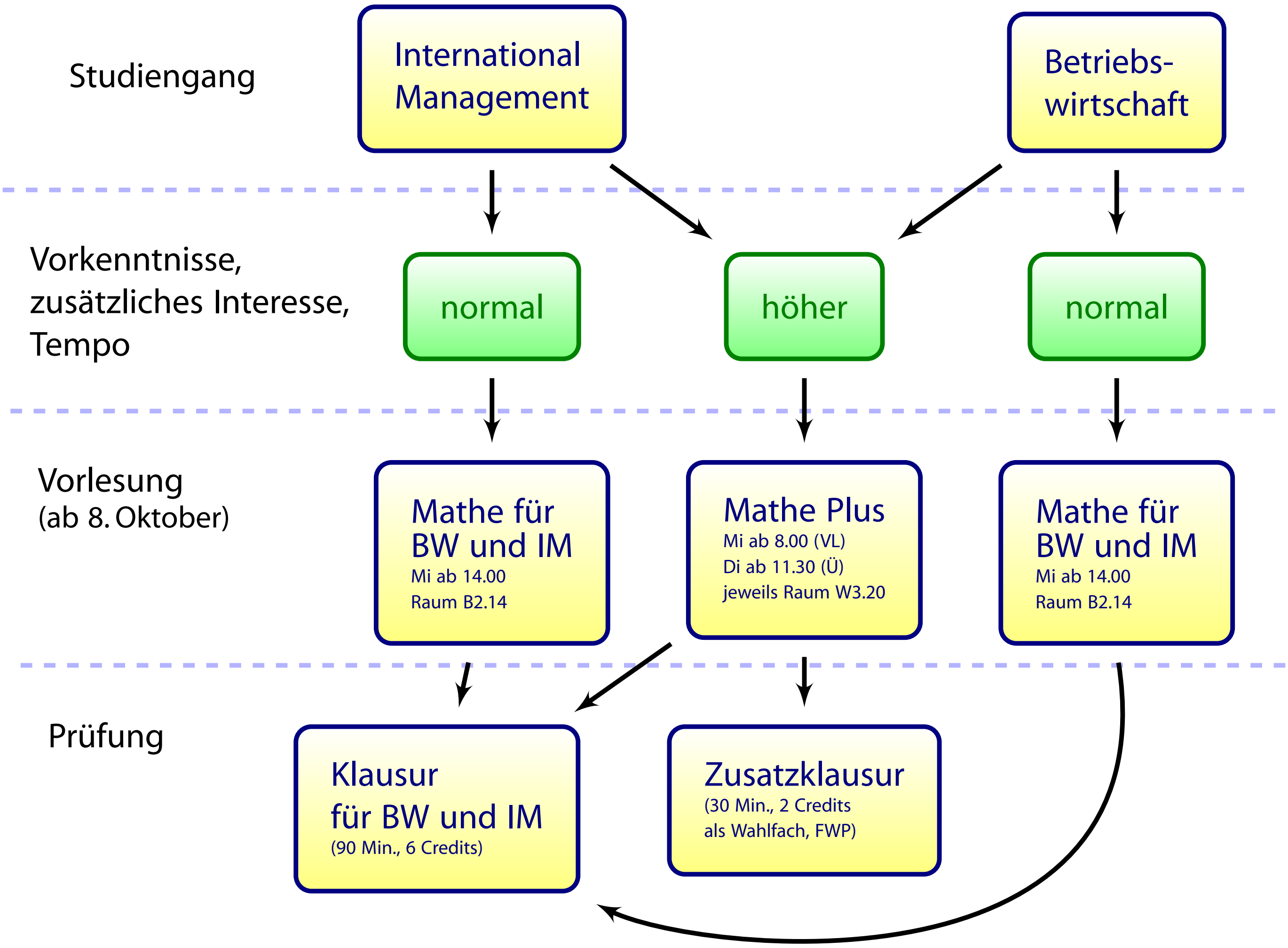
Wirtschaftsmathematik

für International Management (BA) und Betriebswirtschaft (BA)

Wintersemester 2014/15

Stefan Etschberger
Hochschule Augsburg

Organisation



Vorlesungsbegleitende Unterlagen

- **Arbeitsmaterial**: Foliensatz, Aufgabenskript, Mitschrift auf Wunsch
- **Bücher** (unterstützend):

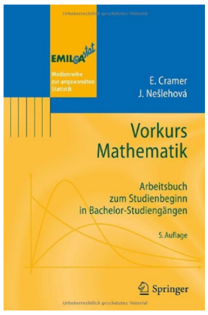
Cramer, Erhard und Johanna Neslehova (2012). **Vorkurs Mathematik – Arbeitsbuch zum Studienbeginn in Bachelor-Studiengängen**. 4. Aufl. Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

Luderer, Bernd (2003). **Einstieg in die Wirtschaftsmathematik**. 5. Aufl. Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden: Teubner.

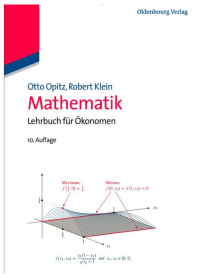
Opitz, Otto und Robert Klein (2011). **Mathematik – Lehrbuch für Ökonomen**. München: Oldenbourg. ISBN: 3486596713.

Sydsaeter, Knut und Peter Hammond (2008). **Essential Mathematics for Economic Analysis**. 3. Aufl. Prentice Hall. ISBN: 0273713248.

E-Books innerhalb des Hochschulnetzwerks kostenlos unter



http://goo.gl/9k3rqt



http://goo.gl/CWClv2

Prüfung

Klausur:

- Klausur am Ende des Semesters
- Bearbeitungszeit: 90 Minuten
- Erreichbare Punktzahl: 50
- Hilfsmittel:
  - Schreibzeug,
  - Taschenrechner, der nicht 70! berechnen kann,
  - ein Blatt (DIN-A4, vorne und hinten beschrieben) mit handgeschriebenen Notizen (keine Kopien oder Ausdrucke),
- Danach (optional): Für Teilnehmer der Mathe-Plus Vorlesung noch eine 30-minütige Teilklausur über zusätzliche Inhalte (2 Wahlfachcredits als FWP-Fach zusätzlich möglich)

Probleme, ...

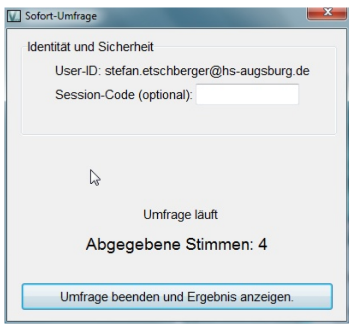
...die Sie nach dem Kurs lösen können:

- Sich widersprechende Politiker entlarven,
- Bedarf an Einzelteilen in Produktionsprozessen bestimmen,
- die Käuferfluktuation zwischen verschiedenen Produkten im Zeitablauf analysieren,
- die Nachfragereaktion von Kaffee auf Preisänderungen bestimmen
- Ihre Rente ausrechnen
- Große Kisten in kleine Ecken quetschen
- Möglichst viel Gewinn bei möglichst wenig Ressourcenverbrauch machen

EduVote

Umfragen in Vorlesung mit EduVote:

- System zur Abstimmung im Hörsaal
- App herunterladen oder direkt benutzen unter eduvote.de
- User-Id: `Etschberger`



Begriffe

Begriff	Nie gehört	Gehört	Kann ich erklären
Logarithmus			
Kartesisches Produkt			
Geometrische Reihe			
Kapitalwert			
Simplex-Algorithmus			

Mathematik: Gliederung

1 Grundlegende Bausteine

2 Grundlegende Werkzeuge

3 Aussagenlogik

4 Lineare Algebra

5 Lineare Programme

6 Folgen und Reihen

7 Finanzmathematik

8 Reelle Funktionen

9 Differenzieren 1

10 Differenzieren 2

11 Integration

12 Differentialgleichungen

1 Grundlegende Bausteine
- Reelle Zahlen
- Ganzzahlige Potenzen
- Algebraische Umformungen
- Brüche
- Nichtganzzahlige Potenzen
- Logarithmen

Zahlen

„Vernünftige“ Zahlen

- Natürliche Zahlen: $\mathbb{N}$
- Ganze Zahlen; $\mathbb{Z}$
- Rationale Zahlen: $\mathbb{Q}$
- Rationale Zahlen liegen unendlich dicht auf dem Zahlenstrahl

Aber

- Aber: Lösungen von Gleichungen wie

$$x^2 = 2$$

  haben keine rationale Lösung
- Folge: Es gibt auch irrationale Zahlen: Z.B. $\sqrt{2}$

Dezimaldarstellung rationaler Zahlen

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
1.1. Reelle Zahlen
1.2. Ganzzahlige Potenzen
1.3. Algebraische Umformungen
1.4. Brüche
1.5. Nichtganzzahlige Potenzen
1.6. Logarithmen
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Zahldarstellung über Vielfache von 10

- Die meisten Leute schreiben Zahlen heute im Dezimalsystem
- Damit möglich: Schreiben jeder natürlichen Zahl mit Kombinationen der Ziffern $0, 1, \ldots, 9$
- z.B.: $2009 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$
- Mit Dezimalkomma: Schreiben rationaler Zahlen möglich
- z.B.: $2{,}36 = 2 \cdot 10^0 + 3 \cdot \frac{1}{10^1} + 6 \cdot \frac{1}{10^2}$ (endlicher Dezimalbruch)
- z.B.: $\frac{10}{3} = 3{,}333\ldots = 3 + 3 \cdot \frac{1}{10^1} + 3 \cdot \frac{1}{10^2} + 3 \cdot \frac{1}{10^3} + \ldots$ (unendlicher Dezimalbruch)
- Jede rationale Zahl kann man über einen periodischen Dezimalbruch darstellen

Definition reeller Zahlen

- Eine reelle Zahl hat die Form
$$x = m, a_1 a_2 a_3 \dots$$
- Dabei: m: Ganze Zahl
- und a_i (mit $i = 1, 2, \dots$) ist unendliche Folge von Ziffern von 0 bis 9
- Damit: Nichtperiodische Dezimalbrüche heißen irrationale Zahlen
- Beispiele:
$$\sqrt{2}, \quad -\sqrt{17}, \quad \pi, \quad 0{,}1121121112\dots$$
- Rechenoperationen $+$, $-$, $\cdot$, : mit reellen Zahlen ergeben wieder reelle Zahlen
- Einzige Ausnahme: $\frac{p}{0}$ ist keine reelle Zahl

Ganzzahlige Potenzen

- Abkürzung: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$ oder $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$
- Allgemein:
$$a^n = a \cdot a \cdot \ldots a$$
- Rechenregeln:
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$
$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$
- Achtung: im allgemeinen
$$(a+b)^r \neq a^r + b^r$$

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
1.1. Reelle Zahlen
1.2. Ganzzahlige Potenzen
1.3. Algebraische Umformungen
1.4. Brüche
1.5. Nichtganzzahlige Potenzen
1.6. Logarithmen
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Anwendungsbeispiel für Potenzen

Zinseszinsen

- Anlage von 1000 € auf Bankkonto
- Verzinsung jeweils am Jahresende 2,5 %
- Zinsen nach einem Jahr: $1000 \cdot 2{,}5\ \% = 25$
- Kontostand am Jahresende:

$$1000 + 1000 \cdot 2{,}5\ \% = 1000 \cdot (1 + 0{,}025) = 1000 \cdot 1{,}025$$

- Kontostand am Ende des zweiten Jahres:

$$\begin{aligned} &(1000 \cdot 1{,}025) + (1000 \cdot 1{,}025) \cdot 0{,}025 \\ &= 1000 \cdot 1{,}025 \cdot (1 + 0{,}025) \\ &= 1000 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}025 = 1000 \cdot 1{,}025^2 \end{aligned}$$

- Allgemein: Kontostand ist bei Anfangskapital K und einem Zinssatz von i nach n Jahren

$$\boxed{K_n = K \cdot (1 + i)^n}$$

Wichtige Rechenregeln

Es gilt für beliebige Zahlen a, b, c:

(1) $a + b = b + a$

(2) $(a + b) + c = a + (b + c)$

(3) $a + 0 = a$

(4) $a + (-a) = 0$

(5) $ab = ba$

(6) $(ab)c = a(bc)$

(7) $1 \cdot a = a$

(8) $aa^{-1} = 1$ (für $a \neq 0$)

(9) $(-a)b = a(-b) = -ab$

(10) $(-a)(-b) = ab$

(11) $a(b + c) = ab + ac$

(12) $(a + b)c = ac + bc$

Mathematik
Stefan Etschberger

Einfache Algebra

Algebraische Ausdrücke

- Beispiel für einen algebraischen Ausdruck:

$$4x^2y^2 + 7y^4x - 9xy + 11xy^4$$

- Die einzelnen Summanden ($4x^2y^2$, $-9xy$, usw.) heißen Terme des Ausdrucks
- Faktoren vor den Buchstaben (4, 7, -9, 11): Koeffizienten
- Terme, die sich maximal durch Koeffizienten unterscheiden, genannt Koeffizienten von der gleichen Art, können zusammengefasst werden:

$$7y^4x + 11xy^4 = 18xy^4$$

Binomische Formeln

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
1.1. Reelle Zahlen
1.2. Ganzzahlige Potenzen
1.3. Algebraische Umformungen
1.4. Brüche
1.5. Nichtganzzahlige Potenzen
1.6. Logarithmen
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Faktorisieren

Primfaktorzerlegung

- Zahlen können multiplikativ in Primfaktoren zerlegt werden,
- Beispiel

$$64 = 8 \cdot 8 \quad \text{oder} \quad 1848 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$$

Faktorisierung algebraischer Ausdrücke

- Analog bei algebraischen Ausdrücken:
  Zerlegung in irreduzible Faktoren
- Beispiele:

$$5a^2b^3 - 15ab^2 = 5 \cdot a \cdot b^2 \cdot (ab - 3)$$

$$16a^4b^2 - 9b^4 = b^2 \cdot \left(4a^2 - 3b\right) \cdot \left(4a^2 + 3b\right)$$

Brüche

- Division zweier Zahlen ($a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$) kann durch Bruch geschrieben werden

$$a : b = \frac{a}{b} = a/b$$

- Rechenregeln ($a, b, c \in \mathbb{R}$):

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b} \quad (b, c \neq 0)$$

$$\frac{-a}{-b} = \frac{(-a) \cdot (-1)}{(-b) \cdot (-1)} = \frac{a}{b}$$

$$-\frac{a}{b} = (-1)\frac{a}{b} = \frac{(-1)a}{b} = \frac{-a}{b}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$$

$$a + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$$

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Quadratwurzel

- Potenz mit a^x, wenn $a \geq 0$ und $x = 1/2$: Quadratwurzel
- Schreibweise:

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \qquad \text{wenn } a \geq 0$$

- Rechenregeln für $a \neq 0$ und $b > 0$:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

- Achtung: Im allgemeinen:

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
1.1. Reelle Zahlen
1.2. Ganzzahlige Potenzen
1.3. Algebraische Umformungen
1.4. Brüche
1.5. Nichtganzzahlige Potenzen
1.6. Logarithmen
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

N-te Wurzeln

- Problem: Was bedeutet z.B. $5^{\frac{1}{3}}$?
- Damit Rechenregeln gültig bleiben: $5^{\frac{1}{3}}$ ist Lösung der Gleichung $x^3 = 5$
- Also Allgemein ($a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$):

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^1 = a$$

- Schreibweise:

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$$

- Allgemeine rationale Exponenten ($a \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$):

$$\boxed{a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p}$$

Logarithmen

- Wie löst man die Gleichung $a^x = b$ nach x auf?
(dabei soll gelten $a, b > 0$ und $a \neq 1$)
- Neues Symbol: Der Logarithmus von b zur Basis a:

$$\boxed{a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a b}$$

- Beobachtungen:
  - $\log_a a = 1$
  - $\log_a 1 = 0$
  - $\log_a (a^n) = n$
- Rechenregeln:

$$\log_a (c \cdot d) = \log_a c + \log_a d$$
$$\log_a \frac{c}{d} = \log_a c - \log_a d$$
$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

Mathematik
Stefan Etschberger

Spezielle Logarithmen:

- $\log_2 x = \operatorname{ld} x$ Logarithmus dualis
- $\log_{10} x = \log x$ Dekadischer Logarithmus
- $\log_e x = \ln x$ Logarithmus naturalis

Umrechnung von Basen

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

Beispiel

- Nach wieviel Jahren verdoppelt sich ein Anfangskapital K mit einem jährlichen Zins von 5%?
- Lösung:

$$\begin{aligned} & 2K = K \cdot (1+5\%)^n = K \cdot 1{,}05^n \\ \Leftrightarrow\quad & 1{,}05^n = 2 \\ \Leftrightarrow\quad & n = \log_{1{,}05} 2 = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}05} \approx 14{,}2 \end{aligned}$$

Mathematik: Gliederung

2 Grundlegende Werkzeuge
Notation von Summen
Binomische Formel
Doppelsummen
Grundbegriffe der Logik
Grundlegendes über Mengen

Summenzeichen

- Oft sinnvoll: Abkürzen von längeren Summen durch das Summenzeichen $\sum$ (Großes griechisches Sigma)
- Beispiel: Summe von 6 durchnumerierten Zahlen:

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 = \sum_{i=1}^{6} N_i$$

Sprechweise: „Summe von i gleich 1 bis 6 über N_i"

- Obere und untere Summationsgrenze kann variieren, z.B.

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = a_p + a_{p+1} + \ldots + a_q$$

- Auch konkrete Berechnungsvorschriften sind möglich, z.B.

$$\sum_{i=3}^{8} i^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2$$

Summenzeichen

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
2.1. Notation von Summen
2.2. Binomische Formel
2.3. Doppelsummen
2.4. Grundbegriffe der Logik
2.5. Grundlegendes über Mengen
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Rechenregeln für das Summenzeichen

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad \text{Additivität}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \text{Homogenität}$$

- Damit leicht zu zeigen (Setze $\mu_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$):

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - \mu_x) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - \mu_x)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) - n \cdot \mu_x^2$$

Produktzeichen

- Analog zum Summenzeichen:
  Das Produktzeichen $\prod$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot$$

- Zum Beispiel:

$$\prod_{i=1}^{2} \left(x + (-1)^i\right) = (x-1)(x+1)$$

- Spezielle Abkürzung:

$$\prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n! \qquad \text{„n Fakultät“}$$

Binomialkoeffizient

- Man definiert den Binomialkoeffizienten als:

$$\binom{m}{k} = \frac{\prod\limits_{i=(m-k+1)}^{m} i}{\prod\limits_{j=1}^{k} j} = \frac{m!}{k! \cdot (m-k)!}$$

- Wobei $0! = 1$ gesetzt wird. Also: $\binom{m}{0} = 1$
- Beispiel:

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$$

- Rechenregeln:

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k} \qquad \text{und} \qquad \binom{m+1}{k+1} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k+1}$$

Binomische Formel

- Newtons binomische Formel

$$(a+b)^m = \binom{m}{0}a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \cdots + \binom{m}{m-1}ab^{m-1} + \binom{m}{m}b^m$$

- Kurzform:

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}b^k$$

- Zum Beispiel:

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Doppelsummen

- Beispielsituation: Daten in Tabellenform in n Spalten und m Zeilen
- Einzelne Einträge: a_{ij} mit $i \in 1, \dots, m$ und $j \in 1, \dots, n$
- Summe über alle Zahlen mit Doppelsummen:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1} + \sum_{i=1}^{m} a_{i2} + \ldots + \sum_{i=1}^{m} a_{in} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right)$$

- Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

Sätze, Implikation und Äquivalenz

- **Satz**: Aussage, die als wahr oder falsch nachgewiesen werden kann
- **Implikation**: Wenn Aussage A wahr ist muss Aussage B wahr sein. Andernfalls ist Implikation falsch. Schreibweise:

$$A \Rightarrow B$$

- Gilt $A \Rightarrow B$ sagt man auch:
  - A ist eine **hinreichende** Bedingung für B
  - B ist eine **notwendige** Bedingung für A
- **Äquivalenz**: Gilt $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ gleichzeitig, sind A und B **äquivalent**:

$$A \Leftrightarrow B$$

Gleichungen und Äquivalenz

Warum Äquivalenzumformungen bei Gleichungen?

- Gegeben: Kette von Äquivalenzumformungen

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ldots \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \vee x = 17$$

- Ersetzen von „$\Leftrightarrow$“ durch „$\Rightarrow$“?

- Ersetzen von „$\Leftrightarrow$“ durch „$\Leftarrow$“?

Mengen und Elemente

- Menge: Sammlung von Elementen
- Aufzählung in geschweiften Klammern. Zum Beispiel Menge E:

$$E = \{\text{Fisch}, \text{Nudeln}, \text{Huhn}, \text{Eis}\}$$

- Zwei Mengen A und B sind gleich, wenn jedes Element von A auch in B ist und andersherum, also:

$$\{a,\ 1,\ 4\} = \{4,\ 1,\ a\}$$

- Darstellung von Mengen durch Beschreibung der Elemente, z.B.

$$M = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$$

- Zugehörigkeit zu einer Menge:

$x \in A$ x ist ein Element der Menge A

Teilmengen und Verknüpfungen

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
2.1. Notation von Summen
2.2. Binomische Formel
2.3. Doppelsummen
2.4. Grundbegriffe der Logik
2.5. Grundlegendes über Mengen
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Teilmengen

- Ist Jedes Element einer Menge A auch Element der Menge B,

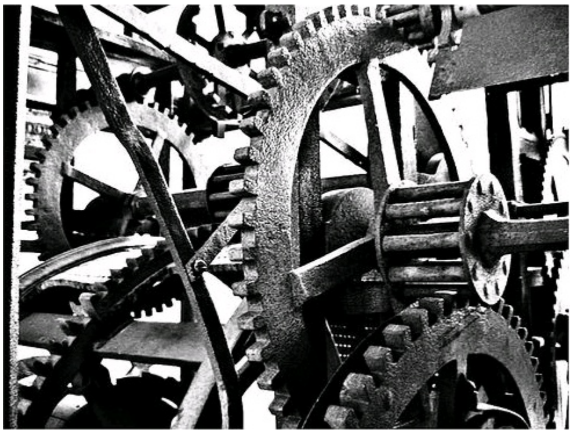
so heißt A Teilmenge von B $A \subset B$

- Damit gilt:

$$A = B \qquad \Leftrightarrow \qquad A \subset B \text{ und } B \subset A$$

Mengenverknüpfungen

Notation	Sprechweise	Die resultierende Menge besteht aus den Elementen, die
$A \cup B$	Vereinigungsmenge von A und B	mindestens zu A oder B gehören
$A \cap B$	Schnittmenge von A und B	sowohl in A als auch in B liegen
$A \setminus B$	A ohne B	zu A, aber nicht zu B gehören

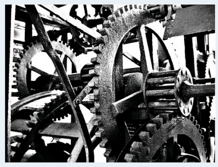


3 Aussagenlogik

Einführung

Aussagenverknüpfungen

Argumentationstechniken



Warum beschäftigen wir uns mit der Aussagenlogik?

- zahlreiche „Aussagen“ aus der Vorlesung erforden grundlegendes Verständnis der Aussagenlogik
- Grundlage der mathematischen Beweisführung
- Hilfreich zum Erlernen von Programmiersprachen

Wesentliche Lernziele

- Kenntniss der relevanten Begriffe wie Definition, Axiom, Satz und Beweis
- Verständnis der wesentlichen aussagenlogischen Operatoren
- Auswertung logischer Aussagen hinsichtlich der Eigenschaften „wahr“ oder „falsch“
- Beherrschung grundlegender Beweistechniken wie dem direkten und indirekten Beweis sowie der vollständigen Induktion

Beispiel

Aussagen eines Politikers zur Wahl

- Die Vollbeschäftigung wird erhalten oder die Steuern dürfen nicht erhöht werden.
- Wenn sich Politiker um die Bevölkerung kümmern, müssen die Steuern angehoben werden.
- Die Politiker kümmern sich um die Bevölkerung oder die Vollbeschäftigung kann nicht erhalten werden.
- Es stimmt nicht, dass die Erhaltung der Vollbeschäftigung eine Steuererhöhung zur Folge haben muss.

Hat sich der Politiker widersprochen?

Mathematik PLUS
Stefan Etschberger

Begriffe

- **Axiom**: Grundsachverhalt als Ausgangspunkt, wird nicht bewiesen
- **Definition**: Sachverhalt, wird durch neuen Begriff beschrieben, bezieht sich auf bereits Definiertes oder auf Axiome
- **Aussage** (math. Satz): Formulierung auf Basis bisherigen Wissens, wird als **wahr** oder falsch identifiziert.
- Aussagenverknüpfungen: **Negation** ($\overline{A}$), **Konjunktion** ($A \wedge B$), **Disjunktion** ($A \vee B$), **Implikation** ($A \Rightarrow B$), **Äquivalenz** ($A \Leftrightarrow B$)
- **Tautologie**: Verknüpfte, stets wahre Aussage
- **Kontradiktion**: Verknüpfte, stets falsche Aussage
- **Allaussage**:

$$A(1) \wedge A(2) \ldots \quad = \quad \bigwedge_x A(x) \text{ (für } x = 1, 2, \ldots) \quad = \quad \forall\, x: \; A(x)$$

- **Existenzaussage**:

$$A(1) \vee A(2) \ldots \quad = \quad \bigvee_x A(x) \text{ (für } x = 1, 2, \ldots) \quad = \quad \exists\, x: \; A(x)$$

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
3.1. Einführung
3.2. Aussagenverknüpfungen
3.3. Argumentieren
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Wahrheitswerte aller möglichen Verknüpfungen der Aussagen A und B

A	w	w	f	f	
B	w	f	w	f	
1)	w	w	w	w	Verknüpfung ist stets wahr
2)	f	f	f	f	Verknüpfung ist stets falsch
2)	f	f	f	f	Verknüpfung ist stets falsch
3)	w	w	w	f	Disjunktion $A \vee B$
4)	w	w	f	w	Implikation $B \Rightarrow A$
5)	w	f	w	w	Implikation $A \Rightarrow B$
6)	f	w	w	w	Negierte Konjunktion $\overline{A \wedge B}$
7)	w	f	f	f	Konjunktion $A \wedge B$
8)	f	w	f	f	Negierte Implikation $\overline{A \Rightarrow B}$
9)	f	f	w	f	Negierte Implikation $\overline{B \Rightarrow A}$
10)	f	f	f	w	Negierte Disjunktion $\overline{A \vee B}$
11)	w	f	f	w	Äquivalenz $A \iff B$
12)	f	w	w	f	Negierte Äquivalenz $\overline{A \iff B}$
13)	f	w	f	w	Negation $\overline{B}$
14)	f	f	w	w	Negation $\overline{A}$

Beispiel

Mathematik PLUS
Stefan Etschberger

Gegeben sind Aussagen über den Marktanteil eines weltweit vertriebenen Markterzeugnisses P in zwei Handelszonen:

A: *„Das Produkt P hat in der Europäischen Union (EU) einen Marktanteil von mehr als 25 %“*

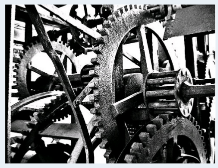
B: *„Das Produkt P hat in Nordamerika (NA) einen Marktanteil von mehr als 25 %“*

Abgeleitete Aussagen:

- $\overline{A}$: Der Marktanteil von P in der EU beträgt höchstens 25%.
- $A \wedge B$: Der Marktanteil von P beträgt in der EU und in NA mehr als 25%.
- $A \vee B$: Der Marktanteil von P beträgt in der EU oder in NA mehr als 25%.
- $A \Rightarrow B$: Wenn der Marktanteil von P in der EU mehr als 25% beträgt, so liegt er auch in NA über 25 %.
- $A \Leftrightarrow B$: der Marktanteil von P in der EU beträgt genau dann mehr als 25%, wenn er auch in NA über 25 % liegt.

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
3.1. Einführung
3.2. Aussagenverknüpfungen
3.3. Argumentieren
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Beispiel



Ausgangspunkt: Aussage A mit

A: *„Der Gewinn einer Unternehmung ist gleich dem Umsatz abzüglich der Kosten."*

Daraus abgeleitet:

A_1: Die Kosten wachsen.

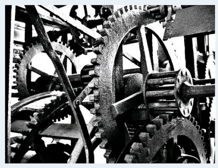
A_2: Der Umsatz wächst.

A_3: Der Gewinn wächst.

Dann ist die folgende Implikation wahr:

- $\left(\overline{A_1} \wedge A_2\right) \Rightarrow A_3$: *„Wenn der Umsatz bei nicht steigenden Kosten wächst, so wächst auch der Gewinn."*

Argumentationstechniken



1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
3.1. Einführung
3.2. Aussagenverknüpfungen
3.3. Argumentieren
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

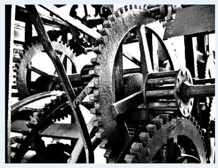
- Direkter Beweis einer Implikation $A \Rightarrow B$ (analog Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$):

$$A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow B$$

- Beweis von $A \not\Rightarrow B$ durch Gegenbeispiel
- Beweisprinzip der vollständigen Induktion für Allaussagen
  - Induktionsanfang: Beweis der Aussage für kleinstmöglichen Wert von n (oft $n = 0$ oder $n = 1$)
  - Induktionsvoraussetzung: Annahme, dass die Aussage für n wahr ist
  - Induktionsschluss: Beweis (unter Ausnutzung der Induktionsvoraussetzung), dass die Aussage auch für $n+1$ gültig ist
- Beispiel (vollst. Induktion): $A(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$; $n \in \mathbb{N}$
  - Ind.-Anfang: $n = 1$: $\sum_{i=1}^{1} i = 1 \quad = \quad \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$
  - Ind.-Schluss:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Beispiel: Beweis durch Gegenbeispiel



- Ausgangspunkt: Die ökonomische Gleichung

$$\text{Gewinn} = \text{Umsatz} - \text{Kosten}$$

- Daraus:

A: Für zwei Produkte stimmen Umsätze und Kosten überein
B: Für zwei Produkte sind die Gewinne gleich

- Damit gilt: $A \Rightarrow B$, andererseits aber $B \not\Rightarrow A$.

Gegenbeispiel zur Bestätigung von $B \not\Rightarrow A$:

- Für zwei Produkte gegeben:
  - Umsätze $u_1 = 2, u_2 = 5$
  - Kosten $c_1 = 1, c_2 = 4$
- Dann ist $g_1 = u_1 - c_1 = 2 - 1 = 1 = u_2 - c_2 = 5 - 4 = g_2$, aber $u_1 \neq u_2$, $c_1 \neq c_2$.

Mathematik: Gliederung

4 Lineare Algebra
Matrizen und Vektoren
Matrixalgebra
Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
Lineare Gleichungssysteme
Inverse Matrizen
Determinanten
Eigenwerte

Warum beschäftigen wir uns mit linearer Algebra?

- Quantitative tabellarische Daten (Excel) sind aus betriebs- und volkswirtschaftlichen Fragestellungen nicht wegzudenken
- Methoden der Matrizenrechnung erleichtern beziehungsweise ermöglichen die Analyse solcher Daten

Wesentliche Lernziele

- Kennenlernen der Eigenschaften von Matrizen
- Beherrschen elementarer Matrixoperationen
- Fähigkeit, lineare Gleichungssysteme aufzustellen, zu lösen und diese Lösung darzustellen
- Beherrschen des Invertierens spezieller Matrizen

Einführung

Mathematik
Stefan Etschberger

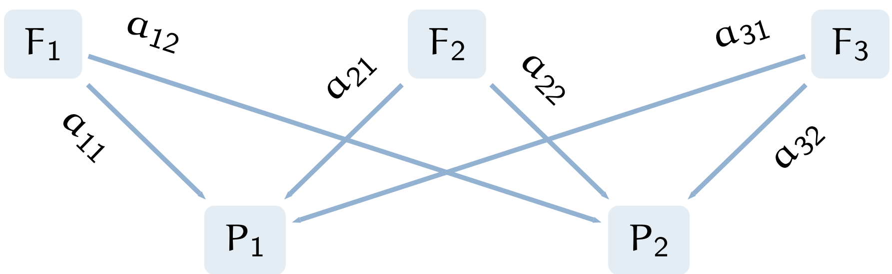
1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
4.1. Matrizen und Vektoren
4.2. Matrixalgebra
4.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
4.4. Lineare Gleichungssysteme
4.5. Inverse Matrizen
4.6. Determinanten
4.7. Eigenwerte
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Beispiel 1

- Eine Unternehmung stellt mit Hilfe der Produktionsfaktoren F_1, F_2, F_3 zwei Produkte P_1, P_2 her.
- Zur Produktion für jede Mengeneinheit von P_j $(j = 1,2)$ werden a_{ij} Mengeneinheiten von F_i $(i = 1,2,3)$ verbraucht.

Verbrauch		für eine Einheit des Produkts P_1	P_2
von Einheiten	F_1	a_{11}	a_{12}
der	F_2	a_{21}	a_{22}
Produktionsfaktoren	F_3	a_{31}	a_{32}

- Grafisch dargestellt:



Einführung

Beispiel 2

- Für fünf gleichartige Produkte $P_1, \dots, P_5$ werden drei Merkmale erhoben,
- und zwar der Preis, die Qualität und die Art des Kundenkreises, der das jeweilige Produkt nachfragt.
- Ergebnis:

		Merkmale		
		Preis	Qualität	Kundenkreis
Produkte	P_1	20	sehr gut	A
	P_2	18	sehr gut	B
	P_3	20	sehr gut	A
	P_4	16	mäßig	C
	P_5	18	ordentlich	B

Fragen:

- Ähnlichkeit von Produkten
- Finden von Kundensegmenten
- Zuordnen zu diesen Segmenten

$\longrightarrow$ Marktforschung

Definitionen

Definition Matrix

- Ein geordnetes, rechteckiges Schema von Zahlen oder Symbolen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m,n}$$

  mit $m, n \in \mathbb{N}$ heißt Matrix mit m Zeilen und n Spalten oder kurz $m \times n$-Matrix (Im Folgenden: $a_{ij} \in \mathbb{R}$).
- $a_{11}, \dots, a_{mn}$ heißen Komponenten der Matrix.
- Dabei gibt i die Zeile und j die Spalte an, in der a_{ij} steht.
- i heißt Zeilenindex und j Spaltenindex von a_{ij}.
- Sind alle Komponenten a_{ij} reelle Zahlen, so spricht man von einer reellen Matrix.

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
4.1. Matrizen und Vektoren
4.2. Matrixalgebra
4.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
4.4. Lineare Gleichungssysteme
4.5. Inverse Matrizen
4.6. Determinanten
4.7. Eigenwerte
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Transponierte Matrix

Definition

- Zu jeder $m \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- heißt die $n \times m$-Matrix

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- die zu A transponierte Matrix

$$\Rightarrow (A^T)^T = A$$

Beispiel transponierte Matrix

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
4.1. Matrizen und Vektoren
4.2. Matrixalgebra
4.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
4.4. Lineare Gleichungssysteme
4.5. Inverse Matrizen
4.6. Determinanten
4.7. Eigenwerte
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

a) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

b) $$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^T)^T = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Vektoren

Definition

- $n \times 1$-Matrix heißt Spaltenvektor mit n Komponenten:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

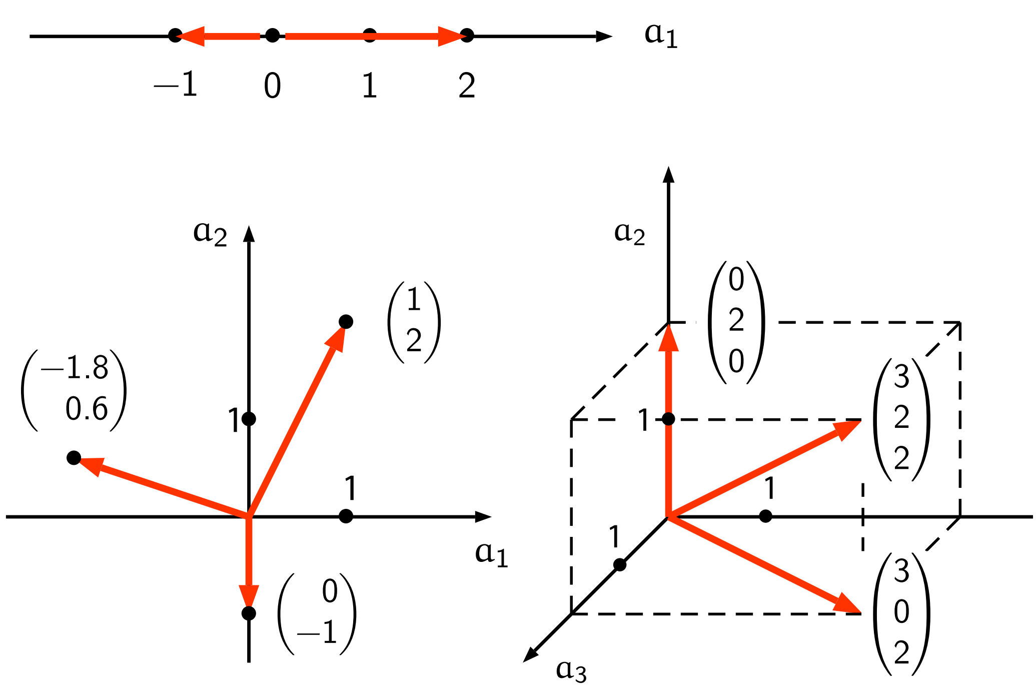
- $1 \times n$-Matrix heißt Zeilenvektor mit n Komponenten:

$$a^T = (a_1, \ldots, a_n)$$

Geometrische Veranschaulichung von Vektoren

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
4.1. Matrizen und Vektoren
4.2. Matrixalgebra
4.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
4.4. Lineare Gleichungssysteme
4.5. Inverse Matrizen
4.6. Determinanten
4.7. Eigenwerte
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs



Relationen zwischen Matrizen

Definition

- Seien $A = (a_{ij})_{m,n}$ und $B = (b_{ij})_{m,n}$ reelle Matrizen mit übereinstimmender Zeilenzahl m und Spaltenzahl n.
- Dann wird definiert:

$$\begin{array}{lcll}
A = B & \Leftrightarrow & a_{ij} = b_{ij} & \text{für alle } i = 1, \ldots, m\,, j = 1, \ldots, n \\
A \neq B & \Leftrightarrow & a_{ij} \neq b_{ij} & \text{für mindestens ein Indexpaar } (i, j) \\
A \leq B & \Leftrightarrow & a_{ij} \leq b_{ij} & \forall (i, j) \\
A < B & \Leftrightarrow & a_{ij} < b_{ij} & \forall (i, j)
\end{array}$$

- Entsprechend $A \geq B$ und $A > B$.

Spezielle Matrizen

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
4.1. Matrizen und Vektoren
4.2. Matrixalgebra
4.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
4.4. Lineare Gleichungssysteme
4.5. Inverse Matrizen
4.6. Determinanten
4.7. Eigenwerte
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Definition

a) $A = (a_{ij})_{n,n}$ heißt quadratisch

b) $A = (a_{ij})_{n,n}$ mit $A = A^T$ heißt symmetrisch

c) $A = (a_{ij})_{n,n}$ heißt Dreiecksmatrix, wenn
$a_{ij} = 0$ für $i < j$ (untere Dreiecksmatrix) oder
$a_{ij} = 0$ für $i > j$ (obere Dreiecksmatrix)

d) $A = (a_{ij})_{n,n}$ heißt Diagonalmatrix, wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$

e) $A = (a_{ij})_{n,n}$ heißt Einheitsmatrix, wenn $a_{ii} = 1$ für alle i und
$a_{ij} = 0$ für alle $j \neq j$

Addition und Subtraktion von Matrizen

Definition

- Gegeben: $A = (a_{ij})_{m,n}$ und $B = (b_{ij})_{m,n}$.
- Dann gilt:
- Addition: $A + B = (a_{ij})_{m,n} + (b_{ij})_{m,n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m,n}$
- Subtraktion: $A - B = (a_{ij})_{m,n} - (b_{ij})_{m,n} = (a_{ij} - b_{ij})_{m,n}$

Damit:

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Addition/Subtraktion nicht definiert, wenn Zeilen- bzw. Spaltenzahl nicht übereinstimmen

Skalare Multiplikation

Mathematik
Stefan Etschberger

Definition

- Gegeben: $A = (a_{ij})_{m,n}$ und $r \in \mathbb{R}$ (Skalar).
- Dann gilt:

$$r \cdot A = r \cdot (a_{ij})_{m,n} = (r \cdot a_{ij})_{m,n} = (a_{ij} \cdot r)_{m,n} = A \cdot r$$

Beispiel:

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 25 \end{pmatrix}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{array}{lcll} (rs)A & = & r(sA) & \text{(Assoziativgesetz)} \\ (r+s)A & = & rA + sA & \text{(Distributivgesetz)} \\ r(A+B) & = & rA + rB & \end{array}$$

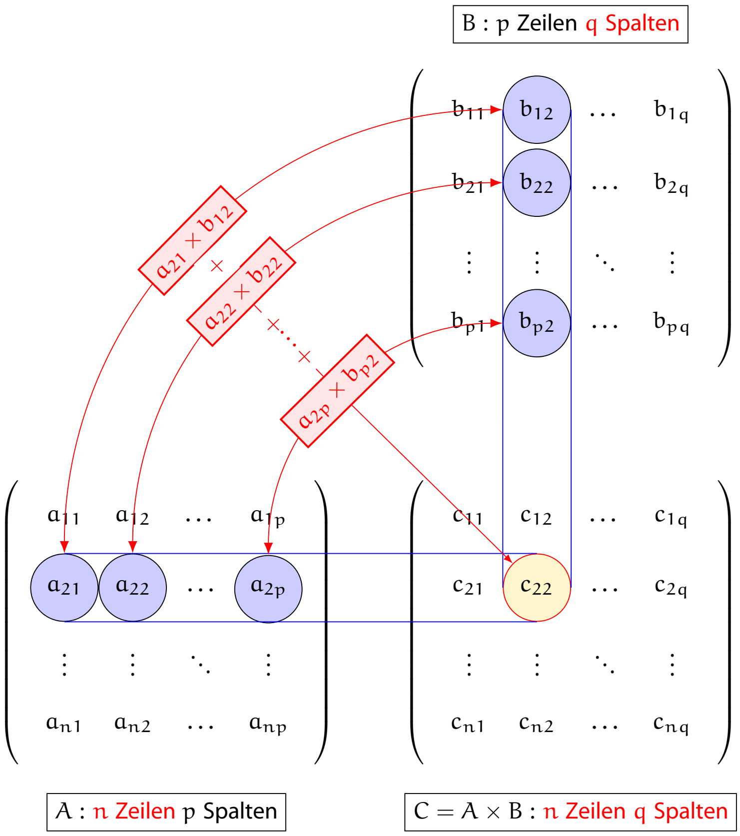
1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
4.1. Matrizen und Vektoren
4.2. Matrixalgebra
4.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
4.4. Lineare Gleichungssysteme
4.5. Inverse Matrizen
4.6. Determinanten
4.7. Eigenwerte
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Matrixmultiplikation

- Gegeben:
  $A = (a_{ik})_{m,p}$
  und $B = (b_{kj})_{p,n}$.
- Dann gilt:

$$A \cdot B = (a_{ik})_{n,p} \cdot (b_{kj})_{p,q} = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \right)_{n,q}$$

- Merke:
  Zeile mal Spalte!



Quelle Grafik: Alain Matthes, altermundus.com

Spezialfälle und Rechenregeln

Spezialfälle der Matrixmultiplikation

- $A = (m \times n)$-Matrix, $B = (n \times m)$-Matrix
  $\Rightarrow$ es existiert $A \cdot B$ und $B \cdot A$
- A quadratisch $\Rightarrow$ $A \cdot A = A^2$ existiert
- A, B quadratisch $\Rightarrow$ $A \cdot B$ existiert und $B \cdot A$ existiert.
  Aber: Im Allgemeinen $A \cdot B \neq B \cdot A$
- Ist E Einheitsmatrix, dann gilt:

$$A \cdot E = E \cdot A = A$$

Spezielle Rechenregeln

- $A = (m \times p)$-Matrix, $B = (p \times n)$-Matrix. Damit gilt:
- $A \cdot B$ und $B^T \cdot A^T$ existieren.
- $B^T A^T = (A \cdot B)^T$
- $A^T A$ ist symmetrische $(p \times p)$-Matrix und
  AA^T ist symmetrische $(m \times m)$-Matrix

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
4.1. Matrizen und Vektoren
4.2. Matrixalgebra
4.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
4.4. Lineare Gleichungssysteme
4.5. Inverse Matrizen
4.6. Determinanten
4.7. Eigenwerte
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Norm

- Gegeben Vektor $a \in \mathbb{R}^n$
- **Definition**: Absolutbetrag, Norm oder Länge eines Vektors:

$$\|a\| = |a| = \sqrt{a^T a} = \sqrt{a_1{}^2 + \ldots + a_n{}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i{}^2} \quad \in \mathbb{R}_+$$

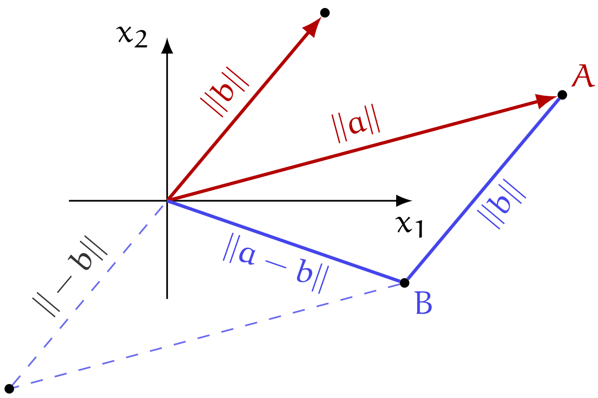
- Seien a, b, c Vektoren des $\mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}$ ein Skalar. Dann gilt:

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} & \|a+b\| = \|b+a\|, \quad \|a-b\| = \|b-a\| & \\
\text{b)} & \|ra\| = |r| \cdot \|a\| & \\
\text{c)} & \|a^T b\| \leqq \|a\| \cdot \|b\| \quad \text{für } n > 1 & \text{(Cauchy-Schwarz-Ungleichung)} \\
 & = |a| \cdot |b| & \text{für } n = 1 \\
\text{d)} & \|a+b\| \leqq \|a\| + \|b\| & \text{(Dreiecksungleichung)} \\
\text{e)} & \|a-c\| - \|c-b\| \leqq \|a-b\| \leqq \|a-c\| + \|c-b\| &
\end{array}$$

Kosinussatz

- Gegeben: a, b Vektoren des $\mathbb{R}^n$, die den Winkel γ einschließen.
- Nach dem Kosinussatz gilt im Dreieck mit den Ecken $0, A, B$

$$\|a-b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\,\|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos\gamma.$$



- Damit gilt:

$$\begin{aligned}
a^T b &= \tfrac{1}{2}\left(\|a+b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\|a\|^2 + \|b\|^2 - \|a-b\|^2\right) \\
&= \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos\gamma
\end{aligned}$$

Definition Hyperebene

- Gegeben: $a \in \mathbb{R}^n$ mit $a \neq 0$ und $b \in \mathbb{R}$
- Dann heißt $H(a, b) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\right\}$ Hyperebene im $\mathbb{R}^n$
- **Anmerkung**: H teilt den $\mathbb{R}^n$ in zwei Halbräume

Definition Sphäre

- Gegeben: $a \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}_+$
- Dann heißt $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| = r\}$ Sphäre (Kugelfläche) im $\mathbb{R}^n$ und dem Radius r
- Damit: r-Umgebung von a: $K_<(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}$

Beispiele

- $H = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \; 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6\right\}$
- $$K = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \left\| x - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 1\right\}$$
  $$= \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 + {x_3}^2} = 1\right\}$$

PLUS Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
4.1. Matrizen und Vektoren
4.2. Matrixalgebra
4.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
4.4. Lineare Gleichungssysteme
4.5. Inverse Matrizen
4.6. Determinanten
4.7. Eigenwerte
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Offenheit, Abgeschlossenheit

Gegeben

- $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Punktmenge des $\mathbb{R}^n$ und
- $\overline{M} = \mathbb{R}^n \setminus M$ deren Komplement bzgl. $\mathbb{R}^n$.

Dann heißt:

- $a \in \mathbb{R}^n$ innerer Punkt von M, wenn eine r-Umgebung $K_<(a, r)$ von a existiert, die ganz in M liegt, also $K_<(a, r) \subset M$,
- $a \in \mathbb{R}^n$ äußerer Punkt von M, wenn eine r-Umgebung $K_<(a, r)$ von a existiert, die ganz in $\overline{M}$ liegt und
- $a \in \mathbb{R}^n$ Randpunkt von M, wenn a weder innerer noch äußerer Punkt von M ist.

Eine Punktmenge $M \in \mathbb{R}^n$ heißt dann

- offen wenn jedes Element $a \in M$ innerer Punkt von M ist,
- abgeschlossen, wenn jedes Element $a \in \overline{M}$ innerer Punkt von $\overline{M}$ ist, also das Komplement $\overline{M}$ offen ist.

Beschränktheit, Kompaktheit

Mathematik PLUS
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
4.1. Matrizen und Vektoren
4.2. Matrixalgebra
4.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
4.4. Lineare Gleichungssysteme
4.5. Inverse Matrizen
4.6. Determinanten
4.7. Eigenwerte
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Eine Punktmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt

- beschränkt nach oben, wenn ein $b \in \mathbb{R}^n$ existiert mit $b \geqq x$ für alle $x \in M$,
- beschränkt nach unten, wenn ein $a \in \mathbb{R}^n$ existiert mit $a \leqq x$ für alle $x \in M$,
- beschränkt, wenn M nach oben und unten beschränkt ist,
- kompakt, wenn M beschränkt und abgeschlossen ist.

Beispiele

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^2_+ : \ x_1 + 2x_2 \leqq 3, \ \|x\| \leqq 2\}$$
$$M_2 = \{x \in \mathbb{R}^2_+ : \ x_1 \in \mathbb{N}\}$$

Lineare Gleichungssysteme: Einführung

Beispiele linearer Gleichungssysteme

a)
$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & x_2 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & = & -2 \end{array}$$

Probleme:

- System lösbar oder nicht?
- Verfahren zum Auffinden von Lösungen
- Darstellung von mehrdeutigen Lösungen

Dazu gibt es:

- Den Gaußschen Algorithmus (erzeugt Dreiecksmatrix)
- das Verfahren von Gauß-Jordan (modifizierte Gauß: erzeugt Einheitsmatrix)

Allgemeines lineares Gleichungssystem

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
4.1. Matrizen und Vektoren
4.2. Matrixalgebra
4.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
4.4. Lineare Gleichungssysteme
4.5. Inverse Matrizen
4.6. Determinanten
4.7. Eigenwerte
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

- Ein System von Gleichungen

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- heißt lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten.
- Die a_{ij} und b_i heißen Koeffizienten des Gleichungssystems.
- In Matrixform:

$$Ax = b$$

- Lösungsmenge:

$$L = \{x : \quad Ax = b\}$$

Lösungsdarstellung

- Beispiel für Enddarstellung:

$$\begin{aligned} x_1 \quad + \; x_3 \qquad\quad &= 4 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 7 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- Dabei bezeichnet:

$$\begin{pmatrix} E & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b$$

- kann nach Basisvariablen aufgelöst werden:
  $x_1 = 4 - x_3, \quad x_2 = 7 - 3x_3 - 2x_4$ (allgemeine Lösung)
- In diesem Fall immer lösbar, zum Beispiel mit

$$x_N = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- Gesucht: Verfahren zur Überführung beliebiger Gleichungssysteme in diese Form

Lösung von LGS

Elementare Umformungen

- Das sind Umformungen der Koeffizientenmatrix, die die Lösung nicht verändern. Erlaubt ist
- Multiplikation einer Zeile mit beliebigen Zahlen $c \neq 0$
- Addition einer Zeile zu einer anderen Zeile
- Vertauschen von Zeilen oder Spalten

Lösungsalgorithmus

- Lösung mit Verfahren von Gauß-Jordan: Systematische Umformungen nach obigem Prinzip, bis Darstellung der Koeffizientenmatrix in Einheits- und Restmatrix ensteht
- Algorithmus und Lösungsvarianten siehe Vorlesung

Invertierung von Matrizen

Definition

- Gegeben: $n \times n$-Matrix (quadratisch)
- Existiert eine $n \times n$-Matrix X mit $AX = XA = E$, so heißt X die zu A inverse Matrix.
- Schreibweise: $X = A^{-1}$
- $\Rightarrow AA^{-1} = A^{-1}A = E$

Inverse Matrizen und Gleichungssysteme

- Falls A^{-1} existiert, gilt:

$$Ax = b \quad \Rightarrow \quad A^{-1}Ax = A^{-1}b \quad \Rightarrow \quad Ex = x = A^{-1}b$$

- Damit existiert genau eine Lösung und zwar:

$$x = A^{-1}b$$

LGS und Orthogonalität

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
4.1. Matrizen und Vektoren
4.2. Matrixalgebra
4.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
4.4. Lineare Gleichungssysteme
4.5. Inverse Matrizen
4.6. Determinanten
4.7. Eigenwerte
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Berechnung inverser Matrizen durch den Gaußalgorithmus:

- Ansatz:

$$\begin{array}{rrrl} & Ax + & Ey = & 0 \\ \Rightarrow & A^{-1}Ax + & A^{-1}Ey = & 0 \\ \Rightarrow & Ex + & A^{-1}y = & 0 \end{array}$$

- Also: Gaußtableau mittels elementarer Umformungen folgendermaßen umformen:

$$(A|E) \quad \longrightarrow \quad (E|A^{-1})$$

Orthogonale Matrizen

- Eine $n \times n$-Matrix A heißt orthogonal, wenn gilt:
- $AA^T = A^TA = E$
- Bei orthogonalen Matrizen A gilt also: $A^{-1} = A^T$.
- Mit A ist damit auch A^T orthogonal

Determinanten: Vorüberlegung

Permutationen und Inversionen

- Sei $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$ eine n-elementige Menge.
- Dann: jede Anordnung $(a_{p_1}, \ldots, a_{p_n})$ der Elemente $a_1, \ldots, a_n$ mit $\{p_1, \ldots, p_n\} = \{1, \ldots, n\}$ heißt eine Permutation.
- Wenn für ein Paar (a_i, a_j) einerseits $i < j$, und andererseits $p_i > p_j$, gilt: Inversion.
- Also: Ausgehend von Permutation $(a_1, \ldots, a_n)$: Jede Vertauschung zweier Elemente a_i und a_j ist eine Inversion.

Beispiel

- Gegeben: Menge $\{1,2,3\}$

Definition Determinante

Mathematik PLUS
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
4.1. Matrizen und Vektoren
4.2. Matrixalgebra
4.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
4.4. Lineare Gleichungssysteme
4.5. Inverse Matrizen
4.6. Determinanten
4.7. Eigenwerte
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

- Gegeben: A, eine $n \times n$-Matrix.
- Außerdem: $(1, \ldots, n)$ sei geordnetes n-Tupel der Zeilenindizes und $p = (p_1, \ldots, p_n)$ eine Permutation von $(1, \ldots, n)$ mit $\nu(p)$ Inversionen.
- Determinante von A ist dann:

$$\det A = \sum_p (-1)^{\nu(p)} \cdot a_{1p_1} \cdot a_{2p_2} \cdot \ldots \cdot a_{np_n}$$

Beispiele

- Gegeben: A als eine $n \times n$-Matrix
- Für $n = 1$ gilt dann $A = (a_{11})$ sowie $\det A = \det(a_{11}) = a_{11}$.
- Für $n = 2$ enthält die Determinante $2! = 2$ Summanden,
- nämlich: $a_{11}a_{22}$ ohne Inversion und $-a_{12}a_{21}$ mit einer Inversion.
- Damit: $\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Determinanten von 3×3-Matrizen

Beispiel: Determinante einer 3×3-Matrix

- Für $n = 3$: Determinante hat $3! = 6$ Summanden, nämlich $a_{11}a_{22}a_{33}$ ohne Inversion, $a_{12}a_{23}a_{31}$ und $a_{13}a_{21}a_{32}$ mit zwei Inversionen, $-a_{11}a_{23}a_{32}$ und $-a_{12}a_{21}a_{33}$ mit einer Inversion und $-a_{13}a_{22}a_{31}$ mit drei Inversionen.
- Es gilt:

$$\begin{aligned}\det A = \quad & \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ = \quad & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned}$$

- Einfacher zu merken: Regel von Sarrus (siehe Vorl.)

Zahlenbeispiel Determinanten

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Zeigen Sie: $\det A = -2$,
  $\det B = 6$,
  $\det C = 0$

Mathematik PLUS
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
4.1. Matrizen und Vektoren
4.2. Matrixalgebra
4.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
4.4. Lineare Gleichungssysteme
4.5. Inverse Matrizen
4.6. Determinanten
4.7. Eigenwerte
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Minor, Kofaktoren

- Gegeben: $n \times n$-Matrix A mit $n \geqq 2$;
- Streiche Zeile i und Spalte j, $\Rightarrow$ Matrix mit $n-1$ Zeilen und $n-1$ Spalten:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

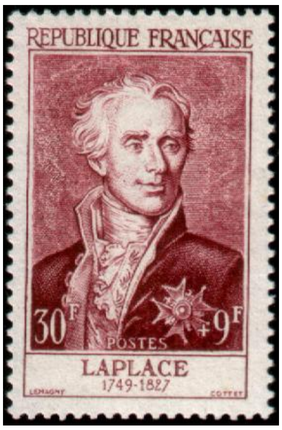
- nach dem Streichen heißt diese Matrix Minor
- Damit kann man das algebraische Komplement oder den Kofaktor d_{ij} zur Komponente a_{ij} von A berechnen:

$$d_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij} = \begin{cases} \det A_{ij} & \text{für } i+j \text{ gerade} \\ -\det A_{ij} & \text{für } i+j \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$(i, j = 1, \dots, n)$$

Kofaktoren

Entwicklungssatz von Laplace



- Entwicklungssatz für Determinanten
- Gegeben: A eine $n \times n$-Matrix und D die Matrix der Kofaktoren.
- Dann gilt für $n = 2,3,\dots$

$$AD^T = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix}.$$

- Insbesondere wird mit:

$$\begin{aligned} \det A &= a_i^T d_i = a_{i1} d_{i1} + \dots + a_{in} d_{in} \qquad (i=1,\dots,n) \\ &= a^{j\,T} d^j = a_{1j} d_{1j} + \dots + a_{nj} d_{nj} \qquad (j=1,\dots,n) \end{aligned}$$

die Determinante von A nach der i-ten Zeile $a_i^T = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ bzw. nach der j-ten Spalte $a^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ von A entwickelt.

Beispiel: Entwicklungssatz

Beispiele

- Zeigen Sie:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 5$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = 0$$

Sätze

Es gilt für $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ (Determinantenmultiplikationssatz)
- aber: im allgemeinen $\det(A + B) \neq \det A + \det B$
- $\det A \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}$ existiert

Gilt zusätzlich $\det A \neq 0$

- Mit $D = (d_{ij})_{n,n}$, der Matrix der Kofaktoren zu A gilt
- $A^{-1} = \frac{1}{\det A} D^T$
- $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$
- Ist A orthogonal gilt: $\det A = \pm 1$

Mathematik PLUS
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
4.1. Matrizen und Vektoren
4.2. Matrixalgebra
4.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
4.4. Lineare Gleichungssysteme
4.5. Inverse Matrizen
4.6. Determinanten
4.7. Eigenwerte
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Lösung eindeutig bestimmter linearer Gleichungssysteme

- Gegeben: Lineares Gleichungssystem $Ax = b$
- Voraussetzung: Es existiert A^{-1}, also auch $\det A \neq 0$
- Bezeichnung: Mit A_j ist die Matrix, in der gegenüber A die j-te Spalte durch b ersetzt wird, also

Gabriel Cramer
(1704 – 1752)

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Dann lässt sich die Lösung x in folgender Form schreiben:

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

(Cramersche Regel)

Mathematik PLUS
Stefan Etschberger

Zu zeigen:

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- und $Ax = b$
- Damit: $x^T = (1, -1, 1)$

Mathematik PLUS
Stefan Etschberger
1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
4.1. Matrizen und Vektoren
4.2. Matrixalgebra
4.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
4.4. Lineare Gleichungssysteme
4.5. Inverse Matrizen
4.6. Determinanten
4.7. Eigenwerte
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Eigenwerte: Einführendes Beispiel

Bevölkerungsentwicklung

- Gegeben:

$$\begin{array}{ll} x_t > 0 & \text{die Anzahl von Männern im Zeitpunkt } t \text{ und} \\ y_t > 0 & \text{die Anzahl von Frauen im Zeitpunkt } t. \end{array}$$

- Anzahl der Sterbefälle für Männer bzw. Frauen im Zeitintervall $[t, t+1]$ sei proportional zum jeweiligen Bestand im Zeitpunkt t, und zwar $0{,}2x_t$ für die Männer und $0{,}2y_t$ für die Frauen.
- Anzahl der Knaben- und Mädchengeburten im Zeitintervall $[t, t+1]$ proportional ist zum Bestand der Frauen.
- Anzahl der Knabengeburten: $0{,}2y_t$,
- Anzahl der Mädchengeburten: $0{,}3y_t$.
- Für Übergang vom Zeitpunkt t zum Zeitpunkt $t+1$ damit:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= x_t - 0{,}2x_t + 0{,}2y_t &&= 0{,}8x_t + 0{,}2y_t \\ y_{t+1} &= y_t - 0{,}2y_t + 0{,}3y_t &&= 1{,}1y_t \end{aligned}$$

Beispiel Bevölkerungsentwicklung

- Matriziell:

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 1{,}1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$$

- Forderung: Zeitliches Verhältnis von Männern und Frauen soll konstant bleiben
- Also:

$$x_{t+1} = \lambda x_t \iff y_{t+1} = \lambda y_t \qquad (\lambda \in \mathbb{R}_+),$$

- Dieser Fall beschreibt einen gleichförmigen Wachstums- $(\lambda > 1)$ beziehungsweise Schrumpfungsprozess $(\lambda < 1)$
- Matriziell:

$$\lambda z = Az \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 1{,}1 \end{pmatrix}, \; z = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+$$

- Lösung?

Definition

David Hilbert
(1862 – 1943)

- Gegeben: $n \times n$-Matrix A.
- Ist nun für eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ und einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq o$
- lineare Gleichungssystem $Ax = \lambda x$ erfüllt, so heißt λ reeller Eigenwert zu A und
- x reeller Eigenvektor zum Eigenwert λ.
- Insgesamt: Eigenwertproblem der Matrix A.

Damit

- $Ax = \lambda x \iff Ax - \lambda x = Ax - \lambda E x = (A - \lambda E)x = o$
- Satz: Das LGS $Ax = \lambda x$ hat genau dann eine Lösung $x \neq o$, wenn gilt:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

Mathematik PLUS
Stefan Etschberger

Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren

- Jedes λ, das $\det(A - \lambda E) = 0$ löst ist ein Eigenwert von A.
- Anschließend: Für jedes erhaltene λ Lösen des Gleichungssystems

$$(A - \lambda E)x = o \quad \text{mit} \quad x \neq o$$

- Damit hat man für jedes λ mindestens einen reellen Eigenvektor x.
- Satz: Mit $x \neq o$ ist auch jeder Vektor rx $(r \in \mathbb{R},\ r \neq 0)$ Eigenvektor zum Eigenwert λ von A.

Beispiele

- $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 1{,}1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}65 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$

  $D = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
4.1. Matrizen und Vektoren
4.2. Matrixalgebra
4.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
4.4. Lineare Gleichungssysteme
4.5. Inverse Matrizen
4.6. Determinanten
4.7. Eigenwerte
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Sätze über Eigenwertprobleme

- Gegeben: A ist eine reelle, symmetrische $n \times n$-Matrix
- Es gilt: Die Eigenwerte sind alle reell und nicht notwendigerweise verschieden und
- ist der Rang von A gleich $k \leq n$, so ist $\lambda = 0$ ein $(n-k)$-facher Eigenwert
- Zu den reellen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ existieren genau n reelle, linear unabhängige Eigenvektoren $x^1, \ldots, x^n$
- Diese Eigenvektoren kann man so wählen, dass $X = (x^1, \ldots, x^n)$ orthogonale Matrix wird, also $XX^T = E$
- Gegeben zusätzlich: $L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ die Diagonalmatrix der Eigenwerte von A und $A^m = A \cdot \ldots \cdot A$ mit $m \in \mathbb{N}$
- Dann gilt: $L = X^T A X \quad$ und $\quad A = XLX^T$
- außerdem gilt: A^m besitzt die Eigenwerte $\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m$

Mathematik: Gliederung

5 Lineare Programme
Nebenbedingungen und Zulässigkeit
Zielfunktion
Graphische Lösung

Lineare Programe: Beispiel

Ein holzverarbeitender Betrieb möchte ein Produktionsprogramm für Spanplatten festlegen. Dabei sind folgende Restriktionen zu berücksichtigen:

- Es werden zwei Typen von Spanplatten hergestellt:
  Typ A in der Quantität x_1 für den Außenbereich und Typ B in der Quantität x_2 für den Innenbereich. Zur Herstellung der Spanplatten werden zwei Arten von Furnierblättern F_1 bzw. F_2 unterschiedlicher Qualität benutzt. Die Spanplatten werden mittels einer Presse, in der die Furniere verleimt werden, hergestellt.
- Zur Herstellung einer Platte vom Typ A wird ein Blatt von F_1 und zwei Blätter von F_2 benötigt, während bei Typ B drei Blätter von F_1 und ein Blatt von F_2 benutzt werden.
- Von F_1 bzw. F_2 stehen 1500 bzw. 1200 Stück zur Verfügung.
- Die Presse steht insgesamt 700 Minuten zur Verfügung, wobei zur Verleimung beider Plattentypen pro Stück jeweils eine Minute benötigt wird.

Lineare Produktionsplanung: Beispiel

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
5.1. Nebenbedingungen und Zulässigkeit
5.2. Zielfunktion
5.3. Graphische Lösung
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Tabellarische Darstellung der Problemdaten:

Produkt	Menge	Einheiten von F_1	Einheiten von F_2	Pressminuten pro Stück
Typ A	x_1	1	2	1
Typ B	x_2	3	1	1
Kapazitäten		1500	1200	700

Zusammenhang von Daten und Variablen durch System von linearen Ungleichungen beschreibbar:

Restriktionen:

$$
\begin{array}{llcllll}
(1) & x_1 & + & 3x_2 & \leqq & 1500 & (\text{Vorrat } F_1) \\
(2) & 2x_1 & + & x_2 & \leqq & 1200 & (\text{Vorrat } F_2) \\
(3) & x_1 & + & x_2 & \leqq & 700 & (\text{Kapazität Presse}) \\
(4)(5) & & & x_1, x_2 \geqq 0 & & & (\text{nicht-negative Mengen})
\end{array}
$$

Lineare Produktionsplanung: Beispiel, Zulässigkeitsbereich

Begriffe und Beobachtungen

- Jede (x_1, x_2)-Kombination, die alle Restriktionen (1) bis (5) erfüllt, bezeichnet man als zulässige Lösung.
- Die Menge

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_+ : \quad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leqq 1500; \\ 2x_1 + x_2 &\leqq 1200; \\ x_1 + x_2 &\leqq 700 \end{aligned} \right\}$$

  nennt man Zulässigkeitsbereich des Problems.
- Wegen Restriktion $x \in \mathbb{R}^2_+$: Erster Quadrant des Koordinatensystems genügt für graphische Darstellung des Zulässigkeitsbereiches.

Beispiel: Graphische Darstellung Zulässigkeitsbereich

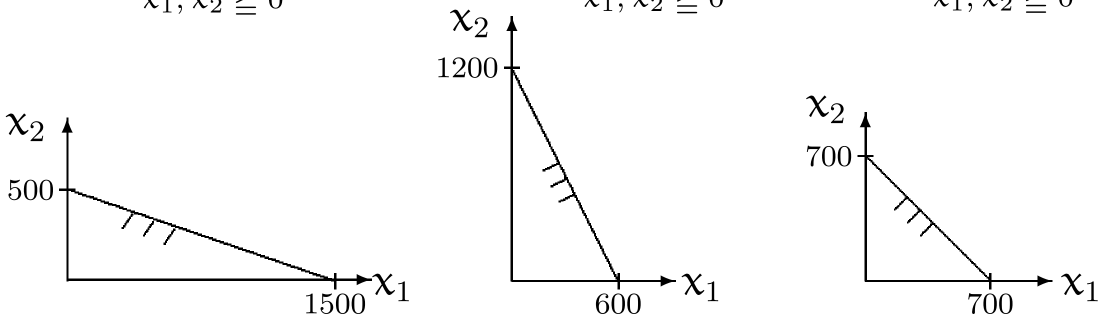
Mathematik
Stefan Etschberger

- Ungleichung (1) mit $x_1 + 3x_2 \leqq 1500$ entspricht dreieckigem Bereich in $\mathbb{R}^2_+$
- Begrenzung durch die drei Geraden mit $x_1 + 3x_2 = 1500$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$
- Also: Grenzpunkte $(0{,}500)$, $(1500{,}0)$, $(0{,}0)$
- Analog für die übrigen Nebenbedingungen

$(1) \quad x_1 + 3x_2 \leqq 1500, \quad x_1, x_2 \geqq 0$

$(2) \quad 2x_1 + x_2 \leqq 1200, \quad x_1, x_2 \geqq 0$

$(3) \quad x_1 + x_2 \leqq 700, \quad x_1, x_2 \geqq 0$



Beispiel: Graphische Darstellung der Restriktionen

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
5.1. Nebenbedingungen und Zulässigkeit
5.2. Zielfunktion
5.3. Graphische Lösung
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Beispiel: Graphische Darstellung Zulässigkeitsbereich

- Die gesamte zulässige Lösungsmenge Z ergibt sich dann aus dem Durchschnitt der angegebenen Bereiche.
- Alle (x_1, x_2)-Kombinationen im mit Z gekennzeichneten Bereich erfüllen damit die vorgegebenen Restriktionen.

Mögliche Fälle für Z

Mathematik
Stefan Etschberger

1. $Z = \emptyset$, d.h., es existiert keine zulässige (x_1, x_2)-Kombination.
2. $|Z| = 1$, d.h., es existiert genau eine zulässige (x_1, x_2)-Kombination. Dieser Fall tritt meist dann auf, wenn die Restriktionen in Form von Gleichungen formuliert werden.
3. $|Z| > 1$, d.h., es existieren mehrere zulässige Lösungen.

- In den ersten beiden Fällen ist durch die Restriktionen das Planungsergebnis festgelegt.
  - Im ersten Fall können nicht alle Restriktionen gleichzeitig erfüllt werden,
  - im zweiten Fall gibt es eine einzige Lösung, die alle Restriktionen erfüllt.
- Im letzten Fall entsteht weiterer Planungsbedarf, da für die Modellvariablen noch Spielraum besteht. Um diesen Spielraum weiter einzuschränken, ist eine Zielsetzung zu formulieren, die die zulässigen Lösungen bewertet. Kann diese Zielsetzung z als lineare Funktion der Modellvariablen modelliert werden, so entsteht ein lineares Optimierungsproblem mit der Zielfunktion $z(x)$ und Nebenbedingungen in Form von Gleichungen und/oder Ungleichungen.

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
5.1. Nebenbedingungen und Zulässigkeit
5.2. Zielfunktion
5.3. Graphische Lösung
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Lineare Produktionsplanung: Beispiel

Der holzverarbeitende Betrieb aus Beispiel 1 verfolgt die Zielsetzung der Gewinnmaximierung. Die Spanplatten vom Typ A bringen 4 €, die vom Typ B 5 € Gewinn pro Stück.

Zusammen mit den Restriktionen aus Beispiel 1 kann nun ein mathematisches Modell in Form eines linearen Optimierungsproblems formuliert werden.

Zielfunktion:

$$z(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \longrightarrow \max \qquad \text{(Gewinnmaximierung)}$$

Nebenbedingungen:

(1)	$x_1 + 3x_2$	$\leqq$	1500	(Vorrat F_1)
(2)	$2x_1 + x_2$	$\leqq$	1200	(Vorrat F_2)
(3)	$x_1 + x_2$	$\leqq$	700	(Kapazität Presse)
(4)(5)	x_1, x_2	$\geqq$	0	(nicht-negative Mengen)

Beispiel: Graphische Lösung

- Zur graphischen Lösung des Problems: Zusätzlich Zielfunktion in Graphik
- Zu diesem Zweck: Darstellung von Isogewinngeraden
- Für Gewinn in Höhe von c:

$$z(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 = c \quad \text{bzw.} \quad x_2 = \frac{c}{5} - \frac{4}{5}x_1 \,.$$

- Graphische Darstellung der Optimallösung im Beispiel
- Nur der Achsenabschnitt $= c/5$ hängt vom Wert c ab, die Steigung $= -4/5$ jedoch nicht.
- Im Beispiel maximaler c-Wert im Schnittpunkt der Geraden für die Nebenbedingungen (1) und (3), d.h. in $(x_1, x_2) = (300{,}400)$.
- Ein höherer Zielfunktionswert als

$$z(300{,}400) = 4 \cdot 300 + 5 \cdot 400 = 3200$$

kann unter Einhaltung der Restriktionen nicht erreicht werden. Man spricht von einer optimalen Lösung.

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
5.1. Nebenbedingungen und Zulässigkeit
5.2. Zielfunktion
5.3. Graphische Lösung
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Beispiel, Bereich optimaler Lösungen

- Variante: Gewinnbeiträge der Spanplatten aus Beispiel 1 jetzt für beide Typen gleich 4.- € pro Stück, d.h. $z(x_1, x_2) = 4x_1 + 4x_2$,
- In diesem Fall: kein eindeutiges Optimum
- Bereich Z^* optimaler Lösungen; beschreibbar durch folgende Menge:

$$Z^* = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_+ : 4x_1 + 4x_2 = 2800, x_1 \in [300,500] \right\}$$

Z^* entspricht der durch die Punkte $C = (300,400)$ und $D = (500,200)$ begrenzten Strecke.

Zusammenfassung für graphische Lösung linearer Optimierungsprobleme (mit nicht-konstanter Zielfunktion):

- Optimale Lösungen liegen stets auf dem Rand des zulässigen Bereiches Z beziehungsweise in „Ecken" von Z.
- Mindestens eine Ecke gehört zur optimalen Lösung.
- Entspricht Menge der Optimallösungen genau einer Ecke von Z $\Longleftrightarrow$ ist Optimallösung eindeutig.
- Gibt es zwei „optimale Ecken" , so ist die Menge aller Punkte der durch diese Ecken festgelegten Strecke optimal.

Mathematik: Gliederung

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. Differentialgleichungen

6. Folgen und Reihen
   Eigenschaften und Beispiele
   Konvergenz und Grenzwert
   Reihen

Folgen und Reihen

Warum beschäftigen wir uns mit Folgen und Reihen?

- Analyse von Datensequenzen, insbesondere Modellierung diskreter, zeitlicher Entwicklungen (z.B. von Aktienkursen, Absatzmengen)
- Grundlage der Finanzmathematik (z.B. Zinseszinsrechnung, Tilgungsrechnung)
- wesentlich zum Verständnis der Konzepte der Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Wesentliche Lernziele:

- Verständnis der Begriffe Folgen und Reihen
- Fähigkeit Folgen und Reihen nach ihrer Art zu klassifizieren
- Kennenlernen typischer, insbesondere der Grenzwerteigenschaften von Folgen und Reihen
- Fähigkeit, diese Eigenschaften zu erkennen und nachzuweisen

Definition und Eigenschaften

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
6.1. Eigenschaften und Beispiele
6.2. Konvergenz und Grenzwert
6.3. Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Definition

- Eine Folge ist eine Abbildung $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$
- Schreibweise für Folgenglieder: $a(0), a(1), \ldots$ oder $a_0, a_1, \ldots$
- Schreibweise für Folge: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ oder (a_n)

Leonardo von Pisa
(ca. 1180 - 1250)

Eigenschaften von Folgen: Eine Folge heißt

- endlich (unendlich), falls Anzahl der Folgenglieder endlich (unendlich) ist
- gesetzmäßig gebildet, falls Folgenglieder einem Bildungsgesetz folgen, zum Beispiel: $a_n = \frac{1}{n+1}$
- rekursiv definiert, falls zur Berechnung eines Folgengliedes frühere Werte nötig sind
  Beispiel: $a_0 = 0$; $a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n > 1$ (Fibonacci-Folge)

Spezielle Folgen

- Arithmetische Folge: $(a_n): \ a_{n+1} - a_n = d \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$ mit $d \in \mathbb{R}$
- Geometrische Folge: $(a_n): \ \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$ mit $q \in \mathbb{R}$

Geometrische Folge: Beispiel Schachspiel

- Sissa ibn Dahir, der Erfinder des Schachspieles, darf sich vom indischen König Shihram eine Belohnung wünschen.
- Sein Wunsch: So viele Weizenkörner, wie man auf ein Schachbrett legen kann, wenn

1 . Feld	:	$a_0 = 1$	Korn
2 . Feld	:	$a_1 = 2$	Körner
3 . Feld	:	$a_2 = 4$	Körner
4 . Feld	:	$a_3 = 8$	Körner
		$\vdots$	
n. Feld	:	$a_{n-1} = 2 \cdot a_{n-2}$	Körner

Konvergenz und Grenzwert

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
6.1. Eigenschaften und Beispiele
6.2. Konvergenz und Grenzwert
6.3. Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

- Fragen: Bleiben Folgenglieder ab einem gewissen n in einen kleinen Bereich um einen festen Wert?
- Und: Kann man diesen Bereich beliebig verkleinern?
- Definition:

  $a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert oder Limes von (a_n) $\Leftrightarrow$

  $$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, n(\epsilon) \quad \text{mit} \quad |a_n - a| < \epsilon \quad \forall\, n > n(\epsilon)$$

- Schreibweise für Grenzwert: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$
- Existiert dieser Grenzwert, heißt die Folge konvergent
- Ist der Grenzwert $a = 0$, heißt die Folge Nullfolge
- Existiert kein Grenzwert, heißt die Folge divergent

Beispiel zur Definition des Grenzwerts

- Gegeben: $a_n = \frac{n}{n+1}$
- Vermutung: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = 1$
- Beweis: Wenn $a = 1$, dann folgt

$$\begin{aligned}
& |a_n - a| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \epsilon \\
\Leftrightarrow\quad & \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \epsilon \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{\epsilon} < n+1 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{\epsilon} - 1 < n
\end{aligned}$$

- Also: Für jedes ϵ findet man ein $n(\epsilon)$, so dass die Grenzwertbedingung stimmt
- Zum Beispiel: Wähle
  $\epsilon = 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad n > \frac{1}{\epsilon} - 1 = \frac{1}{0{,}01} - 1 = 100 - 1 = 99$

Rechenregeln für Grenzwerte

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
6.1. Eigenschaften und Beispiele
6.2. Konvergenz und Grenzwert
6.3. Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Gegeben:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n) = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n) = b$
- kurz: $(a_n) \to a$ und $(b_n) \to b$

Dann gilt:

- $(a_n + b_n) \to a + b$
- $(a_n - b_n) \to a - b$
- $(a_n \cdot b_n) \to a \cdot b$
- $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \to \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$
- $(a_n^c) \to a^c$
  $(a_n > 0,\ a > 0,\ c \in \mathbb{R})$
- $(c^{a_n}) \to c^a \quad (c > 0)$

Definition der Reihe

- Gegeben: (a_n) unendliche Folge in $\mathbb{R}$
- Dann heißt (s_n) mit

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

  eine unendliche Reihe.
- s_n heißt n-te Partialsumme
- Klar ist: Reihen sind spezielle Folgen

Beispiel:

- (a_n) geometrische Folge $\longrightarrow$ (s_n) geometrische Reihe
- $s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$; mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$
- Offensichtlich gilt: $a_n = a_{n-1}q = a_{n-2}q^2 = \ldots = a_0 q^n$

$$\Rightarrow s_n = \sum_{i=0}^{n} a_0 q^i = a_0(1 + q + q^2 + \ldots + q^n) = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Geometrische Reihe: Beispiel Schachspiel

- Summe aller Körner auf Schachbrett:

$$s_n = \sum_{i=0}^{63} a_i = a_0 \frac{1 - q^{64}}{1 - q} = 1 \cdot \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} \approx 1{,}84467 \cdot 10^{19}$$

- Das bedeutet:

$$\begin{array}{lll}
100 \text{ Körner} \mathrel{\hat{=}} 1 \text{ g Weizen} & \longrightarrow & 1{,}8 \cdot 10^{17}\,\text{g} \\
 & \longrightarrow & 1{,}8 \cdot 10^{14}\,\text{kg} \\
 & \longrightarrow & 1{,}8 \cdot 10^{11}\,\text{t} = 180 \text{ Mrd. t} \\
1 \text{ Güterwagon} \mathrel{\hat{=}} 50\,\text{t Weizen} & \longrightarrow & 3{,}6 \text{ Mrd. Güterwagons} \\
 & \longrightarrow & 36 \text{ Mrd. m langer Eisenbahnzug} \\
 & \longrightarrow & 36 \text{ Mill. km}
\end{array}$$

$\longrightarrow$ 100-fache Entfernung zwischen Erde und Mond

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
6.1. Eigenschaften und Beispiele
6.2. Konvergenz und Grenzwert
6.3. Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Konvergenzkriterien für Reihen

Gegeben: a_i Folge, $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

Divergenzkriterium

- Ist s_n konvergent $\Rightarrow$ a_i ist Nullfolge
- Also äquivalent dazu:

$$a_i \text{ ist keine Nullfolge} \quad \Rightarrow \quad s_n \text{ divergent}$$

Quotientenkriterium

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad s_n \text{ konvergent}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1 \quad \Rightarrow \quad s_n \text{ divergent}$$

- Bemerkung: Für $\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 1$ ist im Allgemeinen keine Aussage möglich
- Spezialfall geometrische Reihe:

$$\Rightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} = q \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = q \quad \Rightarrow \begin{cases} q < 1 & \Rightarrow \quad s_n \text{ konvergent} \\ q \geq 1 & \Rightarrow \quad s_n \text{ divergent} \end{cases}$$

Mathematik: Gliederung

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. Differentialgleichungen

7. Finanzmathematik
   - Zinsen
   - Renten
   - Tilgung
   - Kursrechnung

Zinsen

- Zinsen sind der Preis, den ein Schuldner für die befristete Überlassung von Kapital bezahlen muss.
- Der Betrag der Zinsen (Z) wird aus der Höhe des überlassenen Kapitals K und der Dauer der Überlassung berechnet.

Verwendete Symbole:

Symbol	Bezeichnung
K_0	Anfangskapital
K_n	Endkapital
n	ganzzahlige Laufzeit
f	gebrochene Laufzeit
x	nicht–ganzzahlige Laufzeit
Z	Zins
p	Prozentzinssatz
$i = \frac{p}{100}$	Zinssatz
$q = 1 + i$	Aufzinsungsfaktor
$v = \frac{1}{q}$	Abzinsungsfaktor

Einfache Verzinsung

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
7.1. Zinsen
Einfache Verzinsung
Zinseszinsen
Gemischte Verzinsung
Nominal- und Effektivzins
Stetige Verzinsung
Zeitwert
7.2. Renten
7.3. Tilgung
7.4. Kursrechnung
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

- Sparzinsen können zinseszinslich angelegt werden
- Bei Kreditgeschäften zwischen Privatpersonen ist das illegal (BGB, §248)
- Deswegen: Einfache (lineare) Verzinsung gemäß

$$\begin{aligned} K_n &= K_0 + Z \\ &= K_0 + K_0 \cdot i \cdot n \\ &= K_0 \cdot \left(1 + \frac{p \cdot n}{100}\right) \end{aligned}$$

Unterjährige einfache Verzinsung

- In Deutschland Einteilung des Zinsjahres in 12 Monate zu je 30 Tagen (360 Tage)
- Dadurch Berechnung von Monats- bzw. Tageszinsen möglich
- Laufzeit $n \in \mathbb{N}$ in Jahren wird dann zu Laufzeit $f \in \mathbb{Q}$ in Jahren mit
$$f = \frac{t_2 - t_1}{360}$$
(t_1 entspricht Tag der Einzahlung, t_2 Tag der Auszahlung)
- Daraus ergibt sich

$$K_n = K_0 + K_0 \cdot i \cdot \frac{t}{360} = K_0 \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)$$

- Stellung eines Tages im Jahr:

$$(\text{Aktueller Monat} - 1) \cdot 30 + \text{Tag im Monat}$$

Barwert bei einfacher Verzinsung

K_0 unbekannt: Abzinsung bzw. Diskontierung bzw. Barwertberechnung

- Amtliche Diskontierung:

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + ni}$$

- Kaufmännische Diskontierung (Nur erste Näherung):

$$K_0 = K_n(1 - ni)$$

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
7.1. Zinsen
Einfache Verzinsung
Zinseszinsen
Gemischte Verzinsung
Nominal- und Effektivzins
Stetige Verzinsung
Zeitwert
7.2. Renten
7.3. Tilgung
7.4. Kursrechnung
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Die Zinseszinsformel

- Während Laufzeit Zinszahlungen mit sofortiger Wiederanlage und Verzinsung zum Zinssatz i
- Entwicklung des Kapitals:

$$
\begin{aligned}
K_1 &= K_0 + K_0 \cdot i = K_0 \cdot (1+i) = K_0 \cdot q \\
K_2 &= K_1 \cdot (1+i) = (K_0 \cdot q) \cdot q = K_0 \cdot q^2 \\
K_3 &= K_2 \cdot (1+i) = \left(K_0 \cdot q^2\right) \cdot q = K_0 \cdot q^3 \\
&\dots
\end{aligned}
$$

- Damit folgt die Zinseszinsformel, mit n (zunächst) ganzzahlig.

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot q^n}$$

- q^n heißt Aufzinsungfaktor

Die Zinseszinsformel

Auflösung der Zinseszinsformel nach K_0, q und n:

$$\boxed{K_0 = \frac{K_n}{q^n}}$$

- Abzinsungs- oder Diskontierungsformel
- $\dfrac{1}{q^n}$ heißt Abzinsungsfaktor

$$\boxed{q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} \quad \text{bzw.} \quad i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1}$$

$$\boxed{n = \frac{\ln K_n - \ln K_0}{\ln q}}$$

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
7.1. Zinsen
Einfache Verzinsung
Zinseszinsen
Gemischte Verzinsung
Nominal- und Effektivzins
Stetige Verzinsung
Zeitwert
7.2. Renten
7.3. Tilgung
7.4. Kursrechnung
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Gemischte Verzinsung

- Üblich: Einfache Verzinsung bei Restlaufzeiten kleiner einem ganzzahliges Vielfachen der Zinsperiode
- Genauer: Mit
  - Δt_1 (Zinstage im ersten Jahr),
  - n (die weiteren, ganzen Zinsperioden) und
  - Δt_2 (Zinstage im letzten Jahr),
  - gilt für das Endkapital K_x:

$$K_x = K_0 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{\Delta t_1}{360}\right) \cdot (1+i)^n \cdot \left(1 + i \cdot \frac{\Delta t_2}{360}\right)$$

- Gemischte Zinsrechnung (unter Verwendung der 30/360—Methode), auch Sparbuchmethode.

Gemischte Verzinsung: Beispiel

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
7.1. Zinsen
Einfache Verzinsung
Zinseszinsen
Gemischte Verzinsung
Nominal- und Effektivzins
Stetige Verzinsung
Zeitwert
7.2. Renten
7.3. Tilgung
7.4. Kursrechnung
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Beispiel

Am 15.9.2006 wurden € 12 000 zu 3,75 % angelegt. Wie hoch war der Endbetrag bei Kontoauflösung am 21.9.2013 (letzter Zinstag 20.9.2013)?

Lösung:

$$\begin{aligned} 15.9. &\;\hat{=}\; (9-1)\cdot 30 + 15 = 255 \\ &\Rightarrow \Delta t_1 = 360 - (255 - 1) = 106 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20.9. &\;\hat{=}\; (9-1)\cdot 30 + 20 = 260 \\ &\Rightarrow \Delta t_2 = 260 \end{aligned}$$

$(n = 6)$:

$$K_x = 12\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 106}{360}\right) \cdot 1{,}0375^6 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 260}{360}\right)$$

$$= 15\,541{,}20$$

Gemischte Verzinsung: Anmerkungen

- Würde man – von t_0 ausgehend – in ganze Jahre und einem Rest aufteilen, so ergäbe sich:

$$K_x = 12\,000 \cdot 1{,}0375^7 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 6}{360}\right) = 15\,537{,}08$$

(7 Jahre von 15.9.96 bis 14.9.2003; dazu 6 Tage)

- Würde man die **Zinseszinsformel** mit nicht-ganzzahligem Exponenten verwenden, so ergäbe sich Folgendes:

$$K_x = 12\,000 \cdot 1{,}0375^{7+\frac{6}{360}} = 15\,536{,}90$$

- Gemischte Verzinsung ist also (zumindest für Kapitalanleger) verbraucherfreundlich

Mathematik
Stefan Etschberger

Gemischte Verzinsung: Anmerkungen

Nachteil der gemischten Verzinsung

- Die gemischte Verzinsung ist inkonsistent und vom Zeitpunkt des Zinszuschlages (bzw. der Einzahlung) abhängig.
- Im Beispiel: Wäre der Zeitraum um einen Monat verschoben (vom 15.10.96 bis zur Auflösung am 21.10.2003), so ergäbe sich …

$$K_x = 12\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 76}{360}\right) \cdot 1{,}0375^6 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 290}{360}\right)$$
$$= 15\,540{,}31$$

Die Widersprüche verschwinden, wenn eine unterjährige Verzinsung zum konformen Zinssatz vorgenommen wird.

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
7.1. Zinsen
Einfache Verzinsung
Zinseszinsen
Gemischte Verzinsung
Nominal- und Effektivzins
Stetige Verzinsung
Zeitwert
7.2. Renten
7.3. Tilgung
7.4. Kursrechnung
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Unterjährige Verzinsung

- Zahlung von Zinsen nicht jährlich, sondern in kürzeren Fristen
- Dazu: m gleich lange Zinsperioden pro Jahr
- Typische Aufteilungen: $m = 2, 4, 12$ Zinsperioden
- Annahme: Laufzeit n in Jahren sei (aus Vereinfachungsgründen) ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{1}{m}$ (z.B. $m = 2$, $n = 1{,}5$ oder $m = 12$, $n = 1{,}25$).

Ist ein Jahreszins i gegeben, so heißt:

- $i^* = \frac{i}{m}$ der relative Periodenzins.
- i' der zu i konforme Periodenzins, wenn die periodische Verzinsung mit i' zum selben Ergebnis führt wie die jährliche Verzinsung mit i.

$$(1 + i')^m = (1 + i)$$

Unterjährige Verzinsung

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
7.1. Zinsen
Einfache Verzinsung
Zinseszinsen
Gemischte Verzinsung
Nominal- und Effektivzins
Stetige Verzinsung
Zeitwert
7.2. Renten
7.3. Tilgung
7.4. Kursrechnung
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Betrachte den relativen Periodenzinsen $i_* = \frac{i}{m}$, so heißt:

- i der nominelle Jahreszins
- i_{eff} der effektive Jahreszins, wenn jährliche Verzinsung mit i_{eff} zum selben Ergebnis führt wie die periodische Verzinsung mit i_*.
  (Entsprechendes gilt für q_*, q', q_{eff}).

$$K_1 = K_0 \cdot q_*^m = K_0 \cdot q_{\text{eff}}$$
$$\Rightarrow q_{\text{eff}} = q_*^m$$

$$\text{mit } q_* = 1 + i_* = 1 + \frac{i}{m}$$

Unterjährige Verzinsung: Formel

- Damit: Effektivzins q_{eff} ist

$$q_{\text{eff}} = (1 + i_*)^m = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$$

- Endkapital K_n ist:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i_*)^{m \cdot n} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}$$

- **Anmerkung**: $m \cdot n$ muss nach o.g. Bedingungen ganzzahlig sein.

Beispiel zur unterjährigen Verzinsung

Beispiel

Ein Betrag von 10 000 € soll zu 5 % nominal bei monatlicher Verzinsung angelegt werden. Welcher Betrag kann nach 16 Monaten entnommen werden? Wie hoch ist der Effektivzins?

Lösung:

Mit $i = 5\,\%$, $m = 12$ und $m \cdot n = 16$ gilt:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n} = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}05}{12}\right)^{16} = 10\,687{,}91\,€$$

Effektiver Jahreszins:

$$i_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{0{,}05}{12}\right)^{12} - 1 = 5{,}12\,\%$$

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
7.1. Zinsen
Einfache Verzinsung
Zinseszinsen
Gemischte Verzinsung
Nominal- und Effektivzins
Stetige Verzinsung
Zeitwert
7.2. Renten
7.3. Tilgung
7.4. Kursrechnung
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Beispiel zur unterjährigen Verzinsung mit dem konformen Zinssatz

- Widersprüche der gemischten Verzinsung aus Folie 115 verschwinden, wenn eine unterjährige Verzinsung mit dem konformen Zinssatz gemäß den Richtlinien für den internationalen Wertpapierhandel (ISMA – International Securities Market Association) vorgenommen wird.

Beispiel

Am 15 9 1996 (15 10 1996) wurden € 12 000 zu **effektiv** $3{,}75\,\%$ angelegt. Wie hoch war der Endbetrag bei Kontoauflösung am 21 9 2003 (21 10 2003)?

Lösung

- Wir verwenden den konformen Zins auf täglicher Basis,
- also $p' = \sqrt[360]{1{,}0375} = 1{,}0375^{\frac{1}{360}}$
- $K_n = 12\,000 \cdot 1{,}0375^{\frac{106}{360}} \cdot 1{,}0375^6 \cdot 1{,}0375^{\frac{260}{360}} = 15\,536{,}90$
- alternativ: $K_n = 12\,000 \cdot 1{,}0375^{\frac{76}{360}} \cdot 1{,}0375^6 \cdot 1{,}0375^{\frac{290}{360}} = 15\,536{,}90$

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
7.1. Zinsen
Einfache Verzinsung
Zinseszinsen
Gemischte Verzinsung
Nominal- und Effektivzins
Stetige Verzinsung
Zeitwert
7.2. Renten
7.3. Tilgung
7.4. Kursrechnung
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Stetige Verzinsung

- Lässt man $m \to \infty$ wachsen, so erhält man aus der obigen Formel

$$K_n = \lim_{m\to\infty} K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m\cdot n} = K_0 \left[\lim_{m\to\infty} \left(\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m\right)\right]^n = K_0 \left(e^i\right)^n$$

- die Formel für die stetige Verzinsung:

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot e^{i\cdot n}}$$

- Für den effektiven Jahreszinssatz gilt damit:

$$\boxed{i_{\text{eff}} = e^i - 1}$$

- Anwendung stetiger Wachstumsprozesse:
  - Ökonomie (Bevölkerungswachstum),
  - Physik (radioaktiver Zerfall),
  - BWL (Portfolio- und Kapitalmarkttheorie)

Beispiel zur stetigen Verzinsung

Beispiel

$K_0 = €\ 10\,000$, $n = 5$, nominaler Jahreszins $p = 5\,\%$. Wie hoch ist K_n und p_{eff} bei stetiger Verzinsung?

Lösung:

$$K_n = K_0 \cdot e^{i \cdot n} = 10\,000 \cdot e^{0{,}05 \cdot 5} = 12\,840{,}25\,€$$
$$i_{\text{eff}} = e^{0{,}05} - 1 = 5{,}127\,\%$$

Anmerkung 1: Bei Variation von m ergeben sich:

m	1	2	4	12	∞
p_{eff}	5	5,063	5,095	5,116	5,127

Anmerkung 2: Die stetige Verzinsung wird z.B. in der Portfoliotheorie verwendet, da sie mathematisch einfacher zu handhaben ist als die diskrete Verzinsung.

Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
7.1. Zinsen
Einfache Verzinsung
Zinseszinsen
Gemischte Verzinsung
Nominal- und Effektivzins
Stetige Verzinsung
Zeitwert
7.2. Renten
7.3. Tilgung
7.4. Kursrechnung
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

- Das Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik für Vergleich von Zahlungen, welche zu verschiedenen Zeitpunkten anfallen.

Vereinfachende Annahmen:

- Zinseszinsliche Verzinsung
- Zahlungen stets am Anfang oder am Ende einer Zinsperiode

Prinzip

- Vergleich von 2 oder mehreren zu verschiedenen Zeitpunkten anfallende Geldbeträge: Beziehen auf den gleichen Zeitpunkt durch geeignetes Auf- oder Abzinsen.
- Wahl des Zeitpunktes dabei unerheblich.
- Meist: Zeitpunkt $t = 0$ oder $t = n$ (Ende der Laufzeit)
  - $t = 0$ den Anfang des ersten Zinszeitraums („heute“).
  - $t = 1$ Ende des ersten Zinszeitraums (31.12. des ersten Jahres).
  - $t = 2$ Ende des zweiten Zinszeitraumes (31.12. des zweiten Jahres).
  - $t = n$ Ende des letzen Zinszeitraumes (31.12. des n-ten Jahres)

Äquivalenzprinzip: Herleitung

- Zwei Zahlungen, A im Zeitpunkt t_A und B im Zeitpunkt t_B, sind dann gleichwertig ($A \sim B$), wenn ihre Zeitwerte in jedem Zeitpunkt t übereinstimmen.

Beispiel

Gegeben: $A = 10\,000$, $t_A = 2$, $p = 7\%$
Gesucht: B mit $t_B = 5$ so, dass $A \sim B$.

Lösung:

$$B = 10\,000 \cdot 1{,}07^{(5-2)} = 12\,250{,}43 \text{ €}$$

Eine Zahlung von € 12 250,43 nach 5 Jahren ist also gleichwertig zu einer Zahlung von € 10 000 nach 2 Jahren. Der Barwert („Wert heute“) beider Zahlungen ist übrigens
$10\,000 \cdot 1{,}07^{-2} = 12\,250{,}43 \cdot 1{,}07^{-5} = 8\,734{,}39$ [€].

Zahlungsströme, Barwert, Endwert

- Ein Zahlungsstrom $(A_0, \ldots, A_n)$ ist eine Folge von Zahlungen mit Zahlungszeitpunkten $t = 0, \ldots, n$.
- Summe aller auf $t = 0$ abgezinsten Zahlungen (Kapitalwert):

$$K_0 = \sum_{t=0}^{n} \frac{A_t}{q^t} = \sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{-t}$$

- Summe aller auf $t = n$ abgezinsten Zahlungen (Endwert):

$$K_n = \sum_{t=0}^{n} q^n \frac{A_t}{q^t} = \sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{n-t}$$

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
7.1. Zinsen
Einfache Verzinsung
Zinseszinsen
Gemischte Verzinsung
Nominal- und Effektivzins
Stetige Verzinsung
Zeitwert
7.2. Renten
7.3. Tilgung
7.4. Kursrechnung
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Gleichheit zweier Zahlungsströme

Zwei Zahlungsströme (A_t), (B_t), $t = 0, \ldots, n$ sind genau dann äquivalent, wenn sie zu einem beliebigen Zeitpunkt T den gleichen Zeitwert besitzen:

$$\begin{aligned}
(A_t) \sim (B_t) \quad \Leftrightarrow \quad \textstyle\sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{T-t} &= \textstyle\sum_{t=0}^{n} B_t \cdot q^{T-t} \\
\Leftrightarrow \quad q^T \textstyle\sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{-t} &= q^T \textstyle\sum_{t=0}^{n} B_t \cdot q^{-t} \\
\Leftrightarrow \quad \textstyle\sum_{t=0}^{n} (A_t - B_t) \cdot q^{-t} &= 0
\end{aligned}$$

$$(A_t) \sim (B_t) \;\Leftrightarrow\; \sum_{t=0}^{n} \frac{A_t - B_t}{q^t} = 0$$

Investitionsrechnung: Beispiel

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
7.1. Zinsen
Einfache Verzinsung
Zinseszinsen
Gemischte Verzinsung
Nominal- und Effektivzins
Stetige Verzinsung
Zeitwert
7.2. Renten
7.3. Tilgung
7.4. Kursrechnung
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Beispiel

$p = 5\,\%$, Welches Projekt ist zu bevorzugen?

Jahr t	0	1	2	3	4	5
A_t	0	1.000	0	1.000	0	1.000
B_t	400	400	400	600	600	600

Lösung: Kapitalwert von (A_t):

$$\sum_{t=0}^{5} \frac{A_t}{1{,}05^t} = \frac{0}{1{,}05^0} + \frac{1\,000}{1{,}05^1} + \frac{0}{1{,}05^2} + \frac{1\,000}{1{,}05^3} + \frac{0}{1{,}05^4} + \frac{1\,000}{1{,}05^5} = 2\,599{,}74$$

Kapitalwert von (B_t):

$$\sum_{t=0}^{5} \frac{B_t}{1{,}05^t} = \frac{400}{1{,}05^0} + \frac{400}{1{,}05^1} + \frac{400}{1{,}05^2} + \frac{600}{1{,}05^3} + \frac{600}{1{,}05^4} + \frac{600}{1{,}05^5} = 2\,625{,}80$$

Alternative B ist der Alternative A vorzuziehen.

Rentenrechnung

Definition

Rente: Zahlungsstrom mit Zahlungen in gleichen zeitlichen Abständen und (meistens) in konstanter Höhe

Unterscheidung zwischen Renten

- mit Zahlung am Ende einer Rentenperiode (nachschüssig)
- mit Zahlung zu Beginn einer Rentenperiode vorschüssig)

- mit endlicher Laufzeit (endliche Renten)
- mit unendlicher Laufzeit (ewige Renten)

Rentenrechnung: Symbole

Mathematik
Stefan Etschberger

Symbol	Bezeichnungen
r_t	Rentenrate in Periode t
n	Laufzeit $(t = 1, \dots, n)$
m	Anzahl der Rentenzahlungen pro Zinsperiode
p	Prozentzinssatz
R_0	Barwert der Rente
R_t	Zeitwert der Rente
R_n	Endwert der Rente

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
7.1. Zinsen
7.2. Renten
Unterjährige Renten
Ewige Renten
7.3. Tilgung
7.4. Kursrechnung
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Nachschüssige konstante (endliche) Renten

Rentenzahlung jeweils am Ende einer Zinsperiode, jeweils in Höhe von

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_n = \text{const.} = r$$

$\Rightarrow$ Rentenendwert R_n:

$$\begin{aligned}
R_n &= r \cdot q^{n-1} + r \cdot q^{n-2} + \ldots + r \cdot q + r \\
&= r \cdot \left(q^{n-1} + \cdot q^{n-2} + \ldots + q + 1\right) \\
&= r \cdot \sum_{t=0}^{n-1} q^t \qquad \text{(geometrische Reihe)} \\
&= r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}
\end{aligned}$$

Rentenendwert und Rentenbarwert

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
7.1. Zinsen
7.2. Renten
Unterjährige Renten
Ewige Renten
7.3. Tilgung
7.4. Kursrechnung
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

- Endwert R_n der Rente:

$$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r \cdot \text{NREF}_{p,n}$$

- NREF: Nachschüssiger Rentenendwertfaktor für endliche konstante Rente.
- Barwert der Rente:

$$R_0 = R_n \cdot q^{-n} = r \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q-1)} = r \cdot \frac{q^n - 1}{q^{n+1} - q^n} = r \cdot \text{NRBF}_{p,n}$$

- NRBF: Nachschüssiger Rentenbarwertfaktor

Beispiel Rentenendwert

Beispiel

Genau 10 Jahre lang wurde jeweils zum Jahresende ein Betrag von 12.000 € zum Zinssatz von 4% angelegt. Wieviel kann zu Beginn des 11. Jahres (entspricht dem Ende des 10. Jahres) abgehoben werden?

Lösung:
Mit $n = 10$, $q = 1{,}04$ und $r = 12\,000$ gilt Folgendes:

$$\begin{aligned} R_{10} &= 12\,000 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04 - 1} \\ &= 12\,000 \cdot 12{,}006107 \\ &= 144\,073{,}28 \quad [€\,] \end{aligned}$$

Beispiel Rentenbarwert

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
7.1. Zinsen
7.2. Renten
Unterjährige Renten
Ewige Renten
7.3. Tilgung
7.4. Kursrechnung
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Beispiel

Aus welchem zum Zeitpunkt 0 eingezahlten Betrag kann 10 Jahre lang bei 4% Zins eine konstante nachschüssige Rente von 12.000 € bezahlt werden?

Lösung: Frage nach dem Barwert einer Rente. Mit $n = 10$, $q = 1{,}04$ und $r = 12\,000$ gilt:

$$\begin{aligned} R_0 &= 12\,000 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04^{11} - 1{,}04^{10}} \\ &\approx 12\,000 \cdot 8{,}110896 \\ &\approx 97\,330{,}75 \quad [€\,] \end{aligned}$$

Umformung der Rentenbar- und -endwertformel

- Je nach Fragestellung: Laufzeit n, Rentenzahlung r, Verzinsungsfaktor q .
- Rentenzahlung r:

$$r = \frac{R_0}{\text{NRBF}_{p,n}} = R_0 \cdot \frac{q^{n+1} - q^n}{q^n - 1} = \frac{R_n}{\text{NREF}_{p,n}} = R_n \cdot \frac{q-1}{q^n - 1}$$

- Laufzeit n aus R_n:

$$n = \frac{\ln\left(1 + \frac{R_n \cdot i}{r}\right)}{\ln q}$$

- Laufzeit n aus R_0:

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{R_0 \cdot i}{r}\right)}{\ln q}$$

- q aus R_0:

$$R_0 q^{n+1} - (R_0 + r) q^n + r \stackrel{!}{=} 0 \,.$$

- q aus R_n:

$$r \cdot q^n - R_n \cdot q + R_n - r \stackrel{!}{=} 0 \,.$$

- Berechnung von q im Allgemeinen nur näherungsweise (iterativ) möglich

Beispiel nachschüssige Rente

Beispiel

Ein Steuerberater kauft die Kanzlei eines älteren Kollegen und muss als Kaufpreis 10 Jahre lang jährlich–nachschüssig je 12.500 € zahlen. Durch welchen Betrag könnte der Steuerberater diese Zahlungsverpflichung sofort bei Vertragsabschluss ablösen, wenn mit 8% Zinsen kalkuliert wird?

Lösung: Gesucht ist der Rentenbarwert mit $r = 12\,500$, $q = 1{,}08$ und $n = 10$. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} R_0 &= 12\,500 \cdot \frac{1{,}08^{10} - 1}{1{,}08^{11} - 1{,}08^{10}} \\ &= 12\,500 \cdot 6{,}710081 \\ &= 83\,876{,}01 \quad [€] \end{aligned}$$

Mathematik
Stefan Etschberger

Beispiel nachschüssige Rente

Beispiel

Der Barwert einer über 15 Jahre laufenden nachschüssigen Jahresrente beträgt bei 5%-iger Verzinsung 10.380 €. Wie hoch sind die jährlichen Rentenzahlungen?

Lösung: Gesucht sind die Rentenzahlungen r mit $R_0 = 10\,380$, $q = 1{,}05$ und $n = 15$. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} r &= 10\,380 \cdot \frac{1{,}05^{16} - 1{,}05^{15}}{1{,}05^{15} - 1} \\ &= 10\,380 \cdot 0{,}096342 \\ &= 1\,000{,}03 \quad [€\,] \end{aligned}$$

Vorschüssige konstante Renten

- Rentenbetrag wird jeweils zu **Beginn der Zinsperiode** in Höhe von $r'_1 = r'_2 = \dots = r'_n = r'$ bezahlt.
- Äquivalenzprinzip $\Rightarrow$ Endwert der Rente:
- vorschüssige Rentenzahlung $r' \sim$ nachschüssige Rentenzahlung $r \quad \Rightarrow \quad r = r'q$

$$R_n \quad = \quad r' \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r' \cdot \text{VREF}_{p,n}$$

- **VREF**: Vorschüssiger Rentenendwertfaktor
- Barwert der Rente:

$$\begin{aligned} R_0 &= R_n \cdot q^{-n} \\ &= r' \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q-1)} \quad = \quad r' \cdot \frac{q^n - 1}{q^n - q^{n-1}} = r' \cdot \text{VRBF}_{p,n} \end{aligned}$$

- **VRBF**: Vorschüssiger Rentenbarwertfaktor

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
7.1. Zinsen
7.2. Renten
Unterjährige Renten
Ewige Renten
7.3. Tilgung
7.4. Kursrechnung
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Unterjährige Raten und jährliche Verzinsung

Aufteilung der Zinsperiode in mehrere gleich lange Rentenperioden, d.h. m Rentenzahlungen pro Zinsperiode (= Jahr). Dazu:

- Rechnung mit einfacher Verzinsung innerhalb der Zinsperiode
- Rentenzahlungen nachschüssig (also am Ende jeder unterj. Rentenperiode) oder vorschüssig möglich

Lösung: Errechnung von konformen (gleichwertigen) jährlich nachschüssigen Ersatzzahlungen zu den m unterjährigen Zahlungen.

Definition

r_e heißt konforme jährlich nachschüssige Ersatzrentenrate einer nachschüssigen (oder vorschüssigen) unterjährigen Rentenrate r.

Konforme jährliche nachschüssige Ersatzrentenrate

Berechnung von r_e:

falls unterjährige Rente **nachschüssig**:

$$\begin{aligned}
r_e = r &+ r\cdot\left(1+\frac{1}{m}\cdot i\right)\\
&+ r\cdot\left(1+\frac{2}{m}\cdot i\right)\\
&+ \ldots\\
&+ r\cdot\left(1+\frac{m-1}{m}\cdot i\right)\\
= \;& r\cdot m\\
&+ i\cdot r\cdot\frac{1}{m}\left(1+2+\ldots+(m-1)\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{r_e = r\cdot\left[m+i\cdot\frac{m-1}{2}\right]}$$

falls unterjährige Rente **vorschüssig**:

$$\begin{aligned}
r_e = r&\cdot\left(1+\frac{1}{m}\cdot i\right)\\
&+ r\cdot\left(1+\frac{2}{m}\cdot i\right)\\
&+ \ldots\\
&+ r\cdot\left(1+\frac{m}{m}\cdot i\right)\\
= r&\cdot m\\
&+ i\cdot r\cdot\frac{1}{m}\left(1+2+\ldots+m\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{r_e = r\cdot\left[m+i\cdot\frac{m+1}{2}\right]}$$

Aus Ersatzrentenrate r_e: Weiterrechnen mit Formeln für jährliche nachschüssige Rente

Beispiel konforme Ersatzrentenraten

Beispiel

Ein Sparer legt monatliche nachschüssig 1.000 € auf ein Konto. Wie hoch ist der Kontostand nach 10 Jahren bei einem Zinssatz von 4%?

Lösung: Gesucht ist der Rentenendwert auf Basis der konformen Rentenraten. Mit $n = 10$, $m = 12$, $q = 1{,}04$ und $r = 1\,000$ ergibt sich Folgendes:

$$R_{10} = 1\,000 \cdot \underbrace{\left[12 + \frac{0{,}04 \cdot 11}{2}\right]}_{12{,}22} \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04 - 1}$$
$$= 12\,220 \cdot 12{,}006107 = 146\,714{,}63$$

Beim Zinssatz von $i = 4\%$ kann eine monatlich nachschüssige Rente von 1.000 € durch eine jährlich nachschüssige Rentenzahlung von 12.220 € gleichwertig ersetzt werden. Der Kontostand nach 10 Jahren beträgt $146\,714{,}63$ €.

Ewige Renten

- Eine Rente heißt ewige Rente, wenn Anzahl n der Ratenzahlungen nicht begrenzt, n also beliebig groß wird ($n \to \infty$).
- Berechnung des Rentenendwertes dann nicht möglich
- Rentenbarwert R_0 existiert jedoch:

$$R_0 = \lim_{n\to\infty} (r \cdot \text{NRBF}) = r \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$
$$= r \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{q^n}}{q - 1} \right) = r \cdot \frac{1}{q - 1} = \frac{r}{i}$$

- Damit: Rentenbarwert einer nachschüssigen ewigen Rente:

$$\boxed{R_0 = \frac{r}{i}}$$

Mathematik
Stefan Etschberger

Ewige Renten: Beispiel

Beispiel

Wie groß ist der Barwert einer ewigen nachschüssigen Rente von 40.000 € pro Jahr, wenn der Zins bei 8% liegt?

Lösung:

$$R_0 = \frac{40\,000}{0{,}08} = 500\,000$$

erkung: Geht man von einer vorschüssigen ewigen Rente aus, so ergibt sich für den Rentenbarwert:

$$R_0 = r' + \frac{r'}{i}$$

Tilgungsrechnung

Mathematik
Stefan Etschberger

- Rückzahlung oder Tilgung größerer Darlehen oft in mehreren Raten
- Hier betrachtet: Tilgung in mehreren Teilbeträgen, in konstanten Zeitabständen
- Jede zu bezahlende Rate beinhaltet Zinsen und Tilgung
- Verwendete Symbole:

Symbol	Bezeichnung
S	Darlehenssumme, Anfangsschuld
R_k	Restschuld zu Beginn des k-ten Jahres
n	Tilgungsdauer ($\in \mathbb{N}$)
Z_k	Zinsquote am Ende des k-ten Jahres
T_k	Tilgungsquote am Ende des k-ten Jahres
A_k	Annuität am Ende des k-ten Jahres

- Unterscheidung zwischen Ratentilgung und Annuitätentilgung

Ratentilgung

- Während Laufzeit sind Tilgungsquoten konstant. Daraus folgt:

$$T_k = T = \frac{S}{n}$$

- und damit:

$R_k = S - (k-1) \cdot T$	Restschuld zu Beginn des k-ten Jahres
$Z_k = R_k \cdot i$	Zinsquote am Ende des k-ten Jahres
$A_k = Z_k + T$	Annuität am Ende des k-ten Jahres

Annuitätentilgung

Mathematik
Stefan Etschberger

- Problem der Ratentilgung: Belastung anfangs hoch, später geringer
- Ausweg: Konstanthalten der Annuitäten über Rentenformel

$$A_k = A = S \cdot \frac{q^n(q-1)}{q^n - 1}$$

- Daraus ergibt sich:

$R_k = S \cdot \dfrac{q^n - q^{k-1}}{q^n - 1}$	Restsch. zu Beg. des k-ten J.
$Z_k = R_k \cdot i = A \cdot \left(1 - q^{k-n-1}\right)$	Zinsen im k-ten Jahr
$T_k = A - Z_k = A \cdot q^{k-n-1}$	Tilgung im k-ten Jahr

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
7.1. Zinsen
7.2. Renten
7.3. Tilgung
Ratentilgung
Annuitätentilgung
7.4. Kursrechnung
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Festverzinsliche Wertpapiere

- Wertpapier: Investor erwirbt für bestimmten Preis ein Recht auf Zahlungen
- Hier: Gesamtfällige festverzinsliche Wertpapiere
- Emission (Erstausgabe): Investor zahlt pro 100 € Nennwert einen Preis C_0 (Emissionskurs)
- Emittend: Zahlt während Laufzeit Zinsen (Kuponszahlung) und (meist nach Ablauf) Tilgung (Rücknahmekurs)
- Kuponzahlung: mittels nominellen Jahreszinses i^* (oder Jahreszinsfuß p^*) auf den Nennwert an Investor, meist jährlich nachschüssig
- Falls $i^* = 0$: Null-Kupon-Anleihen oder Zerobonds
- Rücknahmekurs: Tilgung in einem Betrag am Ende der Laufzeit C_n als Prozentsatz des Nennwertes
- Rendite: i_{eff} Jährlicher Effektivzins, der Leistung des Investors und des Emittenden gleichwertig macht

Äquivalenzgleichung für Emissionskurs

$$C_0 = p^* \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q^{-n} + C_n \cdot q^{-n}$$

Dabei:

- n : Laufzeit in Jahren
- C_0 : Emissionskurs
- p^* : Nominalzinsfuß, jährliche Zinszahlung pro 100 € Nennwert
- C_n : Rücknahmekurs am Ende der Laufzeut
- $q = 1 + i_{\text{eff}}$: Effektiver Jahreszins bzw. Rendite des festverz. Wertpapiers

Anmerkungen:

- Gleichung i.a. nicht elementar nach q auflösbar
- Deswegen oft: Näherung durch Iteration (z.B. regula falsi)
- Emissionskurs $\hat{=}$ mit Rendite abgezinster Kapitalwert sämtlicher zukünftiger Leistungen des Wertpapiers

Mathematik
Stefan Etschberger

Ganzzahlige Restlaufzeiten

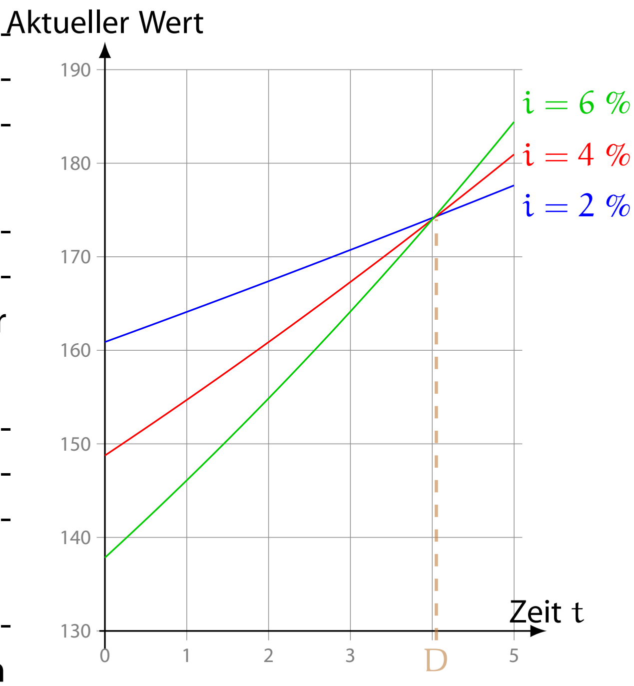
- Festverzinsliche Wertpapiere können meist jederzeit gehandelt werden
- Annahme zunächst: Handel nur unmittelbar nach Kuponzahlung möglich
- Gesucht: Kurs C_t für eine Restlaufzeit von t Jahren
- Lösung: Preis eines Wertpapiers ist zu jedem Zeitpunkt der Kapitalwert aller in der Restlaufzeit noch ausstehenden Leistungen
- Abgezinst wird dabei mit dem Marktzins (auch: Umlaufrendite)

$$C_t = p^* \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1} \cdot q^{-t} + C_n \cdot q^{-t}$$

Mathematik
Stefan Etschberger

Risikoanalyse – Duration

- Änderung des Marktzinses: Abhängig von Zeitpunkt Auswirkung auf aktuellen Wert des Papiers
- Fall 1 (Zins steigt): C_0 ist niedriger, aber Wiederanlage der Kuponzahlungen erbringen mehr Rendite
- Fall 2 (Zins fällt): C_0 ist höher, aber Wiederanlage der Kuponzahlungen erbringen weniger Rendite
- Vermutung: An einem (Zeit-)Punkt heben sich diese beiden Effekte auf
- Dieser Zeitpunkt heißt Duration D.



1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
7.1. Zinsen
7.2. Renten
7.3. Tilgung
7.4. Kursrechnung
Emissionskurs
Duration
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Risikoanalyse – Duration

- Der aktuelle Wert eines Papiers $C_t(q) = q^t \cdot C_0(q)$ ändert sich also nicht bzgl. Änderungen von q, wenn $t = D$
- damit gilt für die Duration D

$$\frac{\partial C_D(q)}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\left(q^D \cdot C_0(q)\right) = D \cdot q^{D-1} C_0(q) + q^D \frac{\partial C_0(q)}{\partial q} = 0$$

- Da q^{D-1} immer positiv ist muss also für D gelten $D \cdot C_0(q) + q \cdot \frac{\partial C_0(q)}{\partial q} = 0$ und damit:

$$D = -\frac{\partial C_0(q)}{\partial q} \cdot \frac{q}{C_0(q)} = -q \cdot \frac{C_0'(q)}{C_0(q)}$$

- Weitere mögliche Interpretation der Duration als Bruttozinselastizität des Barwertes.

Partielle Ableitung des Kapitalwertes

- Für die Berechnung von D ist $C_0'(q)$ zu bestimmen;
- bei einem festverzinslichen Wertpapier ergibt sich so

$$C_0'(q) = -\frac{n}{q^{n+1}}\left(p * \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} + C_n\right) + \frac{p*}{q^n} \cdot \frac{n \cdot q^{n-1}(q-1) - (q^n - 1)}{(q-1)^2}$$

Varianten der Duration

- Modifizierte Duration:

$$MD = \frac{D}{q} = -\frac{C_0'(q)}{C_0(q)}$$

- Elastizität (von i):

$$\varepsilon_{C_0,i} = \frac{C_0'(i)}{C_0(i)} \cdot i = -\frac{i}{q} \cdot D = -MD \cdot i$$

Auswirkungen von Zinsänderungen

- Bei bekanntem Emissionskurs: Auswirkungen kleiner Zinsänderungen über Duration

$$C_0(i + \Delta i) \approx C_0(i) \cdot (1 - MD \cdot \Delta i)$$

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
7.1. Zinsen
7.2. Renten
7.3. Tilgung
7.4. Kursrechnung
Emissionskurs
Duration
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

8 Reelle Funktionen
- Grundbegriffe
- Elementare Funktionen
- Stetigkeit reeller Funktionen

Warum beschäftigen wir uns mit reellen Funktionen?

- allgemein: kompakte und präzise Beschreibung von Abhängigkeiten zwischen mehreren Faktoren
- speziell: Modellierung technischer und ökonomischer Systeme
- Basis für Analyse und Optimierung von Systemen / Prozessen

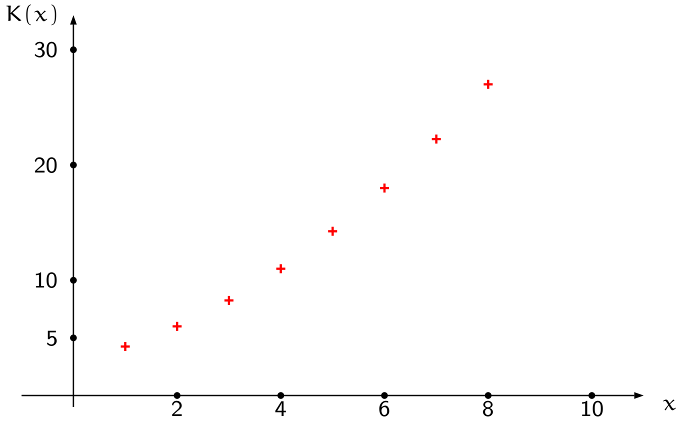
Wesentliche Lernziele

- Fähigkeit mit den wesentlichen Begriffen im Zusammenhang mit Funktionen umzugehen
- Kennenlernen der wichtigsten Klassen reeller Funktionen
- Beherrschen des Stetigkeitsbegriffs

Kostenfunktion

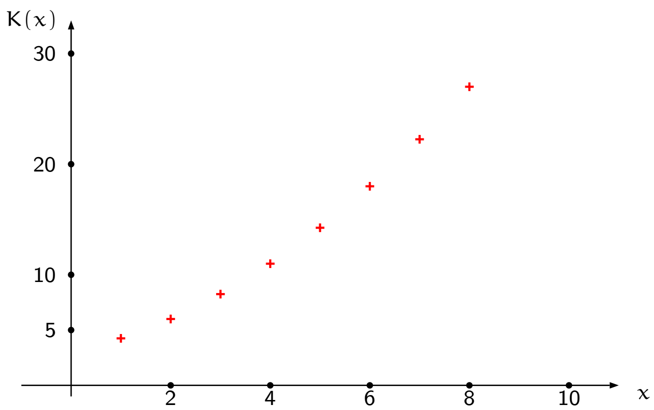
- Unternehmen ermittelt empirisch Kosten K für die Herstellung von x Einheiten eines Produktes
- Dargestellt als Wertetabelle und als Grafik

x	K
1	4,25
2	6,00
3	8,25
4	11,00
5	14,25
6	18,00
7	22,25
8	27,00



Kostenfunktion

- Jetzt: Betrachte zusätzlich Funktion $K(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 3$
- für Definitionsbereich $D = \{1, \ldots, 8\}$



- Darstellung durch Funktion: kompakt, eindeutig
- Möglicher Ausgangspunkt für Prognosen (Kosten für $9, 10, \ldots$ Einheiten)

Begriff reelle Funktion

Definition

- $f : D \to \mathbb{R}$ heißt reellwertige Abbildung mit Definitionsbereich D
- Mit $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt f reelle Funktion von n Variablen

Darstellung von Funktionen

- Durch Funktionsgleichungen $f(x_1, \ldots, x_n) = y$
  - $x = (x_1, \ldots, x_n)$: unabhängige (exogene) Variablen
  - y: abhängige (endogene) Variablen
- Durch Wertetabellen
- Durch Graphen
  - Für $D \subset \mathbb{R}$: Darstellung im kartesischen Koordinatensystem
  - Für $D \subset \mathbb{R}^2$: 3-dimensionale Darstellung oder Niveaulinien $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$

Beispiel

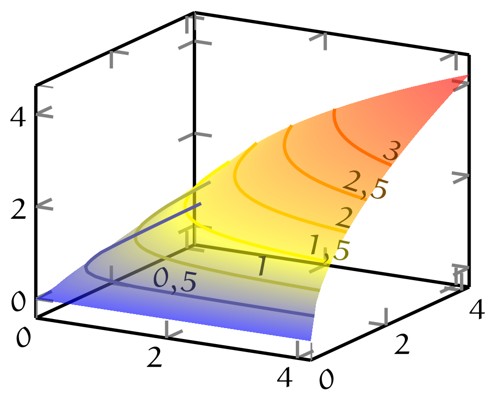
Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
8.1. Grundbegriffe
8.2. Elementare Funktionen
8.3. Stetigkeit
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

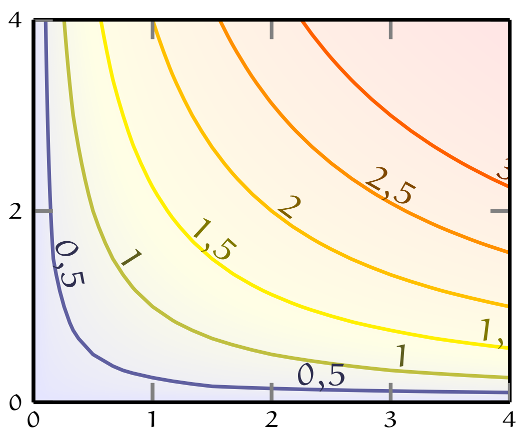
Cobb-Douglas-Funktion

- neoklassische Produktionsfunktion der Form
  $f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \ldots x_n^{a_n}$
- Beispiel für zwei Produktionsfaktoren
  $f(x_1, x_2) = 1 \cdot x_1^{1/2} \cdot x_2^{1/2} = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$

Dreidimensionale Darstellung



Niveaulinien
für $f(x_1, x_2) = c$ mit $c = 1/2, \ldots, 3$



Eigenschaften von Funktionen

Eine Funktion $f : D \to W$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ und $W \subset \mathbb{R}$ heißt:

- surjektiv, wenn zu jedem $y \in W$ ein $x \in D$ mit $f(x) = y$ existiert,
- injektiv, wenn für alle $x, \tilde{x} \in D$ gilt $x \neq \tilde{x} \Rightarrow f(x) \neq f(\tilde{x})$,
- bijektiv, wenn f surjektiv und injektiv ist.

Komposition von Funktionen

- Voraussetzung: Funktionen $f : D_f \to \mathbb{R}$ und $g : D_g \to \mathbb{R}$ mit $D_f \subset \mathbb{R}^n$ und $f(D_f) \subset D_g \subset \mathbb{R}$
- Zusammengesetzte Funktion: $g \circ f : D_f \to \mathbb{R}$: Zuordnung des Werts $(g \circ f)(x) = g\,(f(x))$ für alle $x \in D_f$

Inverse Funktion / Umkehrfunktion

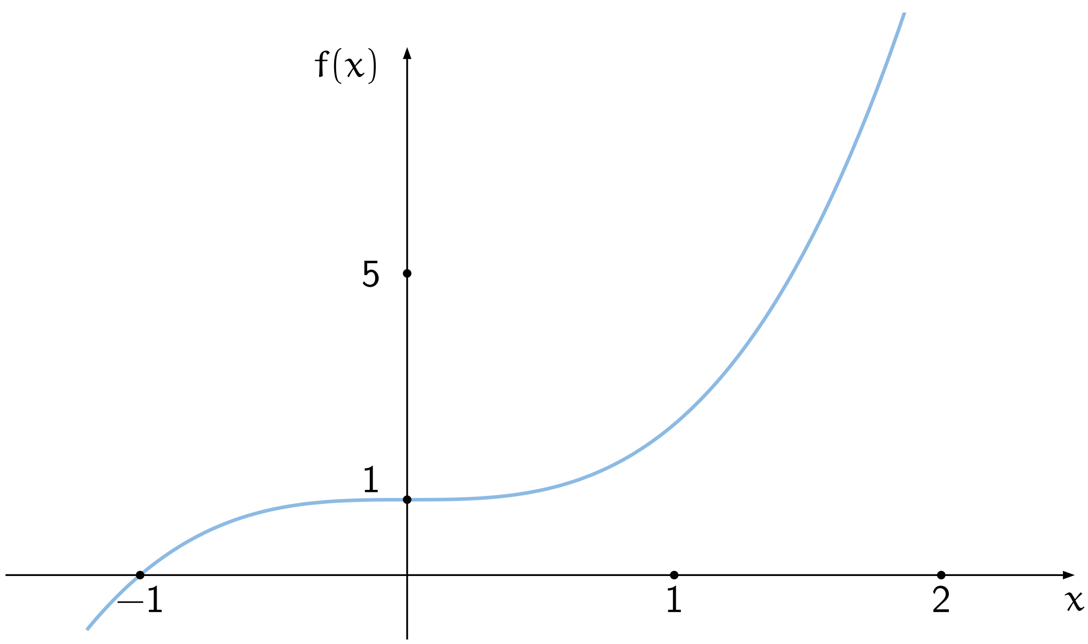
- Voraussetzung: bijektive Funktion $f : D \to W$ mit $D, W \subset \mathbb{R}$
- Inverse Funktion: $f^{-1} : W \to D,\ y \mapsto f^{-1}(y)$, wobei y für alle $x \in D$ mit $y = f(x)$ zugeordnet wird

Invertierung: Beispiel

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
8.1. Grundbegriffe
8.2. Elementare Funktionen
8.3. Stetigkeit
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

- Beispiel b) $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 + 1$



Satz: Operationen zwischen Funktionen

- Gegeben: $f, g : D \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen mit identischem Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$.
- Dann sind auch die folgenden Abbildungen relle Funktionen:

$$
\begin{array}{lllll}
f+g: & D \to \mathbb{R} & \text{mit} & x \in D & \mapsto & (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\
f-g: & D \to \mathbb{R} & \text{mit} & x \in D & \mapsto & (f-g)(x) = f(x) - g(x) \\
f \cdot g: & D \to \mathbb{R} & \text{mit} & x \in D & \mapsto & (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \\
\frac{f}{g}: & D_1 \to \mathbb{R} & \text{mit} & x \in D_1 & \mapsto & \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}
\end{array}
$$

$$D_1 = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$$

Besondere Punkte bei Funktionen

Mathematik
Stefan Etschberger

- Gegeben: Reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$

Definitionen

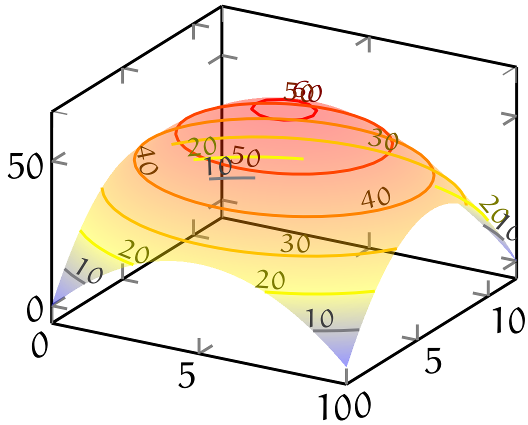
- c-Stelle von f: $x_c \in D$ mit $f(x_c) = c$
- Mit $c = 0$ heißt c-Stelle dann 0-Stelle von f
- Maximalstelle oder globales Maximum:
  $x_{max} \in D$ mit $f(x_{max}) \geq f(x)$ für alle $x \in D$
- Minimalstelle oder globales Minimum:
  $x_{min} \in D$ mit $f(x_{min}) \leq f(x)$ für alle $x \in D$
- $x^* \in D$ mit $f(x^*) \underset{(\leq)}{\geq} f(x)$ für $x \in [x^* - a, x * + a] \subset D$
  heißt lokale Maximalstelle (Minimalstelle), $f(x^*)$ lokales Maximum

- Weitere Sprechweisen: Extremal-, Optimalstelle, Extremum, Optimum

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
8.1. Grundbegriffe
8.2. Elementare Funktionen
8.3. Stetigkeit
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Beispiel: Maximal-, bzw. Minimalstellen

- **Umsatzmaximierung** für zwei Produkte mit Absatzquantitäten x_1, x_2 und Preisen p_1, p_2:
- Gegeben:
  Preis-Absatz-Funktionen
  $$x_1 = 10 - p_1$$
  und $x_2 = 12 - p_2$
- Wegen $x_1, x_2 \geq 0$ und $p_1, p_2 \geq 0$ folgt $p_1 \in [0,10]$ und $p_2 \in [0,12]$
- Gesamtumsatz?
- Maximalstelle?
- Minimalstellen?



Weitere Eigenschaften reeller Funktionen

- f beschränkt $\Leftrightarrow$ es gibt $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ mit $c_0 \leq f(x) \leq c_1$
- f monoton wachsend $\Leftrightarrow$ $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$
  f monoton fallend $\Leftrightarrow$ $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$
- bei strenger Monotonie entfällt „=“
-
  f konvex $\Leftrightarrow$ $(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2))$
  f konkav $\Leftrightarrow$ $(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2))$
  $\lambda \in (0,1)$
- bei strenger Konkavität entfällt „=“
- f periodisch mit Periode $p > 0$ $\Leftrightarrow$ $f(x) = f(x \pm p)$
- f gerade (ungerade) $\Leftrightarrow$ $f(x) = f(-x)$ $(-f(x) = f(-x))$

Polynome

Definition

- $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad (\text{mit } a_n \neq 0)$$

- heißt Polynom n-ten Grades
- Schreibweise: $\text{grad}(p) = n$

Satz

- Summen, Differenzen und Produkte von Polynomen sind wieder Polynome.
- $p(x_1) = 0 \Rightarrow u(x) = \frac{p(x)}{x - x_1}$ ist wieder Polynom mit $\text{grad}(u) = \text{grad}(p) - 1$

Rationale Funktionen

Mathematik
Stefan Etschberger

Definition

- $q : D \to \mathbb{R}$ mit

$$q(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)} \quad (\text{mit } p_1, p_2 (\neq 0) \text{ sind Polynome})$$

- heißt Rationale Funktion.

Satz

- Jedes Polynom ist auch rationale Funktione (z.B. $p_2(x) = c$).
- Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten (falls definiert) von rationalen Funktionen sind wieder rationale Funktionen.

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
8.1. Grundbegriffe
8.2. Elementare Funktionen
8.3. Stetigkeit
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Weitere Funktionen

Potenzfunktion

- $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit $f(x) = x^a$, $(a \in \mathbb{R})$ heißt Potenzfunktion.
- f ist streng monoton wachsend für $a > 0$ und streng monoton fallend für $a < 0$.
- Für $a \neq 0$ existiert eine inverse Funktion f^{-1} zu f

Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mit $f(x) = a^x$, $(a > 0, a \neq 1)$ heißt Exponentialfunktion zur Basis a.
- $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $g(y) = \log_a(y)$, $(a > 0, a \neq 1)$ heißt Logarithmusfunktion zur Basis a mit $g = f^{-1}$.
- Satz: f, g wachsen streng monoton für $a > 1$ und fallen streng monoton für $a < 1$

Grenzwert einer Funktion

Ausgangssituation

- Gegeben: Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$
- Grenzwert von f aufbauend auf Konvergenz von Zahlenfolgen
- Dazu betrachte: Alle Folgen $a^m = (a_1^m, \ldots, a_n^m)^T \in D$ mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}^n$, also $a^m \to a$ für $m \to \infty$
- Untersuche Grenzwerte $\lim\limits_{a^m \to a} f(a^m)$.

Definition des Grenzwerts einer Funktion

- f heißt an der Stelle $a \in \mathbb{R}^n$ (die nicht notwendig zu D gehören muss) konvergent gegen $\tilde{f} \in \mathbb{R}$,
- wenn
  1. mindestens eine Folge (a^m) mit $a^m \in D$, $a^m \neq a$ und $a^m \to a$ existiert (d.h. a ist kein „isolierter Punkt")
  2. für alle Folgen (a^m) mit $a^m \in D$ und $a^m \to a^0$ gilt $f(a^m) \to \tilde{f}$.
- $\tilde{f}$ heißt dann Grenzwert von $f(a^m)$.

Schreibweise für alle gegen a konvergierende Folgen (a^m):

$$\lim_{a^m \to a} f\left(a^m\right) = \tilde{f} \qquad \text{oder kurz} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = \tilde{f}$$

Begriff der Stetigkeit

Gegeben

- Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$

Definition

- f heißt stetig in x_0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f heißt stetig in $T \subset D$ $\Leftrightarrow$ f ist für alle $x \in T$ stetig
- Ist f für ein $\tilde{x} \in D$ nicht stetig, so heißt $\tilde{x}$ Unstetigkeitsstelle oder Sprungstelle

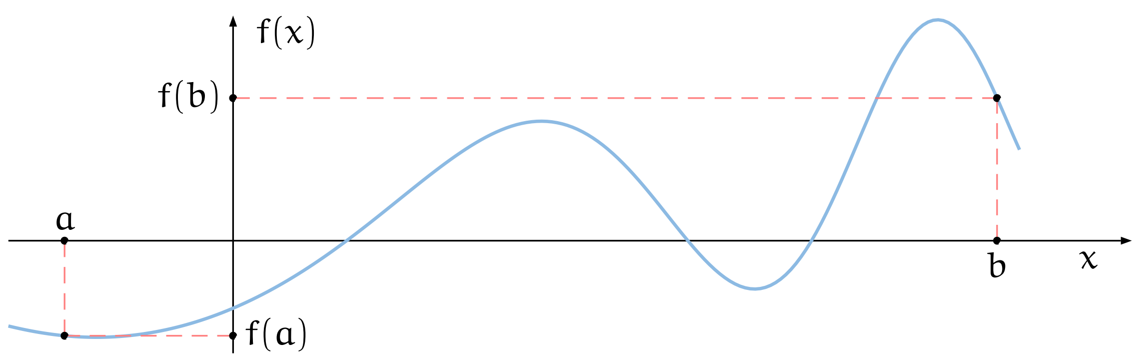
Satz

- Für stetige Funktionen f, g gilt:
  - $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g ($g(x) \neq 0$) sind stetig
  - $|f|$, $f \circ g$, sind stetig
  - Falls f auf einem Intervall definiert und invertierbar: f^{-1} stetig
- Alle elementaren Funktionen sind in ihrem Definitionsbereich stetig

Zwischenwertsatz

- Gegeben: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig
- Dann gilt:

$$f(a) < f(b) \quad \Rightarrow \quad \forall\, y \in [f(a), f(b)]\ \exists\, x \in [a, b] \quad \text{mit } f(x) = y$$



Mathematik: Gliederung

9 Differenzieren 1
- Differentialquotient und Ableitung
- Änderungsrate und Elastizität
- Kurvendiskussion

Warum Differentialrechnung?

Anwendungen

- Analyse und ökonomische Interpretation wirtschaftswissenschaftlicher Gesetzmäßigkeiten durch Untersuchung der Charakteristika von Funktionen
- Ermittlung von optimalen Lösungen betriebswirtschaftlicher Entscheidungsprobleme wie zum Beispiel Absatzmengenplanung, Loßgrößenplanung etc.

Wesentliche Lernziele

- Verständnis des Differentialquotienten
- Fähigkeit, eine Funktion zu differenzieren
- Bestimmung und Interpretation von Änderungsraten und Elastizitäten
- Durchführung und Interpretation von Kurvendiskussionen

Preisbestimmung beim Angebotsmonopol

Bekannt sind folgende Zusammenhänge:

- $p(x) = c_1 - c_2 x$ (Preis-Absatz-Funktion)
- $K(x) = c_3 + c_4 x$ (Kostenfunktion)
- (mit $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}^+$ Konstanten)

Damit ergibt sich:

- Umsatzfunktion: $U(x) = c_1 x - c_2 x^2$
- Gewinnfunktion:
  $G(x) = U(x) - K(x) = c_1 x - c_2 x^2 - (c_3 + c_4 x)$

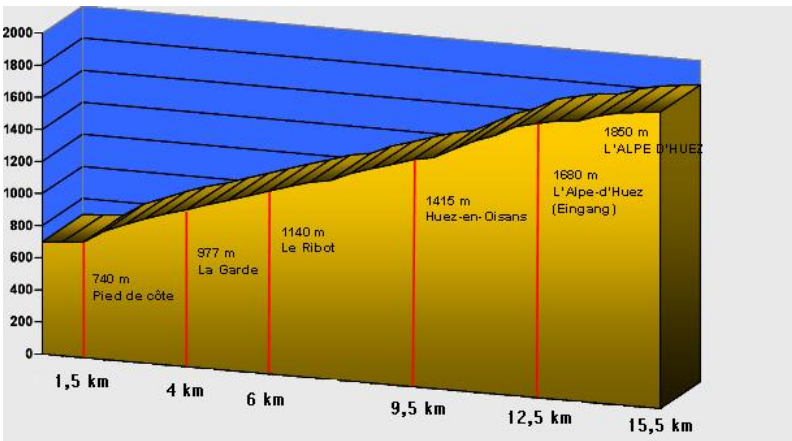
Fragen:

- Welche Menge/Welcher Preis ist Umsatz-/Gewinnmaximal?
- Welche Veränderung des Umsatzes ergibt sich bei einer Veränderung der Absatzmenge?

Differenzenquotient: Idee

Mathematik
Stefan Etschberger

- Tour de France: Anstieg nach L'Alpe d'Huez
- Länge des Anstiegs: 13,9 km
- Auf einer Höhe von 740 m beginnen die 21 Kehren
- Zielankunft liegt auf 1850 m
- Bestimmung von Steigungen: $\dfrac{\text{Höhendifferenz}}{\text{Distanz}}$



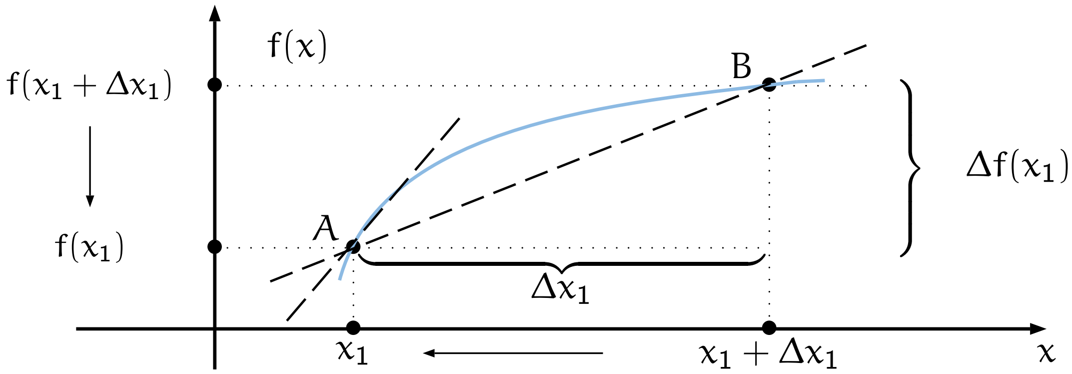
1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
9.1. Differentialquotient und Ableitung
9.2. Änderungsrate und Elastizität
9.3. Kurvendiskussion
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Differenzenquotient

- Gegeben: Reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \in \mathbb{R}$
- Dann heißt der Ausdruck $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

  Differenzenquotient (Steigung) von f im Intervall $[x_1, x_2] \subset D$
- Alternative Schreibweise, dabei Ersetzen von x_2 durch $x_1 + \Delta x_1$

$$\boxed{\frac{f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)}{\Delta x_1} = \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x_1}}$$



Differentialquotient

- Eine reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x_1 \in D$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x_1}$$

  existiert.
- Ist f an der Stelle x_1 differenzierbar, heißt

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x_1} \\ = & \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)}{\Delta x_1} \\ = & \frac{df}{dx_1}(x_1) = f'(x_1) \end{aligned}$$

  Differentialquotient oder erste Ableitung von f an der Stelle x_1.
- f heißt in D differenzierbar, wenn f für alle $x \in D$ differenzierbar ist.

G. W. Leibniz
(1646-1716)

I. Newton
(1643-1727)

Ableitungsregeln

- Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten (soweit definiert) von differenzierbaren Funktionen sind differenzierbar.
- Summenregel:

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

- Produktregel:

$$(f \cdot g)'(x) = f(x)' \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

- Daraus ergibt sich für eine Konstante c: $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$
- Quotientenregel:

$$\left(\frac{z}{n}\right)'(x) = \frac{z'(x) \cdot n(x) - z(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

- Kettenregel:

$$(g \circ f)'(x) = [g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Ableitung elementarer Funktionen

Gegeben: $f : D \to \mathbb{R}$, mit $D \subset \mathbb{R}$ und $a > 0,\ b \in \mathbb{R}$.
Dann gilt:

$f(x)$	$f'(x)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
x^b	bx^{b-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
9.1. Differentialquotient und Ableitung
9.2. Änderungsrate und Elastizität
9.3. Kurvendiskussion
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Ableitungen höherer Ordnung

- Gegeben: $f : D \to \mathbb{R}$, mit $D \subset \mathbb{R}$ und $a > 0,\ b \in \mathbb{R}$
- Wenn der Differentialquotient $f' : D \to \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbar ist, dann heißt

$$\frac{df'(x)}{dx} = \frac{d^2 f(x)}{(dx)^2} = f''(x)$$

  zweite Ableitung oder Differentialquotient zweiter Ordnung von f in $x \in D$.
- Analog für $n = 2,3,\ldots$:

$$\frac{d}{dx}\left(f^{(n-1)}(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{(n-1)} f(x)}{(dx)^{(n-1)}}\right) = f^{(n)}(x)$$

  $f^{(n)}(x)$ bezeichnet dabei die n-te Ableitung von f in $x \in D$.
- f heißt n-mal stetig differenzierbar in D, wenn f in D stetig und in jedem Punkt $x \in D$ n-mal differenzierbar ist

Definition Elastizität

- Voraussetzung: $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar.
- Dann heißt

$$\rho_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

  Änderungsrate von f
- und

$$\epsilon_f(x) = \frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)} = \rho_f(x) \cdot x$$

  Elastizität von f.

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
9.1. Differentialquotient und Ableitung
9.2. Änderungsrate und Elastizität
9.3. Kurvendiskussion
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Elastische versus unelastische Funktionen

Definition

- Für $|\epsilon_f(x)| > 1$ reagiert die relative Änderung von $f(x)$ überproportional auf relative Änderungen von x, die Funktion f heißt im Punkt x elastisch.
- Für $|\epsilon_f(x)| < 1$ bezeichnen wir die Funktion f im Punkt x als unelastisch.

Beispiel

- $f(x) = ae^{bx}$ mit $a, b \neq 0 \quad \Rightarrow$

$$\rho_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{abe^{bx}}{ae^{bx}} = b \quad \text{und} \quad \epsilon_f(x) = x \cdot \rho_f(x) = bx$$

- Die Änderungsrate der Exponentialfunktion ist also konstant
- Die Elastizität wächst linear mit x.

Steigung und erste Ableitung

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
9.1. Differentialquotient und Ableitung
9.2. Änderungsrate und Elastizität
9.3. Kurvendiskussion
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Gegeben:

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig und differenzierbar auf (a, b).

Dann gilt:

- f monoton wachsend in $[a, b] \;\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$
- f monoton fallend in $[a, b] \;\Leftrightarrow f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$
- f konstant in $[a, b] \;\Leftrightarrow f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$
- $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b) \;\Rightarrow f$ streng monoton wachsend in $[a, b]$
- $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b) \;\Rightarrow f$ streng monoton fallend in $[a, b]$

Krümmung und zweite Ableitung

Gegeben:

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig und **zweimal** differenzierbar auf (a, b).

Dann gilt:

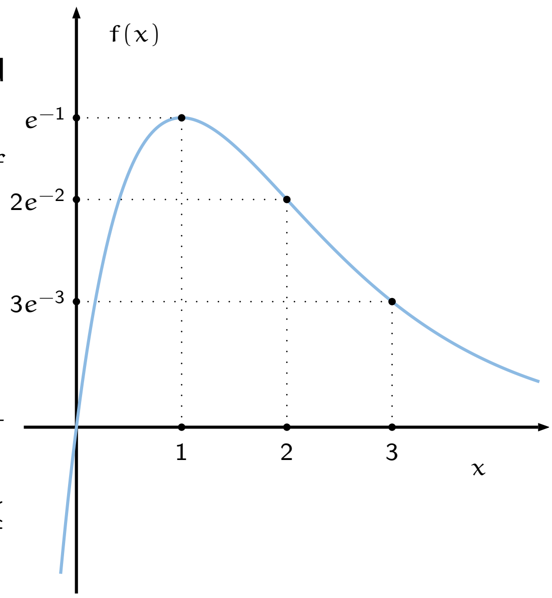
- f konvex in $[a, b]$ $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$
- f konkav in $[a, b]$ $\Leftrightarrow f''(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$
- f beschreibt eine Gerade in $[a, b]$ $\Leftrightarrow f''(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$
- $f''(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$ $\Rightarrow f$ streng konvex in $[a, b]$
- $f''(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$ $\Rightarrow f$ streng konkav in $[a, b]$

Beispiel

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
9.1. Differentialquotient und Ableitung
9.2. Änderungsrate und Elastizität
9.3. Kurvendiskussion
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = xe^{-x}$
- $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x}$
- Damit: $f'(x) \geq 0$ für $x \leq 1$ und $f'(x) \leq 0$ für $x \geq 1$
- $\Rightarrow$ f mon. wachsend für $x \leq 1$ und f mon. fallend für $x \geq 1$
- $\Rightarrow$ f global maximal bei $x = 1$



- $f''(x) = -e^{-x} - (1 - x)e^{-x} = (x - 2)e^{-x}$
- $\Rightarrow$ $f''(x) \geq 0$ für $x \geq 2$ und $f''(x) \leq 0$ für $x \leq 2$
- $\Rightarrow$ f konvex für $x \geq 2$ und f konkav für $x \leq 2$

Definition Wendepunkt

- $f(x)$ hat in $x_0 \in (a, b)$ einen Wendepunkt
- wenn es ein $r > 0$ gibt mit
- f ist in $[x_0 - r, x_0]$ streng konvex und
- f ist in $[x_0, x_0 + r]$ streng konkav und
- (oder umgekehrt)

Definition Terrassenpunkt

- x_0 ist Terrassenpunkt
- wenn x_0 Wendepunkt ist
- und $f'(x) = 0$

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
9.1. Differentialquotient und Ableitung
9.2. Änderungsrate und Elastizität
9.3. Kurvendiskussion
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs

Voraussetzung

- f zweimal stetig differenzierbar in (a, b)
- und $f'(x_0) = 0$ mit ($x_0 \in (a, b)$)

Dann gilt

- $f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_0$ ist lokales Maximum von f
- $f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0$ ist lokales Minimum von f

- $f''(x) < 0$ für alle $x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad x_0$ ist globales Maximum von f
- $f''(x) > 0$ für alle $x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad x_0$ ist globales Minimum von f

Mathematik: Gliederung

10 Differenzieren 2
- Partielle Ableitung
- Kurvendiskussion
- Optimierung mit Nebenbedingungen

Partielle Differenzierbarkeit

Betrachtet werden

- Funktionen $f : D \to \mathbb{R}, \quad D \in \mathbb{R}^n$
- mit $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = z$
- außerdem: i-ter Einheitsvektor $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$
- und: $x + h \cdot e_i \in D$ mit $h > 0$

Definition

- f heißt im Punkt x partiell differenzierbar bei Existenz des Genzwerts:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h \cdot e_i) - f(x)}{h}$$

- In diesem Fall heißt dieser Grenzwert $f_{x_i}(x)$ die erste partielle Ableitung von f nach x_i im Punkt x. Schreibweisen:

$$f^i(x) = f_{x_i}(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$$

Partielle Differenzierbarkeit

Differenzierbarkeit auf $D_1 \subset D$

- Die Funktion $f : D \supset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- heißt in $D_1 \subset D$ partiell differenzierbar
- wenn f für alle $x \in D_1$ partiell differenzierbar ist

Gradient

- Ist die Funktion $f : D \supset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im Punkt x
- nach allen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ differenzierbar, dann heißt

$$\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

- Gradient von f im Punkt $x \in D$

Tangentialhyperebenen

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
10.1. Partielle Ableitung
10.2. Kurvendiskussion
10.3. Optimierung mit Nebenbedingungen
11. Integration
12. DGLs

Tangentialebene

- Gegeben: $f : D \supset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und ein Punkt $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$
- Gesucht: Ebene, die f in $\tilde{x}$ berührt
- Tangentialebene:
  $T(x_1, x_2) = f(x) + \frac{\partial f}{x_1}(\tilde{x}) \cdot (x_1 - \tilde{x}_1) + \frac{\partial f}{x_2}(\tilde{x}) \cdot (x_2 - \tilde{x}_2)$

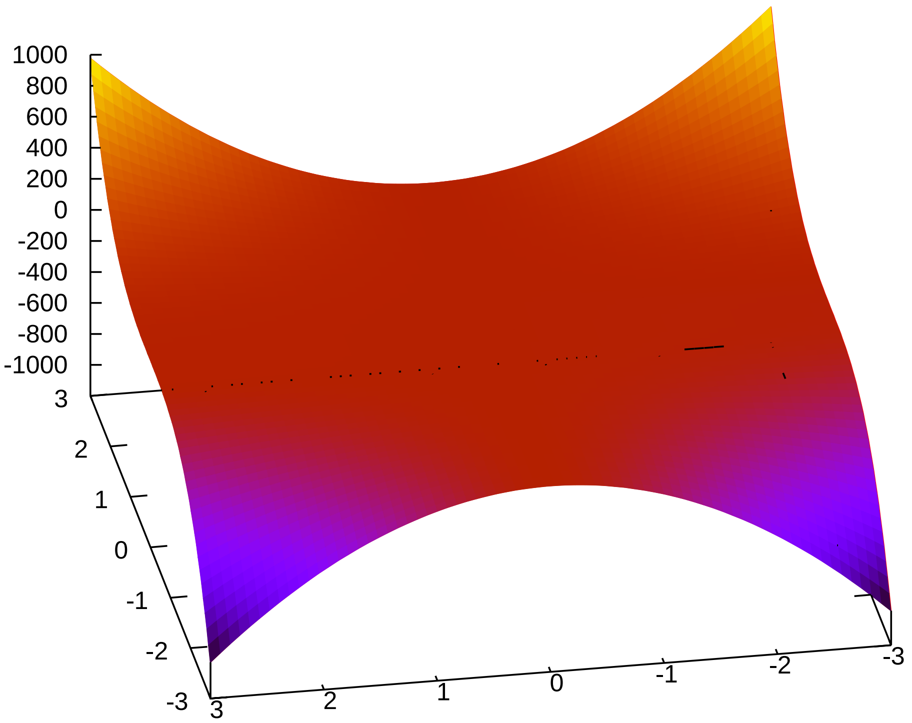
Tangentialhyperebene

- Gegeben: $f : D \supset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und ein Punkt $\tilde{x}$
- Gesucht: Ebene, die f in $\tilde{x}$ berührt
- Tangentialhyperebene:

$$H(x) = f(\tilde{x}) + (\nabla f(\tilde{x}))^T \cdot (x - \tilde{x})$$

Beispiel Tangential(hyper)ebene

- Gegeben: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 4x^3y^2 + 2y$
- Gesucht: Tangentialebene im Punkt $(1, -2, f(1, -2))$



Richtungsableitungen

Voraussetzungen

- $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ und ein Punkt $x \in D$
- mit stetig partiellen Ableitungen in D und
- ein Punkt $x \in D$
- und ein Richtungsvektor $r \in D$ mit $\|r\| = 1$.
- Außerdem: Es existiert sowohl ein $\epsilon > 0$ mit $[x - \epsilon r; x + \epsilon r] \in D$
- als auch der Grenzwert

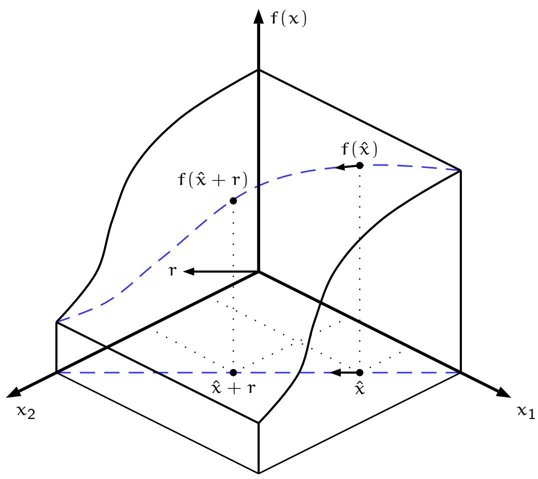
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + t \cdot r) - f(x)}{t}$$

Richtungsableitung

- Dann heißt

$$(\nabla f(x))^T \cdot r$$

Richtungsableitung von f an der Stelle x in Richtung r

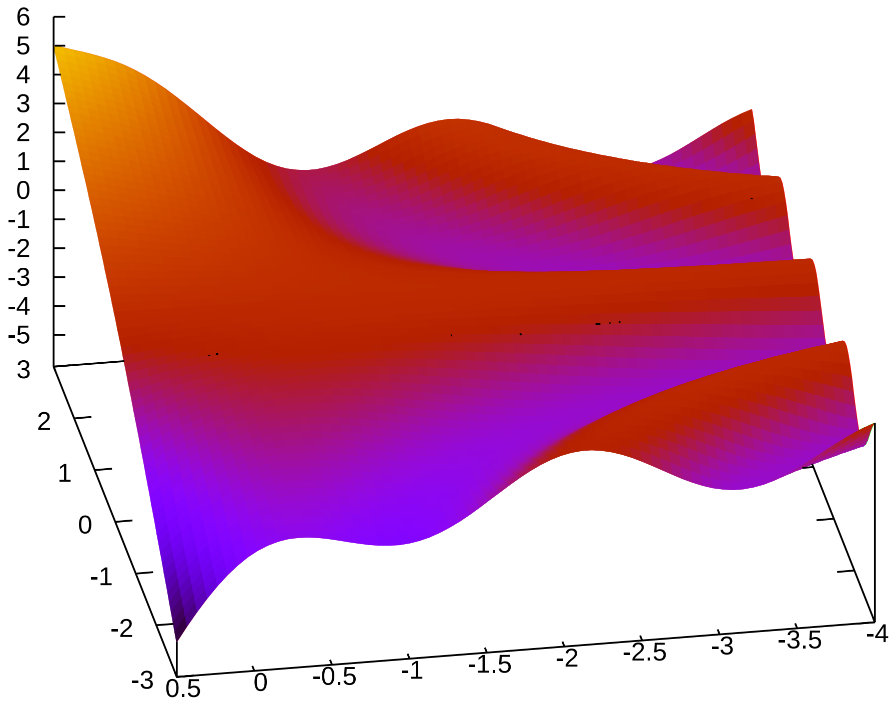


Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
10.1. Partielle Ableitung
10.2. Kurvendiskussion
10.3. Optimierung mit Nebenbedingungen
11. Integration
12. DGLs

Beispiel Tangential(hyper)ebene

- Gegeben: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x\,e^y + \cos(xy)$
- Gesucht: Ableitung im Punkt $(2,0)$ in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$



Höhere partielle Ableitungen

Mathematik
Stefan Etschberger

Voraussetzungen

- Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$
- in D nach allen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ partiell differenzierbar,
- auch partiell differenzierbar: alle partiellen Ableitungen $f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}$.

Dann heißt

- f zweimal partiell nach allen Variablen differenzierbar.
- Partielle Ableitungen zweiter Ordnung für $i, j = 1, \ldots, n$:

$$f^{ij}(x) = f_{x_i x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\right) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$$

- Achtung: Zuerst nach x_i, dann nach x_j differenzieren

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
10.1. Partielle Ableitung
10.2. Kurvendiskussion
10.3. Optimierung mit Nebenbedingungen
11. Integration
12. DGLs

Satz von Schwarz

Voraussetzungen

- $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ ist zweimal stetig partiell differenzierbar in D
- 2. partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \, \partial x_j}$$

- mit $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

Dann gilt für alle $x \in D$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \, \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \, \partial x_i}$$

Hermann Schwarz (1843-1921)

Hessematrix

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
10.1. Partielle Ableitung
10.2. Kurvendiskussion
10.3. Optimierung mit Nebenbedingungen
11. Integration
12. DGLs

Gegeben

- Zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$

Definition

- Die symmetrische Matrix

$$H_f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

heißt Hessematrix

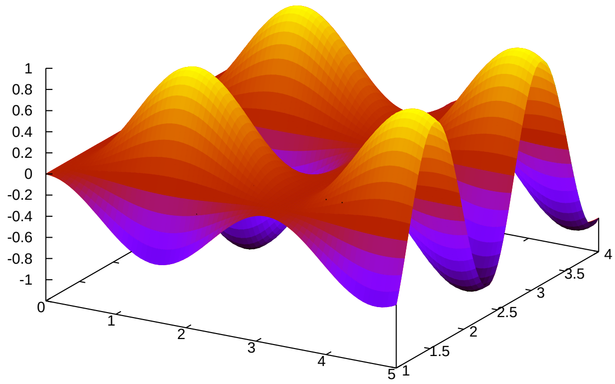
Lokale Extrema und der Gradient

Notwendige Bedingung für lokale Extrema

- Gegeben: Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ stetig partiell nach allen Variablen differenzierbar
- f hat im Punkt $\tilde{x}$ ein lokales Minimum oder Maximum
- Dann gilt: $\nabla f(\tilde{x}) = 0$

Beispiel

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- $f(x, y) = \sin^2(x) \cdot \cos(4y)$



Definitheitseigenschaften der Hessematrix

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
10.1. Partielle Ableitung
10.2. Kurvendiskussion
10.3. Optimierung mit Nebenbedingungen
11. Integration
12. DGLs

Am Punkt $\tilde{x}$ heißt die Hessematrix $H_f(\tilde{x})$

- positiv definit, wenn $x^T H_f(\tilde{x})\, x > 0$,
- positiv semidefinit, wenn $x^T H_f(\tilde{x})\, x \geq 0$,
- negativ definit, wenn $x^T H_f(\tilde{x})\, x < 0$,
- negativ semidefinit, wenn $x^T H_f(\tilde{x})\, x \leq 0$
- jeweils für alle x gilt.
- Andernfalls heißt $H_f(\tilde{x})$ indefinit.

Einfache Kriterien zu Definitheitseigenschaften

Hauptunterdeterminanten

- Gegeben: Symmetrische $n \times n$-Matrix A
- Dann heißt

$$\det H_i = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix}$$

die i-te Hauptunterdeterminante $(i = 1, \ldots, n)$ von A.

Satz

- Matrix A positiv definit $\Leftrightarrow \det H_i > 0$
  $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind positiv
- Matrix A negativ definit $\Leftrightarrow (-1)^i \det H_i > 0$
  $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind negativ

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
10.1. Partielle Ableitung
10.2. Kurvendiskussion
10.3. Optimierung mit Nebenbedingungen
11. Integration
12. DGLs

Hinreichende Bedingung für lokale Extrema

Voraussetzungen

- $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex und offen
- Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar
- Es gibt ein $\tilde{x}$, für das $\nabla f(\tilde{x}) = 0$

Satz

- $H_f(\tilde{x})$ ist negativ definit $\Rightarrow \tilde{x}$ ist lokale Maximalstelle von f
- $H_f(\tilde{x})$ ist positiv definit $\Rightarrow \tilde{x}$ ist lokale Minimalstelle von f
- $H_f(\tilde{x})$ ist indefinit $\Rightarrow \tilde{x}$ ist keine lokale Extremalstelle von f

- $H_f(x)$ ist positiv definit für alle $x \in D$
  $\Rightarrow \tilde{x}$ ist einziges globales Minimum von f
- $H_f(x)$ ist negativ definit für alle $x \in D$
  $\Rightarrow \tilde{x}$ ist globales Maximum von f

Konvexität und Konkavität

Voraussetzungen

- $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex und offen
- Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar

Satz

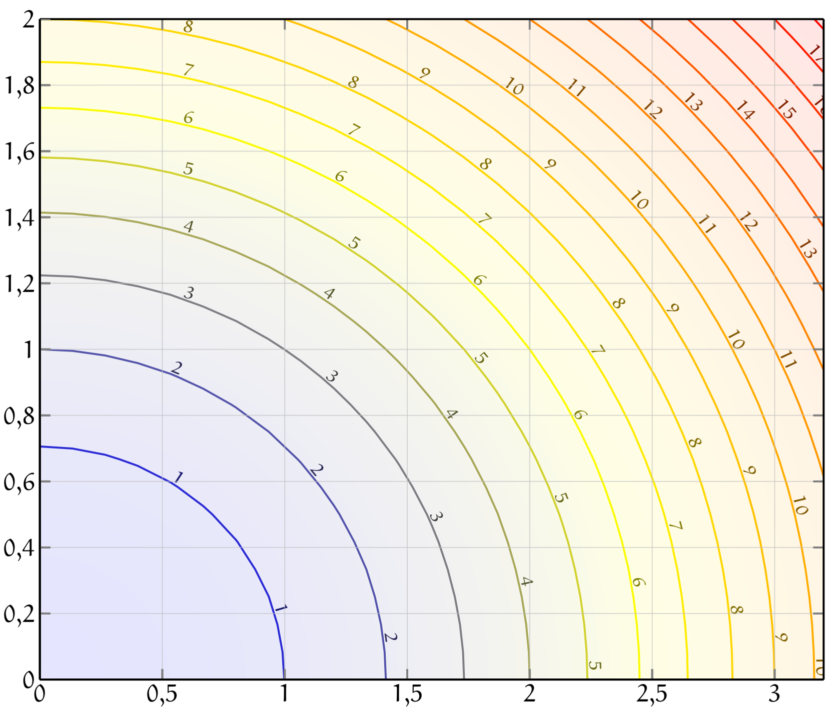
- $H_f(x)$ ist positiv definit für alle $x \in D$
  $\Rightarrow$ f ist streng konvex in D
- $H_f(x)$ ist negativ definit für alle $x \in D$
  $\Rightarrow$ f ist streng konkav in D

- $H_f(x)$ ist positiv semidefinit für alle $x \in D$
  $\Rightarrow$ f ist konvex in D
- $H_f(x)$ ist negativ semidefinit für alle $x \in D$
  $\Rightarrow$ f ist konkav in D

Beispiel

Problem

- Betrachte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + 2y^2$
- Gesucht: Punkt in $\mathbb{R}^2$ mit kleinstem Wert von f
- auf der Geraden $2y + x - 3 = 0$



Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
10.1. Partielle Ableitung
10.2. Kurvendiskussion
10.3. Optimierung mit Nebenbedingungen
11. Integration
12. DGLs

Allgemeines Problem

Aufgabe

- Maximiere (oder minimiere) Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- in Abhängigkeit von $x = (x_1, \ldots, x_n)$,
- so dass die Nebenbedingungen $g^i(x) = 0$ mit $g^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $i = 1, \ldots, m$ erfüllt sind
- Kurz:

$$
\begin{aligned}
& f(x) \to \max \quad (\min) \\
\text{NB:} \quad & g^1(x) = 0 \\
& \vdots \\
& g^m(x) = 0
\end{aligned}
$$

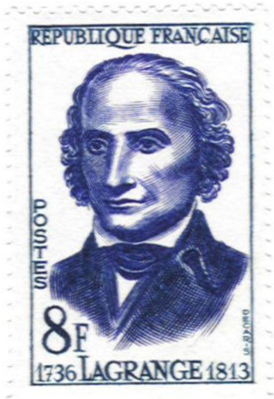
Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
10.1. Partielle Ableitung
10.2. Kurvendiskussion
10.3. Optimierung mit Nebenbedingungen
11. Integration
12. DGLs

Der Ansatz von Lagrange

Idee von Lagrange

- Gut wäre: Transformation des Optimierungsproblems mit Nebenbedingungen in eines ohne NB.
- Im Optimum: Gradient der zu optimierenden Funktion und Gradient der NB sind parallel



Lagrangefunktion

- Gegeben: Optimierungsproblem (O) mit $f(x) \to \max(\min)$ unter den Nebenbedingungen $g^j(x) = 0$ für $j = 1, \ldots, m$
- Dazu wird definiert: Lagrangefunktion $L : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$

$$
L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g^j(x)
$$

Satz von Lagrange

Voraussetzungen

- $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$, zweimal stetig partiell differenzierbar
- Optimierungsproblem (O) mit $f(x) \to \max\ (\min)$ unter den Nebenbedingungen $g^j(x) = 0$ für $j = 1, \ldots, m$
- Hessematrix der Lagrangefunktion:

$$\hat{H}_L(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

- Eine Lösung $(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ des Systems $\nabla L(x, \lambda) = 0$

Dann gilt:

- $\hat{H}_L(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ negativ definit $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist lokales Maximum von (O)
- $\hat{H}_L(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ positiv definit $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist lokales Minimum von (O)
- $\hat{H}_L(x, \tilde{\lambda})$ negativ definit für alle x $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist globales Maximum von (O)
- $\hat{H}_L(x, \tilde{\lambda})$ positiv definit für alle x $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist globales Minimum von (O)

Variable Lagrange Multiplikatoren

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
10.1. Partielle Ableitung
10.2. Kurvendiskussion
10.3. Optimierung mit Nebenbedingungen
11. Integration
12. DGLs

Voraussetzungen

- $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$, zweimal stetig partiell differenzierbar
- Optimierungsproblem (O) mit $f(x) \to \max\ (\min)$ unter den Nebenbedingungen $g^j(x) = 0$ für $j = 1, \ldots, m$
- Lagrangefunktion

$$\hat{L}(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda(x) g^j(x)$$

Dann gilt:

- Ist $\tilde{x}$ eine Maximalstelle bzw. Minimalstelle von $\hat{L}$
- mit $g^j(\tilde{x}) = 0$ für alle $j = 1, \ldots, m$
- dann ist $\tilde{x}$ auch Maximalstelle bzw. Minimalstelle von (O)

Mathematik: Gliederung

11 Integration

Unbestimmte Integrale
Bestimmte Integrale
Uneigentliche Integrale
Mehrdimensionale Integrale

Einleitung

- Umkehrung der Fragestellung der Differentialrechnung
- Jetzt gesucht:
  Funktion, deren Änderungsverhalten bekannt ist
- Beispiel:
  - Bekannt:
    Geschwindigkeit eines Körpers in Abhängigkeit der Zeit
  - Gesucht:
    Ort in Abhängigkeit der Zeit

Gliederung

1. Unbestimmte Integrale
2. Riemannsche Summen und bestimmte Integrale
3. Uneigentliche Integrale
4. Anmerkungen zu mehrdimensionalen Integralen

Stammfunktion

- Eine differenzierbare Funktion $F : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, wenn für alle $x \in D$ gilt

$$F'(x) = f(x)$$

- Sind $F, \hat{F}$ beliebige Stammfunktionen von f, gilt für alle $x \in D$:

$$\hat{F}(x) - F(x) = \text{konstant}$$

- Also: Hat man eine Stammfunktion F gefunden, gilt für alle anderen Stammfunktionen

$$\hat{F}(x) = F(x) + c$$

Unbestimmtes Integral

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
1. Unbestimmte Integrale
2. Bestimmte Integrale
3. Uneigentliche Integrale
4. Mehrdimensionale Integrale
12. DGLs

- Ist $F : \ D \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f : \ D \to \mathbb{R}$, so heißt

$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = F(x) + c \qquad \text{für beliebiges } c \in \mathbb{R}$$

das unbestimmte Integral der Funktion f.

- Weitere Bezeichnungen:

x : Integrationsvariable
$f(x)$: Integrand
c : Integrationskonstante

- Unbestimmte Integration ist Umkehrung der Differentiation

Einige unbestimmte Integrale

- Sei f eine reelle Funktion und $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante. Dann gilt:

a) $f(x) = a \; (a \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = ax + c$

b) $f(x) = x^n \; (n \in \mathbb{N},\; x \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$

$f(x) = x^m \; (m = -2, -3, \ldots,\; x \neq 0) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} + c$

$f(x) = x^r \; (r \in \mathbb{R},\; r \neq -1,\; x > 0) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$

c) $f(x) = x^{-1} \; (x \neq 0) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = \ln|x| + c$

d) $f(x) = \sin x \; (x \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = -\cos x + c$

$f(x) = \cos x \; (x \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = \sin x + c$

e) $f(x) = e^x \; (x \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = e^x + c$

$f(x) = a^x \; (a > 0,\; a \neq 1,\; x \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c$

Rechenregeln

Summen und konstante Faktoren

- Für die reellen Funktionen $f, g: \; D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ existiere das unbestimmte Integral. Dann gilt:

a) $$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

b) $$\int a f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx \qquad \text{für alle} \quad a \in \mathbb{R}$$

Partielle Integration

- Für zwei stetig differenzierbare Funktionen $f, g: \; D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ gilt:

$$\int f(x) g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x) g(x)\,dx$$

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
1. Unbestimmte Integrale
2. Bestimmte Integrale
3. Uneigentliche Integrale
4. Mehrdimensionale Integrale
12. DGLs

Substitutionsregel

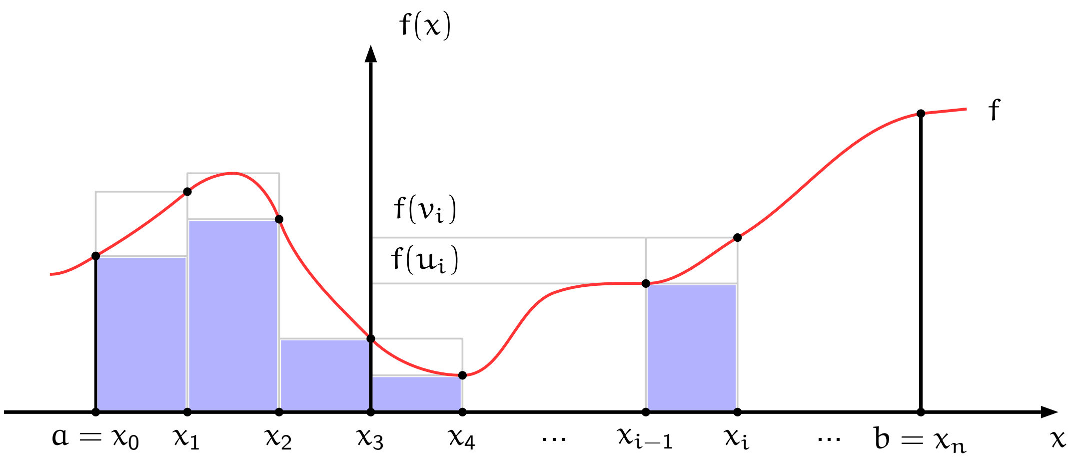
- Die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ besitze eine Stammfunktion F und
- $g: D_1 \to \mathbb{R}$, $D_1 \subset \mathbb{R}$, $g(D_1) \subset D$ sei stetig differenzierbar.
- Dann existiert die zusammengesetzte Funktion $f \circ g: D_1 \to \mathbb{R}$ mit $z = f(y) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$
- und es gilt mit $y = g(x)$

$$
\begin{aligned}
\int f(g(x))g'(x)\,dx &= \int f(y)\,dy \\
&= F(y) + c = F(g(x)) + c \\
&= (F \circ g)(x) + c
\end{aligned}
$$

- mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig.

- Gegeben: Beschränkte und stetige Funktion $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \geq 0$
- Unterteilen von $[a, b]$ in $[a, x_1],\ [x_1, x_2],\ \ldots,\ [x_{i-1}, x_i],\ \ldots,\ [x_{n-1}, b]$
- mit $a = x_0,\ b = x_n$
- In jedem Teilintervall: Wähle Maximum und Minimum:

$$
\begin{aligned}
f(u_i) &= \min\{f(x):\ x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{und} \\
f(v_i) &= \max\{f(x):\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}\,.
\end{aligned}
$$



Riemannsche Summen

- Untere und obere Grenze $I^n_{\min} \leqq I \leqq I^n_{\max}$ für Flächeninhalt unter Kurve mit:

$$I^n_{\min} = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)(x_i - x_{i-1}), \quad I^n_{\max} = \sum_{i=1}^{n} f(v_i)(x_i - x_{i-1})$$

- Jetzt: Verfeinerung der Unterteilung von $[a, b] \Rightarrow$ Folgen $(I^n_{\min})$ und $(I^n_{\max})$
- Existieren für $n \to \infty$ die Grenzwerte der beiden Folgen und gilt für den wahren Flächeninhalt I unter der Kurve

$$\lim_{n\to\infty} I^n_{\min} = \lim_{n\to\infty} I^n_{\max} = I$$

- dann heißt f Riemann-integrierbar im Intervall $[a, b]$
- Schreibweise:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

- Bezeichnungen:

I	Bestimmtes Integral von f im Intervall $[a, b]$
x	Integrationsvariable
$f(x)$	Integrand
a, b	Integrationsrenzen

Existenz von bestimmten Integralen

- Gegeben: Reelle Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

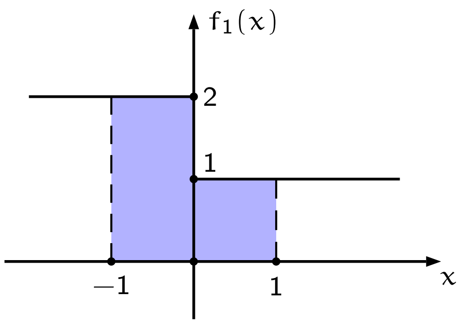
a) f stetig in $[a, b] \quad \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ existiert

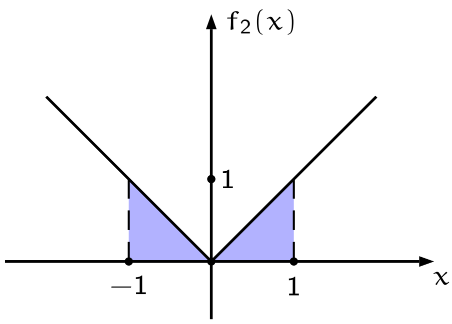
b) f monoton in $[a, b] \quad \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ existiert

- Beispiele: Gesucht: $\int_{-1}^{+1} f_i(x)\,dx$ für

$$f_1(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geqq 0 \end{cases} \quad \text{und}$$

$$f_2(x) = |x|$$





Sätze zu bestimmten Integralen

- Gegeben: Integrierbare Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$.
  Dann gilt:

a) $$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{für alle } c \in \mathbb{R}$$

b) $f(x) \leqq g(x)$ für alle $x \in [a, b] \Rightarrow$
$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx$$

c) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad \text{für alle } c \in (a, b)$$

- Definiert wird außerdem:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Zusammenhang bestimmtes und unbestimmtes Integral

Zusammenhang

- Gegeben $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ eine in D stetige Funktion.
- Dann existiert eine Stammfunktion F von f mit $F'(x) = f(x)$
- sowie das unbestimmte Integral $\int f(x)dx = F(x) + c$
- und das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Unterschiede

- Bestimmtes Integral entspricht einer reellen Zahl
- Unbestimmtes Integral entspricht Schar von Funktionen

Integrationsregeln

a) Für integrierbare Funktionen $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt die Additionsregel

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx\,.$$

b) Für stetig differenzierbare Funktionen $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt die Regel der partiellen Integration

$$\int_a^b f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\, dx$$

c) Ist $f : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar mit der Stammfunktion F und $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g[a, b] \subset [\alpha, \beta]$ stetig differenzierbar, so gilt die Substitutionsregel

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x))\Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, dy\,.$$

Grenzen bei $\pm\infty$

- Die reelle Funktion f sei für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und integrierbar.
- Dann heißt der Grenzwert $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx$, falls er existiert, das konvergente uneigentliche Integral von f im Intervall $[a, \infty)$, und man schreibt

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^\infty f(x)\, dx\,.$$

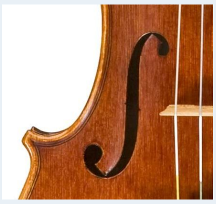
- Andernfalls spricht man von einem divergenten uneigentlichen Integral.
- Entsprechend definiert man das konvergente uneigentliche Integral von f im Intervall $(-\infty, b]$, falls folgender Grenzwert existiert:

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\, dx = \int_{-\infty}^b f(x)\, dx$$

- Sind beide Integrale $\int_{-\infty}^a f(x)\, dx$ und $\int_a^\infty f(x)\, dx$ konvergent, so existiert auch

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx = \int_{-\infty}^a f(x)\, dx + \int_a^\infty f(x)\, dx\,.$$

Beliebige Grenzen



- Geg.: Reelle Funktion $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, die für alle $x \in [a, b-\epsilon]$ mit $\epsilon \in (0, b-a)$ integrierbar. Dann heißt Grenzwert $\lim\limits_{\epsilon\to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx$ (falls er existiert) konvergentes uneigentliches Integral von f im Intervall $[a, b]$. Schreibweise:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

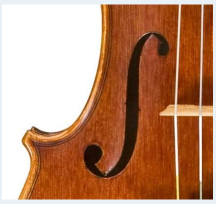
- Andernfalls: Divergentes uneigentliches Integral
- Analog für alle $x \in [a+\epsilon, b]$ mit $\epsilon \in (0, b-a)$, konvergentes uneigentliches Integral von f in $[a, b]$, mit

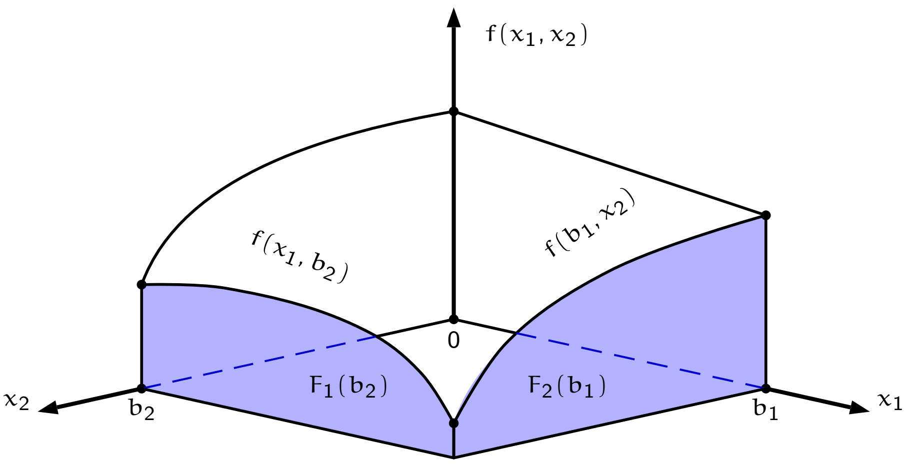
$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

- Ist f in (a, b) definiert und sind für $c \in (a, b)$ die uneigentlichen Integrale $\int_a^c f(x)\,dx$ und $\int_c^b f(x)\,dx$ konvergent, dann ist auch folgendes Integral konvergent:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Parameterintegral: Satz





- Ist die Funktion $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist auch
- $F_1 : [a_2, b_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $F_1(x_2) = \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2)\,dx_1$ und
- $F_2 : [a_1, b_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $F_2(x_1) = \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2)\,dx_2$ stetig.

Vertauschung: Intergration und Differentiation

- Gegeben: stetige Funktion $f: [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ und f ist nach beiden Variablen stetig partiell differenzierbar.
- Dann sind die Funktionen F_1, F_2 mit

$$F_1(x_2) = \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2)\, dx_1 \quad \text{und} \quad F_2(x_1) = \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2)\, dx_2$$

stetig differenzierbar, und es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{dF_1}{dx_2} &= \frac{d}{dx_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2)\, dx_1 &&= \int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}\, dx_1 \\ \frac{dF_2}{dx_1} &= \frac{d}{dx_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2)\, dx_2 &&= \int_{a_2}^{b_2} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}\, dx_2 \end{aligned}$$

- Also: Differentiation und Integration können vertauscht werden.

Satz von Fubini

Mathematik
Stefan Etschberger

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
1. Unbestimmte Integrale
2. Bestimmte Integrale
3. Uneigentliche Integrale
4. Mehrdimensionale Integrale
12. DGLs

- Die stetige Funktion $f: [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ sei nach beiden Variablen stetig partiell differenzierbar.
- Dann gilt:

$$\int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2)\, dx_2\, dx_1$$

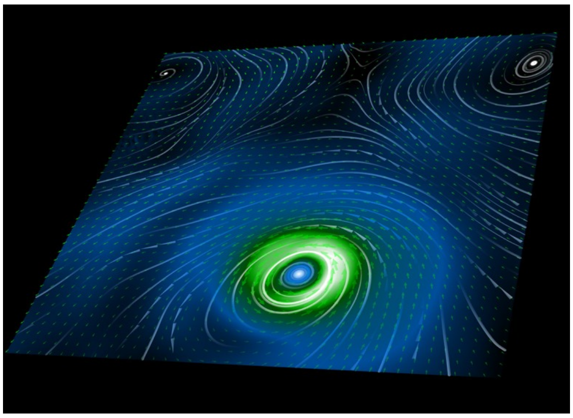
Interpretation über Riemannsche Summen

- Existieren die Grenzwerte der unteren und oberen Schranke von I analog dem eindimensionalen Fall für $n \to \infty$ und sind sie identisch, so heißt die Funktion $f: [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ in ihrem Definitionsbereich integrierbar.
- Ist f stetig und stetig partiell differenzierbar, so gilt

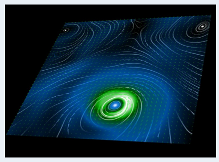
$$I = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2)\, dx_2\, dx_1 .$$

- Man bezeichnet das Doppelintegral I als das bestimmte Integral von f im Bereich $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, ferner
- x_1, x_2 als Integrationsvariable,
- $f(x_1, x_2)$ als Integrand und
- a_1, b_1, a_2, b_2 als Integrationsgrenzen

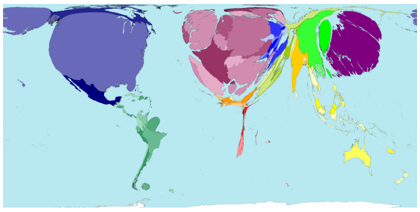
Mathematik: Gliederung

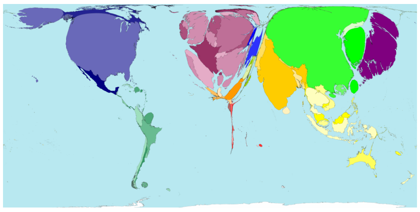


Makroökonomische Systeme und deren Beschreibung



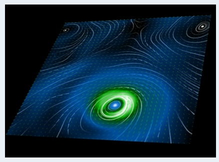
- Lassen sich Beobachtungen an wirtschaftlichen Daten und vor allem deren Veränderung nutzen,
- um Entwicklungen aggregierter Größen in Volkswirtschaften wie z.B.
  - den **Beschäftigungsgrad** oder
  - das **Bruttoinladsprodukt**
- zu modellieren und zu analysieren?





Dazu: **Makroökonomische Modelle**

Das Modell zyklischen Wachstums von Goodwin



Lohnquote und Beschäftigungsgrad: Problem

▸ Modellannahmen

- Betrachtung einer wirtschaftlichen Wachstumsphase
- Gesucht: Ausdruck für sich gegenseitig beeinflussende Lohnquote $u(t)$ und Beschäftigungsgrad $v(t)$

Streikende bei der Telekom

Verwendete Symbole:

- Wachstumsfaktor der Arbeitsproduktivität bzw. des Arbeitskräftepotentials: α, β
- Linearisierungskonstanten: ρ, γ
- Output pro Kapital: κ

Modellannahmen reduzieren sich zu:

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{v}(t)}{v(t)} &= (\kappa - \alpha - \beta) - \kappa \cdot u(t) \\
\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} &= -(\gamma + \alpha) + \rho \cdot v(t)
\end{aligned}$$

- Mit den Abkürzungen:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \kappa - \alpha - \beta \quad ; \quad a_2 = \kappa \\
b_1 &= \gamma + \alpha \quad ; \quad b_2 = \rho
\end{aligned}$$

- ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{v}(t)}{v(t)} &= a_1 - a_2 u(t) \\
\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} &= -b_1 + b_2 v(t)
\end{aligned}$$

Zusammenfassung

Beschäftigungsgrad und Lohnquote

$$\frac{\dot{v}(t)}{v(t)} = a_1 - a_2 \cdot u(t)$$
$$\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = -b_1 + b_2 \cdot v(t)$$

- Gleichungen beinhalten jeweils die gesuchte Funktion und ihre Ableitung
- Und nur **eine Veränderliche** (hier t)
- Solche Gleichungen nennt man gewöhnliche Differentialgleichungen
- Nötig für weitere Analyse der Modelle: Aussagen über Verhalten des Systems

Begriffe

Mathematik PLUS
Stefan Etschberger

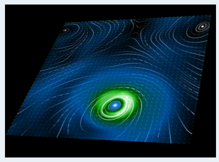
- Differentialgleichung: Eine Gleichung einer gesuchten Funktion y und einigen ihrer Ableitungen
- Gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung: Gleichung gesuchter Funktion y und einigen Ableitungen nach **einer** Veränderlichen x, also Gleichungen der Form:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

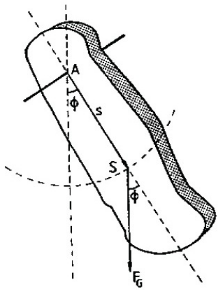
- Explizite Differentialgleichung erster Ordnung: $y' = f(y, x)$
- Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} &F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \\ &y(x_0) = y_0, \\ &y'(x_0) = y'_0, \ldots, \\ &y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \end{aligned}$$

Analyse von Differentialgleichungen

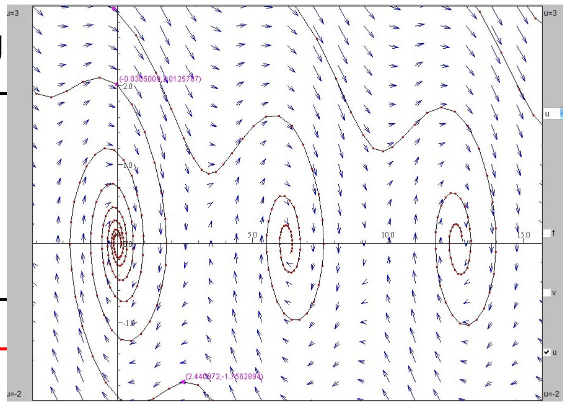


- Wichtige Fragen:
  - Gibt es eine explizite Lösung?
  - Falls vorhanden: Eindeutigkeit?
- Oft trotz Existenz und Eindeutigkeit analytische Lösung nicht möglich; dann zum Beispiel:
  - Richtungsfelder
  - **Numerische Lösungen**
  - Bei Systemen ohne Abhängigkeit von Parameter: Trajektorien
  - Stabile Punkte

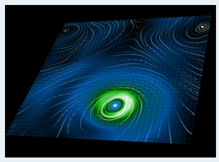


- Physikalisches Pendel, Winkel $v(t)$, Winkelgeschwindigkeit $u(t)$, Dämpfung $\lambda > 0$

$$\frac{dv}{dt} = u(t)$$
$$\frac{du}{dt} = -\sin(v) - \lambda \cdot u(t)$$

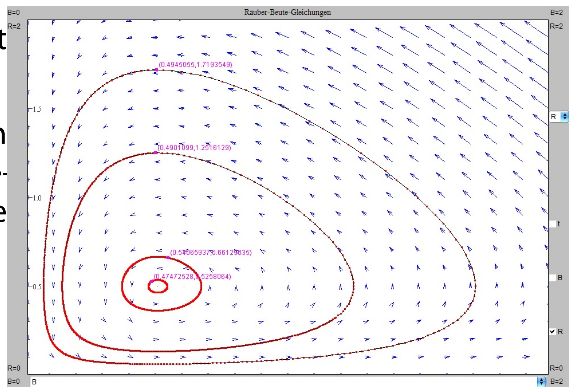


Beispiel: Räuber-Beute-Dynamik



- Pflanzenfresserpopulation $B(t)$ wächst (ungestört) mit konstanter Rate a_1.
- Bei Existenz von Raubtieren mit den Pflanzenfressern als Beute: Raubtierbestand $R(t)$ vermindert Wachstumsrate der Beutetiere proportional:

$$\frac{\dot{B}(t)}{B(t)} = a_1 - a_2 \cdot R(t)$$



- Ohne Beute ($B(t) = 0$) schrumpft Raubtierbestand kontinuierlich mit konstanter Rate b_1.
- Andererseite wächst ihr Bestand proportional zur vorhandenen Menge der Beutetiere:

$$\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} = -b_1 + b_2 \cdot B(t)$$

- System von Differentialgleichungen beschreibt im B-R-Diagramm zyklische Kurven.
- Bekannt als Lotka-Volterra-Gleichungen

Analogie der Modelle

Beute-Jäger-Modell	Goodman-Modell
$\frac{\dot{B}(t)}{B(t)} = a_1 - a_2 \cdot R(t)$	$\frac{\dot{v}(t)}{v(t)} = a_1 - a_2 \cdot u(t)$
$\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} = -b_1 + b_2 \cdot B(t)$	$\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = -b_1 + b_2 \cdot v(t)$

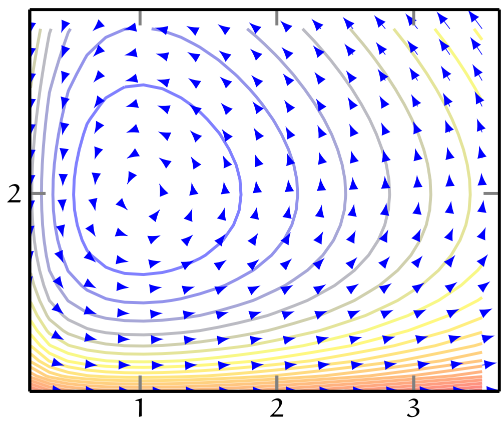
- Die Beschäftigungsgrad $v(t)$ entspricht der Beute,
- Die Lohnquote $u(t)$ den Räubern
- Jede Lösung: Zyklus im u-v-Diagramm
- Anfangsbedingungen bestimmen Orbit
- Wo ist stationäre Lösung?
- Stationäre Lösung bei $u = a_1/a_2$ und $v = b_1/b_2$

Mechanik des Modells

1. Beschäftigungsgrad v kleiner als b_1/b_2 $\longrightarrow$ Lohndruck ist gering, Reallöhne sinken.
2. Dadurch: Sinkende Lohnquote (und steigende Gewinnquote $\longrightarrow$ wachsende Investitionen)
3. Diese erhöhen die Wachstumsrate der Produktion und sobald diese das Wachstum der Arbeitsproduktivität übersteigt, kommt es zu Neueinstellungen und der Beschäftigungsgrad nimmt zu.
4. Dann: Steigender Beschäftigungsgrad und Lohndruck; Reallöhne wachsen, senken die Gewinnquote, die Investitionen und die Wachstumsrate der Wirtschaft. Sobald diese unter die Wachstumsrate der Arbeitsproduktivität gesunken ist, sinkt der Beschäftigungsgrad wieder.

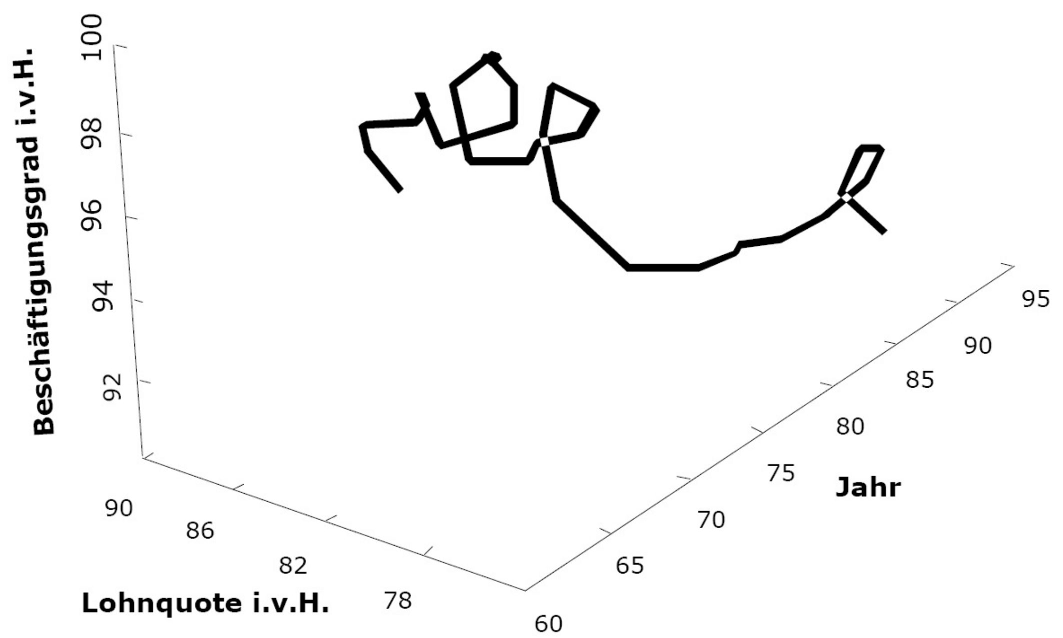
$$\frac{\dot{v}(t)}{v(t)} = a_1 - a_2 \cdot u(t)$$
$$\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = -b_1 + b_2 \cdot v(t)$$

Richtungsfeld mit $a_1 = 2, \quad a_2 = b_1 = b_2 = 1$



Empirischer Gehalt des Modells

Westdeutsche Daten 1960-1995



Quelle: Sachverständigenrat (1996)

Beispiele für analytisch lösbare DGL

- Konstante Beschleunigung:

$$\ddot{s}(t) = -g$$

- DGL der Form

$$y' = f(x) \cdot g(x), \quad \text{z.B. } y' = x^2 y$$

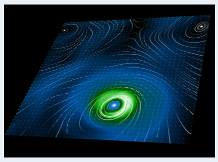
- Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung der Form

$$y' + f(x)y = g(x)$$

mit

- $g(x) = 0$: homogene DGL
- $g(x) \neq 0$: inhomogene DGL

Lineare DGl erster Ordnung



Motivation

- $\dot{u}(t) = \alpha \cdot u(t)$ mit konstantem α beschreibt Wachstums- oder Schrumpfungsprozesse
- Aber: Um 1650 jährliche Wachstumsrate der Weltbevölkerung 0,3% ($\alpha \approx 0{,}003$), heute ca. 2% ($\alpha \approx 0{,}02$)
- Also: α nicht konstant $\longrightarrow \alpha(t)$
- Und: Gegebenfalls Zufuhr oder Abwanderung von/nach außen (Immi- bzw. Emigration)
- Dann DGl: $\dot{u}(t) = \alpha(t)u(t) + s(t)$

Definition

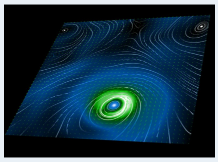
- Lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = f(x)y + s(x)$$

- $s(x)$ heißt Störfunktion
- Wenn $s(x) : x \mapsto 0$: Homogene DGl $y' = f(x)y$
- Andernfalls: Inhomogene DGl

Lineare DGl erster Ordnung

PLUS
Mathematik
Stefan Etschberger



Zunächst: Lösung der homogenen Gleichung

- Klar: Wenn $y(x)$ eine Lösung der DGl, dann ist auch ein Vielfaches Cy eine Lösung
- Annahme: $f(x)$ soll stetig auf Intervall I sein. Damit existiert Stammfunktion

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \quad \text{für alle } x \in I \quad \text{mit } x_0 \in I \text{ fest}$$

- Es gilt:

$$\frac{d}{dx} e^{\int f(x)dx} = f(x)e^{\int f(x)dx}$$

- Damit $z : x \mapsto e^{\int f(x)dx}$ ist Lösung, jedes Vielfache Cz auch
- Das sind auch alle Lösungen, denn bei beliebiger Lösung y gilt $\frac{d}{dx}\frac{y}{z} = 0$, also y/z konstant, z.B. C, damit $y = Cz$

1. Grundlegende Bausteine
2. Grundlegende Werkzeuge
3. Aussagenlogik
4. Lineare Algebra
5. Lineare Programme
6. Folgen und Reihen
7. Finanzmathematik
8. Reelle Funktionen
9. Differenzieren 1
10. Differenzieren 2
11. Integration
12. DGLs
Einführung
Grundlegende Begriffe
Qualitative Analyse von Systemen
Beispiele für analytisch lösbare DGL
Lineare DGl
Lineare DGl erster Ordnung

Satz zur Lösung von homogenen linearen DGls 1. Ordnung

- Voraussetzung: $f(x)$ auf dem Intervall I stetig.
- Dann sind die Lösungen der DGL $y' = f(x)y$ genau die Funktionen

$$y : x \mapsto C \cdot e^{\int f(x)dx} \quad \text{mit der freien Konstante } C$$

- Und: Die Anfangswertaufgabe $y' = f(x)y$, $y(x_0) = y_0$ (mit $x_0 \in I$, y_0 beliebig) besitzt genau eine Lösung
- Bestimmung von C über über Anpassung der Anfangsbedingung.
- Beispiele:
  - $y' = (\sin x)y, \quad y(0) = 1$
  - $y' = \frac{1}{x}y, \quad y(1) = 2$

Lösung der inhomogenen Gleichung

- Gegeben: $y' = f(x)y + s(x)$, wobei f und s auf dem Intervall I definiert sind, und $f(x)$ auf I stetig.
- Zuerst: Suche davon eine partikuläre Lösung y_p, dann gilt für jede andere Lösung der DGl:

$$(y - y_p)' = fy + s - (fy_p + s) = f(y - y_p)$$

- $y - y_p$ ist also Lösung der homogenen DGl und damit gilt für y

$$y(x) = y_p(x) + C \cdot e^{\int f(x)dx}$$

- Damit ist das die allgemeine Lösung der DGl.
- Praktisch: Zur Lösung der inhomogenen Gleichung ausreichend: Finden irgendeiner partikulären Lösung y_p
- Methode: Variation der Konstanten

Mathematik PLUS
Stefan Etschberger

Variation der Konstanten

- Fasse C als differenzierbare Funktion in $y_p := C \cdot e^{\int f(x) dx}$ auf
- Eingesetzt in $y' = f(x)y + s(x)$ ergibt sich

$$C(x)f(x) \cdot e^{\int f(x) dx} + C'(x) \cdot e^{\int f(x) dx} = f(x)C(x) \cdot e^{\int f(x) dx} + s(x)$$

- Damit gilt für die „Konstante“ $C(x)$ in der partikulären Lösung y_p:

$$\boxed{C(x) := \int s(x) \cdot e^{-\int f(x) dx} dx}$$

Zusammenfassung

allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung =
partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung +
allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung