Mathe PLUS

Wirtschaftsmathe für BW und IM – Aufgabensammlung

Wintersemester 2014/15

Prof. Dr. Stefan Etschberger – Hochschule Augsburg

Aufgabe 1

Lösen Sie in den nachstehenden Aufgaben die Klammern auf und fassen Sie soweit wie möglich zusammen:

a) $(3s + 2t)(4s - 3t)(5s - 7t)$

b) $\dfrac{(5a - 2b)(5a + 2b)}{25a^2 - 4b^2} - \dfrac{(7a - 3b)(7a - 3b)}{49a^2 + 9b^2 - 42ab}$

c) $8x - (x + ((3x - 2y) - (5x + 3y)) - ((-x + 6y)))$

Aufgabe 2

Wenden Sie die binomischen Formeln zur Vereinfachung folgender Ausdrücke an:

a) $\dfrac{9a^2 - 2b^2}{3\sqrt{2}a - 2b}$

b) $\dfrac{s^2 - t^2}{2s^2 + 4st + 2t^2}$

c) $a^2x^4 - 2ayx^2b^2 + b^4y^2$

d) $\left(\sqrt{xy} - 1\right)\left(-1 - \sqrt{xy}\right)$

e) $4a + 12\sqrt{ab} + 9b$

Aufgabe 3

Vereinfachen Sie unter Anwendung der Rechengesetze für Wurzeln bzw. Potenzen:

a) $\sqrt{(xy^2)^2}$

b) $\sqrt[3]{16xy^4}\,\sqrt[3]{4x^2y^2}$

c) $\sqrt[5]{\dfrac{x^3}{32}}$

d) $\sqrt{\sqrt{4a^2x^2} \cdot \sqrt{a^3x}}$

Aufgabe 4

Berechnen Sie x aus den folgenden Beziehungen:

a) $3 \cdot \log x = \log 1024 - \log 16$

b) $\log x = \frac{1}{3}(\log 250 + \log 15 - \log 30)$

c) $\dfrac{\ln(x^2) - 2\ln x}{\ln(x+1)} = e$

d) $e^x = e^{2x} \cdot 50000$

Aufgabe 5 15.10.2014

Gegeben sind die Zahlen

i	1	2	3	4	5
x_i	5	3	2	1	6
y_i	2	3	4	1	0

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i \qquad \sum_{i=1}^{5} (x_i + y_i) \qquad \sum_{i=1}^{5} x_i y_i \qquad \sum_{i=1}^{5} x_i \sum_{i=1}^{5} y_i \qquad \sum_{i=1}^{5} \left(i x_i \sum_{i=1}^{5} i y_i \right)$$

Aufgabe 6 15.10.2014

Schreiben Sie die folgenden Summen unter Verwendung des Summenzeichens:

a) $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12$

b) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \frac{7}{8}$

c) $4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25 + 28$

Aufgabe 7 15.10.2014

Gegeben sei der Ausdruck $\sum_{i=1}^{n} a_i$. Die Indizierung des Ausdrucks soll nun so verändert werden, dass die untere Summationsgrenze $i = k$ lautet, und trotzdem die gleichen Summanden addiert werden.

Aufgabe 8 15.10.2014

Berechnen Sie die Summe

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} \,.$$

Hinweis: $\frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

Aufgabe 9

Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $-5x^2 + 3x + 9 = 0$

b) $2x^2 - 4x + 10 = 0$

c) $x^2 + 7x + 12{,}25 = 0$

Aufgabe 1 (2.10.2013)

Lösen Sie in den nachstehenden Aufgaben die Klammern auf und fassen Sie soweit wie möglich zusammen:

a) $(3s+2t)(4s-3t)(5s-7t)$

b) $\dfrac{(5a-2b)(5a+2b)}{25a^2-4b^2} - \dfrac{(7a-3b)(7a-3b)}{49a^2+9b^2-42ab}$

c) $8x-(x+((3x-2y)-(5x+3y))-((-x+6y)))$

a) $(12s^2+\underbrace{8st-9st}_{-st}-6t^2)(5s-7t)$

$= 60s^3 - 5s^2t - 30st^2 - 84s^2t + 7st^2 + 42t^3$

$= 60s^3 - 89s^2t - 23st^2 + 42t^3$

b) $= \dfrac{(5a-2b)(5a+2b)}{(5a-2b)(5a+2b)} - \dfrac{(7a-3b)^2}{(7a-3b)^2} = 1-1=0$

c) $= 8x-(x+3x-2y-5x-3y+x-6y)$

$= 8x+11y$

Aufgabe 2 (2.10.2013)

Wenden Sie die binomischen Formeln zur Vereinfachung folgender Ausdrücke an:

a) $\dfrac{9a^2-2b^2}{3\sqrt{2}a-2b}$

b) $\dfrac{s^2-t^2}{2s^2+4st+2t^2}$

c) $a^2x^4-2ayx^2b^2+b^4y^2$

d) $(\sqrt{xy}-1)(-1-\sqrt{xy})$

e) $4a+12\sqrt{ab}+9b$

a) $= \dfrac{(3a-\sqrt{2}b)(3a+\sqrt{2}b)}{\sqrt{2}(3a-\sqrt{2}b)} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}a+b$

b) $= \dfrac{(s-t)\cancel{(s+t)}}{2(s+t)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{2}\cdot\dfrac{s-t}{s+t}$

c) $= (ax^2)^2 - 2(ax^2)(yb^2) + (yb^2)^2 = (ax^2-yb^2)^2$

d) $= -(\sqrt{xy}-1)(\sqrt{xy}+1) = -(xy-1) = 1-xy$

e) $= (2\sqrt{a})^2 + 2\cdot(2\sqrt{a})\cdot(3\sqrt{b}) + (3\sqrt{b})^2 = (2\sqrt{a}+3\sqrt{b})^2$

$2=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$

$\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}$

$\dfrac{ab}{c} = \dfrac{a}{c}\cdot b = \dfrac{b}{c}\cdot a$

Aufgabe 3 (2.10.2013)

Vereinfachen Sie unter Anwendung der Rechengesetze für Wurzeln bzw. Potenzen:

a) $\sqrt{(xy^2)^2}$

b) $\sqrt[3]{16xy^4}\,\sqrt[3]{4x^2y^2}$

c) $\sqrt[5]{\frac{x^3}{32}}$

d) $\sqrt{\sqrt{4a^2x^2}\cdot\sqrt{a^3x}}$

$\sqrt{x^2} = |x|$

a) $= |xy^2| = |x|\cdot y^2$

b) $= \sqrt[3]{4^3\cdot x^3\cdot y^6} = 4xy^2$

c) $= \sqrt[5]{x^3} : \sqrt[5]{32} = \frac{1}{2}\cdot x^{3/5}$

d) $= \sqrt{|2ax|}\cdot\sqrt{a^3x} = \sqrt{2}\,a^2\,|x|$

(Fall 1: $a, x > 0$) $= \sqrt{2ax\cdot a^3x} = \sqrt{2}\,a^2|x|$

(Fall 2: $a, x < 0$) $= \sqrt{2ax\cdot a^3x} = \sqrt{2}\,a^2|x|$

Aufgabe 4 (2.10.2013)

Berechnen Sie x aus den folgenden Beziehungen:

a) $3\cdot\log x = \log 1024 - \log 16$

b) $\log x = \frac{1}{3}(\log 250 + \log 15 - \log 30)$

c) $\frac{\ln(x^2) - 2\ln x}{\ln(x+1)} = e$

d) $e^x = e^{2x}\cdot 50000$

a) $\Leftrightarrow \log x^3 = \log\frac{1024}{16} = \log 64$

$\Leftrightarrow x^3 = 64 \Leftrightarrow x = 4$

b) $\log x = \log\left(\frac{250\cdot 15}{30}\right)^{1/3} = \log 125^{1/3} = \log 5$

$\Leftrightarrow x = 5$

c) $\Leftrightarrow \frac{2\ln x - 2\ln x}{\ln(x+1)} = e \Leftrightarrow 0 = e$ (falsch)

es gibt keine Lösung

d) $e^x = e^{2x}\cdot 50000 \quad / \cdot e^{-x}\cdot 50000^{-1}$

$\Leftrightarrow 50000^{-1} = e^x$

$\Leftrightarrow x = \ln\frac{1}{50000} = -\ln 50000 \approx -10.82$

Aufgabe 5

Gegeben sind die Zahlen

i	1	2	3	4	5
x_i	5	3	2	1	6
y_i	2	3	4	1	0

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i \qquad \sum_{i=1}^{5} (x_i + y_i) \qquad \sum_{i=1}^{5} x_i y_i \qquad \sum_{i=1}^{5} x_i \sum_{i=1}^{5} y_i \qquad \sum_{i=1}^{5} \left(i x_i \sum_{i=1}^{5} i y_i \right)$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 + 3 + 2 + 1 + 6 = 17$$

$$\sum_{i=1}^{5} (x_i + y_i) = (5+2) + (3+3) + \dots = 27$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 5\cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 6 \cdot 0 = 28$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot \left(\sum_{i=1}^{5} y_i \right) = \sum_{i=1}^{5} x_i \cdot \underbrace{10}_{2+3+4+1+0} = 17 \cdot 10 = 170$$

$$\sum_{i=1}^{5} \left(i \cdot x_i \cdot \left[\sum_{i=1}^{5} i y_i \right] \right) = \sum_{i=1}^{5} i x_i \cdot \Big[\underbrace{1\cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0}_{24} \Big]$$

$$= \Big(\underbrace{1\cdot 5 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 6}_{51} \Big) \cdot 24$$

$$= 1224$$

Aufgabe 6

Schreiben Sie die folgenden Summen unter Verwendung des Summenzeichens:

a) $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12$

b) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \frac{7}{8}$

c) $4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25 + 28$

+3 +3 ...

a) $\sum_{i=1}^{6} 2i$

b) $\sum_{i=0}^{6} \frac{i+1}{i+2} = \sum_{i=1}^{7} \frac{i}{i+1} \quad \left(= \sum_{i=3}^{9} \frac{i-2}{i-1} \right)$

c) $\sum_{i=1}^{9} 1+3i$

Aufgabe 7

Gegeben sei der Ausdruck $\sum_{i=1}^{n} a_i$. Die Indizierung des Ausdrucks soll nun so verändert werden, dass die untere Summationsgrenze $i = k$ lautet, und trotzdem die gleichen Summanden addiert werden.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$\sum_{i=k}^{n+k-1} a_{i-(k-1)}$$

Reduzierung um k-1

Erhöhung um k-1

Aufgabe 8

Berechnen Sie die Summe

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k}.$$

Hinweis: $\frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{\cancel{k}-(\cancel{k}-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

$$= \frac{1}{1} + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{3}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} - \dots - \cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n}$$

$$= 1 - \frac{1}{n}$$

Aufgabe 9

Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $-5x^2 + 3x + 9 = 0$
b) $2x^2 - 4x + 10 = 0$
c) $x^2 + 7x + 12{,}25 = 0$

a) $x_{1/2} = \frac{1}{2(-5)} \cdot \left(-3 \pm \sqrt{9+180}\right)$

$= 0.3 \pm \frac{1}{10}\sqrt{189} \approx \begin{cases} -1.07 \\ 1.67 \end{cases}$

b) $D = 16 - 80 < 0 \Rightarrow$ keine reelle Lsg

c) $x_{1/(2)} = \frac{1}{2}\left(-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 12.25}\right) = -3.5$

Aufgabe 15

Führen Sie zur Bestätigung der Aussage

$$(a+b)^2 = 4ab \Rightarrow a = b$$

einen direkten Beweis.

$(a+b)^2 = 4ab$

$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 4ab \qquad | -4ab$

$\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 0$

$\Rightarrow (a-b)^2 = 0$

$\Rightarrow a - b = 0$

$\Rightarrow a = b$

Aufgabe 10 8.10.2014

Gegeben seien die Aussagen

A: Das Auftragsvolumen im privaten Wohnungsbau steigt
B: Der Hypothekenzins fällt.

Bringen Sie die Aussage $B \Rightarrow A$ verbal auf die Form

a) Wenn ...., dann ....
b) .... folgt aus ....
c) .... impliziert ....
d) .... ist notwendig für ....
e) .... ist hinreichend für ....

Aufgabe 11 8.10.2014

Gegeben sind die Aussagen:

A_1 : Die Löhne steigen.
A_2 : Die Preise steigen.

Formulieren Sie die Aussagen:

$$\begin{array}{llcl}
A: & A_1 & \Rightarrow & A_2 \\
B_1: & A_1 & \wedge & A_2 \\
B_2: & A_1 & \wedge & \overline{A_2} \\
B_3: & \overline{A_1} & \wedge & \overline{A_2} \\
B_4: & \overline{A_1} & \vee & A_2
\end{array}$$

Aufgabe 12 8.10.2014

Gegeben sind die Aussagen aus Aufgabe 11:

Überprüfen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, welche der Aussagen

$$A \Rightarrow B_i \ , \ B_i \Rightarrow A \ , \ A \Leftrightarrow B_i \ , \ (i = 1, 2, 3, 4)$$

stets (also unabhängig von den Wahrheitswerten der A_i) wahr sind.

Aufgabe 13 8.10.2014

Gegeben seien die Aussagen A, B, deren Negationen mit $\overline{A}$, $\overline{B}$ bezeichnet werden. Zeigen Sie, dass die verknüpfte Aussage

$$(A \vee B) \wedge (\overline{A \wedge B}) \Leftrightarrow (A \wedge \overline{B}) \vee (B \wedge \overline{A})$$

stets wahr ist.

Aufgabe 14 14.10.2014

a) Gegeben sei die Aussage $P(x)$: *„Der Angestellte x einer bestimmten Firma ist mit seiner Position zufrieden.“*
Interpretieren Sie die Aussagen

$$\bigwedge_x P(x)\ , \quad \bigvee_x P(x)\ , \quad \bigwedge_x \overline{P(x)}\ ,$$

$$\bigvee_x \overline{P(x)}\ , \quad \overline{\bigwedge_x P(x)}\ , \quad \overline{\bigvee_x P(x)}$$

b) Gegeben sei die Aussage $A(x)$: *„Die reelle Zahl x erfüllt die Gleichung $x^4 + 1 = 0$.“*
Welche der All- und Existenzaussagen

$$\bigwedge_x A(x)\ , \quad \bigwedge_x \overline{A(x)}\ , \quad \overline{\bigwedge_x A(x)}\ ,$$

$$\bigvee_x A(x)\ , \quad \bigvee_x \overline{A(x)}\ , \quad \overline{\bigvee_x A(x)}$$

sind wahr?

Aufgabe 15 15.10.2014

Führen Sie zur Bestätigung der Aussage

$$(a + b)^2 = 4ab \ \Rightarrow \ a = b$$

--> Lösung: siehe Vorlesung

einen direkten Beweis.

Aufgabe 14b) Lösung

$A(x) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ gilt: $x^4 \geq 0 \Rightarrow x^4 + 1 > 0 \Rightarrow A(x)$ ist immer falsch und $\overline{A(x)}$ ist immer wahr.

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{lll}
\bigwedge_x \overline{A(x)}: & \text{Alle } x \in \mathbb{R} \text{ erfüllen } x^4 + 1 \neq 0 & (w) \\
\overline{\bigwedge_x A(x)}: & \text{Nicht alle } x \in \mathbb{R} \text{ erfüllen } x^4 + 1 = 0 & (w) \\
\bigvee_x \overline{A(x)}: & \text{Mindestens ein } x \in \mathbb{R} \text{ erfüllt } x^4 + 1 \neq 0 & (w) \\
\overline{\bigvee_x A(x)}: & \text{Kein } x \in \mathbb{R} \text{ erfüllt } x^4 + 1 = 0 & (w) \\
\bigwedge_x A(x): & \text{Alle } x \in \mathbb{R} \text{ erfüllen } x^4 + 1 = 0 & (f) \\
\bigvee_x A(x): & \text{Mindestens ein } x \in \mathbb{R} \text{ erfüllt } x^4 + 1 = 0 & (f)
\end{array}$$

Aufgabe 10 8.10.2014

Gegeben seien die Aussagen

A: Das Auftragsvolumen im privaten Wohnungsbau steigt
B: Der Hypothekenzins fällt.

Bringen Sie die Aussage $B \Rightarrow A$ verbal auf die Form

a) Wenn ...., dann ....
b) .... folgt aus ....
c) .... impliziert ....
d) .... ist notwendig für ....
e) .... ist hinreichend für ....

a) Wenn der Hypothekenzins fällt, dann steigt das Auftragsvolumen...

b) steigendes Auftragsvolumen folgt aus aus fallendem HZ

c) Fallender HZ impliziert steigendes AV

d) Steigendes Auftragsvolumen ist notwendig für Fallende HZ

e) Fallende Hypothekenzinsen sind hinreichend für steigendes Auftragsvolumen...

Aufgabe 11 8.10.2014

Gegeben sind die Aussagen:

A_1 : Die Löhne steigen.
A_2 : Die Preise steigen.

Formulieren Sie die Aussagen:

$$\begin{array}{llcl} A: & A_1 & \Rightarrow & A_2 \\ B_1: & A_1 & \wedge & A_2 \\ B_2: & A_1 & \wedge & \overline{A_2} \\ B_3: & \overline{A_1} & \wedge & \overline{A_2} \\ B_4: & \overline{A_1} & \vee & A_2 \end{array}$$

A: Wenn die Löhne steigen, steigen auch die Preise

B_1: Sowohl die Löhne als auch die Preise steigen

B_2: Die Löhne steigen aber die Preise nicht

B_3: Weder die Löhne noch die Preise steigen

B_4: Die Löhne steigen nicht oder die Preise steigen

Aufgabe 12 8.10.2014

Gegeben sind die Aussagen aus Aufgabe 11:

$$\begin{array}{llcl} A: & A_1 & \Rightarrow & A_2 \\ B_1: & A_1 & \wedge & A_2 \\ B_2: & A_1 & \wedge & \overline{A_2} \\ B_3: & \overline{A_1} & \wedge & \overline{A_2} \\ B_4: & \overline{A_1} & \vee & A_2 \end{array}$$

Überprüfen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, welche der Aussagen

$$A \Rightarrow B_i\ ,\ B_i \Rightarrow A\ ,\ A \Leftrightarrow B_i\ ,\ (i = 1, 2, 3, 4)$$

stets (also unabhängig von den Wahrheitswerten der A_i) wahr sind.

A_1	w	w	f	f
A_2	w	f	w	f
A	w	f	w	w
B_1	w	f	f	f
B_2	f	w	f	f
B_3	f	f	f	w
B_4	w	f	w	w
$A \Rightarrow B_1$	w	w	f	f
$A \Rightarrow B_2$	f	w	f	f
$A \Rightarrow B_3$	f	w	f	w
$A \Rightarrow B_4$	w	w	w	w
$B_1 \Rightarrow A$	w	w	w	w
$B_2 \Rightarrow A$	w	f	w	w
$B_3 \Rightarrow A$	w	w	w	w
$B_4 \Rightarrow A$	w	w	w	w
$A \Leftrightarrow B_1$	w	w	f	f
$A \Leftrightarrow B_2$	f	f	f	f
$A \Leftrightarrow B_3$	f	w	f	w
$A \Leftrightarrow B_4$	w	w	w	w

Tautologie (immer wahr)

Aufgabe 13 8.10.2014

Gegeben seien die Aussagen A, B, deren Negationen mit $\overline{A}$, $\overline{B}$ bezeichnet werden. Zeigen Sie, dass die verknüpfte Aussage

$$(A \vee B) \wedge (\overline{A \wedge B}) \Leftrightarrow (A \wedge \overline{B}) \vee (B \wedge \overline{A})$$

stets wahr ist.

	A	w	w	f	f
	B	w	f	w	f
1	$A \vee B$	w	w	w	f
2	$\overline{A \wedge B}$	f	w	w	w
3	$A \wedge \overline{B}$	f	w	f	f
4	$B \wedge \overline{A}$	f	f	w	f
5:	1 $\wedge$ 2	f	w	w	f
6:	3 $\vee$ 4	f	w	w	f
	5 $\Leftrightarrow$ 6	w	w	w	w

Tautologie

$$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$$

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$\overline{A \wedge B}$	f	w	w	w
$\overline{A}$	f	f	w	w
$\overline{B}$	f	w	f	w
$\overline{A} \vee \overline{B}$	f	w	w	w

Aussagen eines Politikers zur Wahl

A: Vollbeschäftigung
B: Steuererhöhung
C: Politiker kümmern sich

① $A \vee \overline{B}$
② $C \Rightarrow B$
③ $C \vee \overline{A}$
④ $\overline{A \Rightarrow B}$

A	w	w	w	w	f	f	f	f
B	w	w	f	f	w	w	f	f
C	w	f	w	f	w	f	w	f
① $A \vee \overline{B}$	w	w	w	w	f	f	w	w
② $C \Rightarrow B$	w	w	f	w	w	w	f	w
③ $C \vee \overline{A}$	w	f	w	f	w	w	w	w
④ $\overline{A \Rightarrow B}$	f	f	w	w	f	f	f	f
①∧②∧③∧④	f	f	f	f	f	f	f	f

→ Kontradiktion (Widerspruch)
eine immer falsche Aussage

Schreibweise:

$$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots \wedge A_n \Leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} A_i$$

Allaussage

„für alle i gilt A_i"

$$\Leftrightarrow \forall\, i = 1, \ldots, n: A_i$$

„für alle" Allquantor

$$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n \Leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{n} A_i$$

„es existiert ein i, so dass A_i gilt"

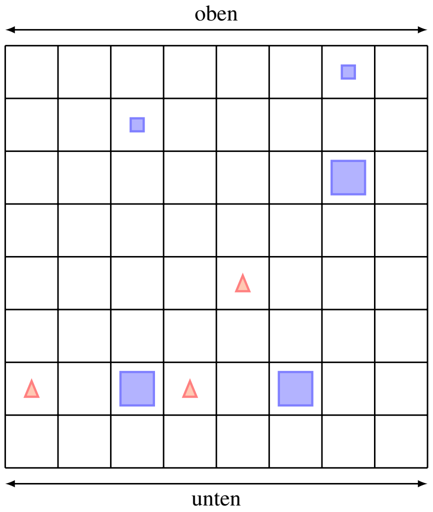
$$\Leftrightarrow \exists\, i = 1, \ldots, n: A_i$$

Existenzaussage

„Es existiert ein ..."
Existenzquantor

Aufgabe 16 14.10.2014

Auf einem quadratischen Spielfeld mit 8×8 Feldern wurden geometrische Elemente in Form von kleinen und großen Quadraten und kleinen Dreiecken folgendermaßen angeordnet:



Außerdem sind für geometrische Elemente x, y, z auf dem Spielfeld folgende Aussagen definiert:

$Q(x)$:	„x ist ein Quadrat“
$K(x)$:	„x ist klein“
$U(x, y)$:	„x liegt unterhalb von y“
$V(x, y, z)$:	„x liegt auf der Verbindungsstrecke der Mittelpunkte von y und z“

Entscheiden und begründen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

a) $\bigvee_{x} Q(x)$ Mind. eines ist ein Quadrat (w)

b) $\bigvee_{x} \left(\overline{Q(x)} \wedge K(x)\right)$ Mind. eines ist ein kleines Dreieck (w)

c) $\bigwedge_{x} \left(\overline{Q(x)} \Rightarrow K(x)\right)$ Alle Dreiecke sind klein (w)

d) $\bigwedge_{x,y} \left(\overline{Q(x)} \wedge Q(y)\right) \Rightarrow \bigvee_{z} \left(V(z, x, y) \wedge \overline{Q(z)}\right)$ Zwischen allen Paaren aus einem Dreieck und einem Quadrat liegt ein Dreieck (f)

e) $\bigwedge_{x} \left[\left(Q(x) \wedge K(x)\right) \Rightarrow \left(\bigwedge_{y} \left(\overline{K(y)} \Rightarrow U(y, x)\right)\right)\right]$ Die großen Objekte liegen alle unter allen kleinen Quadraten (w)

[alternativ: Für alle x gilt:
Wenn x Quadrat und klein ist,
dann gilt für alle y, dass wenn
y nicht klein ist, dass es unter x liegt]

Aufgabe 17 15.10.2014

a) Welche der Aussagen

$$\begin{array}{rcl}
(1-x)^2 \geqq 0 & \Longrightarrow & x \leqq 1 \\
x^2 < 0 & \Longrightarrow & (1-x)^2 > 0 \\
\frac{1}{x} < 0 & \Longleftrightarrow & x < 0 \\
x < 0 & \Longrightarrow & \frac{x-1}{x} > 0
\end{array}$$

ist für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ wahr bzw. falsch? Formulieren Sie jeweils eine kurze Begründung.

b) Beweisen Sie indirekt die Implikationen:

~~$x + 2\sqrt[3]{x} = 3 \Longrightarrow x = 1$ ist die einzige reelle Lösung~~

$$\begin{array}{lcl}
\frac{1}{x-1} > \frac{1}{x+1} & \Longrightarrow & |\,x\,| \geqq 1 \\
x^2 - 4x + 3 \geqq 0 & \Longrightarrow & x \leqq 1 \vee x \geqq 3
\end{array}$$

Aufgabe 18 15.10.2014

a) Von 450 Teilnehmern einer Mathematik-Klausur haben 300 Teilnehmer regelmäßig die Übungen besucht. Insgesamt haben 20 % der Klausurteilnehmer die Klausur nicht bestanden. Bei den Besuchern der Übungen betrug die Durchfallquote nur 10 %. Beweisen Sie die Richtigkeit der Aussage „Die Durchfallquote der Teilnehmer der Mathematik-Klausur, die die Übungen nicht besucht haben, beträgt 40 %“.

b) Beweisen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussage:

$$\begin{array}{l}
2x^4 - 6x^2 - 12x \neq 72 \Longrightarrow x \neq 3 \\
x^5 + x^3 + x = 0 \Longleftrightarrow x = 0
\end{array}$$

Aufgabe 19 15.10.2014

Überprüfen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, für welche $n \in \mathbb{N}$ die Aussagen

$$\begin{array}{lcl}
A_1(n): \sum_{i=1}^{n} i \cdot i! & = & (n+1)! - 1 \\
A_2(n): \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} & = & 2^n - 1 \\
A_3(n):\ n\sqrt{n} & > & n + \sqrt{n} \\
A_4(n):\ n! & > & 2^n
\end{array}$$

richtig sind. Dabei gilt $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ und analog $i!$ beziehungsweise $(n+1)!$.

Aufgabe 17 15.10.2014

a) Welche der Aussagen

1. $(1-x)^2 \geqq 0 \implies x \leqq 1$
2. $x^2 < 0 \implies (1-x)^2 > 0$
3. $\frac{1}{x} < 0 \iff x < 0$
4. $x < 0 \implies \frac{x-1}{x} > 0$

ist für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ wahr bzw. falsch? Formulieren Sie jeweils eine kurze Begründung.

b) Beweisen Sie indirekt die Implikationen: $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$

~~$x + 2\sqrt[3]{x} = 3 \implies x = 1$ ist die einzige reelle Lösung~~

$\underbrace{\frac{1}{x-1} > \frac{1}{x+1}}_{A} \implies \underbrace{|x| \geqq 1}_{B}$

$x^2 - 4x + 3 \geqq 0 \implies x \leqq 1 \lor x \geqq 3$

a) 1. $(1-x)^2 \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$ (falsch, z.B. $x = 2$)

2. $x^2 < 0 \Rightarrow (1-x)^2 > 0$ (wahr, denn $x^2 < 0$ ist immer falsch)

3. $\frac{1}{x} < 0 \iff x < 0$ (wahr, denn

$x < 0 \iff x \cdot \frac{1}{x^2} < 0 \cdot \frac{1}{x^2} \iff \frac{1}{x} < 0$)

4. $x < 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x} > 0$ (wahr, denn

$x < 0 \Rightarrow x < 0 \land x-1 < 0$ erst recht

$\Rightarrow \frac{x-1}{x} > 0$ „minus geteilt durch minus ist plus“)

$\underbrace{\frac{1}{x-1} > \frac{1}{x+1}}_{A} \implies \underbrace{|x| \geqq 1}_{B}$

$\underbrace{|x| < 1}_{\bar{B}} \Rightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow -2 < x-1 < 0 \land 0 < x+1 < 2$

$\Rightarrow \frac{1}{x-1} < 0 \land \frac{1}{x+1} > 0$

$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{x-1} \not> \frac{1}{x+1}}_{\bar{A}}$

$\underbrace{x^2 - 4x + 3 \geqq 0}_{A} \implies \underbrace{x \leqq 1 \lor x \geqq 3}_{B}$

$\underbrace{1 < x < 3}_{\bar{B}} \Rightarrow x - 1 > 0$ und $x - 3 < 0$

$\Rightarrow (x-1)\cdot(x-3) < 0$

$\Rightarrow \underbrace{x^2 - 4x + 3 < 0}_{\bar{A}}$

Aufgabe 19 15.10.2014

Überprüfen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, für welche $n \in \mathbb{N}$ die Aussagen

$$A_1(n): \quad \sum_{i=1}^{n} i \cdot i! \quad = \quad (n+1)! - 1$$

$$A_2(n): \quad \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} \quad = \quad 2^n - 1$$

$$A_3(n): \quad n\sqrt{n} \quad > \quad n + \sqrt{n}$$

$$A_4(n): \quad n! \quad > \quad 2^n$$

richtig sind. Dabei gilt $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ und analog $i!$ beziehungsweise $(n+1)!$.

$A_1(n)$: Anfang: $A_1(1) = \sum_{i=1}^{1} i \cdot i! = 1 \cdot 1! = 1 = (1+1)! - 1$ ✓

$n \to n+1$: $A_1(n+1)$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i \cdot i! = \sum_{i=1}^{n} i \cdot i! + (n+1)(n+1)!$$
$$= (n+1)! \cdot 1 - 1 + (n+1)(n+1)!$$
$$= (n+1)!\,[1 + (n+1)] \quad - 1$$
$$= [n+2](n+1)! - 1$$
$$= (n+2)! - 1$$
$$= (n+1+1)! - 1$$

$A_3(n)$: $n\sqrt{n} > n + \sqrt{n}$

$A_3(1)$: $1\sqrt{1} > 1 + \sqrt{1}$ (f), $A_3(2)$: $2\sqrt{2} > 2 + \sqrt{2}$ (f) — 2,8 — 3,4

$A_3(3)$: $3\sqrt{3} > 3 + \sqrt{3}$ (w) — 5,1 — 4,7

$n \to n+1$: $(n+1)\sqrt{n+1} = n\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1} > n\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$

$> n + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \;?$ → für $n \geq 3$ $\quad (n+1) + \sqrt{n+1}$

A_2: $A_2(1)$: $\sum_{i=1}^{1} 2^{i-1} = 2^{1-1} = 2^0 = 1 = 2^1 - 1$ ✓

$n \to n+1$: $\sum_{i=1}^{n+1} 2^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} + 2^{n+1-1} \overset{\text{Ind. vorausn.}}{=} 2^n - 1 + 2^n$

$$= 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$$

A_4:

$A_4(1)$: $1! = 1 \not> 2 = 2^1$

$A_4(2)$: $2! = 2 \not> 4 = 2^2$

$A_4(3)$: $3! = 6 \not> 8 = 2^3$

$A_4(4)$: $4! = 24 > 16 = 2^4$ ✓

$n \to n+1$: $(n+1)! = n! \cdot (n+1) > 2^n (n+1)$

$> 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$

für $n \geq 4$

Aufgabe 18

a) Von 450 Teilnehmern einer Mathematik-Klausur haben 300 Teilnehmer regelmäßig die Übungen besucht. Insgesamt haben 20 % der Klausurteilnehmer die Klausur nicht bestanden. Bei den Besuchern der Übungen betrug die Durchfallquote nur 10 %. Beweisen Sie die Richtigkeit der Aussage „Die Durchfallquote der Teilnehmer der Mathematik-Klausur, die die Übungen nicht besucht haben, beträgt 40 %“.

b) Beweisen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussage:

$$\text{①} \quad \overbrace{2x^4 - 6x^2 - 12x \neq 72}^{A} \implies \overbrace{x \neq 3}^{B}$$
$$\text{②} \quad x^5 + x^3 + x = 0 \iff x = 0$$

a) Summe der Durchfälle: $20\% \cdot 450 = 90$

durchgefallene Über: $10\% \cdot 300 = 30$

Übungsverweigerer: $60 \mathrel{\hat=} 40\% \cdot 150$

b) ① $\bar{B}$: $x = 3 \Rightarrow 2 \cdot 3^4 - 6 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 = 72$ $\bar{A}$

② „$\Rightarrow$“: $x^5 + x^3 + x = x(\underbrace{x^4 + x^2 + 1}_{>0}) = 0 \Rightarrow x = 0$

„$\Leftarrow$“: $x = 0 \Rightarrow 0^5 + 0^3 + 0 = 0$.

Aufgabe 20 15.10.2014

n verschiedene Punkte einer Ebene sind paarweise durch Strecken verbunden. Dazu wird die Aussage

$$(*) \quad A(n): \quad \text{Die Anzahl der Strecken beträgt } \frac{1}{2}\, n\,(n-1)$$

formuliert.

a) Beweisen Sie graphisch die Aussagen $A(2),\ A(3),\ A(4)$.
b) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass (*) für $n \geqq 2$ richtig ist.

Aufgabe 21 15.10.2014

Die Fibonacci-Zahlen sind gemäß der folgenden rekursiven Beziehung gegeben:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{für } n \geq 2 \quad \text{mit } a_0 = 0 \text{ und } a_1 = 1$$

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$ die explizite Darstellung von a_n:

$$a_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n\sqrt{5}}$$

Aufgabe 22 22.10.2014

Gegeben sind die Matrizen A, B, C sowie die Vektoren a, b mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Prüfen Sie, welche der folgenden Ausdrücke berechenbar sind, und berechnen Sie sie gegebenenfalls.

a) $(A+B)a$,
b) ABb ,
c) $(B+C^T)a$,
d) $BA(a+b)$,
e) ab^TA ,
f) $(a+b)b^T$,
g) CAB ,
h) a^TB^TCb

Aufgabe 23 22.10.2014

Eine Unternehmung produziert mit Hilfe von fünf Produktionsfaktoren $F_1, \ldots, F_5$ zwei Zwischenprodukte Z_1, Z_2 , sowie mit diesen Zwischenprodukten und den Faktoren F_1, F_2, F_3 drei Endprodukte P_1, P_2, P_3 .

In den Matrizen $A = (a_{ij})_{5,2},\ B = (b_{ik})_{3,3},\ C = (c_{jk})_{2,3}$ bedeute

a_{ij} = Anzahl der Einheiten von F_i zur Herstellung einer Einheit von Z_j ,

b_{ik} = Anzahl der Einheiten von F_i zur Herstellung einer Einheit von P_k ,

c_{jk} = Anzahl der Einheiten von Z_j zur Herstellung einer Einheit von P_k .

a) Bestimmen Sie mit den Daten

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

den Vektor $y \in \mathbb{R}^5_+$ von Produktionsfaktoren, der erforderlich ist, um eine Einheit von P_k zu fertigen (für $k = 1, 2, 3$).

b) Welche Faktormengen braucht man, um den Endproduktvektor (30, 20, 30) zu realisieren?

c) Berechnen Sie mit den Vektoren

c^T =	$(1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1)$	für die Beschaffungskosten der Faktoren,
q^T =	$(15,\ 20,\ 10)$	für die Produktionskosten der Produkte,
p^T =	$(40,\ 50,\ 40)$	für die Verkaufspreise der Produkte,

die Gesamtkosten, den Umsatz und den Gewinn des Endproduktvektors (30, 20, 30).

Aufgabe 20

n verschiedene Punkte einer Ebene sind paarweise durch Strecken verbunden. Dazu wird die Aussage

$$(*) \quad A(n)\ : \quad \text{Die Anzahl der Strecken beträgt } \ \tfrac{1}{2}\, n\,(n-1)$$

formuliert.

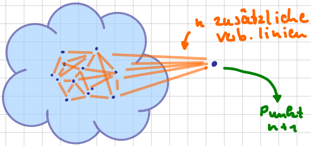
a) Beweisen Sie graphisch die Aussagen $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$.
b) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass (*) für $n \geqq 2$ richtig ist.

a)  A(2) : Anz. Str. $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(2-1) = 1$

 A(3) : Anz. Str. $\frac{1}{2}\cdot 3\,(3-1) = 3$

 A(4) : Anz. Str $\frac{1}{2}\,4\,(4-1) = 6$

b) Ind. anf. ✓ (siehe a)



n Punkte

Ind. vor : In „Wolke"
$\frac{1}{2}\,n\,(n-1)$ Verbindungs-linien

A(n+1) : „Verb. linie in Wolke"
+ n Verb. linie

$= \frac{1}{2}\,n(n-1) + n$
$= \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + n$
$= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$
$= \frac{1}{2}\,(n+1)\,\underbrace{(n+1-1)}_{n}$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Lösung zu Aufgabe 21

$a_n = \dfrac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n\sqrt{5}} \Rightarrow$

Induktionsanfang: Probiere explizite Darstellung für $n = 0$:

$$a_0 = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^0 - \left(1-\sqrt{5}\right)^0}{2^0\sqrt{5}} = \frac{1-1}{1\cdot\sqrt{5}} = 0$$

$a_8 = \frac{1}{2^8\sqrt{5}}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^8 - \left(1-\sqrt{5}\right)^8\right] = 21$

Induktionsschritt:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

$$= \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n\sqrt{5}} + \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n-1} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n-1}}{2^{n-1}\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}}\left[2\left(1+\sqrt{5}\right)^n - 2\left(1-\sqrt{5}\right)^n + 4\left(1+\sqrt{5}\right)^{n-1} - 4\left(1-\sqrt{5}\right)^{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^{n-1}\left(2+2\sqrt{5}+4\right) - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n-1}\left(2-2\sqrt{5}+4\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^{n-1}\left(1+2\sqrt{5}+5\right) - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n-1}\left(1-2\sqrt{5}+5\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^{n-1}\left(1+\sqrt{5}\right)^2 - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n-1}\left(1-\sqrt{5}\right)^2\right]$$

$$= \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$$

Aufgabe 22

Gegeben sind die Matrizen A, B, C sowie die Vektoren a, b mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Prüfen Sie, welche der folgenden Ausdrücke berechenbar sind, und berechnen Sie sie gegebenenfalls.

a) $(\overset{3\times5}{A} + \overset{3\times3}{B})a$, ↯
b) ABb,
c) $(B + C^T)a$,
d) $BA(a + b)$,
e) $ab^T A$,
f) $(a + b)b^T$,
g) CAB,
h) $a^T B^T Cb$

a) $\underbrace{(\underset{3\times5}{A} + \underset{3\times3}{B})}_{↯}a$ geht nicht

b) $\underbrace{\underset{3\times5}{A}\;\underset{3\times3}{B}}_{↯}\;\underset{3\times1}{b}$ geht nicht

c) $(\underset{3\times3}{B} + \underset{3\times3}{C^T})\underset{3\times1}{a} = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

d) $\underbrace{\underset{3\times3}{B}\;\underset{3\times5}{A}}_{✓}\;\underbrace{\quad(a+b)}_{↯}$, $\underset{3\times1}{(a+b)}$ geht nicht

e) $\underset{3\times1}{a}\;\underbrace{\underset{1\times3}{b^T}\;\underset{3\times5}{A}} = a(b^T A)$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left[(-2 \;\; 1 \;\; -1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right]$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (-3 \;\; -5 \;\; -4 \;\; -8 \;\; -9) = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -4 & -8 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

f) $\underset{3\times1}{(a+b)}\;\underset{1\times3}{b^T} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}(-2 \;\; 1 \;\; -1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

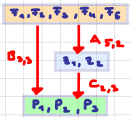
g) $\underset{3\times3}{C}\;\underbrace{\underset{3\times5}{A}\;\underset{3\times3}{B}}_{↯}$ geht nicht

h) $\underset{1\times3}{a^T}\;\underset{3\times3}{B^T}\;\underset{3\times3}{C}\;\underset{3\times1}{b} = (a^T B^T)\cdot(Cb)$

$= \left[(1 \;\; 0 \;\; -1)\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$

$= (2 \;\; -1 \;\; 0) \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = -8$

Aufgabe 23



a) Bestimmen Sie mit den Daten bzw. $\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ } denn F_4, F_5 braucht man hier nicht

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

den Vektor $y \in \mathbb{R}^5_+$ von Produktionsfaktoren, der erforderlich ist, um eine Einheit von P_k zu fertigen (für $k = 1, 2, 3$).

$$y = (\underbrace{AC + \tilde{B}}_{D}) \cdot x \qquad \left(x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right)$$

$$D = A \cdot C + \tilde{B} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & 10 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Eine Einheit von P_1 : $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = D \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Eine " P_2 : $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = D \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

" $P_3 \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) Welche Faktormengen braucht man, um den Endproduktvektor (30, 20, 30) zu realisieren?

$$y = D \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 \\ 670 \\ 270 \\ 160 \\ 240 \end{pmatrix}$$

c) Berechnen Sie mit den Vektoren

c^T	=	(1, 1, 2, 3, 1)	für die Beschaffungskosten der Faktoren,
q^T	=	(15, 20, 10)	für die Produktionskosten der Produkte,
p^T	=	(40, 50, 40)	für die Verkaufspreise der Produkte,

die Gesamtkosten, den Umsatz und den Gewinn des Endproduktvektors (30, 20, 30).

$$\text{Kosten} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 420 \\ 670 \\ 270 \\ 160 \\ 240 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & 20 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$= 3500$$

$$\text{Umsatz} = \begin{pmatrix} 40 & 50 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = 3400$$

Gewinn = Ums. − Kosten = −100 (schlechtes Geschäft)

Aufgabe 24 22.10.2014

Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Für welche $b_2 \in \mathbb{R}$ gelten folgende Aussagen?

a) $\|a + b - c\| = 3$
b) a und b sind orthogonal
c) $a - c$ und b sind orthogonal
d) $a^T a \geqq b^T b \geqq c^T c$
e) $(a + b)^T (b - c) = -2$

Aufgabe 25 22.10.2014

Gegeben sind die folgenden Punktmengen $\in \mathbb{R}^2$:

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \in \mathbb{N}\ ,\ x_2^2 = x_1 \right\}$$

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \in (0,1)\ ,\ x_2 \geqq 0 \right\}$$

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 + x_2 = 0\ ,\ x_1 x_2 = 1 \right\}$$

$$M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \geqq x_2^3\ ,\ x_2 \geqq 0 \right\}$$

$$M_5 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \ \|x\| \geqq 1\ ,\ (1, -1)\, x = 0 \right\}$$

a) Man stelle alle Mengen graphisch dar und prüfe mit Hilfe der Zeichnung, welche der Mengen offen, abgeschlossen, beschränkt, konvex ist.
b) Welche der paarweisen Durchschnitte sind leer?

Aufgabe 26 22.10.2014

Eine Unternehmung möchte zwei Produkte in den Quantitäten $x_1, x_2 \geqq 0$ herstellen. Zur Verfügung stehen 120 Einheiten eines erforderlichen Rohstoffes, ebenso 120 Arbeitsstunden sowie 200 Minuten an Maschinenzeit. Den Bedarf an Rohstoffeinheiten, Arbeitsstunden und Maschinenminuten pro Einheit der beiden Produkte entnehme man der Tabelle:

	Rohstoff-einheiten	Arbeits-stunden	Maschinen-minuten
Produkt 1	1	2	4
Produkt 2	3	2	2

a) Man gebe die Menge M aller produzierbaren Quantitäten $\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}_+^2$ an und stelle diese graphisch dar.
b) Man bestimme alle Eckpunkte von M.
c) Man gebe alle produzierbaren Quantitäten $\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{N}^2$ mit $x_1 = 30$ an.
d) In welchem der Eckpunkte von M wird der Umsatz maximal, wenn für Produkt 1 bzw. Produkt 2 Verkaufspreise von 2 bzw. 3 Geldeinheiten erzielt werden?

Aufgabe 27 29.10.2014

Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

nach dem Entwicklungssatz und der Sarrus-Regel. Welche Implikationen resultieren aus den Ergebnissen für die Ränge der Matrizen A, B, C, D?

Aufgabe 28 12.11.2014

Man berechne alle reellen Eigenwerte und die dazu gehörenden Eigenvektoren der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 28 12.11.2014

Man berechne alle reellen Eigenwerte und die dazu gehörenden Eigenvektoren der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(nur B)

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda) - (1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)\cdot[4-4\lambda+\lambda^2-1]$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+3)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3)$$

$\lambda_1 = 1$ (doppelte Nullstelle)
$\lambda_2 = 3$

EV zu $\lambda_1 = 1$

$$(B-\lambda_1\cdot E)x = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = 0$$

x_3 ist beliebig, $x_1 + x_2 = 0$ (z.B. x_2 bel.)

$\Rightarrow$ 2 Eigenvektoren: $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x_2 = a$, $x_1 = -a$, $x_3 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

zum Eigenvektor v_3 $(\lambda = 3)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x = 0$$

$x_1 - x_2 = 0$ und $x_3 = 0$

$\Rightarrow$ EV zu $\lambda = 3$ $\quad v_3 = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad c \in \mathbb{R}$ beliebig

Aufgabe 24 **22.10.2014**

Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Für welche $b_2 \in \mathbb{R}$ gelten folgende Aussagen?

a) $\|a + b - c\| = 3$
b) a und b sind orthogonal
c) $a - c$ und b sind orthogonal
d) $a^T a \geqq b^T b \geqq c^T c$
e) $(a + b)^T (b - c) = -2$

a) $|a+b-c| = \left|\begin{matrix} 1+1-1 \\ 2+b_2-1 \\ 3+3-3 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} 1 \\ 1+b_2 \\ 3 \end{matrix}\right| = \sqrt{1^2+(1+b_2)^2+3^2} = 3$

$\Leftrightarrow \quad 10 + (1+b_2)^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad (1+b_2)^2 = -1$

$\Leftrightarrow \quad b_2 \notin \mathbb{R}$ (keine Lösung)

b) $a^T \cdot b = (1 \;\; 2 \;\; 3)\begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 + 2b_2 + 9 = 10 + 2b_2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad b_2 = -5$

c) $(a-c)^T \cdot b = (0 \;\; 1 \;\; 0)\begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \\ 3 \end{pmatrix} = b_2 = 0$

d) $a^T a = 1^2 + 2^2 + 3^2 \geq b^T b = 1^2 + b_2^2 + 3^2$
$\geq c^T c = 1^2 + 1^2 + 3^2$

$\Leftrightarrow \quad 14 \geq 10 + b_2^2 \geq 11 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \geq b_2^2 \geq 1$

$\Leftrightarrow \quad 1 \leq b_2 \leq 2 \quad \vee \quad -2 \leq b_2 \leq -1$

e) $(a+b)^T (b-c) = (2 \;\; 2+b_2 \;\; 6)\begin{pmatrix} 0 \\ b_2-1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= (2+b_2)(b_2-1) = -2$

$\Leftrightarrow \quad b_2^2 + b_2 = 0 \Leftrightarrow b_2(b_2+1) = 0 \Leftrightarrow b_2 \in \{0; -1\}$

Aufgabe 25 22.10.2014

Gegeben sind die folgenden Punktmengen $\in \mathbb{R}^2$:

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 \in \mathbb{N}\,,\; x_2^2 = x_1 \right\}$$

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 \in (0,1)\,,\; x_2 \geqq 0 \right\}$$

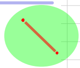
$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 + x_2 = 0\,,\; x_1 x_2 = 1 \right\}$$

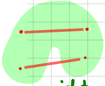
$$M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 \geqq x_2^3\,,\; x_2 \geqq 0 \right\}$$

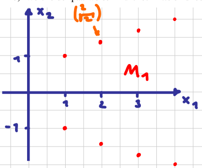
$$M_5 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \; \|x\| \geqq 1\,,\; (1,-1)\,x = 0 \right\}$$

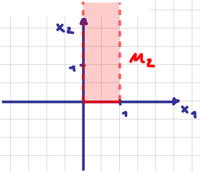
a) Man stelle alle Mengen graphisch dar und prüfe mit Hilfe der Zeichnung, welche der Mengen offen, abgeschlossen, beschränkt, konvex ist.

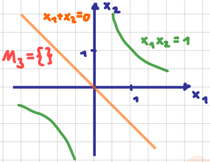
b) Welche der paarweisen Durchschnitte sind leer?

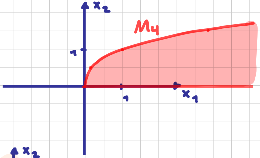


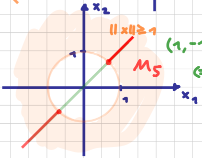












$$(1,-1)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 - x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \; x_1 = x_2$$

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
offen	nein	nein	ja	nein	nein
abgeschlossen	ja	nein	ja	ja	ja
beschränkt	nein	nein (nicht nach oben)	ja	nein	nein
konvex	nein	ja	ja	ja	nein

ist Schnitt leer?	M_1	M_2	M_3	M_4
M_2	ja			
M_3	ja	ja		
M_4	nein	nein	ja	
M_5	nein	nein	ja	nein

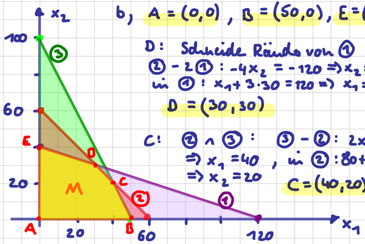
Aufgabe 26 22.10.2014

Eine Unternehmung möchte zwei Produkte in den Quantitäten $x_1, x_2 \geqq 0$ herstellen. Zur Verfügung stehen 120 Einheiten eines erforderlichen Rohstoffes, ebenso 120 Arbeitsstunden sowie 200 Minuten an Maschinenzeit. Den Bedarf an Rohstoffeinheiten, Arbeitsstunden und Maschinenminuten pro Einheit der beiden Produkte entnehme man der Tabelle:

	Rohstoff-einheiten	Arbeits-stunden	Maschinen-minuten
Produkt 1	1	2	4
Produkt 2	3	2	2

a) Man gebe die Menge M aller produzierbaren Quantitäten $\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2_+$ an und stelle diese graphisch dar.
b) Man bestimme alle Eckpunkte von M.
c) Man gebe alle produzierbaren Quantitäten $\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{N}^2$ mit $x_1 = 30$ an.
d) In welchem der Eckpunkte von M wird der Umsatz maximal, wenn für Produkt 1 bzw. Produkt 2 Verkaufspreise von 2 bzw. 3 Geldeinheiten erzielt werden?

Rohstoff $1\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \le 120$ ①
Arbeit $2\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \le 120$ ②
Maschine $4\cdot x_1 + 2 x_2 \le 200$ ③



b) $A = (0,0)$, $B = (50,0)$, $E = (0,40)$

D: Schneide Ränder von ① und ②
② − 2① : $-4x_2 = -120 \Rightarrow x_2 = 30$
in ① : $x_1 + 3\cdot 30 = 120 \Rightarrow x_1 = 30$
$D = (30,30)$

C: ② ∧ ③ : ③ − ② : $2x_1 = 80$
$\Rightarrow x_1 = 40$, in ② : $80 + 2x_2 = 120$
$\Rightarrow x_2 = 20$
$C = (40,20)$

c) $x_1 = 30$

$$\left.\begin{array}{l} ①: 1\cdot 30 + 3x_2 \le 120 \\ ②: 2\cdot 30 + 2x_2 \le 120 \\ ③: 4\cdot 30 + 2x_2 \le 200 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x_2 \le 30 \text{ und} \\ x_2 \le 30 \text{ und} \\ x_2 \le 40 \end{array}\right\} \quad x_2 \le 30$$

$$\Rightarrow \left\{ \binom{x_1}{x_2} : x_1 = 30,\ x_2 = \{1, 2, \ldots, 30\} \right\}$$

d) $\text{Umsatz}(x_1, x_2) = 2\cdot x_1 + 3x_2$

Umsatz (B) $= 2\cdot 50 + 3\cdot 0 = 100$
" (C) $= 2\cdot 40 + 3\cdot 20 = 140$
" (D) $= 2\cdot 30 + 3\cdot 30 = 150$ → maximal
" (E) $= 2\cdot 0 + 3\cdot 40 = 120$

Aufgabe 27

$$\det A = \det\begin{pmatrix}2&3&-5\\3&-1&2\\-6&2&1\end{pmatrix} = \begin{matrix}2\cdot(-1)\cdot 1+3\cdot 2\cdot(-6)+3\cdot 2\cdot(-5)\\ -[(-5)\cdot(-1)\cdot(-6)+2\cdot 2\cdot 2+3\cdot 3\cdot 1]\end{matrix} = -68+13=-55$$

$$\det B = \det\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} = \begin{matrix}1\cdot5\cdot9+2\cdot6\cdot7+3\cdot8\cdot4\\-(3\cdot5\cdot7+1\cdot8\cdot6+4\cdot2\cdot9)\end{matrix} = \begin{matrix}45+84+96\\-(105+48+72)\end{matrix} = \begin{matrix}225\\-225\end{matrix} = 0$$

Entw. mach 3. Spalte

$$\det C = \det\begin{pmatrix}2&3&1&2\\-1&-2&1&1\\3&5&0&1\\1&1&2&3\end{pmatrix} = (-1)^{1+3}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix}-1&-2&1\\3&5&1\\1&1&3\end{pmatrix}$$

$$+(-1)^{2+3}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix}2&3&2\\3&5&1\\1&1&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}+0\,\ldots\\+(-1)^{4+3}\cdot 2\cdot\det\end{matrix}\begin{pmatrix}2&3&2\\-1&-2&1\\3&5&1\end{pmatrix} \begin{matrix}(-1)\cdot5\cdot3+3+(-2)-(5-1-18)\\=-1\cdot[30+6+3-(10+2+27)]\\-2\cdot[-4+9-10-(-12+10-3)]\end{matrix}$$

$$= \begin{matrix}-14+14\\-39+39\\-2[-5+5]\end{matrix} = 0$$

Entw. mach 3. Spalte

$$\det D = \det\begin{pmatrix}0&-1&2&0&1\\-1&1&0&3&1\\2&-1&0&1&0\\3&0&1&-1&0\\1&1&0&1&1\end{pmatrix} = (-1)^{1+3}\cdot 2\cdot\det\begin{pmatrix}-1&1&3&1\\2&-1&1&0\\3&0&-1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$+0\ldots+0\ldots$$

$$(-1)^{4+3}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix}0&-1&0&1\\-1&1&3&1\\2&-1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

Entw. nach 4. Spalte bzw. 1. Zeile

$$= 2\cdot\left[(-1)^{1+4}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix}2&-1&1\\3&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}+0+0+(-1)^{4+4}\cdot\det\begin{pmatrix}-1&1&3\\2&-1&1\\3&0&-1\end{pmatrix}\right]$$

$$-1\cdot\left[0+(-1)^{1+2}\cdot(-1)\cdot\det\begin{pmatrix}-1&3&1\\2&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}+0+(-1)^{1+4}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix}-1&1&3\\2&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\right]$$

$$= 2[-(4+5)+2+11] - 1\cdot[1-7-(8+2)]$$

$$= 2[4]-[-16] = 24$$

$\Rightarrow$ Rang A, D (= 3 bzw. = 5)
Rang B, C nicht voll (< 3 bzw. < 4)

Lösung zu Aufgabe 28

Eigenwerte und Eigenvektoren zu

$$A = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&-3&1\end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E) = (1-\lambda)^3-(-3(1-\lambda)) = (1-\lambda)((1-\lambda)^2+3) = (1-\lambda)[4-2\lambda+\lambda^2]$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1\ ;\ \lambda_{2/3} = 1\pm i\sqrt{3}$$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1$

$$(A-\lambda_1 E)x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\1&-3&0\end{pmatrix}x = 0 \left.\right\} \begin{matrix}x_3 = -x_1\\x_2 = \tfrac{1}{3}x_1\end{matrix} \left.\right\} \Rightarrow EV = \begin{pmatrix}3a\\a\\-3a\end{pmatrix},\ a\neq 0$$

$$B = \begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(B-\lambda E) = (2-\lambda)^2\cdot(1-\lambda)-(1-\lambda) = (1-\lambda)\cdot[4-4\lambda+\lambda^2-1]$$
$$= -(1-\lambda)^2(\lambda-3)$$

doppelte Nullstelle bei $\lambda_{1/2} = 1 \Rightarrow$ 2 Eigenvektoren

$$\lambda_{1/2} = 1:\ (B-\lambda_{1/2}E)x = \begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}x = 0 \Rightarrow EV_1 = \begin{pmatrix}-a\\a\\0\end{pmatrix},\ a\neq 0$$

$$EV_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\b\end{pmatrix},\ b\neq 0$$

zu $\lambda_3 = 3$: 1 Eigenvektor

$$(B-\lambda_3 E)x = \begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}x = 0 \Rightarrow EV_3 = \begin{pmatrix}c\\c\\0\end{pmatrix},\ c\neq 0$$

$$C = \begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&-1\\1&-1&-2\end{pmatrix} \Rightarrow \det(C-\lambda E) = (1-\lambda)^2(-2-\lambda)-2-2-[1-\lambda+1-\lambda+4(-2-\lambda)]$$
$$= (1-2\lambda+\lambda^2)(-2-\lambda)-4-[-6-6\lambda]$$
$$= -(2+\lambda-4\lambda-2\lambda^2+2\lambda^2+\lambda^3)+2+6\lambda$$
$$= -\lambda^3+9\lambda = \lambda(9-\lambda^2) = \lambda(3-\lambda)(3+\lambda)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = -3$$

zu λ_1 : $(C-\lambda_1 E)x = 0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{ccc}\hline 1&2&1\\2&1&-1\\1&-1&-2\\\hline 1&2&1\\0&-3&-3\\0&-3&-3\\\hline 1&0&-1\\0&1&1\\\hline\end{array}\right\} \quad EV_1 = \begin{pmatrix}a\\-a\\a\end{pmatrix} \text{ mit } a\neq 0$$

zu λ_2 : $(C-\lambda_2 E)x = \begin{pmatrix}-2&2&1\\2&-2&-1\\1&-1&-5\end{pmatrix}x = 0$

$$\left.\begin{array}{ccc}\hline 1&-1&-5\\0&0&9\\0&0&-9\\\hline\end{array}\right\} \left.\begin{matrix}x_1 = x_2\\x_3 = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow EV_2 = \begin{pmatrix}b\\b\\0\end{pmatrix},\ b\neq 0$$

zu λ_3 : $(C-\lambda_3 E)x = \begin{pmatrix}4&2&1\\2&4&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}x = 0$

$$\left.\begin{array}{ccc}\hline 1&-1&1\\0&6&-3\\0&6&-3\\\hline 1&0&\tfrac{1}{2}\\0&1&-\tfrac{1}{2}\\\hline\end{array}\right\} \begin{matrix}x_1 = -\tfrac{1}{2}x_3\\x_2 = \tfrac{1}{2}x_3\end{matrix} \Rightarrow EV_3 = \begin{pmatrix}-c\\c\\2c\end{pmatrix},\ c\neq 0$$

Aufgabe 28 (nur C)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\det(C - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2\cdot(-2-\lambda) - 2 - 2 - \big((1-\lambda) - 4(2+\lambda) + (1-\lambda)\big)$$

$$= (1-2\lambda+\lambda^2)(-2-\lambda) - 4 + 6 + 6\lambda$$

$$= -2 + 3\lambda - \lambda^3 - 4 + 6 + 6\lambda = -\lambda^3 + 9\lambda$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 9) = -\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -3$

Eigenvektor zu λ_1:

$(C - \lambda_1 E)x = 0$

$$\begin{array}{cccccl}
① & 1 & 2 & 1 & 0 & \\
② & 2 & 1 & -1 & 0 & \\
③ & 1 & -1 & -2 & 0 & \\
\hline
④ & 1 & 2 & 1 & 0 & \\
⑤ & 0 & -3 & -3 & 0 & ② - 2① \\
 & \cancel{0} & \cancel{-3} & \cancel{-3} & \cancel{0} & \cancel{③ - ④} \\
\hline
⑥ & 1 & 0 & -1 & : & ④ - 2⑦ \\
⑦ & 0 & 1 & 1 & : & -\tfrac{1}{3}⑤
\end{array}$$

$\Rightarrow x_3$ ist frei wählba $x_3 = a$
$\Rightarrow x_1 = a$, $x_2 = -a$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 0$

$$v_1 = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$a \in \mathbb{R}$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = 3$

$(C - \lambda_2 E)\cdot x = 0$

$$\begin{array}{cccc}
\hline
\cancel{-2} & \cancel{2} & \cancel{1} & 0 \\
2 & -2 & -1 & 0 \\
1 & -1 & -5 & 0 \\
\hline
1 & -1 & -5 & : \\
0 & 0 & 9 & : \\
\hline
1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

$\Rightarrow x_2 = b$ (beliebig)
$x_1 = b$, $x_3 = 0$

EV: $v_2 = b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Eigenvektor zu $\lambda_3 = -3$:

$(C - \lambda_3 E)\cdot x = 0$

$$\begin{array}{cccccl}
\hline
① & 4 & 2 & 1 & 0 & \\
② & 2 & 4 & -1 & 0 & \\
③ & 1 & -1 & 1 & 0 & \\
\hline
 & 1 & -1 & 1 & 0 & ③ \\
 & 0 & 6 & -3 & 0 & ① - 4③ \\
 & \cancel{0} & \cancel{6} & \cancel{-3} & \cancel{0} & \cancel{② - 2③} \\
\hline
 & 1 & 0 & \tfrac{1}{2} & 0 & \\
 & 0 & 1 & -\tfrac{1}{2} & 0 & \\
\hline
\end{array}$$

$x_3 = c$ (beliebig)

$x_1 = -\tfrac{1}{2}c$; $x_2 = \tfrac{1}{2}c$

$\Rightarrow$ EV: $v_3 = c\begin{pmatrix} -\tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 29 12.11.2014

Man bestimme eine symmetrische 3×3–Matrix, deren Eigenwerte und entsprechende Eigenvektoren wie folgt gegeben sind:

Eigenwert	zugehöriger Eigenvektor
$\lambda_1 = 1$	$(1, \ 1, \ 0)$
$\lambda_2 = -1$	$(1, -1, \ 0)$
$\lambda_3 = 0$	$(0, \ 0, \ 1)$

Aufgabe 30 12.11.2014

Eine Unternehmung bietet zwei Güter an. Zwischen den Absatzquantitäten x_t, y_t zum Zeitpunkt t und x_{t+1}, y_{t+1} zum Zeitpunkt $t+1$ wird folgende Verbundbeziehung angenommen:

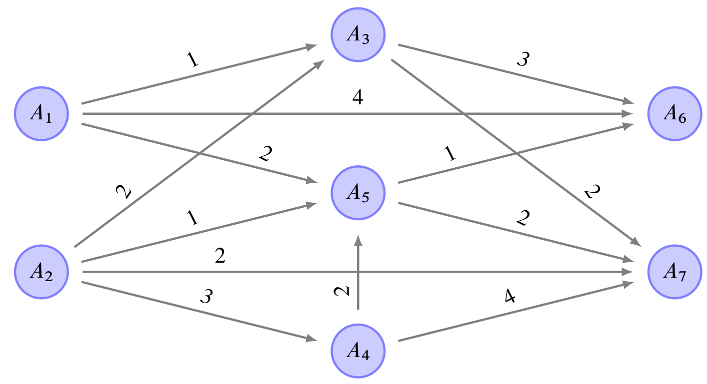
$$\begin{aligned} x_{t+1} &= 1.2\, x_t - 0.2\, y_t \\ y_{t+1} &= 0.05\, x_t + y_t \end{aligned}$$

Es soll untersucht werden, ob ein für beide Güter gleichförmiges Absatzwachstum möglich ist.

a) Man formuliere das Problem als Eigenwertproblem.
b) Man berechne Eigenwerte und Eigenvektoren und interpretiere die Ergebnisse.
c) Wie viele Zeitperioden benötigt man bei gleichförmigem Wachstum in jeder Periode, um eine Steigerung der Absatzquantitäten um mindestens 100 % zu erreichen?
d) Wie könnte ein Ergebnis interpretiert werden, das keine reellen Eigenwerte enthält?

Aufgabe 31 29.10.2014

Aus den Werkstoffen A_1, A_2 werden Zwischenprodukte A_3, A_4, A_5 und Endprodukte A_6, A_7 hergestellt. Die nachfolgende Graphik stellt die Verknüpfungen dar.



Die Pfeilbewertung a_{ij} mit $A_i \xrightarrow{a_{ij}} A_j$ gibt an, wie viele Mengeneinheiten von A_i zur Herstellung einer Einheit A_j benötigt werden.

Wie viele Einheiten von A_1, A_2, A_3, A_4 werden benötigt, wenn von A_5, A_6, A_7 genau 50, 200, 120 Einheiten verkauft werden können?

Aufgabe 32 29.10.2014

a) Welche der folgenden Aussagen über lineare Gleichungssysteme sind wahr bzw. falsch? (Begründen Sie Ihre Antwort!)
   a.1) Ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Variablen ist stets lösbar.
   a.2) Ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Variablen ist nicht immer lösbar.
   a.3) Wenn ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Variablen lösbar ist, dann ist die Lösung eindeutig.
   a.4) Ein lineares Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Variablen ist nicht lösbar.
   a.5) Ein lineares Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Variablen kann eindeutig lösbar sein.
b) Für ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ sei die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A \,|\, b)$ durch

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}$$

   gegeben.
   b.1) Geben Sie die allgemeine Lösung des homogenen Systems $(b = 0)$ sowie eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems an.
   b.2) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das gegebene Gleichungssystem lösbar?
   b.3) Gibt es ein $a \in \mathbb{R}$, so dass $x^T = (1, -1, 2, 1, 0)$ das Gleichungssystem $Ax = b$

Aufgabe 29 12.11.2014

Man bestimme eine symmetrische 3×3–Matrix, deren Eigenwerte und entsprechende Eigenvektoren wie folgt gegeben sind:

Eigenwert	zugehöriger Eigenvektor
$\lambda_1 = 1$	$(1,\ 1,\ 0)$
$\lambda_2 = -1$	$(1,\ -1,\ 0)$
$\lambda_3 = 0$	$(0,\ 0,\ 1)$

Länge $\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$

1

Matrix der normierten EV

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = X^T \cdot A \cdot X$$

Diagonalmatrix mit EW auf Diagonalen

gesuchte Matrix

$$\Leftrightarrow\ L\cdot X^T = X^T A \underbrace{X\cdot X^T}_{=E}$$

$$X\cdot L\cdot X^T = \underbrace{X X^T}_{=E}\cdot A$$

$$XLX^T = \tfrac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\tfrac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt2 \end{pmatrix}$$

$$= \tfrac12\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt2 \end{pmatrix} = \tfrac12\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

30c) $1{,}1^n \ge 2 \ \Leftrightarrow\ n \ge \frac{\ln 2}{\ln 1{,}1} \approx 7{,}27$ nach 8 Perioden mehr als 100 %

d) dann keine Konstellation mit gleichmäßigem Wachstum möglich

Aufgabe 30 12.11.2014

Eine Unternehmung bietet zwei Güter an. Zwischen den Absatzquantitäten $x_t,\ y_t$ zum Zeitpunkt t und $x_{t+1},\ y_{t+1}$ zum Zeitpunkt $t+1$ wird folgende Verbundbeziehung angenommen:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= 1.2\,x_t - 0.2\,y_t \\ y_{t+1} &= 0.05\,x_t + y_t \end{aligned}$$

Es soll untersucht werden, ob ein für beide Güter gleichförmiges Absatzwachstum möglich ist.

a) Man formuliere das Problem als Eigenwertproblem.
b) Man berechne Eigenwerte und Eigenvektoren und interpretiere die Ergebnisse.
c) Wie viele Zeitperioden benötigt man bei gleichförmigem Wachstum in jeder Periode, um eine Steigerung der Absatzquantitäten um mindestens 100 % zu erreichen?
d) Wie könnte ein Ergebnis interpretiert werden, das keine reellen Eigenwerte enthält?

a) $\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 & -0.2 \\ 0.05 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$

Eigenvektoren von A ermöglichen gleichförmiges Wachstum

$$A\cdot\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$$

b) $\det\begin{pmatrix} 1.2-\lambda & -0.2 \\ 0.05 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1{,}2-\lambda)(1-\lambda) - (-0.2\cdot 0.05)$

$= \lambda^2 - 2{,}2\lambda + 1{,}21$

$\lambda_{1/2} = \tfrac12\left(2{,}2 \pm \sqrt{2{,}2^2 - 4{,}84}\right) = 1{,}1$

EV: $\begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}2 \\ 0{,}05 & -0{,}1 \end{pmatrix} x = 0 \ \Leftrightarrow\ x_1 = 2x_2 \ \Rightarrow\ v = a\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(a\in\mathbb{R})$

Wenn x_t doppelt so hoch wie y_t, wachsen beide pro Zeiteinheit um 10 %

[Probe: $\begin{pmatrix} 1{,}2 & -0{,}2 \\ 0{,}05 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}2-0{,}6 \\ 0{,}3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}6 \\ 3{,}3 \end{pmatrix} = 1{,}1\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$]

Lösung zu Aufgabe 29

Normieren der Eigenvektoren und Zusammenfassen zu Transformationsmatrix X

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{aus Vorlesung bekannt: } A = X \cdot L \cdot X^T$$

$$\text{Hier: } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

[Probe bestätigt, dass A die EW und EV der Aufgabenstellung hat]

Lösung zu Aufgabe 30

Es gilt: $\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}2 & -0{,}2 \\ 0{,}05 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$

a) Gleichförmiges Wachstum:

$A \cdot \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$

b) $\det(A - \lambda E) = (1{,}2 - \lambda)(1 - \lambda) + 0{,}2 \cdot 0{,}05$

$= 1{,}2 - \lambda - 1{,}2\lambda + \lambda^2 + 0{,}01$

$= \lambda^2 - 2{,}2\lambda + 1{,}21$

$\Rightarrow \lambda_{1/2} = \frac{2{,}2 \pm \sqrt{2{,}2^2 - 4 \cdot 1{,}21}}{2} = 1{,}1$

EV: $(A - \underbrace{\lambda_1}_{1{,}1} E)x = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}2 \\ 0{,}05 & -0{,}1 \end{pmatrix} x = 0 \Rightarrow x_1 = 2x_2 \Rightarrow EV = a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ a \neq 0$

$\Rightarrow$ Gleichförmiges Wachstum um 10% pro Periode bei doppelter Absatzmenge von x_t in Relation zu y_t

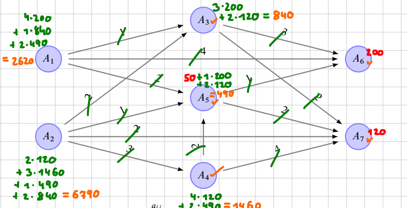
c) $1{,}1^n \geq 2$

$\Rightarrow n = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}1} \approx 7{,}27 \Rightarrow$ mind 8 Perioden

d) Keine reellen EW $\Rightarrow$ kein gl. förmiges Wachstum möglich

Aufgabe 31

Aus den Werkstoffen A_1, A_2 werden Zwischenprodukte A_3, A_4, A_5 und Endprodukte A_6, A_7 hergestellt. Die nachfolgende Graphik stellt die Verknüpfungen dar.



Die Pfeilbewertung a_{ij} mit $A_i \xrightarrow{a_{ij}} A_j$ gibt an, wie viele Mengeneinheiten von A_i zur Herstellung einer Einheit A_j benötigt werden.

Wie viele Einheiten von A_1, A_2, A_3, A_4 werden benötigt, wenn von A_5, A_6, A_7 genau 50, 200, 120 Einheiten verkauft werden können?

Aufgabe 32

a.1) falsch, denn z.B. $\begin{matrix} x_1+x_2=1 \\ x_1+x_2=3 \end{matrix}$ ist nicht lösbar

a.2) wahr, denn $a.2 \Leftrightarrow \overline{a.1}$ (Gegenteil von a.1)

a.3) falsch, denn z.B. $\begin{matrix} x_1+x_2=1 \\ 2x_1+2x_2=2 \end{matrix}$ (unendl. viele Lsg.)

a.4) falsch $x_1=1$, $x_1+1=2$ hat Lsg.

a.5) falsch, Fall 1: keine Lsg
Fall 2: Lsg. → Restmatrix mit Nichtbasis → unendl. viele Lsg.

b)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
①	1	1	2	0	4	a	
②	0	1	1	0	2	1	
	1	0	1	0	2	a-1	① - ②
	0	1	1	0	2	1	②

$\underbrace{x_1, x_2}_{\text{Basis}}$ $\underbrace{x_3, x_4, x_5}_{\text{nicht Basis}}$

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 : x = \underbrace{\begin{pmatrix} a-1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{spezielle inhomogene Lsg.}} + \underbrace{t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{allg. homogene Lsg.}} \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

[$x_3 = t_1$, $x_4 = x_5 = 0$, $b = 0$

$$\begin{matrix} x_1 + t_1 = 0 & x_4 = 0 \\ x_2 + t_1 = 0 & x_5 = 0 \\ x_3 = t_1 & \end{matrix}$$
]

b.2) LGS ist für alle $a \in \mathbb{R}$ lösbar.

b.3)
$$\begin{pmatrix} a-1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow t_3 = 0,\ t_2 = 1,\ t_1 = 2$

$a-1+2\cdot(-1) = 1 \Leftrightarrow a = 4$

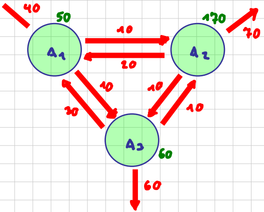
Aufgabe 33

Einnahmen = Ausgaben

$A_1: (40+10+10)x_1 = 20x_2 + 30x_3 + 50$

$A_2: (10+20+70)x_2 = 10x_1 + 10x_3 + 170$

$A_3: (30+60+10)x_3 = 10x_1 + 10x_2 + 60$



	x_1	x_2	x_3		
	60	-20	-30	50	
	-10	100	-10	170	
	-10	-10	100	60	
1	6	-2	-3	5	
2	-1	10	-1	17	
3	-1	-1	10	6	
4	1	1	-10	-6	-3
5	0	11	-11	11	2 - 3
6	0	-8	57	41	1 + 6 3
7	1	0	-9	-7	4 - 8
8	0	1	-1	1	1/11 5
9	0	0	49	49	6 + 8 8
	1	0	0	2	7 + 9 12
	0	1	0	2	8 + 12
12	0	0	1	1	

$x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$

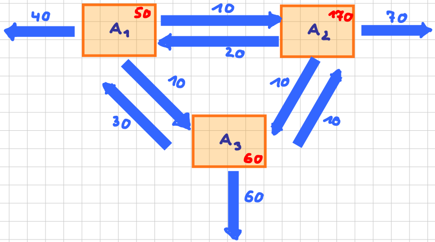
Aufgabe 33 29.10.2014

Die Abteilungen A_1, A_2, A_3 eines Betriebes sind durch mengenmäßige Leistungen a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ von A_i nach A_j gegenseitig verbunden. Jede der Abteilungen gibt ferner Leistungen b_i $(i = 1, 2, 3)$ an den Markt ab und hat sogenannte Primärkosten c_i $(i = 1, 2, 3)$ zu tragen. Gegeben seien folgende Daten:

$$A = (a_{ij})_{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 10 \\ 20 & 0 & 10 \\ 30 & 10 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 70 \\ 60 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 170 \\ 60 \end{pmatrix}$$

a) Formulieren Sie mit den Variablen x_1, x_2, x_3 für die innerbetrieblichen Verrechnungspreise ein lineares Gleichungssystem für ein innerbetriebliches Kostengleichgewicht der Abteilungen A_1, A_2, A_3.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem von a) und interpretieren Sie das Ergebnis.



Im Gleichgewicht: Einnahmen = Ausgaben (pro Abteilung)

Mit Verrechnungspreisen:

	Einnahmen		Ausgaben
A_1:	$(10+10+40)\,x_1$	=	$50 + 20x_2 + 30x_3$
A_2:	$(20+10+70)\,x_2$	=	$170 + 10x_1 + 10x_3$
A_3:	$(60+10+30)\,x_3$	=	$60 + 10x_2 + 10x_1$

Aufgabe 36 29.10.2014

Ein Teegroßhändler führt drei Sorten Tee: *Darjeeling*, *Nepal* und *Java* mit den Anfangsbeständen x_1, x_2, x_3.

Der Lagerbestand zu Beginn der ersten Woche beträgt 32 Tonnen. Nach der ersten (zweiten) Woche hat er 25 % (50 %) des Bestandes an Darjeeling und jeweils 20 % (40 %) des Bestandes an Nepal bzw. Java verkauft. Der Lagerbestand beträgt nach der ersten (zweiten) Woche 25 (18) Tonnen. Nach der dritten Woche hat er bei einem Gesamtlagerbestand von 5.2 Tonnen noch Vorräte von 10 % Darjeeling und jeweils 20 % Nepal bzw. Java (im Vergleich zu deren Anfangsbeständen).

a) Formulieren Sie ein lineares Gleichungssystem mit den unbekannten Variablen x_1, x_2, x_3, das alle gegebenen Informationen angemessen wiedergibt.

b) Ermitteln Sie alle ökonomisch sinnvollen Lösungen des Gleichungssystems.

c) Verwerten Sie – falls möglich – die zusätzliche Information, dass zu Beginn der ersten Woche der Vorrat an Darjeeling um 20 % höher war als der Vorrat an Nepal. Wie verändert sich damit die Lösung von b)?

x_2

a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 32 \\ 0.75x_1 + 0.8x_2 + 0.8x_3 &= 25 \\ 0.5x_1 + 0.6x_2 + 0.6x_3 &= 18 \\ 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_3 &= 5.2 \end{aligned}$$

b)

	x_1	x_2	x_3		
1	1	1	1	32	
2	0.75	0.8	0.8	25	
3	0.5	0.6	0.6	18	
4	1	2	2	52	
5	1	1	1	32	1
6	0	0.05	0.05	1	2 − $\frac{3}{4}$ 1
7	0	0.1	0.1	2	3 − $\frac{1}{2}$ 1
8	0	1	1	20	4 − 1
9	1	0	0	12	5 − 8
10	0	1	1	20	8

6, 7, 8 sind identisch

$\Rightarrow x_1 = 12, \quad x_2 + x_3 = 20$

$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 = 12 \wedge x_2 = 20 - x_3 \wedge x_3 \in [0;20] \right\}$

c) $x_1 = 12$

$x_2 \cdot 1{,}2 = x_1$

$\Rightarrow x_2 = 10$

$(x_3 = 20 - x_2 = 10)$

löst?

Aufgabe 33 29.10.2014

Die Abteilungen A_1, A_2, A_3 eines Betriebes sind durch mengenmäßige Leistungen a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ von A_i nach A_j gegenseitig verbunden. Jede der Abteilungen gibt ferner Leistungen b_i $(i = 1, 2, 3)$ an den Markt ab und hat sogenannte Primärkosten c_i $(i = 1, 2, 3)$ zu tragen. Gegeben seien folgende Daten:

$$A = (a_{ij})_{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 10 \\ 20 & 0 & 10 \\ 30 & 10 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 70 \\ 60 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 170 \\ 60 \end{pmatrix}$$

a) Formulieren Sie mit den Variablen x_1, x_2, x_3 für die innerbetrieblichen Verrechnungspreise ein lineares Gleichungssystem für ein innerbetriebliches Kostengleichgewicht der Abteilungen A_1, A_2, A_3 .
b) Lösen Sie das Gleichungssystem von a) und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 34 29.10.2014

Gegeben sind die beiden folgenden Gleichungssysteme:

$$(G_1)\quad \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array} \qquad (G_2)\quad \begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

a) Welches der beiden Gleichungssysteme besitzt keine Lösung, eine eindeutige Lösung, unendlich viele Lösungen?
b) Wie verändert sich die Lösungsmenge von (G_1), wenn die Gleichung $-x_1 + x_2 + x_3 = 2$ zusätzlich berücksichtigt werden soll?
c) Wie verändert sich die Lösungsmenge von (G_2), wenn die Gleichung $2x_1 + x_3 = 1$ entfallen soll?
d) Bestimmen Sie für (G_1) und (G_2), falls möglich, eine Lösung mit $x_3 = 1$.

Aufgabe 35 22.10.2014

Ein regionaler Markt wird von drei konkurrierenden Produkten P_1, P_2, P_3 beherrscht. Bezeichnet man mit $a_{ij} \in [0, 1]$ den Anteil von P_i-Käufern zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}$, der zum Zeitpunkt $t + 1 \in \mathbb{N}$ das Produkt P_j kauft, so charakterisiert die Matrix

$$A = (a_{ij})_{3,3} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

die anteiligen Käuferfluktuationen zwischen den Produkten. Ferner beschreibt der Vektor

$$x_1^T = (0,5\,,\ 0,5\,,\ 0)$$

die Marktanteile der Produkte P_1, P_2, P_3 zum Zeitpunkt $t = 1$.

a) Interpretieren Sie die in A und x_1 enthaltenen Nullen.
b) Berechnen Sie die Marktanteile der Produkte zu den Zeitpunkten $t = 2, 3$ und begründen Sie die Marktanteilszuwächse von P_3 mit Hilfe von A.
c) Geben Sie eine stationäre Marktverteilung an, das heißt, für beliebiges $t \in \mathbb{N}$ sind x_t^T und $x_{t+1}^T = x_t^T\, A$ identisch.

Aufgabe 36 29.10.2014

Ein Teegroßhändler führt drei Sorten Tee: *Darjeeling*, *Nepal* und *Java* mit den Anfangsbeständen x_1, x_2, x_3 .

Der Lagerbestand zu Beginn der ersten Woche beträgt 32 Tonnen. Nach der ersten (zweiten) Woche hat er 25 % (50 %) des Bestandes an Darjeeling und jeweils 20 % (40 %) des Bestandes an Nepal bzw. Java verkauft. Der Lagerbestand beträgt nach der ersten (zweiten) Woche 25 (18) Tonnen. Nach der dritten Woche hat er bei einem Gesamtlagerbestand von 5.2 Tonnen noch Vorräte von 10 % Darjeeling und jeweils 20 % Nepal bzw. Java (im Vergleich zu deren Anfangsbeständen).

a) Formulieren Sie ein lineares Gleichungssystem mit den unbekannten Variablen x_1, x_2, x_3 , das alle gegebenen Informationen angemessen wiedergibt.
b) Ermitteln Sie alle ökonomisch sinnvollen Lösungen des Gleichungssystems.
c) Verwerten Sie – falls möglich – die zusätzliche Information, dass zu Beginn der ersten Woche der Vorrat an Darjeeling um 20 % höher war als der Vorrat an Nepal.
Wie verändert sich damit die Lösung von b)?

Aufgabe 34

23.10.2013

Gegeben sind die beiden folgenden Gleichungssysteme:

$$(G_1)\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4\\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0\\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned} \qquad (G_2)\quad \begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3\\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2\\ 2x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

a) Welches der beiden Gleichungssysteme besitzt keine Lösung, eine eindeutige Lösung, unendlich viele Lösungen?
b) Wie verändert sich die Lösungsmenge von (G_1), wenn die Gleichung $-x_1 + x_2 + x_3 = 2$ zusätzlich berücksichtigt werden soll?
c) Wie verändert sich die Lösungsmenge von (G_2), wenn die Gleichung $2x_1 + x_3 = 1$ entfallen soll?
d) Bestimmen Sie für (G_1) und (G_2), falls möglich, eine Lösung mit $x_3 = 1$.

G_1 :

1	1	1	1	4	
2	1	1	-1	0	
3	1	-1	1	2	
4	1	1	-1	0	2
5	0	0	2	4	1 - 2
6	0	-2	2	2	3 - 2
7	1	0	0	1	4 - 8
8	0	1	-1	-1	$-\frac{1}{2}$ 6
9	0	0	1	2	$\frac{1}{2}$ 5
	1	0	0	1	7
	0	1	0	1	8 + 9
	0	0	1	2	9

⇒ eindeutige Lsg. $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$

G_2 :

1	3	1	2	3	
2	1	1	1	2	
3	2	0	1	1	
4	1	1	1	2	2
5	0	-2	-1	-3	1 - 3 2
6	~~0~~	~~-2~~	~~-1~~	~~-3~~	~~3 - 2 2~~
7	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	4 - 8
8	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$ 5
	E		Rest		

⇒ 1 (frei wählbare) Nichtbasisvar.
⇒ unendl. viele Lsg.

b) $-x_1 + x_2 + x_3 = 2$: Setze Lsg aus a) (für G_1) ein
$-1+1+2=2$ ⇒ Lsg. aus a) löst auch zusätzliche Gleichung → Lsg. menge ändert sich nicht

c) 3. Gl. entfällt sowieso → Lsg menge ändert sich nicht.

d) G_1 : Nicht möglich, denn x_3 muss 2 sein.

G_2 : $x_3 = 1$ ⇒ 7 $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$
8 $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$

Aufgabe 35

Ein regionaler Markt wird von drei konkurrierenden Produkten P_1, P_2, P_3 beherrscht. Bezeichnet man mit $a_{ij} \in [0,1]$ den Anteil von P_i-Käufern zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}$, der zum Zeitpunkt $t+1 \in \mathbb{N}$ das Produkt P_j kauft, so charakterisiert die Matrix

$$A = (a_{ij})_{3,3} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

die anteiligen Käuferfluktuationen zwischen den Produkten. Ferner beschreibt der Vektor

$$x_1^T = (0,5\,,\ 0,5\,,\ 0)$$

die Marktanteile der Produkte P_1, P_2, P_3 zum Zeitpunkt $t = 1$.

a) Interpretieren Sie die in A und x_1 enthaltenen Nullen.
b) Berechnen Sie die Marktanteile der Produkte zu den Zeitpunkten $t = 2, 3$ und begründen Sie die Marktanteilszuwächse von P_3 mit Hilfe von A.
c) Geben Sie eine stationäre Marktverteilung an, das heißt, für beliebiges $t \in \mathbb{N}$ sind x_t^T und $x_{t+1}^T = x_t^T A$ identisch.

a) $a_{13} = 0$: Niemand wechselt direkt von P_1 zu P_3

$a_{31} = 0$: und umgekehrt

$x^T_{1(3)} = 0$: P_3 hat keine Käufer zu $t=1$ (Marktanteil ist 0)

b) $x_1^T A = (0.5 \ \ 0.5 \ \ 0) \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = (0.4 \ \ 0.5 \ \ 0.1)$

$x_2^T A = (0.4 \ \ 0.5 \ \ 0.1) \cdot A = (0.34 \ \ 0.48 \ \ 0.18)$

Zuwachs von P_3 durch Wechsler von P_2 $(a_{23} = 0.1)$
" hohe Markentreue $(a_{33} = 0.8)$

c) Bei stabiler Marktvtlg:

$(x_1 \ \ x_2 \ \ x_3) \cdot A = (x_1 \ \ x_2 \ \ x_3)$ (LGS)

$[\ x_1 + x_2 + x_3 = 1\ ]$

$\Leftrightarrow (x_1 \ \ x_2 \ \ x_3) = (x_1 \ \ x_2 \ \ x_3) \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow (x_1 \ x_2 \ x_3)$

$= (0.6x_1 + 0.2x_2 \quad 0.4x_1 + 0.6x_2 + 0.2x_3 \quad 0.2x_2 + 0.8x_3)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0.6x_1 + 0.2x_2 \\ x_2 = 0.4x_1 + 0.6x_2 + 0.2x_3 \\ x_3 = 0.2x_2 + 0.8x_3 \end{cases}$ außerdem: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

x_1	x_2	x_3	
-0.4	0.2	0	0
0.4	-0.4	0.2	0
0	0.2	-0.2	0
1	1	1	1

„mal 5"

1	-2	1	0	0	
2	2	-2	1	0	
3	0	1	-1	0	
4	1	1	1	1	
5	1	1	1	1	4
6	0	1	-1	0	3
7	0	-4	-1	-2	2 - 2 4
8	0	3	2	2	1 + 2 4
	1	0	2	1	5 - 6
	0	1	-1	0	6
	0	0	-5	-2	7 + 4 6
	0	0	5	2	8 - 3 6
	1	0	0	0.2	9 - 1/5 12
	0	1	0	0.4	10 + 1/5 12
	0	0	1	0.4	1/5 12

$x_1 = 0.2\,, \quad x_2 = 0.4\,, \quad x_3 = 0.4$

Aufgabe 37 29.10.2014

Eine Brauerei stellt 3 Biersorten her: Hell, Pils und Bock. Die Herstellung erfordert eine Arbeitszeit von 2 Stunden für 1 hl Hell, 4 Stunden für 1 hl Pils und 5 Stunden für 1 hl Bock, wobei insgesamt genau Z Arbeitsstunden zu leisten sind. Das für Werbung bewilligte Budget beträgt 35.000 €, wobei die Werbekosten je hl Hell und Bock 1 € und bei Pils 2 € betragen. Der Gewinn pro hl beträgt 10 € bei Hell, 20 € bei Pils und 30 € bei Bock. Insgesamt soll ein Gewinn von 550.000 € erzielt werden.

a) Formulieren Sie das gegebene Gleichungssystem.
b) Ermitteln Sie die ökonomisch sinnvolle Lösungsmenge. (Hinweis: die zu produzierenden Einheiten an hl Bier sind nicht negativ). Für welchen Arbeitseinsatz Z gibt es keine Lösung, genau eine Lösung, mehrere Lösungen?
c) Skizzieren Sie das in b) erhaltene Ergebnis.

Aufgabe 38 29.10.2014

Gegeben sind die Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{2}A$ orthogonal ist.
b) Berechnen Sie B^{-1}.
c) Lösen Sie das Gleichungssystem $AB\,x = c$ mit

$$x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)\,, \quad c^T = (1, 2, 3, 4)$$

unter Verwendung von b).

Aufgabe 39 19.11.2014

Das junge Start-Up-Unternehmen „*Pimp-My-Phone*“ hat sich auf das Umgestalten von Mobiltelefonen in die Form von Politikerköpfen spezialisiert. Die von den Kunden am meisten nachgefragten Produkte sind die Pakete *Angela* (A) und *Gerhard* (G). Die Firma beschäftigt bereits 50 Angestellte und unterhält 10 Maschinen. Durch den Verkauf eines Paketes A wird ein Reingewinn von 15 € erzielt, der Verkauf eines Paketes G liefert im Vergleich dazu 20 € Gewinn.

Zur Herstellung eines Paketes A werden 20 Arbeitsstunden, 5 Maschinenstunden und 6 Einheiten Kunststoffformteile verwendet. Um ein Paket G herzustellen, werden 10 Arbeitsstunden, 5 Maschinenstunden und 10 Einheiten Kunststoff benötigt. Insgesamt stehen pro Monat 160 Arbeitsstunden pro Mitarbeiter (Nebenbedingung N_1), 200 Maschinenstunden pro Maschine (N_2) und 3000 Einheiten Kunststoff (N_3) maximal zur Verfügung.

Die Geschäftsleitung möchte die Anzahl der hergestellten Pakete *Angela* (x_1) beziehungsweise *Gerhard* (x_2) hinsichtlich einer Gewinnmaximierung festlegen. Dabei kann davon ausgegangen werden, dass alle hergestellten Pakete auch verkauft werden.

a) Formulieren Sie das Problem als lineares Programm mit Nebenbedingungen und Zielfunktion.
b) Lösen Sie das Problem graphisch (Berechnung der relevanten Geradenschnittpunkte ist erforderlich).
c) Löst man das Problem mit dem Simplexalgorithmus kann man zu folgendem Zwischentableau gelangen:

ZF	-3	0	0	0	2	6000
N_1	14	0	1	0	-1	5000
N_2	2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	500
N_3	$\frac{3}{5}$	1	0	0	$\frac{1}{10}$	300

Bestimmen Sie rechnerisch auf Basis dieses Tableaus mit Hilfe des Simplexalgorithmus eine optimale Lösung. Wie hoch ist der maximal erzielbare Gewinn pro Monat?
d) Bei welcher Ressource hat die Firma in der Optimallösung noch nicht ausgeschöpfte Kapazitäten?
e) Aufgrund von Popularitätsschwankungen ändert sich der Gewinn eines Paketes *Angela* auf Werte $c_1 = 15 + \gamma$ mit $\gamma \in \mathbb{R}$. In welchem Intervall kann c_1 liegen, so dass die Basis erhalten bleibt, also weder die Produktion von *Angela* noch die von *Gerhard* zur Erreichung des Optimalpunktes komplett eingestellt werden muss.

Aufgabe 37 29.10.2014 (Menge in hl)

Eine Brauerei stellt 3 Biersorten her: Hell (x_1), Pils (x_2) und Bock (x_3). Die Herstellung erfordert eine Arbeitszeit von 2 Stunden für 1 hl Hell, 4 Stunden für 1 hl Pils und 5 Stunden für 1 hl Bock, wobei insgesamt genau Z Arbeitsstunden zu leisten sind. Das für Werbung bewilligte Budget beträgt 35.000 €, wobei die Werbekosten je hl Hell und Bock 1 € und bei Pils 2 € betragen. Der Gewinn pro hl beträgt 10 € bei Hell, 20 € bei Pils und 30 € bei Bock. Insgesamt soll ein Gewinn von 550.000 € erzielt werden.

a) Formulieren Sie das gegebene Gleichungssystem.
b) Ermitteln Sie die ökonomisch sinnvolle Lösungsmenge. (Hinweis: die zu produzierenden Einheiten an hl Bier sind nicht negativ). Für welchen Arbeitseinsatz Z gibt es keine Lösung, genau eine Lösung, mehrere Lösungen?
c) Skizzieren Sie das in b) erhaltene Ergebnis.

a)

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = z$$
$$1x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 35000$$
$$10x_1 + 20x_2 + 30x_3 = 550000$$

b)

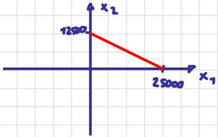
	x_1	x_2	x_3		
1	2	4	5	z	
2	1	2	1	35'	
3	1	2	3	55'	
4	0	0	2	20'	3 − 2
5	2	4	5	z	1
6	1	2	1	35'	2
7	2	4	0	z − 50'	5 − 5·9
8	1	2	0	25'	6 − 9
9	0	0	1	10'	½ 4
10	1	2	0	25'	8
	0	0	0	z − 100'	7 − 2·8
12	0	0	1	10'	

$z = 100'$: streichen

$z \neq 100' \Rightarrow$ keine Lösung
$z = 100' \Rightarrow$ unendl. viele Lsg.

10 : $x_1 + 2x_2 = 25000$ 12 : $x_3 = 10000$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 = 10000 \wedge x_1 = 25000 - 2x_2 \wedge 0 \leq x_2 \leq 12500 \right\}$$



Aufgabe 37 23.10.2013

Eine Brauerei stellt 3 Biersorten her: Hell, Pils und Bock. Die Herstellung erfordert eine Arbeitszeit von 2 Stunden für 1 hl Hell, 4 Stunden für 1 hl Pils und 5 Stunden für 1 hl Bock, wobei insgesamt genau Z Arbeitsstunden zu leisten sind. Das für Werbung bewilligte Budget beträgt 35.000 €, wobei die Werbekosten je hl Hell und Bock 1 € und bei Pils 2 € betragen. Der Gewinn pro hl beträgt 10 € bei Hell, 20 € bei Pils und 30 € bei Bock. Insgesamt soll ein Gewinn von 550.000 € erzielt werden.

a) Formulieren Sie das gegebene Gleichungssystem.
b) Ermitteln Sie die ökonomisch sinnvolle Lösungsmenge. (Hinweis: die zu produzierenden Einheiten an hl Bier sind nicht negativ). Für welchen Arbeitseinsatz Z gibt es keine Lösung, genau eine Lösung, mehrere Lösungen?
c) Skizzieren Sie das in b) erhaltene Ergebnis.

a) $H \hat{=}$ Anz. hl Hell, analog P(ils), B(ock)

Arbeitsstunden: $2 \cdot H + 4 \cdot P + 5 \cdot B = Z$
Werbung: $1 \cdot H + 2 \cdot P + 1 \cdot B = 35'$
Gewinn: $10 \cdot H + 20 \cdot P + 30 \cdot B = 550'$

b)

	H	P	B		
1	2	4	5	Z	
2	1	2	1	35'	
3	1	2	3	55'	
4	1	2	1	35'	2
5	0	0	3	Z−70'	1 − 2·2
6	0	0	2	20'	3 − 2

6 : $2B = 20000 \Rightarrow B = 10000$

in 5 : $3 \cdot 10000 = Z - 70000 \Leftrightarrow Z = 100000$
(sonst keine Lsg)

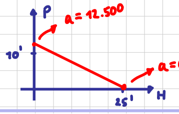
4 : $1 \cdot H + 2 \cdot P + 1 \cdot 10000 = 35000$

$\Leftrightarrow H + 2P = 25000$

4 $H = -2P + 25000$
$P = 1 \cdot P + 0$
6 $B = 0 \cdot P + 10000$

$$\Rightarrow L = \left\{ \begin{pmatrix} H \\ P \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25' \\ 0 \\ 10' \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq a \leq 12500 \right\}$$

c)



Aufgabe 36 23.10.13

Ein Teegroßhändler führt drei Sorten Tee: *Darjeeling*, *Nepal* und *Java* mit den Anfangsbeständen x_1, x_2, x_3.

Der Lagerbestand zu Beginn der ersten Woche beträgt 32 Tonnen. Nach der ersten (zweiten) Woche hat er 25 % (50 %) des Bestandes an Darjeeling und jeweils 20 % (40 %) des Bestandes an Nepal bzw. Java verkauft. Der Lagerbestand beträgt nach der ersten (zweiten) Woche 25 (18) Tonnen. Nach der dritten Woche hat er bei einem Gesamtlagerbestand von 5.2 Tonnen noch Vorräte von 10 % Darjeeling und jeweils 20 % Nepal bzw. Java (im Vergleich zu deren Anfangsbeständen).

a) Formulieren Sie ein lineares Gleichungssystem mit den unbekannten Variablen x_1, x_2, x_3, das alle gegebenen Informationen angemessen wiedergibt.
b) Ermitteln Sie alle ökonomisch sinnvollen Lösungen des Gleichungssystems.
c) Verwerten Sie – falls möglich – die zusätzliche Information, dass zu Beginn der ersten Woche der Vorrat an Darjeeling um 20 % höher war als der Vorrat an Nepal. Wie verändert sich damit die Lösung von b)?

Lösung zu Aufgabe 36

a) Lagerbestand zu Beginn: $x_1 + x_2 + x_3 = 32$
Lagerbestand nach der 1. Woche:
$0,75x_1 + 0,8x_2 + 0,8x_3 = 25$
Lagerbestand nach der 2. Woche:
$0,5x_1 + 0,6x_2 + 0,6x_3 = 18$
Lagerbestand nach der 3. Woche:
$0,1x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_3 = 5,2$

b) Gaußalgorithmus liefert:
$L = \{x \in \mathbb{R}^3_+ : x_1 = 12, x_2 + x_3 = 20\}$

c) $x_1 = 1,2 \cdot x_2 = 12 \Rightarrow x_2 = 10 \Rightarrow x_3 = 10$

Aufgabe 38 30.10.2013

Gegeben sind die Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{2}A$ orthogonal ist.
b) Berechnen Sie B^{-1}.
c) Lösen Sie das Gleichungssystem $AB\,x = c$ mit

$$x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)\,, \quad c^T = (1, 2, 3, 4)$$

unter Verwendung von b).

a) $\frac{1}{2}A$ orthogonal : $A^T = A^{-1}$

$$\frac{1}{2}A^T \cdot \frac{1}{2}A = \underbrace{\frac{1}{4}A^T}_{A^{-1}} \cdot A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = E$$

b) gesucht : B^{-1}

$$\begin{array}{c|cccc|cccc|l}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\
4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
5 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 - 2 - 3 - 4 \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 + \frac{1}{2}\,5 \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 3 + \frac{1}{2}\,5 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 4 + \frac{1}{2}\,5 \\
\hline
\end{array}$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $AB\,x = c$

$$\Leftrightarrow \underbrace{B^{-1}\underbrace{A^{-1}A}_{E}B}_{E}\,x = B^{-1}A^{-1}c$$

$$\Leftrightarrow x = B^{-1}A^{-1}c \qquad A^{-1} = \frac{1}{4}A^T \quad \text{(siehe a))}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -16 \\ 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 40 12.11.2014

Mit Hilfe der Produktionsfaktoren F_1, F_2, F_3 sollen zwei Produkte P_1, P_2 hergestellt werden. Dazu sind folgende Daten bekannt:

Produkt	Menge	Verkaufspreis	Produktionsfaktorverbrauch je Produkteinheit F_1	F_2	F_3
P_1	x_1	4	1	1	3
P_2	x_2	4	1	2	2
Kapazität der Produktionsfaktoren			60	60	120

a) Mit der Zielsetzung „Umsatzmaximierung“ formuliere man das entsprechende lineare Optimierungsproblem und löse dieses Problem graphisch.
b) Wie ist die Kapazität von F_2 zu verändern, wenn ein Umsatzmaximum von 200 erreicht werden soll?

Aufgabe 41 19.11.2014

Gegeben ist das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{ZF:} & x_1 & + & x_2 & \rightarrow & \max \\ \text{NB I:} & 2x_1 & + & x_2 & \geqq & 4 \\ \text{NB II:} & x_1 & + & 2x_2 & \leqq & 4 \\ \text{NB III:} & 3x_1 & - & 2x_2 & \leqq & 0 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geqq 0$$

a) Zeigen Sie graphisch, dass dieses Problem unlösbar ist.
b) Eliminieren Sie *alternativ* die Nebenbedingung
   α) NB I,
   β) NB II,
   γ) NB III
   und diskutieren Sie für jeden dieser Fälle die Lösbarkeit des Problems. Ermitteln Sie gegebenenfalls Optimallösungen und Zielfunktionswert.

Aufgabe 42 19.11.2014

Gegeben sei das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$c_1x_1 + 4x_2 + 10 \rightarrow \max$$

$$\begin{array}{rcrcl} 3x_1 & + & 6x_2 & \leqq & b_1 \\ 3x_1 & + & x_2 & \leqq & 9 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geqq 0$$

a) Lösen Sie das Problem für $c_1 = 3$ und $b_1 = 18$ graphisch und geben Sie die Optimallösung sowie den optimalen Zielfunktionswert an.
b) Untersuchen Sie anhand der Graphik aus a), in welchem Bereich der Wert für c_1 variieren darf, so dass die ermittelte Optimallösung erhalten bleibt. Berechnen Sie diesen Bereich.
c) Interpretieren Sie b_1 betriebswirtschaftlich. In welchem Intervall kann man b_1 verändern, so dass beide Produktionsfaktoren für die Produktion verwendet werden? In welchem Intervall kann man b_1 verändern, so dass zur Erreichung der Optimallösung beide Produktionsfaktoren ausgeschöpft werden?

Aufgabe 43 19.11.2014

Bauer Paul Profitlich überdenkt die Rationierung des Futters seiner Schweine. Bis dato hatte er zwei Bestandteile im Verhältnis 1:1 gemischt. Sein Hof-Veterinär hat die Menge notwendiger Vitamine in dieser Futtermischung gemessen und grob geschätzt, dass 4 kg Futter pro Schwein und Tag nötig sind, damit die Tiere auf keinen Fall an Vitaminmangelerscheinungen leiden.

Bauer Profitlich hat nun in der aktuellen Ausgabe des *Stallanzeigers* gelesen, dass er pro Tag und Schwein mindestens 2 mg von Vitamin 1, mindestens 3 mg von Vitamin 2 und mindestens 4 mg von Vitamin 3 füttern muss. In der Inhaltsangabe seiner Futtermittelkomponenten steht bei Bestandteil 1, dass es pro kg jeweils 1 mg von jedem dieser drei Vitamine enthält. Futtermittelbestandteil 2 enthält pro kg 1/2 mg von Vitamin 1, 1 mg von Vitamin 2 und 2 mg von Vitamin 3. Beide Futtermittelkomponenten kosten 5 Cent je kg. Bauer Profitlich stellt sich nun die Frage, in welchen Anteilen er die Futtermittelkomponenten mischen muss und wieviel er somit von diesen Komponenten pro Tag und Schwein verfüttern muss, dass seine Kosten minimal sind, trotzdem aber die Vitaminversorgung gewährleistet ist.

a) Formulieren Sie das Problem als lineares Optimierungsproblem mit den Bezeichnungen x_1, x_2 für die Menge an Futtermittelbestandteilen vom Typ 1 beziehungsweise vom Typ 2.
b) Lösen Sie das Problem graphisch (Berechnung der relevanten Geradenschnittpunkte ist trotzdem erforderlich) und geben Sie die Menge der Optimallösungen an.
c) Wieviel muss Bauer Profitlich pro Schwein füttern, wenn alle Nebenbedingungen eingehalten werden sollen und er seine alte Futtermischung weiter verwenden will? Erreicht er so das Kostenoptimum?

Aufgabe 39

a) $ZF: \quad 15x_1 + 20x_2 \rightarrow \max.$

$NB:$

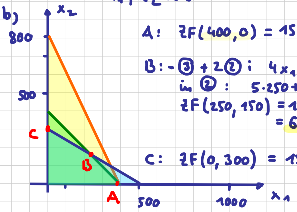
① $20x_1 + 10x_2 \leq 160 \cdot 50$ (Arbeit)

② $5x_1 + 5x_2 \leq 2000$ (Maschinen)

③ $6x_1 + 10x_2 \leq 3000$ (Kunststoff)

$x_1, x_2 \geq 0$

b)



A: $ZF(400,0) = 15 \cdot 400 + 20 \cdot 0 = 6000$

B: $-③ + 2②$: $4x_1 = 1000 \Rightarrow x_1 = 250$

in ②: $5 \cdot 250 + 5x_2 = 2000 \Rightarrow x_2 = 150$

$ZF(250, 150) = 15 \cdot 250 + 20 \cdot 150$

$= 6750$ ← optimal

C: $ZF(0, 300) = 15 \cdot 0 + 20 \cdot 300 = 6000$

c)

		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3		
	①	-3	0	0	0	2	6000	
$\frac{5000}{14} \approx 357$	②	14	0	1	0	-1	5000	
$500/2 = 250$	③	2	0	0	1	$-1/2$	500	
$300/\frac{3}{5} = 500$	④	$3/5$	1	0	0	$1/10$	300	
		0	0	0	$3/2$	$\cancel{-1}$ $5/4$	6750	① + $3/2$ ③
		0	0	1	-7	$5/2$	1500	② − 7 ③
		1	0	0	$1/2$	$-1/4$	250	$1/2$ ③
		0	1	0	$-3/10$	$1/4$	150	④ − $3/10$ ③

optimal:

$x_1 = 250$, $x_2 = 150$, $ZF = 6750$,

d) $y_1 = 1500$ Reserve Arbeitsstunden

e) B ist optimal

$\Leftrightarrow \quad ZF(A) \leq ZF(B)$ und $ZF(C) \leq ZF(B)$

$\Leftrightarrow \quad (15+\gamma)\,400 \leq (15+\gamma) \cdot 250 + 20 \cdot 150$
$\wedge \quad 20 \cdot 300 \leq (15+\gamma) \cdot 250 + 20 \cdot 150$

$\Leftrightarrow \quad 150\gamma \leq 15 \cdot 50$
$\wedge \quad -250\gamma \leq 15 \cdot 50$

$\Leftrightarrow \quad \gamma \leq 5 \wedge \gamma \geq -3$

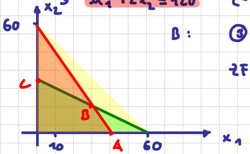
$\Leftrightarrow \quad \gamma \in [-3; 5]$

Aufgabe 40

ZF: $4x_1 + 4x_2$

		Steigung
NB 1	$x_1 + x_2 \le 60$	(-1)
NB 2	$x_1 + 2x_2 \le 60$	(-0.5)
NB 3	$3x_1 + 2x_2 \le 120$	(-1.5)

$\Rightarrow$ B ist optimal



B: ③ − ②: $x_1 = 30$, $x_2 = 15$

$ZF(30,15) = 180$

b) NB 2: $x_1 + 2x_2 \le 60 + \gamma$

$ZF(x_1, x_2) = 4x_1 + 4x_2 = 200$

$\Leftrightarrow x_2 = 50 - x_1$

Schnittpunkt zwischen NB ② und ③:

$$
\begin{array}{llr}
\text{NB 2} & x_1 + 2x_2 - \gamma & = 60 \\
\text{NB 3} & 3x_1 + 2x_2 & = 120 \\
\text{ZF} & x_1 + x_2 & = 50
\end{array}
$$

$x_1 = 20$, $x_2 = 30$

$20 + 60 - \gamma = 60$

$\gamma = 20$

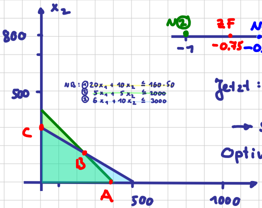
$\Rightarrow$ Kapazität von F_2 muss um 20 Einheiten erhöht werden.

zu A39e

Steigungen: NB ② : -1

③ : $-\frac{6}{10} = -\frac{3}{5} = -0.6$

ZF : $-\frac{15}{20} = -\frac{3}{4} = -0.75$



Jetzt: Deckungsbeitrag Typ „A"

$c_1 = 15 + \gamma$

→ Steigung ZF : $\frac{-15+\gamma}{20}$

Optimum bleibt erhalten

$-1 < \frac{-(15+\gamma)}{20} < -0.6$

$\Leftrightarrow -1 < -\frac{c_1}{20} < -0.6$

$\Leftrightarrow -20 < c_1 < -12$

$\Leftrightarrow 20 > +c_1 > 12$

$(\Leftrightarrow 20 > 15 + \gamma > 12$

$\Leftrightarrow 5 > \gamma > -3)$

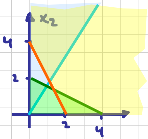
ZF : $(15+\gamma)\,x_1 + 20\,x_2 \to \max$

Isonutzengerade ZF = konst.

Aufgabe 41

ZF:	x_1	$+$	x_2	$\rightarrow$	max	
NB I:	$2x_1$	$+$	x_2	$\geqq$	4	
NB II:	x_1	$+$	$2x_2$	$\leqq$	4	
NB III:	$3x_1$	$-$	$2x_2$	$\leqq$	0	

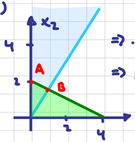
$x_1, x_2 \geqq 0$



a) Zulässigkeitsbereich = { }

⇒ kein Optimum

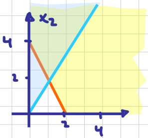
b)



ohne NB I

⇒ ...

⇒ B ist max

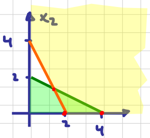


ohne NB II

Zulässigkeitsbereich ist nach oben unbeschränkt

→ ZF kann beliebig groß werden

→ kein Optimum



ohne NB III

→ ...

⇒ 4/0 ist optimal

Aufgabe 42

Gegeben sei das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$c_1 x_1 + 4x_2 + 10 \rightarrow \max$$

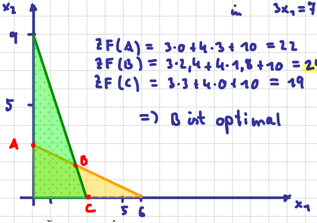
$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 &\leqq b_1 \\ 3x_1 + x_2 &\leqq 9 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

a) Lösen Sie das Problem für $c_1 = 3$ und $b_1 = 18$ graphisch und geben Sie die Optimallösung sowie den optimalen Zielfunktionswert an.

ZF: $3x_1 + 4x_2 + 10 \rightarrow \max$

① $3x_1 + 6x_2 \leq 18$
② $3x_1 + x_2 \leq 9$
} B: $5x_2 = 9 \Rightarrow x_2 = 1.8$

in: $3x_1 = 7.2 \Leftrightarrow x_1 = 2.4$



$ZF(A) = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + 10 = 22$
$ZF(B) = 3 \cdot 2{,}4 + 4 \cdot 1{,}8 + 10 = 24.4$ → max
$ZF(C) = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 0 + 10 = 19$

$\Rightarrow$ B ist optimal

b) Untersuchen Sie anhand der Graphik aus a), in welchem Bereich der Wert für c_1 variieren darf, so dass die ermittelte Optimallösung erhalten bleibt. Berechnen Sie diesen Bereich.

Steigung $\begin{cases} N_1 : & -\frac{1}{2} \\ N_2 : & -3 \\ ZF : & -\frac{c_1}{4} \end{cases}$ Optimum bei B bleibt solange $-3 \leq -\frac{c_1}{4} \leq -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 12 \geq c_1 \geq 2$

c) Interpretieren Sie b_1 betriebswirtschaftlich. In welchem Intervall kann man b_1 verändern, so dass beide Produktionsfaktoren für die Produktion verwendet werden? In welchem Intervall kann man b_1 verändern, so dass zur Erreichung der Optimallösung beide Produktionsfaktoren ausgeschöpft werden?

- $b_1 \mathrel{\hat=}$ Kapazitätsgrenze der N_1 (z.B. limitierter Produktionsfaktor)
- Verwendung beider Prod.faktoren sobald $b_1 > 0$.
- beide Pr.f. im Optimum ausgeschöpft

$\Leftrightarrow \quad 3 \cdot 0 + 6 \cdot 9 \geq b_1 \ \wedge \ 3 \cdot 3 + 6 \cdot 0 \leq b_1$

$\Leftrightarrow \quad 9 \leq b_1 \leq 54$

Aufgabe 43

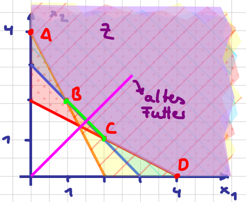
Bauer Paul Profitlich überdenkt die Rationierung des Futters seiner Schweine. Bis dato hatte er zwei Bestandteile im Verhältnis 1:1 gemischt. Sein Hof-Veterinär hat die Menge notwendiger Vitamine in dieser Futtermischung gemessen und grob geschätzt, dass 4 kg Futter pro Schwein und Tag nötig sind, damit die Tiere auf keinen Fall an Vitaminmangelerscheinungen leiden.

Bauer Profitlich hat nun in der aktuellen Ausgabe des *Stallanzeigers* gelesen, dass er pro Tag und Schwein mindestens 2 mg von Vitamin 1, mindestens 3 mg von Vitamin 2 und mindestens 4 mg von Vitamin 3 füttern muss. In der Inhaltsangabe seiner Futtermittelkomponenten steht bei Bestandteil 1, dass es pro kg jeweils 1 mg von jedem dieser drei Vitamine enthält. Futtermittelbestandteil 2 enthält pro kg 1/2 mg von Vitamin 1, 1 mg von Vitamin 2 und 2 mg von Vitamin 3. Beide Futtermittelkomponenten kosten 5 Cent je kg. Bauer Profitlich stellt sich nun die Frage, in welchen Anteilen er die Futtermittelkomponenten mischen muss und wieviel er somit von diesen Komponenten pro Tag und Schwein verfüttern muss, dass seine Kosten minimal sind, trotzdem aber die Vitaminversorgung gewährleistet ist.

a) Formulieren Sie das Problem als lineares Optimierungsproblem mit den Bezeichnungen x_1, x_2 für die Menge an Futtermittelbestandteilen vom Typ 1 beziehungsweise vom Typ 2.
b) Lösen Sie das Problem graphisch (Berechnung der relevanten Geradenschnittpunkte ist trotzdem erforderlich) und geben Sie die Menge der Optimallösungen an.
c) Wieviel muss Bauer Profitlich pro Schwein füttern, wenn alle Nebenbedingungen eingehalten werden sollen und er seine alte Futtermischung weiter verwenden will? Erreicht er so das Kostenoptimum?

Vitamin 1 : $x_1 + \frac{1}{2} x_2 \geq 2$
" 2 : $x_1 + x_2 \geq 3$
3 : $x_1 + 2x_2 \geq 4$

ZF : $5x_1 + 5x_2 \to \min.$



A : $ZF(0,4) = 5 \cdot 4 = 20$
D : $ZF(4,0) = 5 \cdot 4 = 20$

C : ③ − ② : $x_2 = 1$
$x_1 = 2$
$ZF(2,1) = 5 \cdot 1 + 5 \cdot 2$
$= 15$

B : ① − ② : $x_2 = 2$
$x_1 = 1$
$ZF(1,2) = 15$

B und C sind optimal und damit auch die Verbindungsstrecke

Optimal : $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_+ : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \in [0;1] \right\}$

alte Mischung

c) $x_1 = x_2$ schneiden mit Begrenzung von NB ② : $x_1 + x_2 = 3$

$\Rightarrow$ $2x_1 = 3 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 1{,}5$

$\Rightarrow$ 3kg pro Schwein von altem Futter sind ausreichend und kostenoptimal