Aufgabe 44 19.11.2014

Geben Sie die rekursiv definierten Folgen (a_n) und (b_n) mit

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{2}{n+1} a_n \quad \text{mit} \quad (a_0 = \tfrac{1}{2}) \\
b_{n+1} &= \sqrt{b_n} \quad \text{mit} \quad (b_1 = 2)
\end{aligned}
$$

in expliziter Form an.

Aufgabe 45 26.11.2014

Berechnen Sie für die Folgen $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und

$$
a_n = \frac{(-1)^n \binom{n}{3} + (n+3)^2}{1 + n^2 + 4n^3}, \qquad b_n = \frac{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^3}}{\sqrt{n}\left(\frac{3}{n^2} - \frac{4}{n^4}\right)},
$$

$$
c_n = (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n+1}} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad d_n = \frac{\sqrt{n} - n}{\sqrt{n} + n + 1}, \quad e_n = \frac{3n\sqrt{n} - \frac{1}{n}}{n\left(2 + \sqrt{n}\right)}
$$

die Grenzwerte.

Aufgabe 46 26.11.2014

a) Überprüfen Sie die Reihen $(r_n), (s_n), (t_n), (u_n)$ mit

$$
r_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{5i+21}, \quad s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{3^{i+1}}{5^{i-1}}, \quad t_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{3^{2i}}{5^i}, \quad u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2(i!)}{(2i)!}
$$

auf ihre Konvergenz.

b) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} (s_n)$.

Aufgabe 47 26.11.2014

Eine Schätzung der gesamten Öl- und Gasreserven im norwegischen Festlandsockel zu Beginn des Jahres 2003 betrug 13 Milliarden Tonnen. Die Förderung im selben Jahr lag bei 250 Millionen Tonnen.

a) Wann sind die Reserven erschöpft, wenn die Förderung auf demselben Niveau wie im Jahr 2003 fortgesetzt wird?

b) Nehmen Sie an, dass die Förderung jedes Jahr um 2% im Vergleich zum vorangegangenen Jahr reduziert wird, beginnend im Jahr 2004.

   Wie lange werden die Reserven in diesem Fall reichen?

c) Wie ändert sich die Situation, wenn die jährliche Förderung um jeweils 10 Millionen Tonnen gegenüber dem Vorjahr steigt, beginnend im Jahr 2004.

   Wie lange werden die Reserven in diesem Fall reichen?

Aufgabe 48 26.11.2014, nur a)

a) Für welche $k \in \mathbb{N}$ konvergieren die Folgen (a_n), (b_n), (c_n) mit

$$
a_n = \frac{3\,(n^{10}-1)}{2\,(n+1)^k}, \quad b_n = a_n^{-1}, \quad c_n = a_n^2 \ ?
$$

Geben Sie gegebenenfalls die entsprechenden Grenzwerte an.

Aufgabe 49 26.11.2014

Überprüfen Sie mit Hilfe des Quotientenkriteriums, für welche $a \in \mathbb{R}$ die Reihen $(r_n), (s_n)$ mit

$$
r_n = \sum_{i=0}^{n} a^{-i}, \quad s_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{(a-1)^i}{a(i+1)}
$$

konvergieren.

Aufgabe 45 26.11.2014

Berechnen Sie für die Folgen $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und

$$a_n = \frac{(-1)^n \binom{n}{3} + (n+3)^2}{1 + n^2 + 4n^3}, \qquad b_n = \frac{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^3}}{\sqrt{n}\left(\frac{3}{n^2} - \frac{4}{n^4}\right)},$$

$$c_n = (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n+1}} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad d_n = \frac{\sqrt{n} - n}{\sqrt{n} + n + 1}, \quad e_n = \frac{3n\sqrt{n} - \frac{1}{n}}{n\left(2 + \sqrt{n}\right)}$$

die Grenzwerte.

a_n : $\binom{n}{3} = \frac{n!}{3!\,(n-3)!} = \frac{n\cdot(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot (n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$

$= \frac{1}{6} n(n-1)(n-2) = \frac{1}{6}(n^3 - n^2 - 2n^2 + 2n)$

$$a_n = \frac{(-1)^n \frac{1}{6}(n^3 - 3n^2 + 2n) + n^2 + 6n + 9}{1 + n^2 + 4n^3}$$

erweitere mit $\frac{1}{n^3}$

$$= \frac{(-1)^n \frac{1}{6}\left(1 - 3\cdot\frac{1}{n} + 2\cdot\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n} + 6\cdot\frac{1}{n^2} + 9\cdot\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n} + 4}$$

$$\text{„}\xrightarrow[n\to\infty]{}\text{"} \; \frac{(-1)^n \frac{1}{6}(1 - 0 + 0) + 0 + 0 + 0}{0 + 0 + 4} \text{"} = \text{"}(-1)^n \cdot \frac{1}{24}$$

also: nicht konvergent (bzw. divergent)

$$b_n = \frac{2\cdot n^{-1} - n^{-3}}{3n^{-3/2} - 4n^{-7/2}} = \frac{n}{n}\cdot\frac{2\cdot n^{-1} - n^{-3}}{3n^{-3/2} - 4n^{-7/2}}$$

$$= \frac{2 - \frac{1}{n^2}}{3\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2} - 4\left(\frac{1}{n}\right)^{5/2}} \;\text{„}\xrightarrow[n\to\infty]{}\text{"}\; \frac{2-0}{0-0} \quad (\text{beliebig groß})$$

$\Rightarrow b_n$ divergent

c_n : $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ $\quad \frac{1}{n}$ erw.

$\frac{n}{n^2+1} = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{0}{1+0} = 0$

mit $\frac{1}{n^2}$ erw.

$c_n = (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n+1}} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\lim_{n\to\infty} c_n \text{ „} = \text{" } (\pm 1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot 0^{1/2} = 0$$

c_n konvergiert gegen GW 0

Aufgabe 46 26.11.2014

a) Überprüfen Sie die Reihen $(r_n), (s_n), (t_n), (u_n)$ mit

$$r_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{5i+21}, \quad s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{3^{i+1}}{5^{i-1}}, \quad t_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{3^{2i}}{5^i}, \quad u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2(i!)}{(2i)!}$$

auf ihre Konvergenz.

b) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} (s_n)$.

a) r_n : Ist $\frac{2i}{5i+21}$ Nullfolge?

$\frac{2i}{5i+21} = \frac{2}{5 + \frac{21}{i}} \xrightarrow[i\to\infty]{} \frac{2}{5} \neq 0 \Rightarrow r_n$ ist divergent

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{3^2\cdot 3^{i-1}}{5^{i-1}} = 3^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3}{5}\right)^{i-1}}_{\text{geometrische Reihe mit } q<1 \;\to\; \text{konvergent}} = 3^2 \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{3}{5}\right)^i$$

$$= 3^2 \cdot \frac{1 - 0{,}6^n}{1 - 0{,}6} \xrightarrow[n\to\infty]{} 9\cdot\frac{1-0}{0{,}4}$$

$= 9\cdot\frac{5}{2} = 22{,}5$ → Grenzwert

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{3^{2i}}{5^i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3^2}{5}\right)^i = \sum_{i=1}^{n} 1{,}8^i \to \text{divergent}$$

(geom. Reihe mit $q>1$)

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{2(i!)}{(2i)!}}_{a_i}$$

Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{2((k+1)!)\,/\,(2(k+1))!}{2(k!)\,/\,(2k)!} = \frac{\cancel{2}\cdot(k+1)!\cdot\overbrace{(2k)!}^{(2k)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1}}{\cancel{2}\cdot(k)!\;\underbrace{(2k+2)!}_{(2k+2)(2k+1)(2k)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1}}$$

$$= \frac{k+1}{(2k+2)(2k+1)} = \frac{\cancel{k+1}}{2\cancel{(k+1)}(2k+1)} = \frac{1}{4k+2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 < 1$$

$\Rightarrow u_n$ konvergiert

Aufgabe 47 **26.11.2014**

Eine Schätzung der gesamten Öl- und Gasreserven im norwegischen Festlandsockel zu Beginn des Jahres 2003 betrug 13 Milliarden Tonnen. Die Förderung im selben Jahr lag bei 250 Millionen Tonnen.

a) Wann sind die Reserven erschöpft, wenn die Förderung auf demselben Niveau wie im Jahr 2003 fortgesetzt wird?

b) Nehmen Sie an, dass die Förderung jedes Jahr um 2% im Vergleich zum vorangegangenen Jahr reduziert wird, beginnend im Jahr 2004.

Wie lange werden die Reserven in diesem Fall reichen?

c) Wie ändert sich die Situation, wenn die jährliche Förderung um jeweils 10 Millionen Tonnen gegenüber dem Vorjahr steigt, beginnend im Jahr 2004.

Wie lange werden die Reserven in diesem Fall reichen?

a) 13 Mrd $= 250$ Mio $\cdot x \iff x = 52$ $\;\hat{=}$ Ende 2054 $\;\hat{=}$ Beginn 2055

b) Fördermenge bis n Jahre:

$$\sum_{i=0}^{n} 250\text{ Mio}\cdot 0{,}98^i = 13\text{ Mrd}$$

$$\iff \sum_{i=0}^{n} 0{,}98^i = 52 \iff \frac{1-0{,}98^{n+1}}{1-0{,}98} = 52$$

geom. Reihe

$$\iff 1-0{,}98^{n+1} = 1{,}04$$

$\Rightarrow$ nicht möglich, d.h. Reserven reichen ewig

c) Fördermenge bis Jahr n:

$$\sum_{i=0}^{n}(250\text{ Mio} + 10\text{ Mio}\cdot i)$$

$$= (n+1)\,250\text{ Mio} + 10\text{ Mio}\,(0+1+2+\cdots+n)$$

$$= 10\text{ Mio}\cdot\left((n+1)\cdot 25 + \tfrac{n}{2}(n+1)\right) = 13\text{ Mrd}$$

$$\iff 25n + 25 + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = 1300 \qquad /\cdot 2$$

$$\iff n^2 + 51n - 2550 = 0$$

$$\iff n_{1/2} = \tfrac{1}{2}\left(-51 \pm \sqrt{51^2 + 4\cdot 2550}\right) \approx \begin{matrix}31{,}07\\(-\ldots)\end{matrix}$$

Ende Öl: Anfang 2035

Aufgabe 44 19.11.2014

Geben Sie die rekursiv definierten Folgen (a_n) und (b_n) mit

$$a_{n+1} = \frac{2}{n+1} a_n \quad \text{mit} \quad (a_0 = \tfrac{1}{2})$$
$$b_{n+1} = \sqrt{b_n} \quad \text{mit} \quad (b_1 = 2)$$

in expliziter Form an.

n	0	1	2	3	4
a_n	$1/2$	$2/1 \cdot 1/2$	$2/2 \cdot 2/1 \cdot 1/2$	$\frac{2\cdot2\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2}$	$\frac{2^4}{4!\cdot 2}$

$a_1 = \frac{2}{1} \cdot a_0 = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2}$

$a_2 = \frac{2}{2} \cdot a_1 = \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2}$

$a_3 = \frac{2}{3} \cdot a_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2}$

allgemein $a_n = \frac{2^{n-1}}{n!}$

n	1	2	3	4	5
b_n	2	$2^{1/2}$	$2^{(1/2)^2}$	$2^{(1/2)^3}$	$2^{(1/2)^4}$

$b_2 = \sqrt{b_1} = b_1^{1/2} = 2^{1/2}$

$b_3 = \sqrt{b_2} = (b_2)^{1/2} = (2^{1/2})^{1/2} = 2^{\frac{1}{2^2}} = 2^{2^{-2}}$

$b_4 = \sqrt{b_3} = (b_3)^{1/2} = \left(2^{(1/2)^2}\right)^{1/2} = 2^{(1/2)^3} = 2^{2^{-3}}$

allgemein : $b_n = 2^{(1/2)^{n-1}}$

Aufgabe 45 26.11.2014

Berechnen Sie für die Folgen (a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n) mit $n \in \mathbb{N}$ und

$$a_n = \frac{(-1)^n \binom{n}{3} + (n+3)^2}{1 + n^2 + 4n^3}, \qquad b_n = \frac{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^3}}{\sqrt{n}\left(\frac{3}{n^2} - \frac{4}{n^4}\right)},$$

$$c_n = (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n+1}} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad d_n = \frac{\sqrt{n} - n}{\sqrt{n} + n + 1}, \quad e_n = \frac{3n\sqrt{n} - \frac{1}{n}}{n\,(2 + \sqrt{n})}$$

die Grenzwerte.

a_n: Vorüberlegung : $\binom{n}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!}$

$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cancel{(n-3)}\cdots\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{3!\,\cancel{(n-3)}\cdots\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}$

$= \frac{1}{6}\, n(n-1)(n-2) = \frac{1}{6}(n^3 - 3n^2 + 2n)$

$a_n = \frac{(-1)^n \frac{1}{6}(n^3-3n^2+2n) + n^2 + 6n + 9}{1 + n^2 + 4n^3}$

$= \frac{(-1)^n \frac{1}{6}\cdot(1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}) + \frac{1}{n} + \frac{6}{n^2} + \frac{9}{n^3}}{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n} + 4}$

$\cdot \frac{n^{-3}}{n^{-3}}$

$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{(-1)^n \cdot \frac{1}{6}(1 - 0 + 0) + 0 + 0 + 0}{0 + 0 + 4}$ " $= (-1)^n \cdot \frac{1}{24}$ "

also: a_n ist nicht konvergent

$b_n = \frac{2\cdot n^{-1} - n^{-3}}{3n^{-3/2} - 4n^{-7/2}} = \frac{2 - \frac{1}{n^2}}{3\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2} - 4\left(\frac{1}{n}\right)^{5/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{}$ " $\frac{2-0}{0-0}$ "

$\cdot \frac{n}{n}$

$\to$ kein (endl.) Grenzwert

$$c_n = (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n+1}} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{\frac{1}{2}}, :$$

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1+0} = 1$$

$$\cdot \frac{n^{-1}}{n^{-1}}$$

$$\frac{n}{n^2+1} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{0}{1+0} = 0$$

$$c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} (-1)^n \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1} \cdot (0)^{\frac{1}{2}} = \pm 1 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

$$d_n = \frac{\sqrt{n} - n}{\sqrt{n} + n + 1}, = \frac{n^{1/2} - n^1}{n^{1/2} + n^1 + 1} = \frac{n^{-1/2} - 1}{n^{-1/2} + 1 + \frac{1}{n}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2} - 1}{\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2} + 1 + \frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{0-1}{0+1+0} = -1$$

$$e_n = \frac{3n\sqrt{n} - \frac{1}{n}}{n\left(2+\sqrt{n}\right)} = \frac{3n^{3/2} - n^{-1}}{2n^1 + n^{3/2}}$$

$$= \frac{3 - \left(\frac{1}{n}\right)^{5/2}}{2\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2} + 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3-0}{0+1} = 3$$

$$\cdot \frac{n^{-3/2}}{n^{-3/2}}$$

Aufgabe 46 **26.11.2014**

a) Überprüfen Sie die Reihen (r_n), (s_n), (t_n), (u_n) mit

$$r_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{5i+21}, \quad s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{3^{i+1}}{5^{i-1}}, \quad t_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{3^{2i}}{5^i}, \quad u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2(i!)}{(2i)!}$$

auf ihre Konvergenz.

b) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} (s_n)$.

(alternativ)

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{3^{i+1}}{5^{i-1}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{3^2\cdot 3^{i-1}}{5^{i-1}} = 9\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^i$$

$$= 9\cdot \frac{1-0.6^n}{1-0.6} \longrightarrow 9\cdot \frac{5}{2} = 22{,}5$$

b)

$\Rightarrow$ s_n konvergiert, $\quad s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 22{,}5$

$$u_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{2(i!)}{(2i)!}$$, Quotientenkriterium:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{\cancel{2}(k+1)!}{(2(k+1))!}}{\frac{\cancel{2}(k!)}{(2k)!}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)!\cdot(2k)!}{k!\cdot(2k+2)!}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{(2k+2)(2k+1)} = \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{4k^2+6k+2}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}}{4+\frac{6}{k}+\frac{2}{k^2}} = \frac{0+0}{4+0+0} = 0 < 1$$

$\Rightarrow$ u_n ist konvergent

$$\frac{101!}{100!} = 101$$

$$\frac{200!}{202!} = \frac{1}{202\cdot 201}$$

Aufgabe 50 26.11.2014

Eine Rechnung über 3.250 € wird nicht sofort bezahlt. Daher sind Verzugszinsen in Höhe von 144,45 € zu bezahlen. Für welche Zeitspanne wurden Verzugszinsen berechnet falls der Zinsfuß 8% beträgt.

Aufgabe 51 26.11.2014

Ein Girokonto weist am Jahresanfang ein Guthaben von 2.400 € auf. Am 6. März werden auf das Konto 10.000 € überwiesen; am 21. Januar und am 16. Februar werden jeweils 4.000 € abgebucht. Die Bank berechnet 12% Sollzins und 0,5% Habenzins. Stellen Sie die Zinsabrechnung zum 1. April auf.

Aufgabe 52 26.11.2014

Jemand zahlt am 2. Juli 1999 auf sein Sparkonto 1000 € ein. Wie hoch ist der Kontostand am 2. April 2008 bei 3% Zins, falls das Konto zu diesem Zeitpunkt abgerechnet wird.

Aufgabe 53 3.12.2014

Jemand legt 20.000 € zu 6% zinseszinslich an. Auf welche Summe wächst das Kapital in 5 Jahren an bei

a) jährlicher,
b) halbjährlicher,
c) monatlicher,
d) täglicher oder
e) stetiger Verzinsung?

Aufgabe 54 26.11.2014

Eine Kapitalanlage hat sich in 10 Jahren verdoppelt. In der ersten Hälfte der Laufzeit betrug der Zinssatz 4%. Wie hoch war er in der zweiten Hälfte?

Aufgabe 55 26.11.2014

a) In welcher Zeit verdoppelt sich bei Zinseszinsrechnung jedes beliebige Anfangskapital K bei einem jährlichen Zinssatz von $p = 5\%$?
b) Wie muss der jährliche Zinssatz bei Zinseszinsrechnung aussehen, wenn sich das Anfangskapital in 10 Jahren verdoppeln soll?

Aufgabe 56 26.11.2014

Wie lange müssen 10.000 € angelegt werden, damit sie bei einer jährlichen Verzinsung von 7% ein Endkapital von 25.000 € erbringen?

Aufgabe 57 3.12.2014

Ein Waldbestand hat einen Tageswert von 1 Mio. €. Aufgrund von Abholzung und Umweltschäden, nimmt der mengenmäßige Bestand jährlich um 10% stetig ab; der Preis des Holzes steigt halbjährlich um 4%.

a) Welchen Tageswert hat der Wald in 10 Jahren?
b) Nach wie viel Jahren hat sich der Wert des Waldes halbiert?

Aufgabe 58 3.12.2014

Die Effektivverzinsung einer Anlage, die vierteljährlich verzinst wird, ist 6,14%. Wie hoch ist der (nominale) Jahreszinsfuß?

Aufgabe 59 3.12.2014

Jemand zahlt am Ende eines jeden Jahres 1000 € auf sein Sparkonto ein, welches zu 3% verzinst wird. Wie hoch ist der gesparte Betrag einschließlich Zinseszins am Ende des 10. Jahres?

Aufgabe 60 3.12.2014

Für den Kauf einer Maschine stehen folgende Zahlungsalternativen zur Auswahl:

a) 8.000 € sofort, 4 jährliche Raten zu je 2.000 €, zahlbar am Ende eines jeden Jahres
b) vier jährliche Raten zu je 4.000 €, zahlbar am Ende eines jeden Jahres
c) 5.000 € sofort, je 3.000 € am Ende des 2. und 3. Jahres und 5.000 € am Ende des 4. Jahres.

Für welche Zahlungsalternative (Barwertvergleich) soll man sich bei einem Zinssatz von 10% entscheiden?

Aufgabe 61 3.12.2014

Ein heute 55-jähriger Arbeitnehmer hat in 10 Jahren einen Anspruch auf eine monatliche Betriebsrente von 500 €, die vorschüssig bezahlt wird. Durch welche Gegenleistung kann sie heute bei einem Zinssatz von 6% abgelöst werden, wenn die Lebenserwartung von 77 Jahren angenommen wird.

Aufgabe 57 3.12.2014

Ein Waldbestand hat einen Tageswert von 1 Mio. €. Aufgrund von Abholzung und Umweltschäden, nimmt der mengenmäßige Bestand jährlich um 10% stetig ab; der Preis des Holzes steigt halbjährlich um 4%.

a) Welchen Tageswert hat der Wald in 10 Jahren?

b) Nach wie viel Jahren hat sich der Wert des Waldes halbiert?

$$\text{Wert}(t) = \text{preis}(t)\cdot \text{Menge}(t) \qquad (t \mathrel{\hat{=}} \text{Zeit})$$

$$= \text{preis}_0 \cdot (1{,}04^2)^t \cdot \text{Menge}_0 \cdot e^{-0{,}1\cdot t}$$

$$= \underbrace{\text{preis}_0 \cdot \text{Menge}_0}_{1\text{ Mio }€} \cdot \big(\underbrace{1{,}04^2\cdot e^{-0{,}1}}_{\approx 0{,}978}\big)^t$$

a) $$\text{Wert}(10) = 1\text{ Mio }€ \cdot (1{,}04^2\cdot e^{-0{,}1})^{10} = 806.069{,}16\ €$$

b) $$500' = 1\text{ Mio }€ \cdot (1{,}04^2\cdot e^{-0{,}1})^t$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln(1{,}04^2\cdot e^{-0{,}1})} \approx 32{,}15$$

(nach 32 Jahren zum ersten mal unter 50%)

Aufgabe 61 3.12.2014

Ein heute 55-jähriger Arbeitnehmer hat in 10 Jahren einen Anspruch auf eine monatliche Betriebsrente von 500 €, die vorschüssig bezahlt wird. Durch welche Gegenleistung kann sie heute bei einem Zinssatz von 6% abgelöst werden, wenn die Lebenserwartung von 77 Jahren angenommen wird.

$$K_0 = R_0 \cdot 1{,}06^{-10} = \underbrace{500\cdot\left(12+0{,}06\cdot\frac{12+1}{2}\right)}_{\text{Rentenersatzrate}} \cdot \underbrace{\frac{1{,}06^{12}-1}{1{,}06-1}\cdot 1{,}06^{-12}}_{\text{nach(!) schüss. Rentenbarwert}} \cdot 1{,}06^{-10} = 29001{,}86\ €$$

Aufgabe 62 3.12.2014

Ein Bausparer hat einen Bausparvertrag über 50.000 € Bausparsumme abgeschlossen. Der Habenzins beträgt 3%. Der Bausparvertrag ist zuteilungsreif, wenn 40% der Bausparsumme eingezahlt sind.

d.h. $0{,}4\cdot 50' = 20'$ müssen angespart werden

a) Nach wieviel Jahren ist der Bausparvertrag zuteilungsreif, wenn

- 1 ▸ 3.000 € jährlich nachschüssig
- 2 ▸ 3.000 € jährlich vorschüssig
- 3 ▸ 300 € monatlich nachschüssig

einbezahlt werden?

b) Welche Sparrate muß der Bausparer

- ▸ jährlich nachschüssig
- ▸ jährlich vorschüssig
- ▸ monatlich nachschüssig

leisten, damit der Vertrag in vier Jahren zuteilungsreif ist?

a) 1 nachsch. Rentenendwert

$$20000 = 3000\cdot\frac{1{,}03^n-1}{0{,}03} \Leftrightarrow 1{,}2 = 1{,}03^n$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{\ln 1{,}2}{\ln 1{,}03} \approx 6{,}17 \qquad \text{(nach 7 Jahren)}$$

2 $$20000 = 3000\cdot\frac{1{,}03^n-1}{0{,}03}\cdot 1{,}03$$

$$\Leftrightarrow \frac{0{,}2}{1{,}03}+1 = 1{,}03^n \Leftrightarrow n = \frac{\ln 1{,}23 - \ln 1{,}03}{\ln 1{,}03}$$

$$= \frac{\ln 1{,}23}{\ln 1{,}03} - 1 \approx 6{,}003$$

(auch nach 7 Jahren)

3 $$20000 = 300\cdot\big(\underbrace{12+0{,}03\cdot\tfrac{11}{2}}_{12{,}165}\big)\cdot\frac{1{,}03^n-1}{0{,}03}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{12{,}165}+1 = 1{,}03^n \Leftrightarrow n = \frac{\ln\left[\frac{2}{12{,}165}+1\right]}{\ln 1{,}03} \approx 5{,}149$$

also nach 5 Jahren

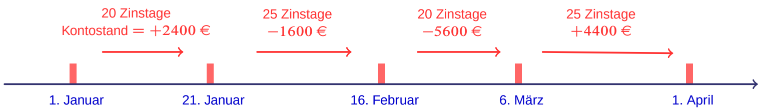
$$300\cdot 12{,}165\cdot\frac{1{,}03^5-1}{0{,}03} = 121650\cdot(1{,}03^5-1)$$

$$= 19375{,}69\ € \Rightarrow \text{5 Jahre und 3 Monate}$$

Lösung zu Aufgabe 51 - 50

$$K_n = K_0(1 + n \cdot i) \quad \Rightarrow \quad n = \frac{K_n - K_0}{K_0 \cdot i} = \frac{144,45}{3250 \cdot 0,08} \approx 0,5556 \text{ Jahre} \mathrel{\hat{=}} 200 \text{ Tage}$$

Lösung zu Aufgabe 52 - 51



$$\tfrac{20}{360} \cdot 0,005 \cdot 2400 - \tfrac{25}{360} \cdot 0,12 \cdot 1600 - \tfrac{20}{360} \cdot 0,12 \cdot 5600 + \tfrac{25}{360} \cdot 0,005 \cdot 4400 = -48,46\,€$$

Lösung zu Aufgabe 52

$$K = 1000\left(1 + \frac{179}{360} \cdot 0,03\right)\left(1 + \frac{3}{100}\right)^8\left(1 + \frac{91}{360} \cdot 0,03\right) \approx 1295,42$$

Lösung zu Aufgabe 53

a) $\cdot 1,06^5 \approx 26.764,51$

b) $\cdot 1,03^{10} \approx 26.878,33$

c) $\cdot 1,005^{60} \approx 26.977,00$

d) $\cdot\left(1 + \frac{0,06}{360}\right)^{360 \cdot 5} \approx 26.996,50$

e) $\cdot e^{0,06 \cdot 5} \approx 26.997,18$

Aufgabe 69 3.12.2014

Ein Auto, das 57.000 € kostet, soll durch einen Kredit finanziert werden. Die Hausbank bietet einen Kredit, der in zwei gleich hohen jährlichen Tilgungsraten zurückzuzahlen ist, mit folgenden Konditionen an: Zins p.a. 8%, Auszahlung 90%. Wie hoch ist der Effektivzinsfuß für den Kredit?

Schuldsumme: $S \cdot 0{,}9 = 57' \quad = \frac{57'}{0{,}9}$

$T = \frac{S}{2} = \frac{57'}{1{,}8}$

$$57' = (\underbrace{T + z_{(1.\text{Jahr})}}_{\text{nach 1 Jahr}})\, q^{-1} + (\underbrace{T + z_{(2.\text{Jahr})}}_{\text{nach 2 Jahre}}) \cdot q^{-2}$$

gesuchte Effektivzins

$$\Leftrightarrow \cancel{57'} = \left(\frac{\cancel{57'}}{1{,}8} + 0{,}08 \cdot \frac{\cancel{57'}}{0{,}9}\right) \cdot q^{-1} + \left(\frac{\cancel{57'}}{1{,}8} + \underbrace{0{,}08 \cdot \tfrac{1}{2} \frac{\cancel{57'}}{0{,}9}}_{\substack{\text{Zinsen im 2. Jahr} \\ \text{nur noch für die} \\ \text{Hälfte von } S}}\right) q^{-2}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \left(\frac{1}{1{,}8} + \frac{0{,}16}{1{,}8}\right) q^{-1} + \left(\frac{1}{1{,}8} + \frac{0{,}08}{1{,}8}\right) q^{-2} \qquad / \cdot 1{,}8 q^2$$

$$1{,}8 q^2 = 1{,}16 q + 1{,}08 \Leftrightarrow 1{,}8 q^2 - 1{,}16 q - 1{,}08 = 0$$

$$\Leftrightarrow q_{1/2} = \frac{1}{2 \cdot 1{,}8}\left(1{,}16 \pm \sqrt{1{,}16^2 + 4 \cdot 1{,}8 \cdot 1{,}08}\right)$$

$$= \begin{cases} 1{,}1611 \;\hat{=}\; 16{,}11\,\% \\ (-\ldots) \end{cases}$$

Lösung zu Aufgabe ~~55~~ 54

$$
\begin{aligned}
K_{10} = 2K_0 &= K_0 \cdot 1,04^5 \cdot q^5 \\
\Rightarrow \quad 2 &= 1,04^5 \cdot q^5 \\
\Rightarrow q &= \frac{\sqrt[5]{2}}{1,04} \approx 1,1045 \mathrel{\hat{=}} 10,45\%
\end{aligned}
$$

Lösung zu Aufgabe ~~56~~ 55

a) $2K_0 = K_0 \cdot 1,05^n \quad \Rightarrow \quad n = \dfrac{\ln 2}{\ln 1,05} \approx 14,2$

b) $2K_0 = K_0 \cdot q^{10} \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt[10]{2} = 1,0718$

Lösung zu Aufgabe ~~57~~ 56

$$
10.000 \cdot 1,07^n = 25.000 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\ln 0,25}{\ln 1,07} \approx 13,54\,\text{Jahre}
$$

Lösung zu Aufgabe ~~58~~ 57

a) $K_0 = p_0 \cdot x_0 = 1.000.000 \quad \Rightarrow \quad K_{10} = \underbrace{p_0 \cdot (1,04^2)^{10}}_{\text{Preis in 10 J.}} \cdot \underbrace{x_0 \cdot \mathrm{e}^{-0,1\cdot 10}}_{\text{Waldbestand in 10 J.}} \approx 806.069$

b)

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}K_0 = K_0 \cdot 1,04^{2\cdot n} \cdot \mathrm{e}^{-0,1\cdot n} \\
\Rightarrow \quad &\ln\frac{1}{2} = 2 \cdot n \cdot \ln 1,04 - 0,1 \cdot n \\
\Rightarrow \quad &n \approx 32,15\,\text{Jahre}
\end{aligned}
$$

Lösung zu Aufgabe 58

$$
\left(1 + \frac{i}{4}\right)^4 = 1,0614 \quad \Rightarrow \quad i = \left(\sqrt[4]{1,0614} - 1\right) \cdot 4 = 0,06 = 6\%
$$

Lösung zu Aufgabe 59

$$
R_{10} = 1000 \cdot \frac{1,03^{10} - 1}{0,03} \approx 11.463,88\,€
$$

Lösung zu Aufgabe 60

(1) Kapitalwert: $8000 + 2000 \dfrac{1}{1,1^4} \dfrac{1,1^4 - 1}{0,1} \approx 14.339,73$

(2) Rentenbarwert: $4000 \cdot \dfrac{1}{1,1^4} \cdot \dfrac{1,1^4 - 1}{0,1} \approx 12.679,40$

(3) Kapitalwert: $5000 + \dfrac{3000}{1,1^2} + \dfrac{3000}{1,1^3} + \dfrac{5000}{1,1^4} \approx 13.148,35$

Also: Variante (2) ist am günstigsten

Lösung zu Aufgabe ~~62~~ 61

$$
r_{\mathrm{e}} = 500\left(12 + 0,06 \cdot \frac{13}{2}\right) = 6195,00\,€
$$

Rente ab 65: $R_0 = r_{\mathrm{e}} \cdot \dfrac{q^{12} - 1}{q - 1} \cdot \dfrac{1}{q^{12}} \approx 51.937,91\,€$

heute: $\dfrac{R_0}{q^{10}} \approx 29.001,86\,€$

Lösung zu Aufgabe ~~63~~ 62

a)
- 3000 € jährlich nachschüssig:

  $20.000 = 3000 \dfrac{1,03^n - 1}{0,03} \quad \Rightarrow \quad 1,03^n = 1,2 \quad \Rightarrow \quad n \approx 6,17\,\text{Jahre}$

- 3000 € jährlich vorschüssig:

  $20.000 = 3000 \cdot 1,03 \cdot \dfrac{1,03^n - 1}{0,03} \quad \Rightarrow \quad n = \dfrac{\ln 1,194}{\ln 1,03} \approx 6\,\text{Jahre}$

- 3000 € monatlich nachschüssig:

$$r_e = 300\left(12 + 0,03 \cdot \frac{11}{2}\right) = 3649,50 \quad \Rightarrow \quad n = 5,15 \text{ Jahre}$$

b) wie a), jetzt r gesucht

- jährlich nachschüssig: $r = 4780,54$ €
- jährlich vorschüssig: $r = 4641,30$ €
- monatlich nachschüssig: $r_e = 4780,54 \quad \Rightarrow \quad r = 392,97$ €

Lösung zu Aufgabe 63

a) $$100.000 \cdot 1,06^n + 4000 \frac{1,06^n - 1}{0,06} = 50.000 \cdot 1,06^n + 8000 \frac{1,06^n - 1}{0,06} \quad \Rightarrow \quad n \approx 23,79$$

b) $$\underbrace{50.000 \cdot 1,06^{10}}_{\text{Vorsprung von A}} = (r_b - \underbrace{4000}_{\text{Sparrate von A}}) \cdot \frac{1,06^{10} - 1}{0,06} \quad \Rightarrow \quad r_B = 10.793,40 \text{ €}$$

Lösung zu Aufgabe 64

$$\begin{aligned} R_0 &= 20.000 \cdot \frac{\overset{1.055}{\cancel{1,05}}{}^{20} - 1}{0,055} \cdot \frac{1}{1,055^{20}} \quad \Big\} \text{ Barwert Entnahmephase} \\ &= 239.007,65 \text{ €} \\ &= r\left(12 + 0,055 \frac{13}{2}\right) \cdot \frac{1,055^{30} - 1}{0,055} \quad \Big\} \text{ Endwert Ansparphase} \\ \Rightarrow \quad r &= 267,01 \text{ €} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 65

$$R_0 = 100.000 \cdot \frac{1}{1,05^5} \cdot 1,05 \cdot \frac{1,05^5 - 1}{0,05} = 454.595,09$$

Lösung zu Aufgabe 66

$$R_0 = 1000 \cdot \frac{1,01^{20} - 1}{0,01} \cdot 1,01 \cdot \frac{1}{1,01^{20}} \approx 18.226,00 \text{ €}$$

Lösung zu Aufgabe 67

$$r_e = 5000 \cdot \left(4 + 0,05 \cdot \frac{5}{2}\right) = 20.625 \quad \Rightarrow \quad R_0 = 159.260,77 \text{ €}$$

Lösung zu Aufgabe 68

$$T = \frac{1}{5} \cdot 500.000 = 100.000$$

Jahr	R_k	Z_k	T	A_k
1	500.000	35.000	100.000	135.000
2	400.000	28.000	100.000	128.000
3	300.000	21.000	100.000	121.000
4	200.000	14.000	100.000	114.000
5	100.000	7.000	10~~7~~.000	1~~3~~5.000
6	0	0	100 0	107 0

Aufgabe 62 3.12.2014

Ein Bausparer hat einen Bausparvertrag über 50.000 € Bausparsumme abgeschlossen. Der Habenzins beträgt 3%. Der Bausparvertrag ist zuteilungsreif, wenn 40% der Bausparsumme eingezahlt sind.

a) Nach wieviel Jahren ist der Bausparvertrag zuteilungsreif, wenn
   - 3.000 € jährlich nachschüssig
   - 3.000 € jährlich vorschüssig
   - 300 € monatlich nachschüssig

   einbezahlt werden?

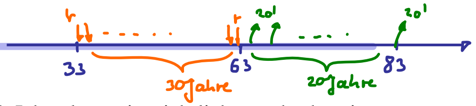
b) Welche Sparrate muß der Bausparer
   - jährlich nachschüssig
   - jährlich vorschüssig
   - monatlich nachschüssig

   leisten, damit der Vertrag in vier Jahren zuteilungsreif ist?

Aufgabe 63 3.12.2014

Das Vermögen von A ist mit 100.000 € doppelt so hoch wie das Vermögen von B. A spart jährlich 4.000 € nachschüssig, während B 8.000 € spart. Die jährliche Verzinsung ist 6%.

a) Nach wie vielen Jahren sind die Vermögen von A und B gleich hoch?
b) Wie hoch muss die jährliche Sparleistung von B sein, damit er in 10 Jahren das gleiche Vermögen wie A hat?



Aufgabe 64 3.12.2014

Jemand möchte von seinem 63. Geburtstag an 20 Jahre lang eine jährliche nachschüssige Rente in Höhe von 20.000 € ausbezahlt bekommen. Welchen Betrag muß er dafür 30 Jahre lang bis zu seinem 63. Geburtstag monatlich vorschüssig einbezahlen? Der Zinsfuß betrage 5,5% jährlich.

Aufgabe 65 3.12.2014

Als Kaufpreis für ein Haus hat der Erwerber 5 Raten von je 100.000 € zu leisten. Die erste Rate muss sofort bezahlt werden, die übrigen in jährlichen Abständen. Mit welchem Betrag könnte bei 5% Zins die ganze Schuld sofort beglichen werden?

Aufgabe 66

Welches Kapital benötig man heute, wenn daraus 5 Jahre lang zu jedem Quartalsbeginn eine Spende von 1000 € überwiesen werden soll? Die vierteljährliche Verzinsung ist 1%.

Aufgabe 67 3.12.2014

In einer Pensionszusage wird eine Rente über 5000 € zu Beginn eines Quartals 10 Jahre lang bezahlt. Welchen Betrag muss die Firma bei einem Jahreszinssatz von 5% am Anfang der Rentenzahlungen für die Pensionsrückstellung (Barwert) einsetzen?

Aufgabe 68

Ein Unternehmen nimmt einen Kredit über 500.000 € zu 7% Zins auf. Der Kredit ist in fünf Jahren mit gleichbleibenden Tilgungsraten zu tilgen. Erstellen Sie den Tilgungsplan.

Aufgabe 69 3.12.2014

Ein Auto, das 57.000 € kostet, soll durch einen Kredit finanziert werden. Die Hausbank bietet einen Kredit, der in zwei gleich hohen jährlichen Tilgungsraten zurückzuzahlen ist, mit folgenden Konditionen an: Zins p.a. 8%, Auszahlung 90%. Wie hoch ist der Effektivzinsfuß für den Kredit?

Aufgabe 70 3.12.2014

Eine GmbH nimmt einen Kredit über 2.000.000 € zu 10% Zins auf, der mit gleichbleibenden Tilgungsraten in 20 Jahren zu tilgen ist. Berechnen Sie

a) die Restschuld am Anfang des 10. Jahres,
b) die Restschuld nach 15 Jahren,
c) den Zinsbetrag im 12. Jahr und
d) die Aufwendungen im 18. Jahr.

Aufgabe 71 3.12.2014

Eine Anleihe von 1.000.000 € soll mittels gleichbleibender Annuität zu 7% verzinst und innerhalb der nächsten 5 Jahre getilgt werden. Wie gestaltet sich der Tilgungsplan?

Aufgabe 72 3.12.2014

Nach 20 Jahren beträgt die Restschuld eines Annuitätenkredits, der zu 8% verzinst wird, eine Gesamtlaufzeit von 25 Jahren hat und mit gleich hohen Annuitäten getilgt wird, noch 37.403,27 €. Erstellen Sie den Tilgungsplan der letzten 5 Jahre.

Lösung zu Aufgabe 69

$$S = \frac{57.000}{0,9} \quad \text{und} \quad T = \frac{S}{2} \quad \text{und} \quad 57.000 = S \cdot 0,9 = \frac{A_1}{q} + \frac{A_2}{q^2}$$

$$\Rightarrow \quad A_1 = S \cdot 1/2 + S \cdot 0,08 = S \cdot 0,58$$
$$\text{und} \quad A_2 = S \cdot 1/2 + S \cdot 1/2 \cdot 0,08 = S \cdot 0,54$$

$$\Rightarrow \quad S \cdot 0,9 = \frac{S \cdot 0,58}{q} + \frac{S \cdot 0,54}{q^2}$$

$$\Rightarrow \quad q^2 = \frac{0,58}{0,9} \cdot q + \frac{0,54}{0,9}$$

$$\Rightarrow \quad q_{1/2} = \frac{58 \pm \sqrt{58^2 + 4 \cdot 90 \cdot 54}}{2 \cdot 90} \approx \begin{cases} 1,1612 & (> 0 \rightarrow \text{ OK}) \\ \ldots & (< 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad i \approx 0,1612 = 16,12\,\%$$

Lösung zu Aufgabe 70

a) $R_{10} = 100.000 \cdot (20 - 10 + 1) = 1.100.000$

b) $R_{15} = 100.000 \cdot (20 - 16 + 1) = 500.000$

c) $Z_{12} = 100.000(20 - 12 + 1) \cdot 0,1 = 90.000$

d) $A_{18} = t + Z_{18} = 130.000$

Lösung zu Aufgabe 71

$$A = 1.000.000 \cdot \frac{1,07^5 \cdot 0,07}{1,07^5 - 1} \approx 243.890,69$$

Jahr	R_k	Z_k	T_k	A
1	1.000.000,00	70.000,00	173.890,69	243.890,69
2	826.109,31	57.827,65	186.063,04	243.890,69
3	640.046,26	44.803,24	199.087,46	243.890,69
4	440.958,81	30.867,12	213.023,58	243.890,69
5	227.935,23	15.955,47	227.935,23	243.890,69

Lösung zu Aufgabe 72

Gegeben: $R_{21} = 37.403,27$. Berechnung von S aus

$$R_{21} = S \cdot \frac{q^{25} - q^{20}}{q^{25} - 1} \quad \Rightarrow \quad S = 100.000 \quad \Rightarrow \quad A = S \cdot q^n \cdot \frac{q-1}{q^n - 1} = 9367,88$$

Jahr	R_k	Z_k	T_k	A
21	37.403,27	2.992,26	6.375,62	9.367,88
22	31.027,66	2.482,21	6.885,66	9.367,88
23	24.141,99	1.931,36	7.436,52	9.367,88
24	16.705,47	1.336,44	8.031,44	9.367,88
25	8.674,03	693,92	8.673,95	9.367,88
26	0,08	0,01	0,08	0,09

Lösung zu Aufgabe 74

$$C_8 = 1,09^{-7} \cdot \left(8 \cdot \frac{1,09^7 - 1}{1,09 - 1} + 103\right) \approx 96,608$$

zu 73

$$S = A \frac{q^n - 1}{q - 1} q^{-n}$$

$$\Leftrightarrow \quad A = S \frac{q-1}{q^n - 1} q^n$$

$$= 37.403,27 \cdot \frac{0.08}{1.08^5 - 1} \, 1.08^5$$

$$= 9367,89$$

Aufgabe 73

Ein festverzinsliches Wertpapier ist mit einem Kupon von 8 % p.a. und einem Rücknahmekurs von 103 % nach 15 Jahren ausgestattet. Welches ist der Preis (Kurs) des Wertpapiers bei einer Restlaufzeit von 7 Jahren unmittelbar nach der 8. Zinszahlung, wenn dem Erwerber eine dem dann herrschenden Marktzinsniveau entsprechende Umlaufrendite von 9 % garantiert wird?

Aufgabe 74

Ein festverzinsliches Wertpapier ist mit einem Kupon von 7 % p.a. und einem Rücknahmekurs von 102 % nach 15 Jahren ausgestattet.

a) Welches ist der Emissionskurs, wenn das herrschende Marktzinsniveau bei 8 % liegt?

b) Die Steigung des Emissionskurses bei diesem Marktzins beträgt $C_0'(0,08) = -812,441$. Welches ist die modifizierte Duration?

c) Welches ist die Elastizität des Emissionskurses bezüglich des Marktzinsniveaus?

d) Wenn der Marktzins um $\Delta i = 0,001$ steigt: Auf welchen Wert sinkt C_0 näherungsweise?

Aufgabe 75

Eine Unternehmung will ein festverzinsliches Wertpapier emittieren, das dem Erwerber während der 15-jährigen Laufzeit einen Effektivzins von 9 % garantiert. Der Emissionskurs ist 96 %, der Rücknahmekurs 101%.

Mit welchem nominellen Zinssatz muss die Unternehmung das Papier ausstatten?

Aufgabe 76

Von welcher durchschnittlichen jährlichen Inflationsrate können Sie ausgehen, wenn ein Kapital, das in zehn Jahren nominell 1000 € beträgt, dann einen Realwert von 900 € hat?
(Es wird angenommen, das der Betrag zuhause im Kleiderschrank lag.)

Aufgabe 77

Zu welchem konstanten jährlichen Zins muss ein Betrag K_0 am 1.1.2008 angelegt werden damit am 31.12.2011 die Inflation ausgeglichen wurde? Die jährliche Inflationsraten der betreffenden Jahre seien dabei

Jahr	2008	2009	2010	2011
Inflation in %	3	2	4	5

Aufgabe 78

Am 1.1. diesen Jahres wurde ein Betrag von 2000 € zu 8 % jährlich für 15 Jahre angelegt. Die durchschnittliche Inflationsrate für diese 15 Jahre wird als 2,8 % angenommen.

a) Welche Kaufkraft hat der Betrag nach genau 5 Jahren Anlagedauer?

b) Welcher Realwert steht dem Anleger am Ende der Laufzeit zur Verfügung?

c) Welche Realverzinsung erzielt der Anleger durchschnittlich pro Jahr?

Aufgabe 79 10.12.2014

Gegeben sind die Funktionen f_1, f_2 von einer reellen Variablen mit

$$f_1(x) = \frac{4x+1}{2x-1}, \quad f_2(x) = \frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x-1}$$

Beantworten Sie die folgenden Teilaufgaben *ohne* Differentialrechnung:

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die Funktionen f_1, f_2 definiert?
b) Zerlegen Sie f_1 additiv in ein Polynom und eine echt-gebrochen-rationale Funktion und zeigen Sie damit, dass f_1 für $x > \frac{1}{2}$ streng monoton fällt.
c) Zeigen Sie, dass f_2 für alle $x \geq 2$ streng monoton wächst.
d) Zeigen Sie, dass weder f_1 noch f_2 eine globale Extremalstelle besitzt.

Aufgabe 80 10.12.2014

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \sqrt{(x+1)(1-\sqrt{x})}.$$

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist f definiert?

Lösung zu Aufgabe 81

a) $\sqrt{x}$ ist definiert für $\mathbb{R}_+$
$\sqrt{(x+1)(1-\sqrt{x})}$ ist def., wenn
Fall 1: $(x+1) > 0$ und $1-\sqrt{x} > 0$
$\Leftrightarrow x > -1$ und $1 > \sqrt{x} \Leftrightarrow x < 1$
$\Leftrightarrow -1 < x < 1$
oder Fall 2: $x+1 < 0$ und $1-\sqrt{x} < 0$
$\Leftrightarrow x < -1$ und $1 < \sqrt{x} \Rightarrow x > 1$ ↯
$\Rightarrow D_f = [0; 1]$

Aufgabe 81 10.12.2014

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \sqrt[x]{2}\,\ln(-x).$$

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist f definiert?
b) Zeigen Sie, dass f streng monoton fällt für $x < -1$.

$f(x) = 2^{1/x} \cdot \ln(-x)$
a) $\Rightarrow D_f = (-\infty, 0)$
b) $x_1 < x_2 < -1$
$\Rightarrow 1/x_1 > 1/x_2 > -1$ und $-x_1 > -x_2$
$\Rightarrow 2^{1/x_1} > 2^{1/x_2}$ $\ln(-x_1) > \ln(-x_2)$
$\Rightarrow 2^{1/x_1} \cdot \ln(-x_1) > 2^{1/x_2} \ln(-x_2)$
$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow$ str. mon. fallend

Aufgabe 79 10.12.2014

Gegeben sind die Funktionen f_1, f_2 von einer reellen Variablen mit

$$f_1(x) = \frac{4x+1}{2x-1}, \quad f_2(x) = \frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x-1}$$

Beantworten Sie die folgenden Teilaufgaben *ohne* Differentialrechnung:

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die Funktionen f_1, f_2 definiert?
b) Zerlegen Sie f_1 additiv in ein Polynom und eine echt-gebrochen-rationale Funktion und zeigen Sie damit, dass f_1 für $x > \frac{1}{2}$ streng monoton fällt.
c) Zeigen Sie, dass f_2 für alle $x \geq 2$ streng monoton wächst.
d) Zeigen Sie, dass weder f_1 noch f_2 eine globale Extremalstelle besitzt.

a) $D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, $D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) $(4x+1) : (2x-1) = 2 + \frac{3}{2x-1}$
$\underline{-(4x-2)}$
$\quad 3$

für $x > \frac{1}{2}$ gilt: je größer x, desto größer $2x-1$, desto kleiner $\frac{3}{2x-1}$, desto kleiner $f(x)$

c) $(x^4 - 3x^3 + 2x^2) : (x-1) = x^3 - 2x^2$
$\underline{-(x^4 - x^3)}$
$\quad -2x^3 + 2x^2$
$\quad \underline{-(-2x^3 + 2x^2)}$
$\qquad 0$

$f_2(x) = x^3 - 2x^2 = x^2 \cdot (x-2)$

falls $x > 2$: $2 < x_1 < x_2$

$\Rightarrow 0 < x_1^2 < x_2^2$ und $0 < x_1 - 2 < x_2 - 2$

$\Rightarrow x_1^2 \cdot (x_1 - 2) < x_2^2 (x_2 - 2)$

$\Rightarrow f_2(x_1) < f_2(x_2)$

$\Rightarrow$ f_2 ist str. mon. steigend für $x > 2$

d) $\lim_{x \nearrow \frac{1}{2}} f_1(x) = „-\infty"$ $\lim_{x \searrow \frac{1}{2}}$ „$+\infty$" $\Rightarrow$ kein globales Extremum

$\lim_{x \to \pm\infty} f_2(x) = \pm\infty$ $\Rightarrow$ kein glob. Extr.

Aufgabe 81 10.12.2014

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \sqrt[x]{2}\, \ln(-x).$$

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist f definiert?
b) Zeigen Sie, dass f streng monoton fällt für $x < -1$.

a) $f(x) = 2^{\frac{1}{x}} \cdot \ln(-x)$

$\Rightarrow D_f = (-\infty; 0)$

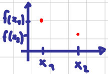
b) $x_1 < x_2 < -1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$ und $-x_1 > -x_2$

$\Leftrightarrow 0 < 2^{\frac{1}{x_2}} < 2^{\frac{1}{x_1}}$ und $\ln(-x_1) > \ln(-x_2) > 0$

$\Leftrightarrow 2^{\frac{1}{x_1}} \cdot \ln(-x_1) > 2^{\frac{1}{x_2}} \cdot \ln(-x_2)$

$\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$



Aufgabe 82 10.12.2014

Bei der Produktion eines Gutes wirken sich die mit steigenden Stückzahlen gewonnenen Produktionserfahrungen kostensenkend aus. Die für eine Mengeneinheit (ME) des Produkts anfallenden Stückkosten k (in €/ME) hängen von der Gesamtproduktionsmenge x folgendermaßen ab:

$$k(x) = a \cdot x^b \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R},\ x \geq 1$$

Es wird nun folgendes beobachtet:

1. Die erste produzierte Einheit verursacht Kosten in Höhe von 160 €.
2. Verdoppelt man die Produktionsmenge ausgehend von einer beliebigen Stückzahl, so sinken die Stückkosten um 20% gegenüber dem Wert vor der Stückzahlverdoppelung.

a) Bestimmen Sie die Parameter a und b der Funktion k.
b) Wie hoch muß die Gesamtproduktionsmenge sein, damit die gesamten Produktionskosten 80.000 € betragen?

Aufgabe 83

Bestimmen Sie alle Extremalstellen der Funktion

$$f : [-2\pi; 2\pi] \mapsto \mathbb{R} \qquad \text{mit} \qquad f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

ohne Differentialrechnung.

Aufgabe 84 10.12.2014

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x+3} & \text{für} \quad x < -3 \\ 3 & \text{für} \quad x = -3 \\ (x+2)^2 - 2 & \text{für} \quad -3 < x \leq 0 \\ \ln\left(e^{x+2}\right) & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

auf Stetigkeit.

Lösung zu Aufgabe 82

a) Aus 1. folgt:

$$k(1) = 160 = a \cdot 1^b = a \quad \Rightarrow \quad a = 160$$

aus 2. folgt:

$$k(2) = 0,8 \cdot k(1) = 0,8 \cdot 160 = 160 \cdot 2^b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\ln 0,8}{\ln 2} \approx -0,321$$

b) $8000 = K(x) = k(x) \cdot x = 160 \cdot x^{b+1}$
$\Rightarrow \quad 500 = x^{1+\frac{\ln 0,8}{\ln 2}} = x^{\frac{\ln(2 \cdot 0,8)}{\ln 2}} \quad \Rightarrow \quad x = 500^{\frac{\ln 0,8}{\ln 1,6}} \approx 9557,8$

Aufgabe 85 10.12.2014

Für welche Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot e \cdot |x| & \text{für} \quad x \geq -1 \\ \dfrac{|x|}{b \cdot e^x} & \text{für} \quad x < -1 \end{cases}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig?

Aufgabe 86

Berechnen Sie für $x \in \mathbb{R}$ folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{\sin(2x)}$

d) $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r}{\tan(2r)}$

e) $\lim\limits_{x\searrow 0} \sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x}$

Aufgabe 87

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ folgender Funktionsvorschriften von $D \to \mathbb{R}$ und geben Sie für jede Funktion eine stetige Fortsetzung auf $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an.

a) $f(x) = \dfrac{\sin(x-2)}{x-2}$

b) $g(x) = \dfrac{\sin(4x)}{x}$

c) $h(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 1}$

d) $k(x) = \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2}$

Aufgabe 84 **10.12.2014**

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x+3} & \text{für} \quad x < -3 \\ 3 & \text{für} \quad x = -3 \\ (x+2)^2 - 2 & \text{für} \quad -3 < x \leq 0 \\ \underbrace{\ln\left(e^{x+2}\right)}_{= x+2} & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

auf Stetigkeit.

f ist stetig für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3;0\}$
da „Kombination" stetiger „Bausteine"

$x = -3$ $\quad \underbrace{\lim_{x \nearrow -3}}_{\text{Annäherung von unten an } -3} f(x) = „\infty" \Rightarrow$ f ist nicht stetig für $x = -3$

-3

$x = 0$ $\quad \lim_{x \nearrow 0} f(x) = (0+2)^2 - 2 = 2 = f(0)$

$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \ln\left(e^{0+2}\right) = 0+2 = 2$

$\Rightarrow$ f ist stetig für $x = 0$

insgesamt: f ist stetig für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

Aufgabe 85 **10.12.2014**

Für welche Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot e \cdot |x| & \text{für} \quad x \geq -1 \\ \dfrac{|x|}{b \cdot e^x} & \text{für} \quad x < -1 \end{cases}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig?

$\lim_{x \nearrow -1} f(x) = \dfrac{|-1|}{b e^{-1}} = f(-1) = a \cdot e \cdot |-1| = \lim_{x \searrow -1} f(x)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{b \cancel{e^{-1}}} = a \cdot \cancel{e} \cdot 1 \Leftrightarrow ab = 1$

Aufgabe 88

Zeigen Sie mittels Zwischenwertsatz, dass die Gleichung $\cos x = x$ mindestens eine Lösung hat. Berechnen Sie die Lösung mittels Taschenrechner und Wertetabelle auf mindestens 3 gültige Ziffern.

Aufgabe 89

Führen Sie für die gebrochen–rationale Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

eine Partialbruchzerlegung durch.

Aufgabe 90

Zerlegen Sie folgende rationale Funktionen ggf. jeweil additiv in ein Polynom und eine echt–gebrochen–rationale Funktion und führen Sie für den echt–gebrochen–rationalen Teil eine Partialbruchzerlegung durch:

a) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x^2 - 26x + 15}{x^2 - 2x - 15}$

b) $g(x) = \dfrac{2x^3 + 7x + 2}{(x^2+4)^2}$

c) $h(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 11}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$

d) $j(x) = \dfrac{3x^2 + 7}{x^3 + 3x^2 + 7x}$

e) $k(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 1}{x^4 + 3x^2 + 2}$

Aufgabe 91

Geben Sie die größte Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ an, auf der die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(3x^2y)^2}{x^8+y^4} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

stetig ist.

Aufgabe 92

Ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

im gesamten Definitionsbereich stetig?

Aufgabe 93

Skizzieren Sie folgende Vektorfelder:

a) $f : [0,3] \times [-2;2] \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}y\right) \end{pmatrix}$

b) $g : [-1,3]^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-2 \\ -y+1 \end{pmatrix}$

c) $h : [-3,3]^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $h(x,y) = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$

Aufgabe 94 10.12.2014

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^3\sqrt{x^2+1} \\ f_2(x) &= \begin{cases} \sqrt{x^2+x+1} & \text{für } x \geqq 0 \\ x & \text{für } x < 0 \end{cases} \\ f_3(x) &= \begin{cases} x^2-2x+2 & \text{für } x \geqq 1 \\ e^{x-1} & \text{für } x < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die Funktionen differenzierbar?
b) Berechnen Sie gegebenenfalls die Differentialquotienten.

Aufgabe 94 **10.12.2014**

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit:

$$f_1(x) = x^3\sqrt{x^2+1}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+x+1} & \text{für } x \geqq 0 \\ x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} x^2-2x+2 & \text{für } x \geqq 1 \\ e^{x-1} & \text{für } x < 1 \end{cases}$$

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die Funktionen differenzierbar?
b) Berechnen Sie gegebenenfalls die Differentialquotienten.

f_1: f_1 ist diffbar für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f_1' = 3x^2\sqrt{x^2+1} + x^3 \cdot \tfrac{1}{\cancel{2}}(x^2+1)^{-1/2} \cdot \cancel{2}x$$

$$= 3x^2\sqrt{x^2+1} + x^4 \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{x^2+1}}$$

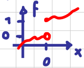
$$= \sqrt{x^2+1}\cdot\left(3x^2 + \frac{x^4}{x^2+1}\right)$$

$$= x^2\sqrt{x^2+1}\cdot\left(3+\frac{x^2}{x^2+1}\right)$$

f_2: ist $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ diff.bar

$x = 0$ Stetigkeit?

$$\lim_{x\nearrow 0} f(x) = 0 \neq 1 = \sqrt{0+0+1} = \lim_{x\searrow 0} f(x)$$



$\Rightarrow f_2$ ist nicht stetig für $x = 0$
$\Rightarrow f_2$ ist nicht diff.bar für $x = 0$

Ableitung für $x \neq 0$

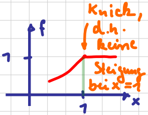
$$f_2'(x) = \begin{cases} \tfrac{1}{2}(x^2+x+1)^{-1/2}\cdot(2x+1) & \text{für } x>0 \\ 1 & \text{für } x<0 \end{cases}$$

f_3: Stetigkeit für $x = 1$?

$$\lim_{x\nearrow 1} f(x) = e^{1-1} = e^0 = 1 \overset{\checkmark}{=} 1 = 1^2-2\cdot1+2 = \lim_{x\searrow 1} f(x)$$

$\Rightarrow f_3$ stetig für $x \in \mathbb{R}$

differenzierbar für $x = 1$?



$$f_3'(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{für } x>1 \\ e^{x-1} & \text{für } x<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\nearrow 1} f_3'(x) = e^{1-1} = e^0 = 1 \neq 0 = 2\cdot1-2 = \lim_{x\searrow 1} f_3'(x)$$

d.h. f_3 ist nicht diffbar für $x = 1$ (für alle anderen $x \in \mathbb{R}$ schon)

Aufgabe 95 10.12.2014

Die kumulierte Nachfrage y nach Videorecordern in Abhängigkeit der Zeit $t \geqq 1$ wird durch die sogenannte Gompertz-Funktionsgleichung

$$y(t) \;=\; 10^7\, e^{-5(0{,}5)^t}$$

prognostiziert.

a) Skizzieren Sie die Funktion und geben Sie eine Interpretation.
b) Berechnen Sie die Sättigungsgrenze $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$.
c) Zeigen Sie, dass die Änderungsrate der Nachfrage für alle $t \geqq 1$ positiv und monoton fallend ist.
d) Zeigen Sie auch, dass die Nachfrage für $t \leqq 3$ elastisch und für $t \geqq 4$ unelastisch ist.

Aufgabe 96 10.12.2014

Für eine Einproduktunternehmung wurden in Abhängigkeit des Produktionsniveaus $x > 0$ die Kosten durch $c(x) = 6x + 40$ und die Preis-Absatz-Beziehung gemäß $p(x) = 30 - 2x$ geschätzt.

a) Geben Sie die Gewinnfunktion g mit $g(x) = x \cdot p(x) - c(x)$ an und untersuchen Sie diese Funktion auf Monotonie und Konvexität.
b) Berechnen Sie den Bereich positiver Gewinne sowie das gewinnmaximale Produktionsniveau.
c) Bestimmen Sie das Produktionsniveau mit maximalem Stückgewinn.

Aufgabe 97 10.12.2014

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \;=\; 5\left(e^{-\frac{x}{2}}\,(x-1) - 1\right)$$

auf Monotonie und Konvexität.

Bestimmen Sie außerdem alle Extremalstellen und Wendepunkte und skizzieren Sie den Verlauf der Funktion für $x \geqq 0$.

Aufgabe 98 10.12.2014

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 1\,.$$

a) Berechnen Sie alle Extremalstellen und Wendepunkte.
b) Berechnen Sie die Funktion für $x = -1,\ 0,\ 0.5,\ 1,\ 2$ und skizzieren Sie $f(x)$.
c) Beschreiben Sie mit Hilfe von a) und b) das Monotonie- und das Konvexitätsverhalten der Funktion.

Aufgabe 99

Verwenden Sie die Definition des Differentialquotienten, um jeweils die 1. Ableitung folgender Funktionen zu bestimmen:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$
b) $g(x) = x^2 - 2x$
c) $h(x) = \sqrt{x}$

Aufgabe 100

Bei konstanter Temperatur T ist der Druck P in Abhängigkeit vom Volumen V durch die Beziehung

$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}$$

gegeben. Dabei bezeichnen a, b, n und R Konstanten. Berechnen Sie $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V}$.

Aufgabe 101

Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen $f_i : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$:

a) $f_a(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$
b) $f_b(x) = x^x$
c) $f_c(x) = x^{x^x}$
d) $f_d(x) = (x-3)^x$

Aufgabe 102 17.12.2014

Eine quaderförmige Kiste, deren oberes Ende geöffnet ist, soll aus einem quadratischen Blech mit der Seitenlänge a hergestellt werden. Dazu werden an den 4 Ecken des Blechs jeweils gleich große Quadrate mit Seitenlänge x ausgestanzt und die so entstandenen 4 Seitenrechtecke hochgeklappt um die Kiste zu formen. Wie groß muss x sein, so dass das Volumen der entstandenen Kiste maximal wird?

Aufgabe 103

Ein zylinderfömiger Ölbehälter soll einen Liter Flüssigkeit fassen. Der Behälter ist oben und unten komplett geschlossen. Wie müssen Höhe und Radius dimensioniert sein, so dass möglichst wenig Material verbraucht wird?

Lösung zu Aufgabe 94

$f_1(x) = x^3 \cdot \sqrt{x^2+1}$ ist differenzierbar $\forall x \in \mathbb{R}$, da Komposition elementarer differenzierbarer Funktionen.

$$f_1'(x) = 3x^2\sqrt{x^2+1} + x^3\cdot\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x = \frac{3x^4+3x^2+x^4}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{4x^4+3x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+x+1} & \text{für} \quad x \geqq 0 \\ x & \text{für} \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{ist stetig differenzierbar für } x \neq 0$$

$$\Rightarrow f_2'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x+1) & \text{für} \quad x > 0 \\ 1 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{ist stetig differenzierbar für } x \neq 0$$

Noch zu betrachten: $x = 0$. Für Differenzierbarkeit ist Stetigkeit von f_2 Voraussetzung:

$$\left.\begin{array}{lll} \lim\limits_{x\nearrow 0} f_2(x) & = & 0 \\ \lim\limits_{x\searrow 0} f_2(x) = \sqrt{0^2+0+1} & = & 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f_2(x) \text{ist nicht stetig für } x = 0$$

$\Rightarrow f_2(x)$ ist nicht differenzierbar für $x = 0$

Analoge Überlegung bei $f_3(x)$ führt zu stetiger Differenzierbarkeit für $x \neq 1$

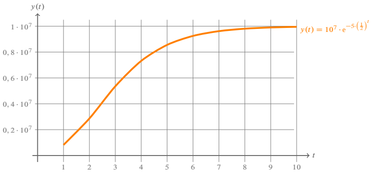
$$\Rightarrow f_3'(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{für} \quad x > 1 \\ e^{x-1} & \text{für} \quad x < 1 \end{cases}$$

Zur Stetigkeit bei $x = 1$ $\left.\begin{array}{lll} \lim\limits_{x\nearrow 1} f_3(x) = e^{1-1} & = & 1 \\ \lim\limits_{x\searrow 1} f_3(x) = 1^2 - 2\cdot 1 + 2 & = & 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f_3(x)$ist stetig für $x = 1$

Diff.barkeit : $\left.\begin{array}{lll} \lim\limits_{x\nearrow 1} f_3'(x) = e^{1-1} & = & 1 \\ \lim\limits_{x\searrow 1} f_3'(x) = 2\cdot 1 - 2 & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f_3(x)$ist nicht diff.bar für $x = 1$

Lösung zu Aufgabe 95

a)



b) $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to\infty} 10^7\cdot e^{-5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^t} = 10^7\cdot e^{-5\cdot\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^t} = 10^7\cdot e^{-5\cdot 0} = 10^7$

c)

$$\varrho_y(t) = \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{10^7\cdot e^{-5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^t}\cdot\left(-5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^t\cdot\ln\frac{1}{2}\right)}{10^7\cdot e^{-5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^t}} = +5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^t\cdot\ln 2 > 0$$

$\Rightarrow \varrho_y(t)$ ist monoton fallend, denn $\left(\frac{1}{2}\right)^t$ ist monoton fallend.

d) $\varepsilon_y(t) = t\cdot\varrho_y(t) = t\cdot 5\cdot\ln 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^t$.
Damit ist $\varepsilon_y(3) = 3\cdot 5\cdot\ln 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 \approx 1{,}299$ und $\varepsilon_y(4) = 4\cdot 5\cdot\ln 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 \approx 0{,}866$.

Außerdem gilt für die Ableitung: $\varepsilon_y'(t) = \underbrace{5\cdot\ln 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^t}_{\text{immer } >0}\cdot(1-t\ln 2) = 5\ln^2 2\left(\frac{1}{2}\right)^t\cdot\left(\frac{1}{\ln 2}-t\right)$

$\frac{1}{\ln 2} \approx 1{,}44$, damit ist $\varepsilon_y'(t) > 0$ (streng monoton steigend) für $t < 1{,}44$ und $\varepsilon_y'(t) < 0$ (streng monoton fallend) für $t > 1{,}44$. Damit gilt, da $\varepsilon_y(1) \approx 1{,}7 > 1$ und $\varepsilon_y(t)$ für $1 < t < 1{,}44$ steigt, dann bis $t = 3$ fällt mit $\varepsilon_y(3) \approx 1{,}299 > 1$, dass $y(t)$ im Bereich von $1 \leqq t \leqq 3$ elastisch sein muss.

Andererseits ist $\varepsilon_y(4) \approx 0{,}866 < 1$ und $\varepsilon_y(t)$ fällt für $t > 4$. Damit ist $y(t)$ unelastisch für $t > 4$.

Lösung zu Aufgabe 96

Allgemein gilt:

- Das Produktionsniveau ist nicht negativ: $x \geqq 0$
- Für die Kosten gilt: $c(x) = 6x + 40$
- Für den Preis gilt: $p(x) = 30 - 2x$

a)

$$g(x) = x \cdot p(x) - c(x) = x \cdot (30-2x) - (6x+40) = -2x^2 + 24x - 40$$

$$\Rightarrow g'(x) = -4x + 24 = 4(6-x) \begin{cases} > 0 & \text{für } x < 6 \quad \text{str. mon. steigend} \\ < 0 & \text{für } x > 6 \quad \text{str. mon. fallend} \end{cases}$$

$$\Rightarrow g''(x) = -4 \Rightarrow g(x) \text{ konkav } \forall\ x > 0$$

b) $g(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = +6 \pm \sqrt{36-20} = 6 \pm 4 = \begin{cases} 2 \\ 10 \end{cases}$

$\Rightarrow$ wegen str. Konkavität: $g(x) > 0$ für $2 < x < 10$.
Maximaler Gewinn: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6$ und $g''(x) = -4 < 0$
$\Rightarrow g(6) = -2 \cdot 6^2 + 24 \cdot 6 - 40 = -72 + 144 - 40 = 32$

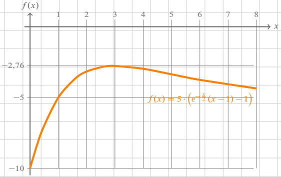
c) Für den Stückgewinn gilt: $h(x) = g(x)/x = -2x + 24 - 40/x$
Damit: $h'(x) = -2 + \frac{40}{x^2}$. Extremum bei x wenn $h'(x) = 0$, also
$-2 + 40x^{-2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \pm\sqrt{20} \approx \pm 4,5$
$h''(x) = -2 \cdot \frac{40}{x^3} = -80x^{-3} < 0$ (für $x > 0$), also streng konkav. Damit ist $h(\sqrt{20}) \approx 6,1$ globales Stückgewinnmaximum.

Lösung zu Aufgabe 97

$f'(x) = \frac{5}{2}e^{-\frac{x}{2}}(3-x)$. Damit ist $f'(x) > 0$ (f str. mon. steigend) für $x < 3$ und $f'(x) < 0$ (f str. mon. fallend) für $x > 3$. Also ist $x = 3$ ein globales Maximum mit $f(3) = 5\left(e^{-1,5} \cdot 2 - 1\right) \approx -2,77$.

$f''(x) = \frac{5}{4}e^{-\frac{x}{2}}(x-5)$. Damit ist $f''(x) > 0$ (f streng konvex) für $x > 5$ und $f''(x) < 0$ (f streng konkav) für $x < 5$

Wertetabelle	
x	$f(x)$
0	-10
1	-5
2	-3,16
3	-2,77
5	-3,36
$\to \infty$	-5



Lösung zu Aufgabe 98

a) und c)

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 4x^2(x - 3/2)$$

und damit

$$f''(x) = 12x(x-1)$$

Also gilt für das Monotonieverhalten:

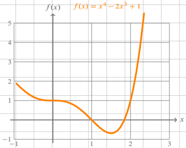
$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & \text{für } x > 3/2 \\ \text{str. mon. steigend} & \\ = 0 & \text{für } x \in \{0, \frac{3}{2}\} \\ < 0 & \text{für } x \in (-\infty; \frac{3}{2}) \setminus \{0\} \\ \text{str. mon. fallend} & \end{cases}$$

Für das Krümmungsverhalten gilt:

$$f''(x) = \begin{cases} > 0 & \text{für} \quad x > 1 \vee x < 0 & \text{str. konvex} \\ < 0 & \text{für} \quad 0 < x < 1 & \text{str. konkav} \end{cases}$$

Damit ist $f(3/2) \approx -0,6875$ ein globales Minimum, $f(0) = 1$ eine Terasse und $f(1) = 0$ ein Wendepunkt.

b)



Aufgabe 104 17.12.2014

Im Folgenden bedeutet $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ den Umsatz $u(x)$ in Abhängigkeit von der verkauften Stückzahl x und $k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ die Produktionskosten $k(x)$. Umsatz und Produktionskosten seien stetig differenzierbar. Daraus leitet sich die Gewinnfunktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = u(x) - k(x)$ ab. Die Ausdrücke $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ und $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}$ bezeichnet man als den *Grenzumsatz* beziehungsweise die *Grenzkosten* beim Produktionsniveau x. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Maximaler Gewinn entsteht (sofern er existiert) bei einem Produktionsniveau x, bei dem Grenzumsatz und Grenzkosten übereinstimmen.

b) Beim Produktionsniveau x mit den niedrigsten Stückkosten (sofern es existiert) sind die Stückkosten und die Grenzkosten gleich hoch.

Aufgabe 105

Zwei Massen hängen nebeneinander an zwei Federn und haben in Abhängigkeit der Zeit t die vertikale Position

$$s_1(t) = 2\sin t \quad \text{und} \quad s_2(t) = \sin(2t)$$

a) Zu welchen Zeitpunkten $t > 0$ haben die Massen die gleiche Höhe?

b) Wann ist im Zeitintervall $[0;\ 2\pi]$ der Abstand der Massen am größten?

Hinweis: Es gilt $\sin(2t) = 2\sin t \cdot \cos t$ und $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$

Aufgabe 106

Verwenden Sie das Newtonsche Verfahren, um jeweils eine Nullstelle folgender Funktionen mit einer Abweichung von maximal $\pm 10^{-5}$ zu finden. Starten Sie das Verfahren jeweils im angegebenen Punkt x_0:

a) $f(x) = x^4 + x - 3, \quad x_0 = -1$

b) $g(x) = x - 1 - \frac{1}{2}\sin x, \quad x_0 = \frac{3}{2}$

Aufgabe 107

Berechnen Sie mit Newtons Verfahren den Schnittpunkt der beiden Funktionen $f(x) = 2x$ und $g(x) = \tan x$ im Intervall $(0;\ \pi/2)$.

Aufgabe 108

Suchen Sie mit der Newtonschen Methode die Nullstelle $\tilde{x} = 1$ der Funktion $f(x) = (x-1)^{40}$ vom Startpunkt 2 aus. Warum arbeitet das Verfahren in diesem Fall so schlecht?

Aufgabe 109

Berechnen Sie den Wert von $\sin(\frac{\pi}{4})$ mittels Taylorpolynom im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ auf 4 Stellen nach dem Komma genau.

Aufgabe 110

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die Potenzreihen $(p_n(x))$, $(q_n(x))$ mit

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{2}{3}(x-1)\right]^i, \quad q_n(x) = \sum_{i=0}^{n} i(x+1)^i \ ?$$

Aufgabe 111

Zur Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2^x$ bestimme man die Folge der Taylor–Polynome an der Stelle $x_0 = 0$ sowie den Konvergenzradius dieser Folge.

Aufgabe 112

Berechnen Sie im Entwicklungspunkt 0 die Potenzreihen von

a) $\ln(1+x)$

b) $\sqrt{1+x}$

(*Hinweis*: Der Konvergenzradius ist in beiden Fällen gleich 1, muss aber nicht berechnet werden)

Aufgabe 113 17.12.2014

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$(1) \quad f(x) = a^2x^2 - 2a^2x + 1\,.$$

a) Mit $a \in \mathbb{R}$ ist zunächst eine Konstante charakterisiert. Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extremalstellen von f in Abhängigkeit von a.

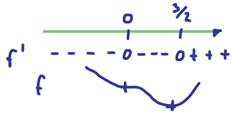
b) Setzen Sie $a = x$ in der Funktionsgleichung (1), und geben Sie die daraus resultierende Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in Abhängigkeit von x an.

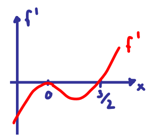
c) Diskutieren Sie das Monotonie- und das Konvexitätsverhalten von g.

d) Berechnen Sie die Funktionswerte $g(-1)$, $g(0)$, $g(0.5)$, $g(1)$, $g(1.5)$, $g(2)$ und skizzieren Sie die Funktion.

$f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 4x^2(x - \frac{3}{2})$





Aufgabe 104

Im Folgenden bedeutet $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ den Umsatz $u(x)$ in Abhängigkeit von der verkauften Stückzahl x und $k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ die Produktionskosten $k(x)$. Umsatz und Produktionskosten seien stetig differenzierbar. Daraus leitet sich die Gewinnfunktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = u(x) - k(x)$ ab. Die Ausdrücke $\frac{du}{dx}$ und $\frac{dk}{dx}$ bezeichnet man als den *Grenzumsatz* beziehungsweise die *Grenzkosten* beim Produktionsniveau x. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Maximaler Gewinn entsteht (sofern er existiert) bei einem Produktionsniveau x, bei dem Grenzumsatz und Grenzkosten übereinstimmen.

b) Beim Produktionsniveau x mit den niedrigsten Stückkosten (sofern es existiert) sind die Stückkosten und die Grenzkosten gleich hoch.

a) g ist max. für $x \Rightarrow g'(x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad g'(x) = u'(x) - k'(x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad u'(x) = k'(x)$

b) Stückkosten: $s(x) = \dfrac{k(x)}{x} = k(x) \cdot x^{-1}$

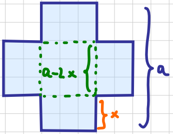
$s(x)$ minimal $\Rightarrow$

$s'(x) = 0 = k'(x) \cdot x^{-1} + k(x) \cdot (-1)\, x^{-2}$

$$\Rightarrow \frac{k(x)}{x^2} = \frac{k'(x)}{x} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{k(x)}{x}}_{\text{Stück-kosten}} = \underbrace{k'(x)}_{\text{Grenzkosten}}$$

Aufgabe 102

Eine quaderförmige Kiste, deren oberes Ende geöffnet ist, soll aus einem quadratischen Blech mit der Seitenlänge a hergestellt werden. Dazu werden an den 4 Ecken des Blechs jeweils gleich große Quadrate mit Seitenlänge x ausgestanzt und die so entstandenen 4 Seitenrechtecke hochgeklappt um die Kiste zu formen. Wie groß muss x sein, so dass das Volumen der entstandenen Kiste maximal wird?



$$V(x) = \underbrace{(a-2x)^2}_{\text{Grundfläche}} \cdot x = a^2x - 4ax^2 + 4x^3$$

$$V'(x) = a^2 - 8ax + 12x^2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{1}{2 \cdot 12}\left(8a \pm \sqrt{64a^2 - 48a^2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{3}a \pm \tfrac{1}{6}a = a \cdot \begin{cases} 1/2 \to \text{kein max} \\ 1/6 \end{cases}$$

$V''(x) = -8a + 24x, \quad V''(\tfrac{1}{6}a) = -8a + 4a < 0$

$\Rightarrow x = \tfrac{1}{6}a$ ist Maximum

$(0 \le x \le \tfrac{a}{2})$: max ist global, da $D_V = [0; \tfrac{a}{2}]$ kompakt (und auf dem Rand keine Max. liegen)

Aufgabe 113

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$(1) \quad f(x) = a^2x^2 - 2a^2x + 1\,.$$

a) Mit $a \in \mathbb{R}$ ist zunächst eine Konstante charakterisiert. Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extremalstellen von f in Abhängigkeit von a.

b) Setzen Sie $a = x$ in der Funktionsgleichung (1), und geben Sie die daraus resultierende Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in Abhängigkeit von x an.

c) Diskutieren Sie das Monotonie- und das Konvexitätsverhalten von g.

d) Berechnen Sie die Funktionswerte $g(-1)$, $g(0)$, $g(0.5)$, $g(1)$, $g(1.5)$, $g(2)$ und skizzieren Sie die Funktion.

a) $f'(x) = 2a^2x - 2a^2 = 2a^2(x-1) = 0 \iff x = 1$

(Fall $a=0$ ist langweilig: $f(x) = 1$)

$f''(x) = 2a^2 > 0 \implies x = 1$ ist einziges und globales Minimum

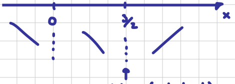
b) $g(x) = x^4 - 2x^3 + 1$

c) $g'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 4x^2\left(x - \frac{3}{2}\right)$

$x < 0$: $g' < 0 \implies g$ str. mon fallend

$0 < x < 3/2$ $g' < 0 \implies$ "

$x > 3/2$ $g' > 0 \implies$ " steigend



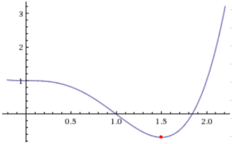
$g''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$

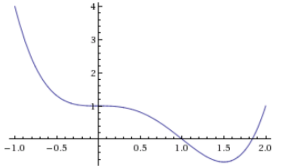
$x < 0$: $g'' > 0$: str. konvex

$0 < x < 1$: $g'' < 0$: str. konkav

$x > 1$: $g'' > 0$: str. konvex

Plot:





Aufgabe 114

Warum gilt der Satz von Schwarz bei folgender Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y) = 0 \\ \dfrac{xy^3 - x^3 y}{x^2 + y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

im Nullpunkt $(0,0)$ nicht?

Aufgabe 115

Bestimmen Sie alle Extremalstellen der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2, x_3) \; = \; x_1^3 + x_2^2 - 3x_1^2 x_2 + x_3^2 \, .$$

Aufgabe 116

Für ein Produkt, das ein monopolistischer Anbieter auf den Markt bringen möchte, gelte die Preis-Absatz-Beziehung

$$x \; = \; 100 - p + \sqrt{q} \; ,$$

wobei p den Preis, x die Absatzquantität und q die Werbekosten bezeichnen. Ferner sind die Produktionskosten durch

$$c(x) \; = \; 40x + 500$$

gegeben.

a) Skizzieren Sie in der (x,q)-Ebene die Punktmenge, die zu einem positiven Preis führt.
b) Man berechne den Preis p, das Werbebudget q und die Absatzquantität x so, dass der Gewinn lokal maximal wird, und gebe den maximalen Gewinn an.

Aufgabe 117 17.12.2014

Bestimmen Sie zur Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) \; = \; x^3 - x^2 \cdot \ln(y^2 + 1) - 3x$$

a) den Funktionswert $f(-1,0)$,
b) den Gradienten,
c) die Hesse–Matrix,
d) alle Nullstellen des Gradienten,
e) die Definitheitseigenschaft der Hesse–Matrix in jeder Nullstelle des Gradienten,
f) eine lokale Maximalstelle.

Aufgabe 118

Bei wellenförmigen vertikalen Auslenkungen $w \in \mathbb{R}$ in Abhängigkeit der Zeit $t \in \mathbb{R}$ gilt die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Dabei bezeichnet $c \in \mathbb{R}$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle und $x \in \mathbb{R}$ den horizontalen Abstand zum Ursprung. Zeigen Sie, dass alle folgenden Funktionen Lösungen der Wellengleichung sind:

a) $w = \sin(x + ct)$
b) $w = \sin(x + ct) + \cos(2x + 2ct)$
c) $w = \ln(2x + 2ct)$
d) $w = \tan(2x - 2ct)$
e) $w = 5\cos(3x + 3ct) + e^{x+ct}$

Aufgabe 119

a) Es sei $z : \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}$ mit $(x,y) \mapsto z(x,y)$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion mit maximalem Definitionsbereich. Bestimmen Sie $\frac{\partial z}{\partial x}$ im Punkt $(x,y,z) = (1,1,1)$, wenn für z gilt:
$$x^3 z + z^3 x - 2yz = 0$$
b) Es sei auch $x : \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}$ mit $(y,z) \mapsto x(y,z)$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion mit maximalem Definitionsbereich. Bestimmen Sie $\frac{\partial x}{\partial z}$ im Punkt $(x,y,z) = (1,-1,-3)$, wenn für x gilt:
$$xz + y \ln x - \frac{9}{z} = 0$$

Aufgabe 120 17.12.2014

Berechnen Sie alle Extremwerte der Funktion $f : (0;\infty)^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = xy + 2x - \ln(x^2 y)$$

Aufgabe 121 17.12.2014

Bestimmen Sie die absoluten Maxima und Minima der folgenden Funktionen:

~~a) $f : [0,5] \times [-3,3] \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x$~~
~~b) $g : D \to \mathbb{R}$ mit $D = \{x \in \mathbb{R}_+^2 : y + 2x \leq 2\}$ und $g(x,y) = x^2 + y^2$~~
c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y) = x^4 + \frac{1}{2}y^2 + 2xy$

Aufgabe 117 17.12.2014

Bestimmen Sie zur Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x^3 - x^2 \cdot \ln(y^2+1) - 3x$$

a) den Funktionswert $f(-1,0)$,
b) den Gradienten,
c) die Hesse–Matrix,
d) alle Nullstellen des Gradienten,
e) die Definitheitseigenschaft der Hesse–Matrix in jeder Nullstelle des Gradienten,
f) eine lokale Maximalstelle.

a) $f(-1,0) = (-1)^3 - (-1)^2 \cdot \ln(0+1) - 3\cdot(-1)$
$= -1 - 0 + 3 = 2$

b) $\nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2 - 2x\ln(y^2+1) - 3 \\ -x^2\cdot(y^2+1)^{-1}\cdot 2y \end{pmatrix}$ f_x, f_y

c) $H_f = \begin{pmatrix} 6x - 2\ln(y^2+1) & -2x\,(y^2+1)^{-1}\cdot 2y \\ -2x\cdot(y^2+1)^{-1}\cdot 2y & 2x^2(y^2-1)\cdot(y^2+1)^{-2} \end{pmatrix}$

NR: $f_{yy} = -2x^2\cdot\left[-(y^2+1)^{-2}\cdot 2y\cdot y + (y^2+1)^{-1}\cdot 1\right]$
$= \dfrac{-2x^2(-2y^2+y^2+1)}{(y^2+1)^2} = \dfrac{2x^2(y^2-1)}{(y^2+1)^2}$

d) $f_y = 0$ wenn $x = 0$ oder $y = 0$

Falls $x = 0 \Rightarrow f_x(0,y) = -3$ (kein Extremum möglich für $x = 0$)

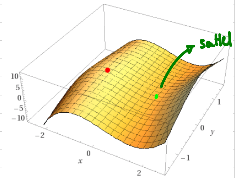
Falls $y = 0 \Rightarrow f_x(x,0) = 3x^2 - 0 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

zwei Kandidaten: $(-1/0)$, $(+1/0)$

e) $H_f(-1/0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H_f = 12 > 0$
$f_{xx} = -6 < 0$
$\Rightarrow (-1/0)$ ist Maximum

f)

$H_f(+1/0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H_f = -12 < 0$
$\Rightarrow (+1/0)$ ist ein Sattelpunkt



Aufgabe 120 17.12.2014

Berechnen Sie alle Extremwerte der Funktion $f : (0;\infty)^2 \to \mathbb{R}$ mit

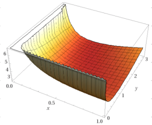
$$f(x,y) = xy + 2x - \ln(x^2 y)$$

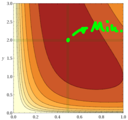
$\nabla f = \begin{pmatrix} y+2-(x^2y)^{-1}\cdot 2xy \\ x-(x^2y)^{-1}\cdot x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+2-2/x \\ x-1/y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

② : $x = 1/y$ in ① : $y + 2 - 2y = 0 \Rightarrow y = 2$, $x = 1/2$

$H_f = \begin{pmatrix} 2x^{-2} & 1 \\ 1 & y^{-2} \end{pmatrix}$

$H_f(1/2 \,/\, 2) = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 1/4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H_f = 8\cdot 1/4 - 1\cdot 1 = 1 > 0$
$f_{xx} = 8 > 0 \Rightarrow (1/2 \,/\, 2)$ ist Minimum.





Aufgabe 121 17.12.2014

Bestimmen Sie die absoluten Maxima und Minima der folgenden Funktionen:

~~a) $f : [0,5] \times [-3,3] \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x$~~

~~b) $g : D \to \mathbb{R}$ mit $D = \{x \in \mathbb{R}^2_+ : y + 2x \leq 2\}$ und $g(x,y) = x^2 + y^2$~~

c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y) = x^4 + \frac{1}{2}y^2 + 2xy$

$$\nabla h = \begin{pmatrix} 4x^3 + 2y \\ y + 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

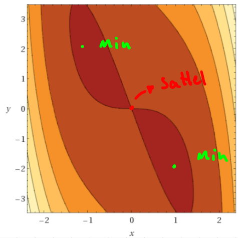
② $y = -2x$ in ①: $4x^3 - 4x = 0 \iff x(x^2-1) = 0$

$\Rightarrow x = 0, \pm 1 \Rightarrow (0/0), (1/-2), (-1/2)$

$$H_h = \begin{pmatrix} 12x^2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$H_h(0/0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H_h = 0 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -4 < 0$
$\Rightarrow$ Sattel bei $(0/0)$

$H_h(\pm 1/\mp 2) = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H_h = 12 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 8 > 0$
$h_{xx} > 0 \Rightarrow$ Min. bei $(\pm 1/\mp 2)$



Aufgabe 117

Bestimmen Sie zur Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) \;=\; x^3 - x^2 \cdot \ln(y^2+1) - 3x$$

a) den Funktionswert $f(-1,0)$,
b) den Gradienten,
c) die Hesse–Matrix,
d) alle Nullstellen des Gradienten,
e) die Definitheitseigenschaft der Hesse–Matrix in jeder Nullstelle des Gradienten,
f) eine lokale Maximalstelle.

a) $f(-1,0) = -1 - \ln(0+1) - 3(-1) = 2$

b) $\nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2 - 2x\ln(y^2+1) - 3 \\ -x^2(y^2+1)^{-1} \cdot 2y \end{pmatrix} \begin{matrix} ① \\ ② \end{matrix}$

c) $$H_f = \begin{pmatrix} 6x - 2\ln(y^2+1) & -2x(y^2+1)^{-1} \cdot 2y \\ -2x(y^2+1)^{-1} \cdot 2y & -x^2\left(-1(y^2+1)^{-2} \cdot 2y \cdot 2y + (y^2+1)^{-1} \cdot 2\right) \end{pmatrix}$$

d) ② $= 0$: $x^2 y = 0 \iff x = 0$ oder $y = 0$

$x = 0$: in ① : $-3 \neq 0$

$y = 0$: in ① : $3x^2 - 2x \cdot 0 - 3 = 3(x^2-1) = 0 \iff x = \pm 1$

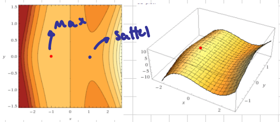
zwei Kandidaten : $(1/0)$, $(-1/0)$

e) $H_f(1/0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \det H_1 = 6 \\ \det H_2 = -12 \end{matrix}\right\}$ indefinit

$\Rightarrow$ kein Extremum bei $(1/0)$

$H_f(-1/0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \det H_1 = -6 < 0 \\ \det H_2 = 12 > 0 \end{matrix}\right\}$ negativ definit

$\Rightarrow$ Maximum bei $(-1/0)$



Aufgabe 120

Berechnen Sie alle Extremwerte der Funktion $f : (0;\infty)^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = xy + 2x - \ln(x^2 y)$$

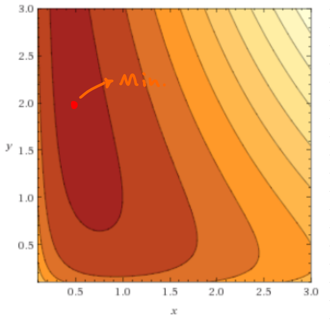
$$Df = \begin{pmatrix} y+2-(x^2y)^{-1}\cdot 2xy \\ x-(x^2y)^{-1}\cdot x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+2-\frac{2}{x} \\ x-\frac{1}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} ① \\ ② \end{matrix}$$

②: $x = \frac{1}{y}$ in ①: $y+2-2y=0 \iff y=2$ und $x=\frac{1}{2}$

$$H_f = \begin{pmatrix} 2x^{-2} & 1 \\ 1 & y^{-2} \end{pmatrix} \qquad H_f\left(\tfrac{1}{2}, 2\right) = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$\det H_1 = 8 > 0$, $\det H_2 = 8\cdot\frac{1}{4} - 1 = 1 > 0$

$\Rightarrow$ Min. bei $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$



Aufgabe **121c**

$$h(x,y) = x^4 + \frac{1}{2}y^2 + 2xy$$

$$\nabla h = \begin{pmatrix} 4x^3+2y \\ y+2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left.\right\} \begin{array}{l} 4x^3+2(-2x)=0 \Leftrightarrow 4x(x^2-1)=0 \\ \Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=\pm 1 \\ y=-2x \qquad y=0 \qquad y=\mp 2 \end{array}$$

Kand. : $(0,0)$, $(1,-2)$, $(-1,2)$

$$H_h = \begin{pmatrix} 12x^2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad H_h(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \left.\begin{array}{l} \det H_1 = 0 \\ \det H_2 = -4 \end{array}\right\} ?$$

keine Aussage

$$H_h(\pm 1, \mp 2) = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \left.\begin{array}{l} \det H_1 = 12 > 0 \\ \det H_2 = 8 > 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{pos. def.} \\ \text{min.} \end{array}$$

$\Rightarrow$ h ist lokal min. bei $(\pm 1, \mp 2)$

Aufgabe 122 17.12.2014

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt homogen vom Grad $m \in \mathbb{N}$, wenn für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$ die Gleichung $f(tx) = t^m f(x)$ erfüllt ist. Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ homogen vom Grad m, so gilt

$$(\nabla f(x))^T \cdot x = m f(x)$$

(*Hinweis*: Berechnen Sie $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}$ für $g(t) = f(tx)$, indem Sie x als konstant ansehen)

Aufgabe 123

Bestimmen Sie die Stammfunktionen der Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 mit:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= 2x + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \cos x + e^{-2x} \\
f_2(x) &= (x^2 + x) \cos x \\
f_3(x) &= \frac{x^2 - 1}{(x^3 - 3x + 2)^n} \quad \text{für} \quad n = 1, 2 \\
f_4(x) &= \frac{1}{x^3 - x} \\
f_5(x) &= x\sqrt{e^{x^2} + 1} \cdot e^{x^2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 124

Für die in Aufgabe 123 angegebenen Funktionen berechne man

$$\int_1^2 f_1(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_2(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_{-2}^{-4} f_4(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Aufgabe 125

Man berechne die bestimmten Integrale

$$\int_0^{2\pi} x \sin x\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_0^{2\pi} |\, x \sin x \,|\,\mathrm{d}x$$

und interpretiere die erhaltenen Ergebnisse.

Aufgabe 126

Gegeben sei eine Grenzkostenfunktion

$$c'(x) = \begin{cases} 3 \cdot \sqrt{x} & \text{für} \quad x \in [0, 100] \\ 30 & \text{für} \quad x \in [100, 400] \\ \frac{600}{\sqrt{x}} & \text{für} \quad x \in [400, 900] \end{cases} .$$

Die fixen Kosten betragen $c(0) = 1000$.

Bestimmen Sie dazu eine stetige Gesamtkostenfunktion $c(x)$ und berechnen Sie die Gesamtkosten für $x = 100,\ x = 150$ und $x = 625$.

Aufgabe 127

Der momentane Umsatz eines Produktes zum Zeitpunkt t sei durch die Funktion $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit

$$u(t) = 1000(t+1)\, e^{-\frac{t}{2}}$$

gegeben.

a) Skizzieren Sie die Funktion u im Planungszeitraum $[0, 10]$ und berechnen Sie den Gesamtumsatz in $[0, T]$.
b) Ermitteln Sie den Gesamtumsatz für $T = 10$ und $T \to \infty$.

Aufgabe 122 17.12.2014

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt homogen vom Grad $m \in \mathbb{N}$, wenn für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$ die Gleichung $f(tx) = t^m f(x)$ erfüllt ist. Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ homogen vom Grad m, so gilt

$$(\nabla f(x))^T \cdot x = mf(x)$$

(*Hinweis*: Berechnen Sie $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}$ für $g(t) = f(tx)$, indem Sie x als konstant ansehen)

$$\nabla f^T \cdot x = f_{x_1} \cdot x_1 + f_{x_2} \cdot x_2 + \dots + f_{x_n} \cdot x_n$$

$$g' = \frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{d(tx_1)}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{d(tx_n)}{dt} = f_{x_1} \cdot x_1 + \dots + f_{x_n} \cdot x_n$$

$$= \nabla f^T \cdot x \quad (1)$$

Jetzt: Betrachte $g(t) = t^m \cdot f(x)$

$$g'(t) = m \cdot t^{m-1} \cdot f(x) \quad (2)$$

$$\Rightarrow (1) = (2) \Leftrightarrow \nabla f^T \cdot x = m \cdot t^{m-1} \cdot f(x)$$

Setze $t = 1$: $\boxed{\nabla f^T \cdot x = m \cdot f(x)}$

Eulersche Homogenitätsrelation

Aufgabe 27 (Nachtrag)

gegeben:
$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gesucht: $\det D$

Entwickeln nach 3 Spalte:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Zeile, 3. Spalte

$$\det D = (-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(-1)^{4+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot \left[-1 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$-1 \cdot \left[(-1) \cdot (-1) \det \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \dots$$

Aufgabe 128

Für ein Produkt sollen die Kosten- und Umsatzentwicklungen in Abhängigkeit der Zeit $t \geqq 0$ betrachtet werden. Dabei wurden für die Veränderung der Kosten $k(t)$ bzw. des Umsatzes $u(t)$ die Beziehungen folgendermaßen ermittelt:

$$k'(t) = \frac{\mathrm{d}k(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{100}{t+1} \quad \text{bzw.} \quad u'(t) = \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1000}{(t+1)^2} \qquad \text{für alle} \quad t \geqq 0$$

a) Zeigen Sie, dass die Kosten $k(t)$ und der Umsatz $u(t)$ für $t \geqq 0$ monoton wachsen, während der Gewinn $g(t) = u(t) - k(t)$ für $t \leqq 9$ monoton wächst und für $t \geqq 9$ monoton fällt.

b) Berechnen Sie die bestimmten Integrale

$$k_9 = \int\limits_0^9 k'(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad u_9 = \int\limits_0^9 u'(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad g_9 = u_9 - k_9$$

und interpretieren Sie diese Ergebnisse.

c) Zeigen Sie, dass es eine obere Integrationsgrenze $z \geqq 9$ mit $g_z = 0$ gibt (keine Berechnung erforderlich).

Aufgabe 129

Für den Verlauf des Absatzes $y(t)$ eines Produktes in Abhängigkeit der Zeit $t \geq 0$ wird die folgende Beziehung angenommen:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{c}{a} \cdot y(t) \cdot (a - y(t)) \qquad \text{mit} \quad y(t) \in \langle 0, a \rangle \ \forall t \tag{1}$$

a) Formen Sie diese Gleichung in eine Integralgleichung der Form

$$\int g(y)\,\mathrm{d}y = \int f(t)\,\mathrm{d}t$$

um und berechnen Sie daraus eine Funktion $y(t)$, die Gleichung (1) erfüllt.

b) Bestimmen Sie $y(t)$, wenn $a = 100$, $c = 1$ und $y(0) = 50$ gilt.

c) Skizzieren Sie die in b) erhaltene Funktion und interpretieren Sie Gleichung (1) mit Hilfe Ihrer Skizze.

Aufgabe 130

Für die Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen a und b gilt:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{mit} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Berechnen Sie das Volumen eines Fasses, desen Form durch die Rotation einer Ellipse um ihre große Achse entsteht, wobei die Polkappen des Rotationskörpers senkrecht zur Drehachse abgeschnitten werden. Die Höhe des Fasses sei 12 dm, sein größter Durchmesser 12 dm und der Durchmesser der beiden Bodenflächen 10 dm.

Aufgabe 131

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen:

a) $xy' = 4y + x^5$

b) $y' = y \cdot \tan x - 2 \cdot \sin x$ für $-\pi/2 < x < \pi/2$

c) $x^2 y' = 1 - y$ für $x < 0$

d) $xy' = -y + \mathrm{e}^x$ für $x > 0$

e) $y' = -y + x\mathrm{e}^{-x} + 1$

Aufgabe 132

Bestimmen Sie die Lösungen der angegebenen Anfangswertprobleme:

a) $y' = 2xy + x, \quad y(0) = 1$

b) $y' = \dfrac{1}{1-x} y + x - 1, \quad y(2) = 0$

c) $(x+1)y' = -(x+2)y + 2 \cdot \sin x, \quad y(0) = 2$

d) $y' = \dfrac{y}{x} + x^2, \quad y(1) = 1$

e) $y' = 2xy + 1, \quad y(0) = 0$