Wirtschaftsmathe für BW und IM – Aufgabensammlung

Wintersemester 2014/15

Prof. Dr. Stefan Etschberger – Hochschule Augsburg

Aufgabe 1

Lösen Sie in den nachstehenden Aufgaben die Klammern auf und fassen Sie soweit wie möglich zusammen:

a) $(3s+2t)(4s-3t)(5s-7t)$

b) $\dfrac{(5a-2b)(5a+2b)}{25a^2-4b^2} - \dfrac{(7a-3b)(7a-3b)}{49a^2+9b^2-42ab}$

c) $8x-(x+((3x-2y)-(5x+3y))-((-x+6y)))$

Aufgabe 2

Wenden Sie die binomischen Formeln zur Vereinfachung folgender Ausdrücke an:

a) $\dfrac{9a^2-2b^2}{3\sqrt{2}a-2b}$

b) $\dfrac{s^2-t^2}{2s^2+4st+2t^2}$

c) $a^2x^4-2ayx^2b^2+b^4y^2$

d) $\left(\sqrt{xy}-1\right)\left(-1-\sqrt{xy}\right)$

e) $4a+12\sqrt{ab}+9b$

Aufgabe 3

Vereinfachen Sie unter Anwendung der Rechengesetze für Wurzeln bzw. Potenzen:

a) $\sqrt{\left(xy^2\right)^2}$

b) $\sqrt[3]{16xy^4}\,\sqrt[3]{4x^2y^2}$

c) $\sqrt[5]{\dfrac{x^3}{32}}$

d) $\sqrt{\sqrt{4a^2x^2}\cdot\sqrt{a^3x}}$

Aufgabe 4

Berechnen Sie x aus den folgenden Beziehungen:

a) $3\cdot\log x=\log 1024-\log 16$

b) $\log x=\frac{1}{3}(\log 250+\log 15-\log 30)$

c) $\dfrac{\ln\left(x^2\right)-2\ln x}{\ln(x+1)}=e$

d) $e^x=e^{2x}\cdot 50000$

Aufgabe 5

Gegeben sind die Zahlen

i	1	2	3	4	5
x_i	5	3	2	1	6
y_i	2	3	4	1	0

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i \qquad \sum_{i=1}^{5}(x_i+y_i) \qquad \sum_{i=1}^{5} x_i y_i \qquad \sum_{i=1}^{5} x_i \sum_{i=1}^{5} y_i \qquad \sum_{i=1}^{5}\left(i x_i \sum_{i=1}^{5} i y_i\right)$$

Aufgabe 6

Schreiben Sie die folgenden Summen unter Verwendung des Summenzeichens:

a) $2+4+6+8+10+12$

b) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}+\frac{7}{8}$

c) $4+7+10+13+16+19+22+25+28$

Aufgabe 7

Gegeben sei der Ausdruck $\sum_{i=1}^{n} a_i$. Die Indizierung des Ausdrucks soll nun so verändert werden, dass die untere Summationsgrenze $i=k$ lautet, und trotzdem die gleichen Summanden addiert werden.

Aufgabe 8

Berechnen Sie die Summe

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)k}\,.$$

Hinweis: $\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$

Aufgabe 9

Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $-5x^2+3x+9=0$

b) $2x^2-4x+10=0$

c) $x^2+7x+12{,}25=0$

Aufgabe 10

Gegeben seien die Aussagen

A: Das Auftragsvolumen im privaten Wohnungsbau steigt
B: Der Hypothekenzins fällt.

Bringen Sie die Aussage $B \Rightarrow A$ verbal auf die Form

a) Wenn ...., dann ....
b) .... folgt aus ....
c) .... impliziert ....
d) .... ist notwendig für ....
e) .... ist hinreichend für ....

Aufgabe 11

Gegeben sind die Aussagen:

A_1 : Die Löhne steigen.
A_2 : Die Preise steigen.

Formulieren Sie die Aussagen:

$$\begin{array}{llcl} A: & A_1 & \Rightarrow & A_2 \\ B_1: & A_1 & \wedge & A_2 \\ B_2: & A_1 & \wedge & \overline{A_2} \\ B_3: & \overline{A_1} & \wedge & \overline{A_2} \\ B_4: & \overline{A_1} & \vee & A_2 \end{array}$$

Aufgabe 12

Gegeben sind die Aussagen aus Aufgabe 11:

Überprüfen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, welche der Aussagen

$$A \Rightarrow B_i \ , \ B_i \Rightarrow A \ , \ A \Leftrightarrow B_i \ , \ (i = 1, 2, 3, 4)$$

stets (also unabhängig von den Wahrheitswerten der A_i) wahr sind.

Aufgabe 13

Gegeben seien die Aussagen $A,\ B$, deren Negationen mit $\overline{A},\ \overline{B}$ bezeichnet werden. Zeigen Sie, dass die verknüpfte Aussage

$$(A \vee B) \wedge (\overline{A \wedge B}) \Leftrightarrow (A \wedge \overline{B}) \vee (B \wedge \overline{A})$$

stets wahr ist.

Aufgabe 14

a) Gegeben sei die Aussage $P(x)$: *„Der Angestellte x einer bestimmten Firma ist mit seiner Position zufrieden.“*
Interpretieren Sie die Aussagen

$$\bigwedge_x P(x)\ ,\quad \bigvee_x P(x)\ ,\quad \bigwedge_x \overline{P(x)}\ ,$$

$$\bigvee_x \overline{P(x)}\ ,\quad \overline{\bigwedge_x P(x)}\ ,\quad \overline{\bigvee_x P(x)}$$

b) Gegeben sei die Aussage $A(x)$: *„Die reelle Zahl x erfüllt die Gleichung $x^4 + 1 = 0$.“*
Welche der All- und Existenzaussagen

$$\bigwedge_x A(x)\ ,\quad \bigwedge_x \overline{A(x)}\ ,\quad \overline{\bigwedge_x A(x)}\ ,$$

$$\bigvee_x A(x)\ ,\quad \bigvee_x \overline{A(x)}\ ,\quad \overline{\bigvee_x A(x)}$$

sind wahr?

Aufgabe 15

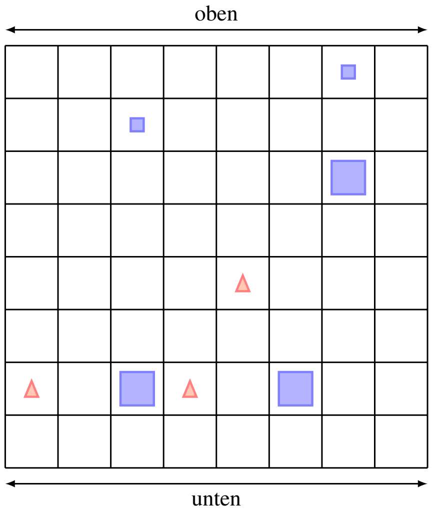
Führen Sie zur Bestätigung der Aussage

$$(a + b)^2 = 4ab \ \Rightarrow\ a = b$$

einen direkten Beweis.

Aufgabe 16

Auf einem quadratischen Spielfeld mit 8×8 Feldern wurden geometrische Elemente in Form von kleinen und großen Quadraten und kleinen Dreiecken folgendermaßen angeordnet:



Außerdem sind für geometrische Elemente x, y, z auf dem Spielfeld folgende Aussagen definiert:

$Q(x)$:	„x ist ein Quadrat"
$K(x)$:	„x ist klein"
$U(x, y)$:	„x liegt unterhalb von y"
$V(x, y, z)$:	„x liegt auf der Verbindungsstrecke der Mittelpunkte von y und z"

Entscheiden und begründen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

a) $\bigvee_x Q(x)$

b) $\bigvee_x \left(\overline{Q(x)} \wedge K(x)\right)$

c) $\bigwedge_x \left(\overline{Q(x)} \Rightarrow K(x)\right)$

d) $\bigwedge_{x,y} \left(\overline{Q(x)} \wedge Q(y)\right) \Rightarrow \bigvee_z \left(V(z,x,y) \wedge \overline{Q(z)}\right)$

e) $\bigwedge_x \left[\left(Q(x) \wedge K(x)\right) \Rightarrow \left(\bigwedge_y \left(\overline{K(y)} \Rightarrow U(y,x)\right)\right)\right]$

Aufgabe 17

a) Welche der Aussagen

$$\begin{array}{rcl} (1-x)^2 \geqq 0 & \Longrightarrow & x \leqq 1 \\ x^2 < 0 & \Longrightarrow & (1-x)^2 > 0 \\ \frac{1}{x} < 0 & \Longleftrightarrow & x < 0 \\ x < 0 & \Longrightarrow & \frac{x-1}{x} > 0 \end{array}$$

ist für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ wahr bzw. falsch? Formulieren Sie jeweils eine kurze Begründung.

b) Beweisen Sie indirekt die Implikationen:

$$\begin{array}{lcl} x + 2\sqrt[3]{x} = 3 & \Longrightarrow & x = 1 \quad \text{ist die einzige reelle Lösung} \\ \frac{1}{x-1} > \frac{1}{x+1} & \Longrightarrow & |\, x \,| \geqq 1 \\ x^2 - 4x + 3 \geqq 0 & \Longrightarrow & x \leqq 1 \vee x \geqq 3 \end{array}$$

Aufgabe 18

a) Von 450 Teilnehmern einer Mathematik-Klausur haben 300 Teilnehmer regelmäßig die Übungen besucht. Insgesamt haben 20 % der Klausurteilnehmer die Klausur nicht bestanden. Bei den Besuchern der Übungen betrug die Durchfallquote nur 10 %. Beweisen Sie die Richtigkeit der Aussage „Die Durchfallquote der Teilnehmer der Mathematik-Klausur, die die Übungen nicht besucht haben, beträgt 40 %".

b) Beweisen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussage:

$$\begin{array}{rcl} 2x^4 - 6x^2 - 12x \neq 72 & \Longrightarrow & x \neq 3 \\ x^5 + x^3 + x = 0 & \Longleftrightarrow & x = 0 \end{array}$$

Aufgabe 19

Überprüfen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, für welche $n \in \mathbb{N}$ die Aussagen

$$\begin{array}{lrcl} A_1(n): & \sum_{i=1}^{n} i \cdot i! & = & (n+1)! - 1 \\ A_2(n): & \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} & = & 2^n - 1 \\ A_3(n): & n\sqrt{n} & > & n + \sqrt{n} \\ A_4(n): & n! & > & 2^n \end{array}$$

richtig sind. Dabei gilt $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ und analog $i!$ beziehungsweise $(n+1)!$.

Aufgabe 20

n verschiedene Punkte einer Ebene sind paarweise durch Strecken verbunden. Dazu wird die Aussage

$$(*) \quad A(n): \quad \text{Die Anzahl der Strecken beträgt } \tfrac{1}{2}\, n\,(n-1)$$

formuliert.

a) Beweisen Sie graphisch die Aussagen $A(2),\ A(3),\ A(4)$.
b) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass (*) für $n \geqq 2$ richtig ist.

Aufgabe 21

Die Fibonacci-Zahlen sind gemäß der folgenden rekursiven Beziehung gegeben:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{für } n \geq 2 \quad \text{mit } a_0 = 0 \text{ und } a_1 = 1$$

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$ die explizite Darstellung von a_n:

$$a_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n\sqrt{5}}$$

Aufgabe 22

Gegeben sind die Matrizen A, B, C sowie die Vektoren a, b mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Prüfen Sie, welche der folgenden Ausdrücke berechenbar sind, und berechnen Sie sie gegebenenfalls.

a) $(A+B)a$,
b) ABb ,
c) $(B+C^T)a$,
d) $BA(a+b)$,
e) $ab^T A$,
f) $(a+b)b^T$,
g) CAB ,
h) $a^T B^T Cb$

Aufgabe 23

Eine Unternehmung produziert mit Hilfe von fünf Produktionsfaktoren $F_1, \ldots, F_5$ zwei Zwischenprodukte Z_1, Z_2, sowie mit diesen Zwischenprodukten und den Faktoren F_1, F_2, F_3 drei Endprodukte P_1, P_2, P_3 .

In den Matrizen $A = (a_{ij})_{5,2},\ B = (b_{ik})_{3,3},\ C = (c_{jk})_{2,3}$ bedeute

$a_{ij} =$ Anzahl der Einheiten von F_i zur Herstellung einer Einheit von Z_j ,

$b_{ik} =$ Anzahl der Einheiten von F_i zur Herstellung einer Einheit von P_k ,

$c_{jk} =$ Anzahl der Einheiten von Z_j zur Herstellung einer Einheit von P_k .

a) Bestimmen Sie mit den Daten

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

den Vektor $y \in \mathbb{R}^5_+$ von Produktionsfaktoren, der erforderlich ist, um eine Einheit von P_k zu fertigen (für $k = 1, 2, 3$).
b) Welche Faktormengen braucht man, um den Endproduktvektor (30, 20, 30) zu realisieren?
c) Berechnen Sie mit den Vektoren

c^T	$=$	$(1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1)$	für die Beschaffungskosten der Faktoren,
q^T	$=$	$(15,\ 20,\ 10)$	für die Produktionskosten der Produkte,
p^T	$=$	$(40,\ 50,\ 40)$	für die Verkaufspreise der Produkte,

die Gesamtkosten, den Umsatz und den Gewinn des Endproduktvektors (30, 20, 30).

Aufgabe 24

Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Für welche $b_2 \in \mathbb{R}$ gelten folgende Aussagen?

a) $\|a + b - c\| = 3$
b) a und b sind orthogonal
c) $a - c$ und b sind orthogonal
d) $a^T a \geqq b^T b \geqq c^T c$
e) $(a + b)^T (b - c) = -2$

Aufgabe 25

Gegeben sind die folgenden Punktmengen $\in \mathbb{R}^2$:

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \in \mathbb{N} \ , \ x_2^2 = x_1 \right\}$$

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \in (0, 1) \ , \ x_2 \geqq 0 \right\}$$

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 + x_2 = 0 \ , \ x_1 x_2 = 1 \right\}$$

$$M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \geqq x_2^3 \ , \ x_2 \geqq 0 \right\}$$

$$M_5 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \ \|x\| \geqq 1 \ , \ (1, -1)\, x = 0 \right\}$$

a) Man stelle alle Mengen graphisch dar und prüfe mit Hilfe der Zeichnung, welche der Mengen offen, abgeschlossen, beschränkt, konvex ist.
b) Welche der paarweisen Durchschnitte sind leer?

Aufgabe 26

Eine Unternehmung möchte zwei Produkte in den Quantitäten $x_1, x_2 \geqq 0$ herstellen. Zur Verfügung stehen 120 Einheiten eines erforderlichen Rohstoffes, ebenso 120 Arbeitsstunden sowie 200 Minuten an Maschinenzeit. Den Bedarf an Rohstoffeinheiten, Arbeitsstunden und Maschinenminuten pro Einheit der beiden Produkte entnehme man der Tabelle:

	Rohstoff-einheiten	Arbeits-stunden	Maschinen-minuten
Produkt 1	1	2	4
Produkt 2	3	2	2

a) Man gebe die Menge M aller produzierbaren Quantitäten $\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}_+^2$ an und stelle diese graphisch dar.
b) Man bestimme alle Eckpunkte von M.
c) Man gebe alle produzierbaren Quantitäten $\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{N}^2$ mit $x_1 = 30$ an.
d) In welchem der Eckpunkte von M wird der Umsatz maximal, wenn für Produkt 1 bzw. Produkt 2 Verkaufspreise von 2 bzw. 3 Geldeinheiten erzielt werden?

Aufgabe 27

Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

nach dem Entwicklungssatz und der Sarrus-Regel. Welche Implikationen resultieren aus den Ergebnissen für die Ränge der Matrizen A, B, C, D?

Aufgabe 28

Man berechne alle reellen Eigenwerte und die dazu gehörenden Eigenvektoren der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 29

Man bestimme eine symmetrische 3×3–Matrix, deren Eigenwerte und entsprechende Eigenvektoren wie folgt gegeben sind:

Eigenwert	zugehöriger Eigenvektor
$\lambda_1 = 1$	$(1, \quad 1, \quad 0)$
$\lambda_2 = -1$	$(1, \ -1, \quad 0)$
$\lambda_3 = 0$	$(0, \quad 0, \quad 1)$

Aufgabe 30

Eine Unternehmung bietet zwei Güter an. Zwischen den Absatzquantitäten $x_t,\ y_t$ zum Zeitpunkt t und $x_{t+1},\ y_{t+1}$ zum Zeitpunkt $t+1$ wird folgende Verbundbeziehung angenommen:

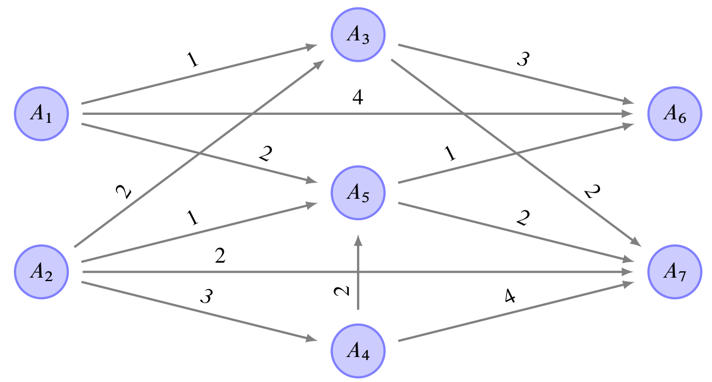
$$\begin{aligned} x_{t+1} &= 1.2\,x_t - 0.2\,y_t \\ y_{t+1} &= 0.05\,x_t + y_t \end{aligned}$$

Es soll untersucht werden, ob ein für beide Güter gleichförmiges Absatzwachstum möglich ist.

a) Man formuliere das Problem als Eigenwertproblem.
b) Man berechne Eigenwerte und Eigenvektoren und interpretiere die Ergebnisse.
c) Wie viele Zeitperioden benötigt man bei gleichförmigem Wachstum in jeder Periode, um eine Steigerung der Absatzquantitäten um mindestens 100 % zu erreichen?
d) Wie könnte ein Ergebnis interpretiert werden, das keine reellen Eigenwerte enthält?

Aufgabe 31

Aus den Werkstoffen A_1, A_2 werden Zwischenprodukte A_3, A_4, A_5 und Endprodukte A_6, A_7 hergestellt. Die nachfolgende Graphik stellt die Verknüpfungen dar.



Die Pfeilbewertung a_{ij} mit $A_i \xrightarrow{a_{ij}} A_j$ gibt an, wie viele Mengeneinheiten von A_i zur Herstellung einer Einheit A_j benötigt werden.

Wie viele Einheiten von A_1, A_2, A_3, A_4 werden benötigt, wenn von A_5, A_6, A_7 genau 50, 200, 120 Einheiten verkauft werden können?

Aufgabe 32

a) Welche der folgenden Aussagen über lineare Gleichungssysteme sind wahr bzw. falsch? (Begründen Sie Ihre Antwort!)
   a.1) Ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Variablen ist stets lösbar.
   a.2) Ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Variablen ist nicht immer lösbar.
   a.3) Wenn ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Variablen lösbar ist, dann ist die Lösung eindeutig.
   a.4) Ein lineares Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Variablen ist nicht lösbar.
   a.5) Ein lineares Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Variablen kann eindeutig lösbar sein.
b) Für ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ sei die erweiterte Koeffizientenmatrix $(\,A\,|\,b)$ durch

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}$$

gegeben.
   b.1) Geben Sie die allgemeine Lösung des homogenen Systems $(\,b = 0\,)$ sowie eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems an.
   b.2) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das gegebene Gleichungssystem lösbar?
   b.3) Gibt es ein $a \in \mathbb{R}$, so dass $x^T = (1, -1, 2, 1, 0)$ das Gleichungssystem $Ax = b$

löst?

Aufgabe 33

Die Abteilungen A_1, A_2, A_3 eines Betriebes sind durch mengenmäßige Leistungen a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ von A_i nach A_j gegenseitig verbunden. Jede der Abteilungen gibt ferner Leistungen b_i $(i = 1, 2, 3)$ an den Markt ab und hat sogenannte Primärkosten c_i $(i = 1, 2, 3)$ zu tragen. Gegeben seien folgende Daten:

$$A = (a_{ij})_{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 10 \\ 20 & 0 & 10 \\ 30 & 10 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 70 \\ 60 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 170 \\ 60 \end{pmatrix}$$

a) Formulieren Sie mit den Variablen x_1, x_2, x_3 für die innerbetrieblichen Verrechnungspreise ein lineares Gleichungssystem für ein innerbetriebliches Kostengleichgewicht der Abteilungen A_1, A_2, A_3 .

b) Lösen Sie das Gleichungssystem von a) und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 34

Gegeben sind die beiden folgenden Gleichungssysteme:

$$(G_1)\quad \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array} \qquad (G_2)\quad \begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

a) Welches der beiden Gleichungssysteme besitzt keine Lösung, eine eindeutige Lösung, unendlich viele Lösungen?

b) Wie verändert sich die Lösungsmenge von (G_1), wenn die Gleichung $-x_1 + x_2 + x_3 = 2$ zusätzlich berücksichtigt werden soll?

c) Wie verändert sich die Lösungsmenge von (G_2), wenn die Gleichung $2x_1 + x_3 = 1$ entfallen soll?

d) Bestimmen Sie für (G_1) und (G_2), falls möglich, eine Lösung mit $x_3 = 1$.

Aufgabe 35

Ein regionaler Markt wird von drei konkurrierenden Produkten P_1, P_2, P_3 beherrscht. Bezeichnet man mit $a_{ij} \in [0, 1]$ den Anteil von P_i-Käufern zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}$, der zum Zeitpunkt $t + 1 \in \mathbb{N}$ das Produkt P_j kauft, so charakterisiert die Matrix

$$A = (a_{ij})_{3,3} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

die anteiligen Käuferfluktuationen zwischen den Produkten. Ferner beschreibt der Vektor

$$x_1^T = (0,5\,,\ 0,5\,,\ 0)$$

die Marktanteile der Produkte P_1, P_2, P_3 zum Zeitpunkt $t = 1$.

a) Interpretieren Sie die in A und x_1 enthaltenen Nullen.

b) Berechnen Sie die Marktanteile der Produkte zu den Zeitpunkten $t = 2, 3$ und begründen Sie die Marktanteilszuwächse von P_3 mit Hilfe von A.

c) Geben Sie eine stationäre Marktverteilung an, das heißt, für beliebiges $t \in \mathbb{N}$ sind x_t^T und $x_{t+1}^T = x_t^T\, A$ identisch.

Aufgabe 36

Ein Teegroßhändler führt drei Sorten Tee: *Darjeeling*, *Nepal* und *Java* mit den Anfangsbeständen x_1, x_2, x_3 .

Der Lagerbestand zu Beginn der ersten Woche beträgt 32 Tonnen. Nach der ersten (zweiten) Woche hat er 25 % (50 %) des Bestandes an Darjeeling und jeweils 20 % (40 %) des Bestandes an Nepal bzw. Java verkauft. Der Lagerbestand beträgt nach der ersten (zweiten) Woche 25 (18) Tonnen. Nach der dritten Woche hat er bei einem Gesamtlagerbestand von 5.2 Tonnen noch Vorräte von 10 % Darjeeling und jeweils 20 % Nepal bzw. Java (im Vergleich zu deren Anfangsbeständen).

a) Formulieren Sie ein lineares Gleichungssystem mit den unbekannten Variablen x_1, x_2, x_3 , das alle gegebenen Informationen angemessen wiedergibt.

b) Ermitteln Sie alle ökonomisch sinnvollen Lösungen des Gleichungssystems.

c) Verwerten Sie – falls möglich – die zusätzliche Information, dass zu Beginn der ersten Woche der Vorrat an Darjeeling um 20 % höher war als der Vorrat an Nepal.
Wie verändert sich damit die Lösung von b)?

Aufgabe 37

Eine Brauerei stellt 3 Biersorten her: Hell, Pils und Bock. Die Herstellung erfordert eine Arbeitszeit von 2 Stunden für 1 hl Hell, 4 Stunden für 1 hl Pils und 5 Stunden für 1 hl Bock, wobei insgesamt genau Z Arbeitsstunden zu leisten sind. Das für Werbung bewilligte Budget beträgt 35.000 €, wobei die Werbekosten je hl Hell und Bock 1 € und bei Pils 2 € betragen. Der Gewinn pro hl beträgt 10 € bei Hell, 20 € bei Pils und 30 € bei Bock. Insgesamt soll ein Gewinn von 550.000 € erzielt werden.

a) Formulieren Sie das gegebene Gleichungssystem.
b) Ermitteln Sie die ökonomisch sinnvolle Lösungsmenge. (Hinweis: die zu produzierenden Einheiten an hl Bier sind nicht negativ). Für welchen Arbeitseinsatz Z gibt es keine Lösung, genau eine Lösung, mehrere Lösungen?
c) Skizzieren Sie das in b) erhaltene Ergebnis.

Aufgabe 38

Gegeben sind die Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{2}A$ orthogonal ist.
b) Berechnen Sie B^{-1}.
c) Lösen Sie das Gleichungssystem $AB\,x = c$ mit

$$x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)\,, \quad c^T = (1, 2, 3, 4)$$

unter Verwendung von b).

Aufgabe 39

Das junge Start-Up-Unternehmen „*Pimp-My-Phone*“ hat sich auf das Umgestalten von Mobiltelefonen in die Form von Politikerköpfen spezialisiert. Die von den Kunden am meisten nachgefragten Produkte sind die Pakete *Angela* (A) und *Gerhard* (G). Die Firma beschäftigt bereits 50 Angestellte und unterhält 10 Maschinen. Durch den Verkauf eines Paketes A wird ein Reingewinn von 15 € erzielt, der Verkauf eines Paketes G liefert im Vergleich dazu 20 € Gewinn.

Zur Herstellung eines Paketes A werden 20 Arbeitsstunden, 5 Maschinenstunden und 6 Einheiten Kunststoffformteile verwendet. Um ein Paket G herzustellen, werden 10 Arbeitsstunden, 5 Maschinenstunden und 10 Einheiten Kunststoff benötigt. Insgesamt stehen pro Monat 160 Arbeitsstunden pro Mitarbeiter (Nebenbedingung N_1), 200 Maschinenstunden pro Maschine (N_2) und 3000 Einheiten Kunststoff (N_3) maximal zur Verfügung.

Die Geschäftsleitung möchte die Anzahl der hergestellten Pakete *Angela* (x_1) beziehungsweise *Gerhard* (x_2) hinsichtlich einer Gewinnmaximierung festlegen. Dabei kann davon ausgegangen werden, dass alle hergestellten Pakete auch verkauft werden.

a) Formulieren Sie das Problem als lineares Programm mit Nebenbedingungen und Zielfunktion.
b) Lösen Sie das Problem graphisch (Berechnung der relevanten Geradenschnittpunkte ist erforderlich).
c) Löst man das Problem mit dem Simplexalgorithmus kann man zu folgendem Zwischentableau gelangen:

ZF	-3	0	0	0	2	6000
N_1	14	0	1	0	-1	5000
N_2	2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	500
N_3	$\frac{3}{5}$	1	0	0	$\frac{1}{10}$	300

Bestimmen Sie rechnerisch auf Basis dieses Tableaus mit Hilfe des Simplexalgorithmus eine optimale Lösung. Wie hoch ist der maximal erzielbare Gewinn pro Monat?
d) Bei welcher Ressource hat die Firma in der Optimallösung noch nicht ausgeschöpfte Kapazitäten?
e) Aufgrund von Popularitätsschwankungen ändert sich der Gewinn eines Paketes *Angela* auf Werte $c_1 = 15 + \gamma$ mit $\gamma \in \mathbb{R}$. In welchem Intervall kann c_1 liegen, so dass die Basis erhalten bleibt, also weder die Produktion von *Angela* noch die von *Gerhard* zur Erreichung des Optimalpunktes komplett eingestellt werden muss.

Aufgabe 40

Mit Hilfe der Produktionsfaktoren F_1, F_2, F_3 sollen zwei Produkte P_1, P_2 hergestellt werden. Dazu sind folgende Daten bekannt:

Produkt	Menge	Verkaufspreis	Produktionsfaktorverbrauch je Produkteinheit F_1	F_2	F_3
P_1	x_1	4	1	1	3
P_2	x_2	4	1	2	2
Kapazität der Produktionsfaktoren			60	60	120

a) Mit der Zielsetzung „Umsatzmaximierung“ formuliere man das entsprechende lineare Optimierungsproblem und löse dieses Problem graphisch.
b) Wie ist die Kapazität von F_2 zu verändern, wenn ein Umsatzmaximum von 200 erreicht werden soll?

Aufgabe 41

Gegeben ist das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lrcrcr}
\text{ZF:} & x_1 & + & x_2 & \rightarrow & \max \\
\text{NB I:} & 2x_1 & + & x_2 & \geqq & 4 \\
\text{NB II:} & x_1 & + & 2x_2 & \leqq & 4 \\
\text{NB III:} & 3x_1 & - & 2x_2 & \leqq & 0
\end{array}$$

$$x_1, x_2 \geqq 0$$

a) Zeigen Sie graphisch, dass dieses Problem unlösbar ist.
b) Eliminieren Sie *alternativ* die Nebenbedingung
   α) NB I,
   β) NB II,
   γ) NB III
   und diskutieren Sie für jeden dieser Fälle die Lösbarkeit des Problems. Ermitteln Sie gegebenenfalls Optimallösungen und Zielfunktionswert.

Aufgabe 42

Gegeben sei das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$c_1x_1 + 4x_2 + 10 \rightarrow \max$$

$$\begin{array}{rcrcl}
3x_1 & + & 6x_2 & \leqq & b_1 \\
3x_1 & + & x_2 & \leqq & 9
\end{array}$$

$$x_1, x_2 \geqq 0$$

a) Lösen Sie das Problem für $c_1 = 3$ und $b_1 = 18$ graphisch und geben Sie die Optimallösung sowie den optimalen Zielfunktionswert an.
b) Untersuchen Sie anhand der Graphik aus a), in welchem Bereich der Wert für c_1 variieren darf, so dass die ermittelte Optimallösung erhalten bleibt. Berechnen Sie diesen Bereich.
c) Interpretieren Sie b_1 betriebswirtschaftlich. In welchem Intervall kann man b_1 verändern, so dass beide Produktionsfaktoren für die Produktion verwendet werden? In welchem Intervall kann man b_1 verändern, so dass zur Erreichung der Optimallösung beide Produktionsfaktoren ausgeschöpft werden?

Aufgabe 43

Bauer Paul Profitlich überdenkt die Rationierung des Futters seiner Schweine. Bis dato hatte er zwei Bestandteile im Verhältnis 1:1 gemischt. Sein Hof-Veterinär hat die Menge notwendiger Vitamine in dieser Futtermischung gemessen und grob geschätzt, dass 4 kg Futter pro Schwein und Tag nötig sind, damit die Tiere auf keinen Fall an Vitaminmangelerscheinungen leiden.

Bauer Profitlich hat nun in der aktuellen Ausgabe des *Stallanzeigers* gelesen, dass er pro Tag und Schwein mindestens 2 mg von Vitamin 1, mindestens 3 mg von Vitamin 2 und mindestens 4 mg von Vitamin 3 füttern muss. In der Inhaltsangabe seiner Futtermittelkomponenten steht bei Bestandteil 1, dass es pro kg jeweils 1 mg von jedem dieser drei Vitamine enthält. Futtermittelbestandteil 2 enthält pro kg 1/2 mg von Vitamin 1, 1 mg von Vitamin 2 und 2 mg von Vitamin 3. Beide Futtermittelkomponenten kosten 5 Cent je kg. Bauer Profitlich stellt sich nun die Frage, in welchen Anteilen er die Futtermittelkomponenten mischen muss und wieviel er somit von diesen Komponenten pro Tag und Schwein verfüttern muss, dass seine Kosten minimal sind, trotzdem aber die Vitaminversorgung gewährleistet ist.

a) Formulieren Sie das Problem als lineares Optimierungsproblem mit den Bezeichnungen x_1, x_2 für die Menge an Futtermittelbestandteilen vom Typ 1 beziehungsweise vom Typ 2.
b) Lösen Sie das Problem graphisch (Berechnung der relevanten Geradenschnittpunkte ist trotzdem erforderlich) und geben Sie die Menge der Optimallösungen an.
c) Wieviel muss Bauer Profitlich pro Schwein füttern, wenn alle Nebenbedingungen eingehalten werden sollen und er seine alte Futtermischung weiter verwenden will? Erreicht er so das Kostenoptimum?

Aufgabe 44

Geben Sie die rekursiv definierten Folgen (a_n) und (b_n) mit

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{2}{n+1} a_n \quad \text{mit} \quad (a_0 = \tfrac{1}{2}) \\ b_{n+1} &= \sqrt{b_n} \qquad \text{mit} \quad (b_1 = 2) \end{aligned}$$

in expliziter Form an.

Aufgabe 45

Berechnen Sie für die Folgen $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und

$$a_n = \frac{(-1)^n \binom{n}{3} + (n+3)^2}{1 + n^2 + 4n^3}, \qquad b_n = \frac{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^3}}{\sqrt{n}\left(\frac{3}{n^2} - \frac{4}{n^4}\right)},$$

$$c_n = (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n+1}} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad d_n = \frac{\sqrt{n} - n}{\sqrt{n} + n + 1}, \quad e_n = \frac{3n\sqrt{n} - \frac{1}{n}}{n\left(2 + \sqrt{n}\right)}$$

die Grenzwerte.

Aufgabe 46

a) Überprüfen Sie die Reihen $(r_n), (s_n), (t_n), (u_n)$ mit

$$r_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{5i + 21}, \quad s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{3^{i+1}}{5^{i-1}}, \quad t_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{3^{2i}}{5^i}, \quad u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2(i!)}{(2i)!}$$

auf ihre Konvergenz.

b) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} (s_n)$.

Aufgabe 47

Eine Schätzung der gesamten Öl- und Gasreserven im norwegischen Festlandsockel zu Beginn des Jahres 2003 betrug 13 Milliarden Tonnen. Die Förderung im selben Jahr lag bei 250 Millionen Tonnen.

a) Wann sind die Reserven erschöpft, wenn die Förderung auf demselben Niveau wie im Jahr 2003 fortgesetzt wird?

b) Nehmen Sie an, dass die Förderung jedes Jahr um 2% im Vergleich zum vorangegangenen Jahr reduziert wird, beginnend im Jahr 2004.

   Wie lange werden die Reserven in diesem Fall reichen?

c) Wie ändert sich die Situation, wenn die jährliche Förderung um jeweils 10 Millionen Tonnen gegenüber dem Vorjahr steigt, beginnend im Jahr 2004.

   Wie lange werden die Reserven in diesem Fall reichen?

Aufgabe 48

a) Für welche $k \in \mathbb{N}$ konvergieren die Folgen (a_n), (b_n), (c_n) mit

$$a_n = \frac{3\,(n^{10}-1)}{2\,(n+1)^k}, \quad b_n = a_n^{-1}, \quad c_n = a_n^2 \ ?$$

   Geben Sie gegebenenfalls die entsprechenden Grenzwerte an.

b) Zeigen Sie, dass die Reihe (s_n) mit

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

   für $k \geqq 12$ konvergiert und für $k = 10$ divergiert.

Aufgabe 49

Überprüfen Sie mit Hilfe des Quotientenkriteriums, für welche $a \in \mathbb{R}$ die Reihen $(r_n), (s_n)$ mit

$$r_n = \sum_{i=0}^{n} a^{-i}, \quad s_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{(a-1)^i}{a(i+1)}$$

konvergieren.

Aufgabe 50

Eine Rechnung über 3.250 € wird nicht sofort bezahlt. Daher sind Verzugszinsen in Höhe von 144,45 € zu bezahlen. Für welche Zeitspanne wurden Verzugszinsen berechnet falls der Zinsfuß 8% beträgt.

Aufgabe 51

Ein Girokonto weist am Jahresanfang ein Guthaben von 2.400 € auf. Am 6. März werden auf das Konto 10.000 € überwiesen; am 21. Januar und am 16. Februar werden jeweils 4.000 € abgebucht. Die Bank berechnet 12% Sollzins und 0,5% Habenzins. Stellen Sie die Zinsabrechnung zum 1. April auf.

Aufgabe 52

Jemand zahlt am 2. Juli 1999 auf sein Sparkonto 1000 € ein. Wie hoch ist der Kontostand am 2. April 2008 bei 3% Zins, falls das Konto zu diesem Zeitpunkt abgerechnet wird.

Aufgabe 53

Jemand legt 20.000 € zu 6% zinseszinslich an. Auf welche Summe wächst das Kapital in 5 Jahren an bei

a) jährlicher,

b) halbjährlicher,

c) monatlicher,

d) täglicher oder

e) stetiger Verzinsung?

Aufgabe 54

Eine Kapitalanlage hat sich in 10 Jahren verdoppelt. In der ersten Hälfte der Laufzeit betrug der Zinssatz 4%. Wie hoch war er in der zweiten Hälfte?

Aufgabe 55

a) In welcher Zeit verdoppelt sich bei Zinseszinsrechnung jedes beliebige Anfangskapital K bei einem jährlichen Zinssatz von $p = 5\%$?

b) Wie muss der jährliche Zinssatz bei Zinseszinsrechnung aussehen, wenn sich das Anfangskapital in 10 Jahren verdoppeln soll?

Aufgabe 56

Wie lange müssen 10.000 € angelegt werden, damit sie bei einer jährlichen Verzinsung von 7% ein Endkapital von 25.000 € erbringen?

Aufgabe 57

Ein Waldbestand hat einen Tageswert von 1 Mio. €. Aufgrund von Abholzung und Umweltschäden, nimmt der mengenmäßige Bestand jährlich um 10% stetig ab; der Preis des Holzes steigt halbjährlich um 4%.

a) Welchen Tageswert hat der Wald in 10 Jahren?

b) Nach wie viel Jahren hat sich der Wert des Waldes halbiert?

Aufgabe 58

Die Effektivverzinsung einer Anlage, die vierteljährlich verzinst wird, ist 6,14%. Wie hoch ist der (nominale) Jahreszinsfuß?

Aufgabe 59

Jemand zahlt am Ende eines jeden Jahres 1000 € auf sein Sparkonto ein, welches zu 3% verzinst wird. Wie hoch ist der gesparte Betrag einschließlich Zinseszins am Ende des 10. Jahres?

Aufgabe 60

Für den Kauf einer Maschine stehen folgende Zahlungsalternativen zur Auswahl:

a) 8.000 € sofort, 4 jährliche Raten zu je 2.000 €, zahlbar am Ende eines jeden Jahres

b) vier jährliche Raten zu je 4.000 €, zahlbar am Ende eines jeden Jahres

c) 5.000 € sofort, je 3.000 € am Ende des 2. und 3. Jahres und 5.000 € am Ende des 4. Jahres.

Für welche Zahlungsalternative (Barwertvergleich) soll man sich bei einem Zinssatz von 10% entscheiden?

Aufgabe 61

Ein heute 55-jähriger Arbeitnehmer hat in 10 Jahren einen Anspruch auf eine monatliche Betriebsrente von 500 €, die vorschüssig bezahlt wird. Durch welche Gegenleistung kann sie heute bei einem Zinssatz von 6% abgelöst werden, wenn die Lebenserwartung von 77 Jahren angenommen wird.

Aufgabe 62

Ein Bausparer hat einen Bausparvertrag über 50.000 € Bausparsumme abgeschlossen. Der Habenzins beträgt 3%. Der Bausparvertrag ist zuteilungsreif, wenn 40% der Bausparsumme eingezahlt sind.

a) Nach wieviel Jahren ist der Bausparvertrag zuteilungsreif, wenn
   - 3.000 € jährlich nachschüssig
   - 3.000 € jährlich vorschüssig
   - 300 € monatlich nachschüssig

   einbezahlt werden?

b) Welche Sparrate muß der Bausparer
   - jährlich nachschüssig
   - jährlich vorschüssig
   - monatlich nachschüssig

   leisten, damit der Vertrag in vier Jahren zuteilungsreif ist?

Aufgabe 63

Das Vermögen von A ist mit 100.000 € doppelt so hoch wie das Vermögen von B. A spart jährlich 4.000 € nachschüssig, während B 8.000 € spart. Die jährliche Verzinsung ist 6%.

a) Nach wie vielen Jahren sind die Vermögen von A und B gleich hoch?

b) Wie hoch muss die jährliche Sparleistung von B sein, damit er in 10 Jahren das gleiche Vermögen wie A hat?

Aufgabe 64

Jemand möchte von seinem 63. Geburtstag an 20 Jahre lang eine jährliche nachschüssige Rente in Höhe von 20.000 € ausbezahlt bekommen. Welchen Betrag muß er dafür 30 Jahre lang bis zu seinem 63. Geburtstag monatlich vorschüssig einbezahlen? Der Zinsfuß betrage 5,5% jährlich.

Aufgabe 65

Als Kaufpreis für ein Haus hat der Erwerber 5 Raten von je 100.000 € zu leisten. Die erste Rate muss sofort bezahlt werden, die übrigen in jährlichen Abständen. Mit welchem Betrag könnte bei 5% Zins die ganze Schuld sofort beglichen werden?

Aufgabe 66

Welches Kapital benötig man heute, wenn daraus 5 Jahre lang zu jedem Quartalsbeginn eine Spende von 1000 € überwiesen werden soll? Die vierteljährliche Verzinsung ist 1%.

Aufgabe 67

In einer Pensionszusage wird eine Rente über 5000 € zu Beginn eines Quartals 10 Jahre lang bezahlt. Welchen Betrag muss die Firma bei einem Jahreszinssatz von 5% am Anfang der Rentenzahlungen für die Pensionsrückstellung (Barwert) einsetzen?

Aufgabe 68

Ein Unternehmen nimmt einen Kredit über 500.000 € zu 7% Zins auf. Der Kredit ist in fünf Jahren mit gleichbleibenden Tilgungsraten zu tilgen. Erstellen Sie den Tilgungsplan.

Aufgabe 69

Ein Auto, das 57.000 € kostet, soll durch einen Kredit finanziert werden. Die Hausbank bietet einen Kredit, der in zwei gleich hohen jährlichen Tilgungsraten zurückzuzahlen ist, mit folgenden Konditionen an: Zins p.a. 8%, Auszahlung 90%. Wie hoch ist der Effektivzinsfuß für den Kredit?

Aufgabe 70

Eine GmbH nimmt einen Kredit über 2.000.000 € zu 10% Zins auf, der mit gleichbleibenden Tilgungsraten in 20 Jahren zu tilgen ist. Berechnen Sie

a) die Restschuld am Anfang des 10. Jahres,

b) die Restschuld nach 15 Jahren,

c) den Zinsbetrag im 12. Jahr und

d) die Aufwendungen im 18. Jahr.

Aufgabe 71

Eine Anleihe von 1.000.000 € soll mittels gleichbleibender Annuität zu 7% verzinst und innerhalb der nächsten 5 Jahre getilgt werden. Wie gestaltet sich der Tilgungsplan?

Aufgabe 72

Nach 20 Jahren beträgt die Restschuld eines Annuitätenkredits, der zu 8% verzinst wird, eine Gesamtlaufzeit von 25 Jahren hat und mit gleich hohen Annuitäten getilgt wird, noch 37.403,27 €. Erstellen Sie den Tilgungsplan der letzten 5 Jahre.

Aufgabe 73

Ein festverzinsliches Wertpapier ist mit einem Kupon von 8 % p.a. und einem Rücknahmekurs von 103 % nach 15 Jahren ausgestattet. Welches ist der Preis (Kurs) des Wertpapiers bei einer Restlaufzeit von 7 Jahren unmittelbar nach der 8. Zinszahlung, wenn dem Erwerber eine dem dann herrschenden Marktzinsniveau entsprechende Umlaufrendite von 9 % garantiert wird?

Aufgabe 74

Ein festverzinsliches Wertpapier ist mit einem Kupon von 7 % p.a. und einem Rücknahmekurs von 102 % nach 15 Jahren ausgestattet.

a) Welches ist der Emissionskurs, wenn das herrschende Marktzinsniveau bei 8 % liegt?

b) Die Steigung des Emissionskurses bei diesem Marktzins beträgt $C_0'(0,08) = -812,441$. Welches ist die modifizierte Duration?

c) Welches ist die Elastizität des Emissionskurses bezüglich des Marktzinsniveaus?

d) Wenn der Marktzins um $\Delta i = 0,001$ steigt: Auf welchen Wert sinkt C_0 näherungsweise?

Aufgabe 75

Eine Unternehmung will ein festverzinsliches Wertpapier emittieren, das dem Erwerber während der 15-jährigen Laufzeit einen Effektivzins von 9 % garantiert. Der Emissionskurs ist 96 %, der Rücknahmekurs 101%.

Mit welchem nominellen Zinssatz muss die Unternehmung das Papier ausstatten?

Aufgabe 76

Von welcher durchschnittlichen jährlichen Inflationsrate können Sie ausgehen, wenn ein Kapital, das in zehn Jahren nominell 1000 € beträgt, dann einen Realwert von 900 € hat?
(Es wird angenommen, das der Betrag zuhause im Kleiderschrank lag.)

Aufgabe 77

Zu welchem konstanten jährlichen Zins muss ein Betrag K_0 am 1.1.2008 angelegt werden damit am 31.12.2011 die Inflation ausgeglichen wurde? Die jährliche Inflationsraten der betreffenden Jahre seien dabei

Jahr	2008	2009	2010	2011
Inflation in %	3	2	4	5

Aufgabe 78

Am 1.1. diesen Jahres wurde ein Betrag von 2000 € zu 8 % jährlich für 15 Jahre angelegt. Die durchschnittliche Inflationsrate für diese 15 Jahre wird als 2,8 % angenommen.

a) Welche Kaufkraft hat der Betrag nach genau 5 Jahren Anlagedauer?

b) Welcher Realwert steht dem Anleger am Ende der Laufzeit zur Verfügung?

c) Welche Realverzinsung erzielt der Anleger durchschnittlich pro Jahr?

Aufgabe 79

Gegeben sind die Funktionen f_1, f_2 von einer reellen Variablen mit

$$f_1(x) = \frac{4x+1}{2x-1}, \quad f_2(x) = \frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x-1}$$

Beantworten Sie die folgenden Teilaufgaben *ohne* Differentialrechnung:

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die Funktionen f_1, f_2 definiert?
b) Zerlegen Sie f_1 additiv in ein Polynom und eine echt-gebrochen-rationale Funktion und zeigen Sie damit, dass f_1 für $x > \frac{1}{2}$ streng monoton fällt.
c) Zeigen Sie, dass f_2 für alle $x \geq 2$ streng monoton wächst.
d) Zeigen Sie, dass weder f_1 noch f_2 eine globale Extremalstelle besitzt.

Aufgabe 80

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \sqrt{(x+1)\left(1-\sqrt{x}\right)}\,.$$

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist f definiert?
b) Zeigen Sie ohne Differentialrechnung, dass f für $x = 1$ minimal und für $x = 0$ maximal wird.

Aufgabe 81

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \sqrt[x]{2}\,\ln(-x)\,.$$

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist f definiert?
b) Zeigen Sie, dass f streng monoton fällt für $x < -1$.

Aufgabe 82

Bei der Produktion eines Gutes wirken sich die mit steigenden Stückzahlen gewonnenen Produktionserfahrungen kostensenkend aus. Die für eine Mengeneinheit (ME) des Produkts anfallenden Stückkosten k (in €/ME) hängen von der Gesamtproduktionsmenge x folgendermaßen ab:

$$k(x) = a \cdot x^b \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R},\ x \geq 1$$

Es wird nun folgendes beobachtet:

1. Die erste produzierte Einheit verursacht Kosten in Höhe von 160 €.
2. Verdoppelt man die Produktionsmenge ausgehend von einer beliebigen Stückzahl, so sinken die Stückkosten um 20% gegenüber dem Wert vor der Stückzahlverdoppelung.

a) Bestimmen Sie die Parameter a und b der Funktion k.
b) Wie hoch muß die Gesamtproduktionsmenge sein, damit die gesamten Produktionskosten 80.000 € betragen?

Aufgabe 83

Bestimmen Sie alle Extremalstellen der Funktion

$$f : [-2\pi; 2\pi] \mapsto \mathbb{R} \qquad \text{mit} \qquad f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

ohne Differentialrechnung.

Aufgabe 84

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x+3} & \text{für} \quad x < -3 \\ 3 & \text{für} \quad x = -3 \\ (x+2)^2 - 2 & \text{für} \quad -3 < x \leq 0 \\ \ln\left(e^{x+2}\right) & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

auf Stetigkeit.

Aufgabe 85

Für welche Konstanten $a,\ b \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot e \cdot |x| & \text{für} \quad x \geq -1 \\ \dfrac{|x|}{b \cdot e^x} & \text{für} \quad x < -1 \end{cases}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig?

Aufgabe 86

Berechnen Sie für $x \in \mathbb{R}$ folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{\sin(2x)}$

d) $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r}{\tan(2r)}$

e) $\lim\limits_{x\searrow 0} \sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x}$

Aufgabe 87

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ folgender Funktionsvorschriften von $D \to \mathbb{R}$ und geben Sie für jede Funktion eine stetige Fortsetzung auf $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an.

a) $f(x) = \dfrac{\sin(x-2)}{x-2}$

b) $g(x) = \dfrac{\sin(4x)}{x}$

c) $h(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 1}$

d) $k(x) = \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2}$

Aufgabe 88

Zeigen Sie mittels Zwischenwertsatz, dass die Gleichung $\cos x = x$ mindestens eine Lösung hat. Berechnen Sie die Lösung mittels Taschenrechner und Wertetabelle auf mindestens 3 gültige Ziffern.

Aufgabe 89

Führen Sie für die gebrochen–rationale Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

eine Partialbruchzerlegung durch.

Aufgabe 90

Zerlegen Sie folgende rationale Funktionen ggf. jeweil additiv in ein Polynom und eine echt–gebrochen–rationale Funktion und führen Sie für den echt–gebrochen–rationalen Teil eine Partialbruchzerlegung durch:

a) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x^2 - 26x + 15}{x^2 - 2x - 15}$

b) $g(x) = \dfrac{2x^3 + 7x + 2}{(x^2+4)^2}$

c) $h(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 11}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$

d) $j(x) = \dfrac{3x^2 + 7}{x^3 + 3x^2 + 7x}$

e) $k(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 1}{x^4 + 3x^2 + 2}$

Aufgabe 91

Geben Sie die größte Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ an, auf der die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(3x^2y)^2}{x^8+y^4} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

stetig ist.

Aufgabe 92

Ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

im gesamten Definitionsbereich stetig?

Aufgabe 93

Skizzieren Sie folgende Vektorfelder:

a) $f : [0,3] \times [-2;2] \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}y\right) \end{pmatrix}$

b) $g : [-1,3]^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-2 \\ -y+1 \end{pmatrix}$

c) $h : [-3,3]^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $h(x,y) = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$

Aufgabe 94

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^3\sqrt{x^2+1} \\ f_2(x) &= \begin{cases} \sqrt{x^2+x+1} & \text{für } x \geqq 0 \\ x & \text{für } x < 0 \end{cases} \\ f_3(x) &= \begin{cases} x^2-2x+2 & \text{für } x \geqq 1 \\ e^{x-1} & \text{für } x < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die Funktionen differenzierbar?
b) Berechnen Sie gegebenenfalls die Differentialquotienten.

Aufgabe 95

Die kumulierte Nachfrage y nach Videorecordern in Abhängigkeit der Zeit $t \geqq 1$ wird durch die sogenannte Gompertz-Funktionsgleichung

$$y(t) \;=\; 10^7\, e^{-5(0{,}5)^t}$$

prognostiziert.

a) Skizzieren Sie die Funktion und geben Sie eine Interpretation.
b) Berechnen Sie die Sättigungsgrenze $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$.
c) Zeigen Sie, dass die Änderungsrate der Nachfrage für alle $t \geqq 1$ positiv und monoton fallend ist.
d) Zeigen Sie auch, dass die Nachfrage für $t \leqq 3$ elastisch und für $t \geqq 4$ unelastisch ist.

Aufgabe 96

Für eine Einproduktunternehmung wurden in Abhängigkeit des Produktionsniveaus $x > 0$ die Kosten durch $c(x) = 6x + 40$ und die Preis-Absatz-Beziehung gemäß $p(x) = 30 - 2x$ geschätzt.

a) Geben Sie die Gewinnfunktion g mit $g(x) = x \cdot p(x) - c(x)$ an und untersuchen Sie diese Funktion auf Monotonie und Konvexität.
b) Berechnen Sie den Bereich positiver Gewinne sowie das gewinnmaximale Produktionsniveau.
c) Bestimmen Sie das Produktionsniveau mit maximalem Stückgewinn.

Aufgabe 97

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \;=\; 5\left(e^{-\frac{x}{2}}\,(x-1) - 1\right)$$

auf Monotonie und Konvexität.

Bestimmen Sie außerdem alle Extremalstellen und Wendepunkte und skizzieren Sie den Verlauf der Funktion für $x \geqq 0$.

Aufgabe 98

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 1\,.$$

a) Berechnen Sie alle Extremalstellen und Wendepunkte.
b) Berechnen Sie die Funktion für $x = -1,\ 0,\ 0.5,\ 1,\ 2$ und skizzieren Sie $f(x)$.
c) Beschreiben Sie mit Hilfe von a) und b) das Monotonie- und das Konvexitätsverhalten der Funktion.

Aufgabe 99

Verwenden Sie die Definition des Differentialquotienten, um jeweils die 1. Ableitung folgender Funktionen zu bestimmen:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$
b) $g(x) = x^2 - 2x$
c) $h(x) = \sqrt{x}$

Aufgabe 100

Bei konstanter Temperatur T ist der Druck P in Abhängigkeit vom Volumen V durch die Beziehung

$$P = \frac{nRT}{V-nb} - \frac{an^2}{V^2}$$

gegeben. Dabei bezeichnen a, b, n und R Konstanten. Berechnen Sie $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V}$.

Aufgabe 101

Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen $f_i : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$:

a) $f_a(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$
b) $f_b(x) = x^x$
c) $f_c(x) = x^{x^x}$
d) $f_d(x) = (x-3)^x$

Aufgabe 102

Eine quaderförmige Kiste, deren oberes Ende geöffnet ist, soll aus einem quadratischen Blech mit der Seitenlänge a hergestellt werden. Dazu werden an den 4 Ecken des Blechs jeweils gleich große Quadrate mit Seitenlänge x ausgestanzt und die so entstandenen 4 Seitenrechtecke hochgeklappt um die Kiste zu formen. Wie groß muss x sein, so dass das Volumen der entstandenen Kiste maximal wird?

Aufgabe 103

Ein zylinderfömiger Ölbehälter soll einen Liter Flüssigkeit fassen. Der Behälter ist oben und unten komplett geschlossen. Wie müssen Höhe und Radius dimensioniert sein, so dass möglichst wenig Material verbraucht wird?

Aufgabe 104

Im Folgenden bedeutet $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ den Umsatz $u(x)$ in Abhängigkeit von der verkauften Stückzahl x und $k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ die Produktionskosten $k(x)$. Umsatz und Produktionskosten seien stetig differenzierbar. Daraus leitet sich die Gewinnfunktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = u(x) - k(x)$ ab. Die Ausdrücke $\frac{du}{dx}$ und $\frac{dk}{dx}$ bezeichnet man als den *Grenzumsatz* beziehungsweise die *Grenzkosten* beim Produktionsniveau x. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Maximaler Gewinn entsteht (sofern er existiert) bei einem Produktionsniveau x, bei dem Grenzumsatz und Grenzkosten übereinstimmen.

b) Beim Produktionsniveau x mit den niedrigsten Stückkosten (sofern es existiert) sind die Stückkosten und die Grenzkosten gleich hoch.

Aufgabe 105

Zwei Massen hängen nebeneinander an zwei Federn und haben in Abhängigkeit der Zeit t die vertikale Position

$$s_1(t) = 2\sin t \quad \text{und} \quad s_2(t) = \sin(2t)$$

a) Zu welchen Zeitpunkten $t > 0$ haben die Massen die gleiche Höhe?
b) Wann ist im Zeitintervall $[0;\ 2\pi]$ der Abstand der Massen am größten?

Hinweis: Es gilt $\sin(2t) = 2\sin t \cdot \cos t$ und $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$

Aufgabe 106

Verwenden Sie das Newtonsche Verfahren, um jeweils eine Nullstelle folgender Funktionen mit einer Abweichung von maximal $\pm 10^{-5}$ zu finden. Starten Sie das Verfahren jeweils im angegebenen Punkt x_0:

a) $f(x) = x^4 + x - 3, \quad x_0 = -1$

b) $g(x) = x - 1 - \frac{1}{2}\sin x, \quad x_0 = \frac{3}{2}$

Aufgabe 107

Berechnen Sie mit Newtons Verfahren den Schnittpunkt der beiden Funktionen $f(x) = 2x$ und $g(x) = \tan x$ im Intervall $(0; \pi/2)$.

Aufgabe 108

Suchen Sie mit der Newtonschen Methode die Nullstelle $\tilde{x} = 1$ der Funktion $f(x) = (x-1)^{40}$ vom Startpunkt 2 aus. Warum arbeitet das Verfahren in diesem Fall so schlecht?

Aufgabe 109

Berechnen Sie den Wert von $\sin(\frac{\pi}{4})$ mittels Taylorpolynom im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ auf 4 Stellen nach dem Komma genau.

Aufgabe 110

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die Potenzreihen $(p_n(x)),\ (q_n(x))$ mit

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{2}{3}(x-1)\right]^i, \quad q_n(x) = \sum_{i=0}^{n} i(x+1)^i \ ?$$

Aufgabe 111

Zur Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2^x$ bestimme man die Folge der Taylor–Polynome an der Stelle $x_0 = 0$ sowie den Konvergenzradius dieser Folge.

Aufgabe 112

Berechnen Sie im Entwicklungspunkt 0 die Potenzreihen von

a) $\ln(1 + x)$
b) $\sqrt{1 + x}$

(*Hinweis*: Der Konvergenzradius ist in beiden Fällen gleich 1, muss aber nicht berechnet werden)

Aufgabe 113

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$(1) \quad f(x) = a^2x^2 - 2a^2x + 1\,.$$

a) Mit $a \in \mathbb{R}$ ist zunächst eine Konstante charakterisiert. Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extremalstellen von f in Abhängigkeit von a.

b) Setzen Sie $a = x$ in der Funktionsgleichung (1), und geben Sie die daraus resultierende Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in Abhängigkeit von x an.

c) Diskutieren Sie das Monotonie- und das Konvexitätsverhalten von g.

d) Berechnen Sie die Funktionswerte $g(-1)$, $g(0)$, $g(0.5)$, $g(1)$, $g(1.5)$, $g(2)$ und skizzieren Sie die Funktion.

Aufgabe 114

Warum gilt der Satz von Schwarz bei folgender Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y) = 0 \\ \dfrac{xy^3 - x^3y}{x^2+y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

im Nullpunkt $(0,0)$ nicht?

Aufgabe 115

Bestimmen Sie alle Extremalstellen der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1,x_2,x_3) \;=\; x_1^3 + x_2^2 - 3x_1^2x_2 + x_3^2 \,.$$

Aufgabe 116

Für ein Produkt, das ein monopolistischer Anbieter auf den Markt bringen möchte, gelte die Preis-Absatz-Beziehung

$$x \;=\; 100 - p + \sqrt{q}\ ,$$

wobei p den Preis, x die Absatzquantität und q die Werbekosten bezeichnen. Ferner sind die Produktionskosten durch

$$c(x) \;=\; 40x + 500$$

gegeben.

a) Skizzieren Sie in der (x,q)-Ebene die Punktmenge, die zu einem positiven Preis führt.

b) Man berechne den Preis p, das Werbebudget q und die Absatzquantität x so, dass der Gewinn lokal maximal wird, und gebe den maximalen Gewinn an.

Aufgabe 117

Bestimmen Sie zur Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) \;=\; x^3 - x^2 \cdot \ln\left(y^2+1\right) - 3x$$

a) den Funktionswert $f(-1,0)$,
b) den Gradienten,
c) die Hesse–Matrix,
d) alle Nullstellen des Gradienten,
e) die Definitheitseigenschaft der Hesse–Matrix in jeder Nullstelle des Gradienten,
f) eine lokale Maximalstelle.

Aufgabe 118

Bei wellenförmigen vertikalen Auslenkungen $w \in \mathbb{R}$ in Abhängigkeit der Zeit $t \in \mathbb{R}$ gilt die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Dabei bezeichnet $c \in \mathbb{R}$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle und $x \in \mathbb{R}$ den horizontalen Abstand zum Ursprung. Zeigen Sie, dass alle folgenden Funktionen Lösungen der Wellengleichung sind:

a) $w = \sin(x+ct)$
b) $w = \sin(x+ct) + \cos(2x+2ct)$
c) $w = \ln(2x+2ct)$
d) $w = \tan(2x-2ct)$
e) $w = 5\cos(3x+3ct) + e^{x+ct}$

Aufgabe 119

a) Es sei $z : \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}$ mit $(x,y) \mapsto z(x,y)$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion mit maximalem Definitionsbereich. Bestimmen Sie $\frac{\partial z}{\partial x}$ im Punkt $(x,y,z) = (1,1,1)$, wenn für z gilt:

$$x^3z + z^3x - 2yz = 0$$

b) Es sei auch $x : \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}$ mit $(y,z) \mapsto x(y,z)$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion mit maximalem Definitionsbereich. Bestimmen Sie $\frac{\partial x}{\partial z}$ im Punkt $(x,y,z) = (1,-1,-3)$, wenn für x gilt:

$$xz + y\ln x - \frac{9}{z} = 0$$

Aufgabe 120

Berechnen Sie alle Extremwerte der Funktion $f : (0;\infty)^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = xy + 2x - \ln(x^2y)$$

Aufgabe 121

Bestimmen Sie die absoluten Maxima und Minima der folgenden Funktionen:

a) $f : [0,5] \times [-3,3] \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x$
b) $g : D \to \mathbb{R}$ mit $D = \{x \in \mathbb{R}_+^2 : y + 2x \le 2\}$ und $g(x,y) = x^2 + y^2$
c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y) = x^4 + \frac{1}{2}y^2 + 2xy$

Aufgabe 122

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt homogen vom Grad $m \in \mathbb{N}$, wenn für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$ die Gleichung $f(tx) = t^m f(x)$ erfüllt ist. Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ homogen vom Grad m, so gilt

$$(\nabla f(x))^T \cdot x = mf(x)$$

(*Hinweis*: Berechnen Sie $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}$ für $g(t) = f(tx)$, indem Sie x als konstant ansehen)

Aufgabe 123

Bestimmen Sie die Stammfunktionen der Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 mit:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= 2x + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \cos x + e^{-2x} \\
f_2(x) &= (x^2 + x)\cos x \\
f_3(x) &= \frac{x^2 - 1}{(x^3 - 3x + 2)^n} \quad \text{für} \quad n = 1, 2 \\
f_4(x) &= \frac{1}{x^3 - x} \\
f_5(x) &= x\sqrt{e^{x^2} + 1} \cdot e^{x^2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 124

Für die in Aufgabe 123 angegebenen Funktionen berechne man

$$\int_1^2 f_1(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_2(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_{-2}^{-4} f_4(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Aufgabe 125

Man berechne die bestimmten Integrale

$$\int_0^{2\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_0^{2\pi} |\,x\sin x\,|\,\mathrm{d}x$$

und interpretiere die erhaltenen Ergebnisse.

Aufgabe 126

Gegeben sei eine Grenzkostenfunktion

$$c'(x) = \begin{cases} 3 \cdot \sqrt{x} & \text{für} \quad x \in [0, 100] \\ 30 & \text{für} \quad x \in [100, 400] \\ \frac{600}{\sqrt{x}} & \text{für} \quad x \in [400, 900] \end{cases} .$$

Die fixen Kosten betragen $c(0) = 1000$.

Bestimmen Sie dazu eine stetige Gesamtkostenfunktion $c(x)$ und berechnen Sie die Gesamtkosten für $x = 100,\ x = 150$ und $x = 625$.

Aufgabe 127

Der momentane Umsatz eines Produktes zum Zeitpunkt t sei durch die Funktion $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit

$$u(t) = 1000(t+1)\,e^{-\frac{t}{2}}$$

gegeben.

a) Skizzieren Sie die Funktion u im Planungszeitraum $[0, 10]$ und berechnen Sie den Gesamtumsatz in $[0, T]$.

b) Ermitteln Sie den Gesamtumsatz für $T = 10$ und $T \to \infty$.

Aufgabe 128

Für ein Produkt sollen die Kosten- und Umsatzentwicklungen in Abhängigkeit der Zeit $t \geqq 0$ betrachtet werden. Dabei wurden für die Veränderung der Kosten $k(t)$ bzw. des Umsatzes $u(t)$ die Beziehungen folgendermaßen ermittelt:

$$k'(t) = \frac{\mathrm{d}k(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{100}{t+1} \quad \text{bzw.} \quad u'(t) = \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1000}{(t+1)^2} \qquad \text{für alle} \quad t \geqq 0$$

a) Zeigen Sie, dass die Kosten $k(t)$ und der Umsatz $u(t)$ für $t \geqq 0$ monoton wachsen, während der Gewinn $g(t) = u(t) - k(t)$ für $t \leqq 9$ monoton wächst und für $t \geqq 9$ monoton fällt.

b) Berechnen Sie die bestimmten Integrale

$$k_9 = \int_0^9 k'(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad u_9 = \int_0^9 u'(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad g_9 = u_9 - k_9$$

und interpretieren Sie diese Ergebnisse.

c) Zeigen Sie, dass es eine obere Integrationsgrenze $z \geqq 9$ mit $g_z = 0$ gibt (keine Berechnung erforderlich).

Aufgabe 129

Für den Verlauf des Absatzes $y(t)$ eines Produktes in Abhängigkeit der Zeit $t \geq 0$ wird die folgende Beziehung angenommen:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{c}{a} \cdot y(t) \cdot (a - y(t)) \qquad \text{mit} \quad y(t) \in \langle 0, a \rangle \;\forall t \tag{1}$$

a) Formen Sie diese Gleichung in eine Integralgleichung der Form

$$\int g(y)\,\mathrm{d}y = \int f(t)\,\mathrm{d}t$$

um und berechnen Sie daraus eine Funktion $y(t)$, die Gleichung (1) erfüllt.

b) Bestimmen Sie $y(t)$, wenn $a = 100,\ c = 1$ und $y(0) = 50$ gilt.

c) Skizzieren Sie die in b) erhaltene Funktion und interpretieren Sie Gleichung (1) mit Hilfe Ihrer Skizze.

Aufgabe 130

Für die Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen a und b gilt:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{mit} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Berechnen Sie das Volumen eines Fasses, desen Form durch die Rotation einer Ellipse um ihre große Achse entsteht, wobei die Polkappen des Rotationskörpers senkrecht zur Drehachse abgeschnitten werden. Die Höhe des Fasses sei 12 dm, sein größter Durchmesser 12 dm und der Durchmesser der beiden Bodenflächen 10 dm.

Aufgabe 131

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen:

a) $xy' = 4y + x^5$

b) $y' = y \cdot \tan x - 2 \cdot \sin x$ für $-\pi/2 < x < \pi/2$

c) $x^2 y' = 1 - y$ für $x < 0$

d) $xy' = -y + \mathrm{e}^x$ für $x > 0$

e) $y' = -y + x\mathrm{e}^{-x} + 1$

Aufgabe 132

Bestimmen Sie die Lösungen der angegebenen Anfangswertprobleme:

a) $y' = 2xy + x, \quad y(0) = 1$

b) $y' = \dfrac{1}{1-x}y + x - 1, \quad y(2) = 0$

c) $(x+1)y' = -(x+2)y + 2 \cdot \sin x, \quad y(0) = 2$

d) $y' = \dfrac{y}{x} + x^2, \quad y(1) = 1$

e) $y' = 2xy + 1, \quad y(0) = 0$