Statistik

für Betriebswirtschaft und internationales Management

Sommersemester 2015

HSA Statistik PLUS SS 2015 Sessionlist		
Datum	PLUS	Nr.
Dienstag, 17. März 2015	Einführung	1
Dienstag, 24. März 2015	univ. deskr. Stat., Konzentration	2
Dienstag, 31. März 2015	Konzentration	3
Dienstag, 7. April 2015	Ostern	
Dienstag, 14. April 2015	Korrelation, Preisindizes, Regression	4
Dienstag, 21. April 2015	Wahrscheinlichkeiten	5
Dienstag, 28. April 2015	diskrete Zufallsvariablen: Binomial, Hypergeo, Poisson	6
Dienstag, 5. Mai 2015	stetige ZV: Gleichtvtlg., Normalvtlg.	7
Dienstag, 12. Mai 2015	Verteilungsparameter, Schätzfunktionen	8
Dienstag, 19. Mai 2015	Punktschätzer, Konfidenzintervalle	9
Dienstag, 26. Mai 2015	Pfingsten	
Dienstag, 2. Juni 2015	Tests	10
Dienstag, 9. Juni 2015	multivariate Verfahren	11
Dienstag, 16. Juni 2015	multivariate Verfahren	12
Dienstag, 23. Juni 2015	WH,Puffer, evtl. Fragen zu Probeklausur	13
Dienstag, 30. Juni 2015	Prüfungszeit	

Prof. Dr. Stefan Etschberger
Hochschule Augsburg

$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

- Approximation für $B(n;p)$ und $\text{Hyp}(N;M;n)$
- Geeignet, wenn
  p klein $(\lessapprox 0{,}1)$, n groß $(\gtrapprox 50)$ und $np \lessapprox 10$.
- ⇒ „Verteilung der seltenen Ereignisse“
  (z.B. Anzahl 6-er pro Lottoausspielung)

„durchschnittliche“ Trefferzahl

- X ist poissonverteilt mit Parameter λ: $X \sim P(\lambda)$
- Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}, & \text{falls } x = 0,1,2,\ldots \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- $F(x)$ in Tabelle
- Überblick: Approximation

$$\text{Hyp}(N;M;n) \xrightarrow{p = \frac{M}{N}} B(n;p) \xrightarrow{\lambda = np = n\frac{M}{N}} P(\lambda)$$

Poissonverteilung: $X \sim P(\lambda)$, Tabelle der Verteilungsfunktionen

$x \setminus \lambda$	1.6	1.7	1.8	1.9	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3
0	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496	0.1353	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550	0.0498
1	0.5249	0.4933	0.4628	0.4338	0.4060	0.3796	0.3546	0.3309	0.3085	0.2873	0.2674	0.2487	0.2311	0.2146	0.1992
2	0.7834	0.7572	0.7306	0.7037	0.6767	0.6496	0.6227	0.5960	0.5697	0.5438	0.5184	0.4936	0.4695	0.4460	0.4232
3	0.9212	0.9068	0.8913	0.8747	0.8571	0.8387	0.8194	0.7994	0.7787	0.7576	0.7360	0.7141	0.6919	0.6696	0.6472
4	0.9763	0.9704	0.9636	0.9559	0.9474	0.9379	0.9275	0.9163	0.9041	0.8912	0.8774	0.8629	0.8477	0.8318	0.8153
5	0.9940	0.9920	0.9896	0.9868	0.9834	0.9796	0.9751	0.9700	0.9643	0.9580	0.9510	0.9433	0.9349	0.9258	0.9161
6	0.9987	0.9981	0.9974	0.9966	0.9955	0.9941	0.9925	0.9906	0.9884	0.9858	0.9828	0.9794	0.9756	0.9713	0.9665
7	0.9997	0.9996	0.9994	0.9992	0.9989	0.9985	0.9980	0.9974	0.9967	0.9958	0.9947	0.9934	0.9919	0.9901	0.9881
8	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9995	0.9994	0.9991	0.9989	0.9985	0.9981	0.9976	0.9970	0.9962
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9992	0.9989
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$x \setminus \lambda$	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5
0	0.0451	0.0408	0.0369	0.0334	0.0302	0.0273	0.0247	0.0224	0.0203	0.0183	0.0166	0.0150	0.0136	0.0123	0.0111
1	0.1847	0.1712	0.1586	0.1469	0.1359	0.1257	0.1162	0.1074	0.0992	0.0916	0.0845	0.0780	0.0719	0.0663	0.0611
2	0.4012	0.3799	0.3594	0.3397	0.3209	0.3028	0.2854	0.2689	0.2531	0.2381	0.2238	0.2102	0.1974	0.1852	0.1736
3	0.6248	0.6025	0.5803	0.5584	0.5366	0.5152	0.4942	0.4735	0.4533	0.4335	0.4142	0.3954	0.3772	0.3595	0.3423
4	0.7982	0.7806	0.7626	0.7442	0.7255	0.7064	0.6872	0.6679	0.6484	0.6288	0.6093	0.5898	0.5704	0.5512	0.5321
5	0.9057	0.8946	0.8829	0.8706	0.8576	0.8441	0.8301	0.8156	0.8006	0.7851	0.7693	0.7532	0.7367	0.7199	0.7029
6	0.9612	0.9554	0.9490	0.9422	0.9347	0.9267	0.9182	0.9091	0.8995	0.8893	0.8787	0.8675	0.8558	0.8437	0.8311
7	0.9858	0.9832	0.9802	0.9769	0.9733	0.9692	0.9648	0.9599	0.9546	0.9489	0.9427	0.9361	0.9290	0.9214	0.9134
8	0.9953	0.9943	0.9931	0.9917	0.9901	0.9883	0.9863	0.9840	0.9815	0.9786	0.9755	0.9721	0.9683	0.9642	0.9598
9	0.9986	0.9982	0.9978	0.9973	0.9967	0.9960	0.9952	0.9942	0.9931	0.9919	0.9905	0.9889	0.9871	0.9851	0.9829
10	0.9996	0.9995	0.9994	0.9992	0.9990	0.9987	0.9984	0.9981	0.9977	0.9972	0.9966	0.9959	0.9952	0.9943	0.9933
11	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9991	0.9989	0.9986	0.9983	0.9980	0.9976
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9992
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Poisson-Verteilung: Beispiel

Beispiel

- $X \sim B(10\,000; 0{,}0003)$; In Tabelle der Binomialverteilung nicht vertafelt! Approximation:

$$\left.\begin{aligned} p &= 0{,}0003 < 0{,}1 \\ n &= 10\,000 > 50 \\ np &= 3 \qquad\ < 10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow B(10\,000; 0{,}0003) \approx P(3)$$

- Mithilfe der Wahrscheinlichkeitsfunktion:

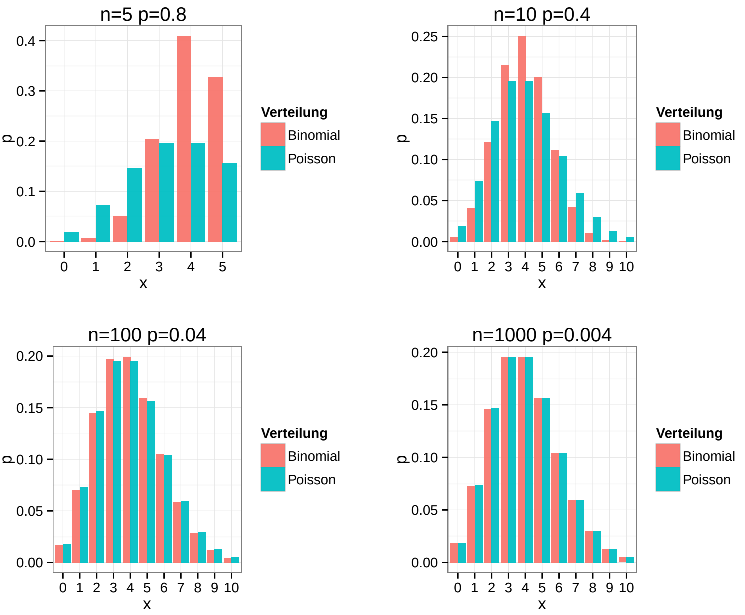
$$P(X = 5) = \frac{3^5}{5!} \cdot e^{-3} = 0{,}1008188$$

- Mithilfe der Tabelle der Poissonverteilung:

$$P(X = 5) = F(5) - F(4) = 0{,}9161 - 0{,}8153 = 0{,}1008$$

- Exakter Wert: $P(X = 5) = 0{,}1008239$

Poisson- versus Binomialverteilung: Vergleich

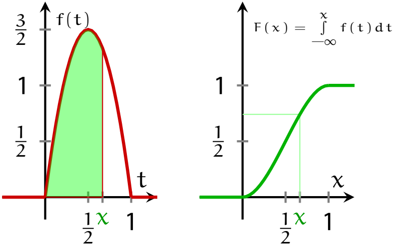


Stetige Zufallsvariablen

- X heißt stetig, wenn $F(x)$ stetig ist.
- Dann existiert ein $f(t)$ mit:

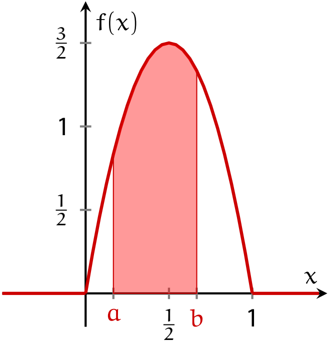
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$f(x)$ heißt Dichtefunktion von X.



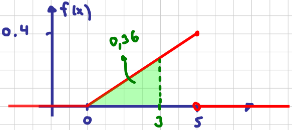
- Dann:

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P(a \leqq X < b) \\ &= P(a < X \leqq b) \\ &= P(a \leqq X \leqq b) \\ &= \int_a^b f(x)\,dx \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$



Beispiel:

Dichte: $f(x) = \begin{cases} ax & \text{für } 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



gesucht: a, so dass $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^5 ax\,dx = \left[\frac{a}{2}x^2\right]_0^5$$

$$= \frac{a}{2}\cdot 5^2 - \frac{a}{2}\cdot 0^2 = \frac{25}{2}a = 1$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{2}{25}$$

$$P(X \leq 3) = \int_0^3 \frac{2}{25}x\,dx = \frac{1}{25}\cdot 3^2 - \frac{1}{25}\cdot 0^2$$

$$= \frac{9}{25} = 0{,}36$$

Eigenschaften der Dichtefunktion

- $f(x) \geqq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- Wegen $F(\infty) = 1$ muss stets gelten:

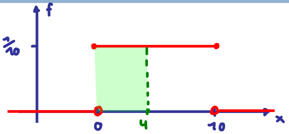
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

- $P(X = x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- $f(x) > 1$ ist möglich
- für $x \in \mathbb{R}$ ist $F(x)$ differenzierbar $\Rightarrow F'(x) = f(x)$.
- Intervallgrenzen spielen keine Rolle:

$$\begin{aligned} P(X \in [a;b]) &= P(X \in (a;b]) \\ &= P(X \in [a;b)) \\ &= P(X \in (a;b)) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Dichtefunktion: Beispiel

Beispiel



$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad x < 0 \\ \frac{1}{10}, & \text{falls} \quad 0 \leq x \leq 10 \\ 0, & \text{falls} \quad x > 10 \end{cases}$$

$P(X \leq 4) = \int_{-\infty}^{4} f(x)\,dx$

$= \int_0^4 \frac{1}{10}\,dx = \left[\frac{1}{10}x\right]_0^4$

$= \frac{4}{10} = 0{,}4$

$P(1 \leq X \leq 7{,}5)$

$= \int_1^{7.5} \frac{1}{10}\,dx = \frac{1}{10}\left[x\right]_1^{7.5}$

$= \frac{1}{10}(7.5 - 1) = 0.65$

$P(1 \leq X \leq 12)$

$= \int_1^{12} f(x)\,dx = \int_1^{10} \frac{1}{10}\,dx$

$= 0{,}9$

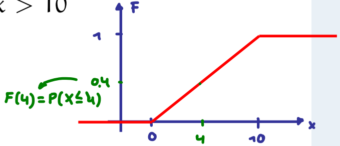
Verteilungsfunktion:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{10}\,dt = \left[\frac{t}{10}\right]_0^x = \frac{x}{10} \Rightarrow$$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad x < 0 \\ \frac{x}{10}, & \text{falls} \quad 0 \leq x \leq 10 \\ 1, & \text{falls} \quad x > 10 \end{cases}$$

$= \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ \frac{1}{10}x & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 10 \\ 1 & \text{für} \quad x > 10 \end{cases}$

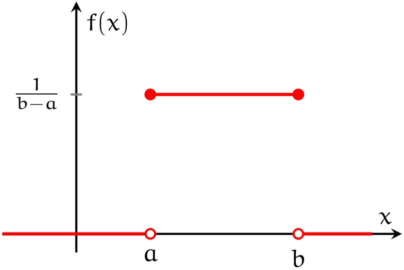


Gleichverteilung

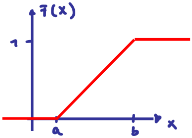
Eine Zufallsvariable X mit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{falls } a \leqq x \leqq b \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt gleichverteilt im Intervall $[a; b]$.



- Verteilungsfunktion der Gleichverteilung:



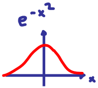
$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad, & \text{falls} \qquad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{falls} \quad a \leqq x \leqq b \\ 1 \quad, & \text{falls} \qquad x > b \end{cases}$$

- **Beispiel:** X gleichverteilt in $[1;20]$

$$P(2 \leqq X \leqq 12) = F(12) - F(2) = \frac{12-1}{20-1} - \frac{2-1}{20-1}$$
$$= \frac{12-2}{20-1} = \frac{10}{19}$$
$$= 0{,}5263$$

Eine Zufallsvariable X mit einer Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



und $\sigma > 0$ heißt normalverteilt.

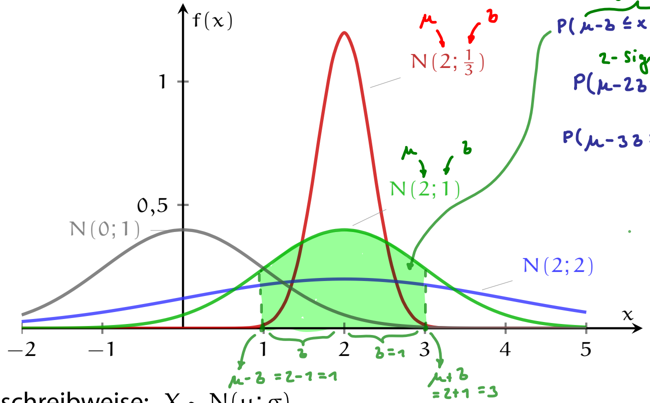
1-Sigma-Bereich

$P(\mu-\sigma \leq x \leq \mu+\sigma) \approx 0{,}68$

2-Sigma-Bereich

$P(\mu-2\sigma \leq x \leq \mu+2\sigma) \approx 0{,}95$

$P(\mu-3\sigma \leq x \leq \mu+3\sigma) \approx 0{,}998$

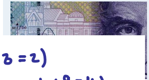


Kurzschreibweise: $X \sim N(\mu; \sigma)$

Normalverteilung: Gaußkurve

Normalverteilung

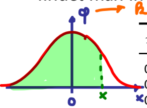
C.F. Gauß



Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung

„großes Phi" $X \sim N(\mu = 0;\ \sigma = 1)$

Dabei bedeutet $\Phi(x)$ zum Beispiel: $\Phi(2{,}13) = \Phi(2{,}1 + 0{,}03) = 0{,}9834$. Diesen Wert findet man in der Zeile mit $x_1 = 2{,}1$ und der Spalte mit $x_2 = 0{,}03$.



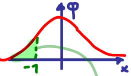
$X \sim N(0;1)$

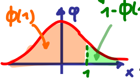
$P(X \leq 2{,}00)$
$= 0{,}9773$

$P(X \leq 1{,}34)$
$= 0{,}9099$

$P(X > 2)$
$= 1 - P(X \leq 2)$
$= 1 - 0{,}9773$

$P(X \leq -1)$
$= \Phi(-1)$
$= 1 - \Phi(1)$





$x_1 \setminus x_2$	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5754
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6737	0.6773	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7020	0.7054	0.7089	0.7123	0.7157	0.7191	0.7224
0.6	0.7258	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7518	0.7549
0.7	0.7580	0.7612	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7882	0.7910	0.7939	0.7967	0.7996	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8290	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8414	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8532	0.8554	0.8577	0.8599	0.8622
1.1	0.8643	0.8665	0.8687	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9083	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9193	0.9207	0.9222	0.9237	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9358	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9430	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9485	0.9495	0.9505	0.9516	0.9526	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9600	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9679	0.9686	0.9693	0.9700	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9914	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9933	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9975	0.9975	0.9976	0.9977	0.9978	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9983	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

$X \sim N(\mu = 5;\ \sigma = 2)$

$P(X \leq 9) = F(9) = \Phi\left(\frac{9-\mu}{\sigma}\right)$

$= \Phi\left(\frac{9-5}{2}\right) = \Phi(2) \approx 0{,}9773$

$P(8 \leq X \leq 9) = F(9) - F(8)$

$= \Phi\left(\frac{9-5}{2}\right) - \Phi\left(\frac{8-5}{2}\right)$

$= \Phi(2) - \Phi(1{,}5)$

$\approx 0{,}9773 - 0{,}9332 = 0{,}0441$

Beispiel: Gegeben: $X \hat{=}$ „Gewicht Mensaportion" für bestimmtes Gericht

Annahme: X ist normalverteilt

① $P(X \geq 600g) = 0{,}02$

② $P(X \leq 350g) = 0{,}30$

gesucht: μ, σ

①: $P(X \geq 600) = 1 - F(600) = 1 - \Phi\left(\frac{600-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}02$

② $P(X \leq 350) = F(350) = \Phi\left(\frac{350-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}3$

Tabelle

① $\Phi\left(\frac{600-\mu}{\sigma}\right) = 0.98 \iff \frac{600-\mu}{\sigma} \approx 2{,}05$

② $\Phi\left(\frac{\mu-350}{\sigma}\right) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7 \iff \frac{\mu-350}{\sigma} \approx 0{,}52$

① + ②: $250 = 2{,}57\sigma \iff \sigma = \frac{250}{2{,}57} \approx 97{,}28$

in ①: $600 - \mu = 2{,}05 \cdot 97{,}28 \iff \mu = 600 - 2{,}05 \cdot 97{,}28$

$\iff X \sim N(\mu \approx 400{,}58\ ;\ \sigma \approx 97{,}28)$

Eigenschaften der Normalverteilung

- Dichte ist symmetrisch zu μ:

$$f(\mu - x) = f(\mu + x)$$

➠ μ ist Lage-, σ ist Streuungsparameter

- Standardnormalverteilung:
  $N(0; 1)$ mit Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ ($\rightarrow$ Tabelle 3)
- Kenntnis von $\Phi(x)$, μ und σ genügt, denn:
  $X \sim N(\mu; \sigma) \iff \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0; 1) \quad \Rightarrow$

$$\boxed{F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$$

- Tabelle enthält nur positive x: Deswegen

$$\boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}$$

Normalverteilung: Beispiel

Beispiel:

Projektdauer $X \sim N(39; 2)$.

Wahrscheinlichkeit für Projektdauer zwischen 37 und 41 Wochen?

Lösung:

$$
\begin{aligned}
P(37 \leqq X \leqq 41) &= F(41) - F(37) \\
&= \Phi\left(\tfrac{41-39}{2}\right) - \Phi\left(\tfrac{37-39}{2}\right) \\
&= \Phi(1) - \Phi(-1) \\
&= \Phi(1) - [1 - \Phi(1)] \\
&= 2 \cdot \Phi(1) - 1 \\
&= 2 \cdot 0{,}8413 - 1 \\
&= 0{,}6826
\end{aligned}
$$