Statistik

für Betriebswirtschaft und internationales Management

Sommersemester 2015

Prof. Dr. Stefan Etschberger
Hochschule Augsburg

Aufgabe 65

Schokoladennikoläuse mit einem Sollgewicht von 200g sollen bzgl. ihres Gewichts kontrolliert werden. Es stellt sich heraus, dass

- das Gewicht X der Nikoläuse normalverteilt ist,
- die Wahrscheinlichkeit, dass ein Nikolaus mindestens 200g wiegt bei 30 % liegt und
- ein Nikolaus mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % höchstens 210g wiegt.

Berechnen Sie bzw. geben Sie ohne Rechnung aber mit Begründung an:

a) Wie groß ist die Standardabweichung σ sowie der Erwartungswert μ von X?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zufällig einen Nikolaus mit einem Gewicht von exakt 200g ($\pm$0g) auszuwählen?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Nikolaus weniger als 190g wiegt?
d) Nikoläuse mit weniger als 195g werden aussortiert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Nikolaus aus diesem Ausschuss zwischen 190g und 195g wiegt?

$X \hat{=}$ Gewicht eines Schokonikolaus

$X \sim N(\mu; \sigma)$; $P(X \geq 200) = 0{,}3$; $P(X \leq 210) = 0{,}99$

a) $P(X \geq 200) = 1 - P(X \leq 200) = 1 - F(200)$

$= 1 - \Phi\left(\frac{200-\mu}{\sigma}\right) = 0.3 \iff \Phi\left(\frac{200-\mu}{\sigma}\right) = 0.7$ (1)

$P(X \leq 210) = \Phi\left(\frac{210-\mu}{\sigma}\right) = 0.99$ (2)

(1) $\frac{200-\mu}{\sigma} \approx 0{,}52$

(2) $\frac{210-\mu}{\sigma} \approx 2{,}33$

(2) − (1): $10 \approx \sigma(2{,}33 - 0{,}52)$

$\iff \sigma \approx 5{,}525$

in (1) $\mu \approx 200 - 0.52 \cdot 5{,}525$

$\approx 197{,}127$

b) $P(X = 200) = 0$

c) $P(X < 190) = F(190) = \Phi\left(\frac{190-\mu}{\sigma}\right) \approx \Phi(-1{,}29)$

$= 1 - \Phi(1{,}29) \approx 1 - 0{,}90147$

$= 0{,}09853$

$$P(190 \leq X \leq 195 \mid X \leq 195)$$

$$= \frac{P(190 \leq X \leq 195)}{P(X \leq 195)} = \frac{F(195) - F(190)}{F(195)}$$

$$= 1 - \frac{F(190)}{F(195)} \approx 1 - \frac{0{,}09853}{\Phi\Big(\underbrace{\tfrac{195-\mu}{\sigma}}_{\approx -0{,}38}\Big)} \approx 1 - \frac{0{,}09853}{1 - 0{,}64803}$$

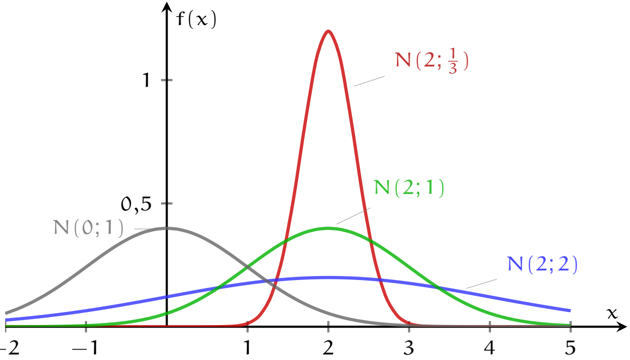
$$\approx 0{,}7201$$

$x_1 \backslash x_2$	0	0.01	0.02	0.03
0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381
1	0.84134	0.84375	0.84614	0.84850
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320
2	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010

Eine Zufallsvariable X mit einer Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

und $\sigma > 0$ heißt normalverteilt.



Kurzschreibweise: $X \sim N(\mu; \sigma)$

Normalverteilung: Gaußkurve

Normalverteilung

C.F. Gauß

Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung

1. Einführung
2. Deskriptive Statistik
3. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
4. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Dabei bedeutet $\Phi(x)$ zum Beispiel: $\Phi(2{,}13) = \Phi(2{,}1 + 0{,}03) = 0{,}9834$. Diesen Wert findet man in der Zeile mit $x_1 = 2{,}1$ und der Spalte mit $x_2 = 0{,}03$.

$x_1 \backslash x_2$	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5754
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6737	0.6773	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7020	0.7054	0.7089	0.7123	0.7157	0.7191	0.7224
0.6	0.7258	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7518	0.7549
0.7	0.7580	0.7612	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7882	0.7910	0.7939	0.7967	0.7996	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8290	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8414	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8532	0.8554	0.8577	0.8599	0.8622
1.1	0.8643	0.8665	0.8687	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9083	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9193	0.9207	0.9222	0.9237	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9358	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9430	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9485	0.9495	0.9505	0.9516	0.9526	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9600	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9679	0.9686	0.9693	0.9700	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0.9767
2	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9914	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9933	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9975	0.9975	0.9976	0.9977	0.9978	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9983	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995

Eigenschaften der Normalverteilung

- Dichte ist symmetrisch zu μ:

$$f(\mu - x) = f(\mu + x)$$

➡ μ ist Lage-, σ ist Streuungsparameter

- Standardnormalverteilung:
  $N(0;1)$ mit Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ ($\rightarrow$ Tabelle 3)
- Kenntnis von $\Phi(x)$, μ und σ genügt, denn:
  $X \sim N(\mu;\sigma) \iff \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0;1) \quad \Rightarrow$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

- Tabelle enthält nur positive x: Deswegen

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Normalverteilung: Beispiel

Beispiel:

Projektdauer $X \sim N(39; 2)$.

Wahrscheinlichkeit für Projektdauer zwischen 37 und 41 Wochen?

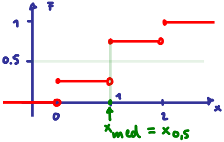
Lösung:

$$
\begin{aligned}
P(37 \leqq X \leqq 41) &= F(41) - F(37) \\
&= \Phi\left(\tfrac{41-39}{2}\right) - \Phi\left(\tfrac{37-39}{2}\right) \\
&= \Phi(1) - \Phi(-1) \\
&= \Phi(1) - [1 - \Phi(1)] \\
&= 2 \cdot \Phi(1) - 1 \\
&= 2 \cdot 0{,}8413 - 1 \\
&= 0{,}6826
\end{aligned}
$$

a) Modus x_{Mod}: $f(x_{\text{Mod}}) \geqq f(x)$ für alle x
(i.A. nicht eindeutig, z.B. Gleichverteilung)

Beispiele:

- Normalverteilung: $x_{\text{Mod}} = \mu$
- Diskrete Verteilung mit:



x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$F(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

$\Rightarrow x_{\text{Mod}} = 1$

b) Median x_{Med}: $F(x_{\text{Med}}) = \frac{1}{2}$ bzw. kleinstes x mit $F(x) > \frac{1}{2}$

Beispiele:

- Normalverteilung: $x_{\text{Med}} = \mu$
- Diskrete Verteilung
  oben: $F(0) = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, $F(1) = \frac{3}{4} > \frac{1}{2} \Rightarrow x_{\text{Med}} = 1$

$x_1 \setminus x_2$	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147
1	0.84134	0.84375	0.84614	0.84850	0.85083	0.85314	0.85543
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500

c) **α-Fraktil** x_α: $F(x_\alpha) = \alpha$ (für stetige Verteilungen)

μ σ

Beispiel: $X \sim N(0;1)$, $Y \sim N(3;2)$

$$\begin{aligned}
x_{0,975} &= & 1{,}96 \quad &\text{(Tab. 3)}\\
x_{0,025} &= -x_{0,975} &= -1{,}96&\\
y_{0,025} &= 2 \cdot \underbrace{x_{0,025}}_{-1{,}96} + 3 &= -0{,}92&
\end{aligned}$$

```
qnorm(0.025, mean = 3, sd = 2)
[1] -0.919928
```

Hinweise:

- $x_{\text{Med}} = x_{0,5}$
- Wenn x_α nicht vertafelt $\to$ Interpolation:

$$x_\alpha \approx x_a + (x_b - x_a) \cdot \frac{\alpha - a}{b - a}$$

mit a : größte vertafelte Zahl $< \alpha$
b : kleinste vertafelte Zahl $> \alpha$

Beispiel: $X \sim N(0;1)$; $x_{0,6} \approx$
$0{,}25 + (0{,}26 - 0{,}25) \cdot \frac{0{,}6 - 0{,}5987}{0{,}6026 - 0{,}5987} = 0{,}2533$

deskriptive Statistik: arithmetisches Mittel

$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum f_i \cdot a_i$ → Ausprägungen; f_i → rel. Häufigk.

d) Erwartungswert $E(X)$ bzw. μ:

Wahrscheinlichkeiten

$$E(X) = \begin{cases} \sum_i x_i \overbrace{f(x_i)}^{\text{Wahrscheinlichkeiten}}, & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \underbrace{f(x)}_{\text{Dichte}} \, dx, & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

Dichte

$X_i \sim \begin{cases} 1 & \text{mit W. } 0.8 \\ 2 & \text{mit W. } 0.2 \end{cases}$

$E[X_i] = 1 \cdot 0.8 + 2 \cdot 0.2 = 1{,}2$

$P\left(\lim_{n \to \infty} \left| \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right) - E[X_i] \right| > \varepsilon\right) = 0$

Beispiel: Diskrete Verteilung mit

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \quad E(X) = 0 \cdot \tfrac{1}{4} + 1 \cdot \tfrac{1}{2} + 2 \cdot \tfrac{1}{4} = 1$$

Beispiel: Für eine exponentialverteilte Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{für } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{folgt}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \, dx = \lambda \int_0^{\infty} x \cdot e^{-\lambda x} \, dx = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x} - \int_0^{\infty} 1 \cdot \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right) dx \right]$$

$$= -x e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = -0 - \left(-0 - \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda}$$

Beispiel: $X \sim B(n=2;\ p)$

gesucht: $E[X] = \overset{x_i}{0} \cdot \overbrace{\binom{2}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^2}^{f(x_i)}$

$+ 1 \cdot \binom{2}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^1$

$+ 2 \cdot \binom{2}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^0$

$= 2 \cdot p \cdot (1-p) + 2p^2 = 2p - 2p^2 + 2p^2$

$= 2p$

[allgemein: $X \sim B(n;p) \Rightarrow E[X] = np$]

Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{a^2} \cdot x & \text{für } 0 \le x \le a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ges: $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_0^a x \cdot \frac{2}{a^2} \cdot x\,dx$

$= \frac{2}{a^2} \int_0^a x^2\,dx = \frac{2}{a^2} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^a = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a^2} (a^3 - 0^3)$

$= \frac{2}{3} a$

Beispiel: 2-dimensionale Vtlg.

y \ x	-1	0	2	
0	0.3	0.05	0.05	0.4
1	0	0.2	0	0.2
2	0	0.1	0.3	0.4
	0.3	0.35	0.35	

ges: $\rho[X,Y]$

dazu: $E[X \cdot Y]$, $E[X]$, $E[Y]$, $E[X^2]$, $E[Y^2]$

$E[X] = -1 \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.35 + 2 \cdot 0.35 = 0.4$

$E[Y] = 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.4 = 1.0$

$E[X^2] = (-1)^2 \cdot 0.3 + 0^2 \cdot 0.35 + 2^2 \cdot 0.35 = 1.7$

$E[Y^2] = 0^2 \cdot 0.4 + 1^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.4 = 1.8$

$E[X \cdot Y] = -1 \cdot 0 \cdot 0.3 + 0 \cdot 0 \cdot 0.05 + 2 \cdot 0 \cdot 0.05$
$+ (-1) \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 1 \cdot 0$
$+ -1 \cdot 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \cdot 0,1 + 2 \cdot 2 \cdot 0.3$
$= 1,2$

$Var[X] = E[X^2] - E^2[X] = 1,7 - 0.4^2 = 1,54$

$Var[Y] = E[Y^2] - E^2[Y] = 1,8 - 1.0^2 = 0.8$

$Cov[X,Y] = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y]$
$= 1,2 - 0.4 \cdot 1.0 = 0.8$

$\rho[X,Y] = Cov[X,Y] / \sqrt{Var[X] \cdot Var[Y]}$
$= 0,8 / \sqrt{1,54 \cdot 0.8} \approx 0,721$

Rechenregeln für den Erwartungswert

- Ist f symmetrisch bzgl. a, so gilt $E(X) = a$
  Beispiel: f der Gleichverteilung symmetrisch bzgl. $\frac{a+b}{2} \Rightarrow E(X) = \frac{a+b}{2}$
- Lineare Transformation:

$$\boxed{E(a + bX) = a + b \cdot E(X)}$$

- Summenbildung:

$$\boxed{E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)}$$

Beispiel: X gleichverteilt in $[0;10]$, $Y \sim N(1;1)$; $Z = X + 5Y$

$$E(Z) = E(X+5Y) = E(X) + E(5Y) = E(X) + 5 \cdot E(Y) = \frac{10+0}{2} + 5 \cdot 1 = 10$$

- Unabhängigkeit:

$$X,\ Y \text{ unabhängig} \Rightarrow E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

Streuungsparameter

deskriptive Stat.:
Mittlere quadr. Abw.
$\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2$

- Varianz $\text{Var}(X)$ bzw. σ^2:

$$\text{Var}(X) = E([X - E(X)]^2) = \begin{cases} \sum\limits_i [x_i - E(X)]^2 f(x_i), & \text{wenn } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f(x)\, dx, & \text{wenn } X \text{ stetig} \end{cases}$$

- Standardabweichung $\text{Sta}(X)$ bzw. σ: $\quad \text{Sta}(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$

Beispiel: Diskrete Verteilung

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

:

$$\text{Var}(X) = (0-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + (1-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + (2-1)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Beispiel: Für eine exponentialverteilte Zufallsvariable X (Dichte siehe Erwartungswert) folgt

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X)) f(x)\, dx = \lambda \int_0^{\infty} \left(x - \tfrac{1}{\lambda}\right)^2 \cdot e^{-\lambda x}\, dx \\ &= e^{-\lambda x}\left(-x^2 + \tfrac{2x}{\lambda} - \left(\tfrac{1}{\lambda}\right)^2 - \tfrac{2}{\lambda^2} - \tfrac{2x}{\lambda} + \tfrac{2}{\lambda^2}\right)\Big|_0^{\infty} \\ &= 0 - \left(-0^2 - \left(\tfrac{1}{\lambda}\right)^2\right) = \frac{1}{\lambda^2}\end{aligned}$$

Rechenregeln für die Varianz

- Verschiebungssatz:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2$$

Beispiel: Diskrete Verteilung

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X^2) &= 0^2 \cdot \tfrac{1}{4} + 1^2 \cdot \tfrac{1}{2} + 2^2 \cdot \tfrac{1}{4} \\ &= \tfrac{3}{2} \\ \Rightarrow \quad \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 &= \tfrac{3}{2} - 1^2 = \tfrac{1}{2} = \mathrm{Var}(X) \end{aligned}$$

- Lineare Transformation:

$$\mathrm{Var}(a + bX) = b^2\,\mathrm{Var}(X)$$

- Summenbildung gilt nur, wenn die X_i unabhängig! Dann:

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)$$

Erwartungswerte und Varianzen wichtiger Verteilungen

Verteilung von X	$E(X)$	$Var(X)$
Binomialverteilung $B(n; p)$	np	$np(1-p)$
Hypergeometrische Verteilung mit den Parametern N, M, n	$n\frac{M}{N}$	$n\frac{M}{N}\frac{N-M}{N}\frac{N-n}{N-1}$
Poisson-Verteilung $P(\lambda)$	λ	λ
Gleichverteilung in $[a; b]$ mit $a < b$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Normalverteilung $N(\mu; \sigma)$	μ	σ^2

Anwendung: Ungleichung von Tschebyschow

- Für beliebige Zufallsvariablen X und $\varepsilon > 0$ gilt die Ungleichung von Tschebyschow:

$$P\left(|X - E[X]| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathrm{Var}[X]}{\varepsilon^2}$$

beliebige Zahl > 0
meistens klein

Beispiele:

- X ist gleichverteilt mit Parametern a, b und $\varepsilon = \frac{1}{3}(a-b)$, also $E[X] = \frac{1}{2}(a+b)$ und $\mathrm{Var}[X] = \frac{1}{12}(a-b)^2$

$$\Rightarrow P\left(\left|X - \tfrac{1}{2}(a+b)\right| \geqslant \tfrac{1}{3}(a-b)\right) \leqslant \frac{(a-b)^2}{12} \cdot \frac{3^2}{(a-b)^2} = 3/4$$

- $X \sim B(100; 0{,}2)$ und $\varepsilon = 10$
  damit: $E[X] = 100 \cdot 0{,}2 = 20$ und $\mathrm{Var}[X] = 100 \cdot 0{,}2 \cdot (1 - 0{,}2) = 16$

$$\Rightarrow P\left(|X - 20| \geqslant 10\right) \leqslant \frac{16}{10^2} = 0{,}16$$

Kovarianz und Korrelation

- **Kovarianz:**

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X,Y) &= E[(X-E(X))(Y-E(Y))]\\ &= E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)\\ &\text{(Verschiebungssatz)}\end{aligned}$$

- **Korrelationskoeffizient:**

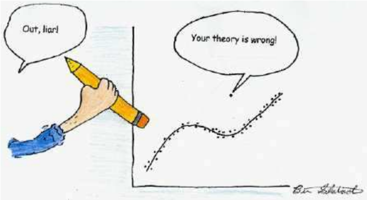
deskriptive Statistik:
Bravais-Pearson-Korr.koeff. r

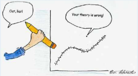
$$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)\cdot\operatorname{Var}(Y)}}$$

„rho"

- **Bemerkungen:**
  - ρ ist r nachgebildet $\Rightarrow \rho\in[-1;1]$
  - $|\rho|=1 \iff Y=a+bX$ (mit $b\neq 0$)
  - $\rho=0 \iff X, Y$ **unkorreliert**
- Varianz einer Summe zweier ZV:

$$\operatorname{Var}(X+Y)=\operatorname{Var}(X)+\operatorname{Var}(Y)+2\operatorname{Cov}(X,Y)$$


Out, liar!
Your theory is wrong!



- Vollerhebung of unmöglich,
- Deshalb: Beobachte Teilgesamtheit und schließe auf Grundgesamtheit

Beispiel

Warensendung von 1000 Stück; darunter M Stück Ausschuss.
M ist unbekannt.
$\rightarrow$ Zufällige Entnahme von $n = 30$ Stück („Stichprobe“).
Darunter 2 Stück Ausschuss.
Denkbare Zielsetzungen:

- Schätze M durch eine Zahl (z.B. $\frac{2}{30} \cdot 1000 = 66{,}67$)
- Schätze ein Intervall für M (z.B. $M \in [58; 84]$)
- Teste die Hypothese, dass $M > 50$ ist.