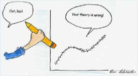
# Statistik

**für Betriebswirtschaft und internationales Management**

Sommersemester 2015

Prof. Dr. Stefan Etschberger
Hochschule Augsburg



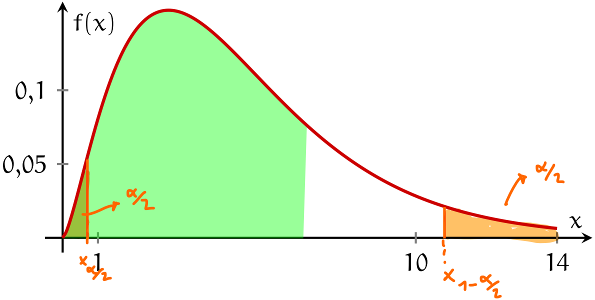


## Chi-Quadrat-Verteilung

- Sind $X_1, \ldots, X_n$ iid $N(0;1)$-verteilte Zufallsvariablen, so wird die Verteilung von

$$Z = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

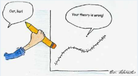
als Chi-Quadrat-Verteilung mit $n$ Freiheitsgraden bezeichnet.




- Kurzschreibweise: $Z \sim \chi^2(n)$
- **Beispiel:** $\chi^2(30)$: $x_{0,975} = 46{,}98$

# Konfidenzintervall für $\sigma^2$ bei Normalverteilung







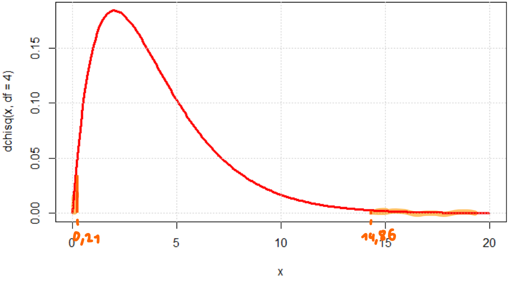
## Vorgehensweise

1. Festlegen eines Konfidenzniveaus $1 - \alpha$
2. Bestimmung der $\frac{\alpha}{2}$- bzw. $(1 - \frac{\alpha}{2})$-Fraktile ($c_1$ bzw. $c_2$) der $\chi^2(n-1)$-Verteilung
3. Aus der Stichprobe: Berechnung der Größe

$$(n-1)s^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2$$

4. Berechnung des Konfidenzintervalls

$$\left[ \frac{(n-1)s^2}{c_2} ; \frac{(n-1)s^2}{c_1} \right]$$




**Beispiel:**

$G \sim N(\mu;\sigma)$;

$(x_1,\ldots,x_5) = (1, 1.5, 2.5, 3, 2)$

Gesucht: KI für $\sigma^2$ zum Konfidenzniveau $1-\alpha = 0{,}99$

1. $1-\alpha = 0{,}99$
2. $\chi^2(5-1):\ c_1 = x_{\frac{\alpha}{2}} = x_{0{,}005} = 0{,}21$

   $c_2 = x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{0{,}995} = 14{,}86$
3. $\bar{x} = \frac{1}{5}(1+1{,}5+2{,}5+3+2) = 2$

   $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - 5\cdot\bar{x}^2 = 1^2 + 1{,}5^2 + 2{,}5^2 + 3^2 + 2^2 - 5\cdot 2^2 = 2{,}5$

   $(n-1)s^2$ : TR : Mode - STAT - 1-Var
   Daten : 1, 1.5, ...
   AC - Shift - STAT - Var
   $(n-1)\cdot s^2$
4. $KI = \left[\frac{2{,}5}{14{,}86};\frac{2{,}5}{0{,}21}\right] = [0{,}17;11{,}9]$ → Konfidenzintervall für Varianz

   [0.41 ; 3,45] → KI für Standardabweichung [ $s = \sqrt{s^2}$ ]

(Extrem groß, da $n$ klein.)

Quellen
Tabellen

Umfrage: Alter von Vätern von 2. Sem. Studenten
ges: KI für Standardabweichung $\sigma$

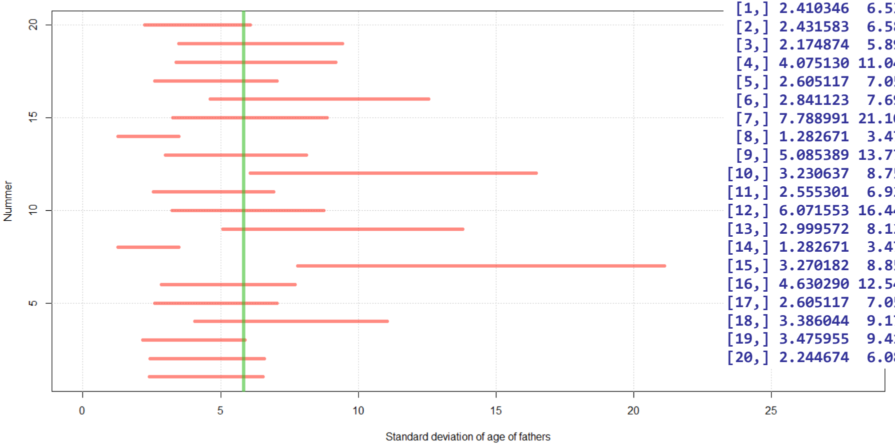
geg: 20 Stichproben zu je 5 Werten

```
> A
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
 [1,]   59   51   56   53   58
 [2,]   45   50   51   53   46
 [3,]   60   57   63   59   55
 [4,]   57   42   54   53   52
 [5,]   49   55   51   45   51
 [6,]   49   50   48   47   40
 [7,]   59   49   45   43   69
 [8,]   52   56   53   54   56
 [9,]   56   58   57   56   41
[10,]   58   59   53   62   51
[11,]   52   55   51   53   60
[12,]   50   59   69   53   48
[13,]   50   57   58   49   51
[14,]   57   55   55   52   55
[15,]   49   51   59   47   51
[16,]   55   52   56   68   53
[17,]   56   54   50   56   48
[18,]   52   52   63   57   53
[19,]   62   55   57   51   50
[20,]   53   55   53   47   50
```

gesucht:

KI für $\sigma$
mit Konfidenzniveau $1-\alpha = 0{,}8$

[ $\chi^2(4)$-Vtlg:
$x_{0,1} = 1{,}06$
$x_{0,9} = 7{,}78$ ]




```
> A.CI
          [,1]      [,2]
 [1,] 2.410346  6.530047
 [2,] 2.431583  6.587581
 [3,] 2.174874  5.892112
 [4,] 4.075130 11.040235
 [5,] 2.605117  7.057714
 [6,] 2.841123  7.697096
 [7,] 7.788991 21.101730
 [8,] 1.282671  3.474978
 [9,] 5.085389 13.777203
[10,] 3.230637  8.752358
[11,] 2.555301  6.922754
[12,] 6.071553 16.448892
[13,] 2.999572  8.126361
[14,] 1.282671  3.474978
[15,] 3.270182  8.859490
[16,] 4.630290 12.544261
[17,] 2.605117  7.057714
[18,] 3.386044  9.173382
[19,] 3.475955  9.416966
[20,] 2.244674  6.081211
```

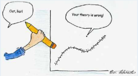
# Signifikanztests

- Vorliegen einer Hypothese über die Verteilung(en) der Grundgesamtheit(en).
- Beispiele:
  - „Der Würfel ist fair.“
  - „Die Brenndauern zweier unterschiedlicher Glühbirnensorten sind gleich.“
- Hypothese soll anhand einer Stichprobe überprüft werden.
- Prinzip:
  - Hypothese verwerfen, wenn „signifikanter“ Widerspruch zur Stichprobe.
  - Ansonsten: Hypothese nicht verwerfen.
- Eine verworfene Hypothese gilt als statistisch widerlegt.
- Nicht-Verwerfung ist dagegen ein „Freispruch aus Mangel an Beweisen“.

**Zu Beachten:**

Nicht-Verwerfung ist **kein** „statistischer Beweis“, dass Hypothese wahr ist!
(„Trick“: Hypothese falsch $\iff$ Gegenhypothese wahr!)





# Test des Erwartungswertes bei bekannter Varianz in der Grundgesamtheit

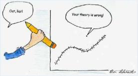
- Zunächst:
  - $G \sim N(\mu; \sigma)$ mit $\sigma$ bekannt
  - Einfache Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$
  - (Null-)Hypothese $H_0 : \mu = \mu_0$
- **Beispiel:**
  $X_1, \ldots, X_{25}$ mit $X_i =$ Füllmenge der $i$-ten Flasche $\sim N(\mu; 1{,}5)$
  Nullhypothese $H_0 : \mu = 500$, d.h. $\mu_0 = 500$
- Je nach Interessenlage sind unterschiedliche **Gegenhypothesen** möglich:

a) $H_1 : \mu \neq \mu_0$
b) $H_1 : \mu < \mu_0$
c) $H_1 : \mu > \mu_0$

- Entscheidung:

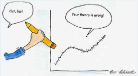
| | | |
|---|---|---|
| | $H_0 : \mu = \mu_0$ | wird abgelehnt gegenüber |
| a) | $H_1 : \mu \neq \mu_0$, | wenn $\lvert\bar{x} - \mu_0\rvert$ „sehr groß“ ist |
| b) | $H_1 : \mu < \mu_0$, | wenn $\bar{x}$ „weit kleiner“ als $\mu_0$ ist |
| c) | $H_1 : \mu > \mu_0$, | wenn $\bar{x}$ „weit größer“ als $\mu_0$ ist |





# Test des Erwartungswertes bei bekannter Varianz in der Grundgesamtheit







## Entscheidungskriterium aus Stichprobe:

$$\nu = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$$

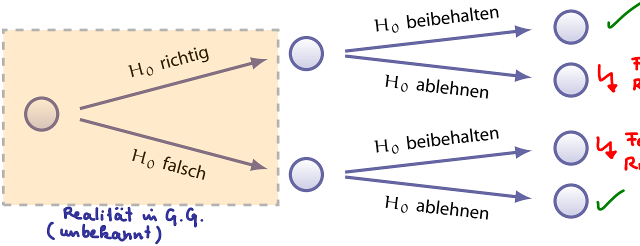
- Vorteil: Verteilung bekannt: $N(0;1)$
- Dann:

$H_0: \mu = \mu_0$ wird abgelehnt gegenüber

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | $H_1: \mu \neq \mu_0$, | wenn $\lvert\nu\rvert$ „sehr groß“ | ist |
| b) | $H_1: \mu < \mu_0$, | wenn $\nu$ „sehr negativ“ | ist |
| c) | $H_1: \mu > \mu_0$, | wenn $\nu$ „sehr positiv“ | ist |

## Mögliche Fehlentscheidungen

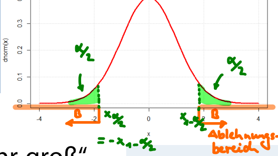
- **Ablehnung von $H_0$**, obwohl $H_0$ richtig ist: Fehler 1. Art
- **Nicht-Ablehnung von $H_0$**, obwohl $H_0$ falsch ist: Fehler 2. Art





- Signifikanzniveau $\alpha$: Maximal erlaubte Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art.

# Test des Erwartungswertes bei bekannter Varianz in der Grundgesamtheit




- Mithilfe von $\alpha$ und $V$ kann geklärt werden, was „sehr groß“ usw. heißt:
  Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art im Fall
  a): $|v| > x$, obwohl $H_0$ richtig:

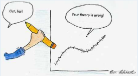
$$
\begin{aligned}
P(|V| > x) &= P(V > x) + P(V < -x) \\
&= 2 \cdot P(V > x) \qquad \text{(Symmetrie der Normalverteilung)} \\
&= 2 \cdot [1 - P(V \leqq x)] = 2 \cdot [1 - \Phi(x)] \stackrel{!}{=} \alpha
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad \Phi(x) = 1 - \tfrac{\alpha}{2} \\
&\Longleftrightarrow \quad x = x_{1-\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}
$$

  $H_0$ wird demnach verworfen,
  wenn $|v| > x_{1-\frac{\alpha}{2}}$ bzw. $v \in B$ ist.
  $B = (-\infty; -x_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (x_{1-\frac{\alpha}{2}}; \infty)$ heißt Verwerfungsbereich.
- Analoge Vorgehensweise für die Fälle b) und c)

# Test des Erwartungswertes bei bekannter Varianz in der GG





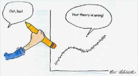


## Rezept

1. Ein Signifikanzniveau $\alpha$ wird festgelegt.
2. Der Verwerfungsbereich

$$
\begin{aligned}
B &= \left(-\infty;\ -x_{1-\alpha/2}\right) \cup \left(x_{1-\alpha/2};\ \infty\right) && \text{im Fall a)}\\
B &= (-\infty;\ -x_{1-\alpha}) && \text{im Fall b)}\\
B &= (x_{1-\alpha};\ \infty) && \text{im Fall c)}
\end{aligned}
$$

   wird festgelegt, wobei $x_{1-\alpha/2}$ bzw. $x_{1-\alpha}$ das $(1-\alpha/2)$- bzw. das $(1-\alpha)$-Fraktil der $N(0,1)$-Verteilung ist. (Wichtig: Der Ablehnungsbereich ist also unabhängig von der Stichprobe)
3. Wichtig: Erst jetzt werden die Daten der Stichprobe erhoben/beachtet:
   Der Testfunktionswert $v = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ wird berechnet.
4. $H_0$ wird genau dann verworfen, wenn $v \in B$ gilt.





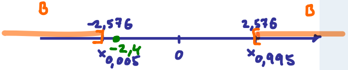
## Beispiel:

$X_1, \ldots, X_{25}$ mit $X_i \sim N(\mu; 1{,}5)$ und $\bar{x} = 499{,}28$

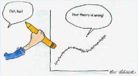
Prüfe $H_0: \ \mu = 500, \ H_1: \ \mu \neq 500$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}01$

**Lösung:** Einstichproben-Gaußtest, Fall a)

1. $\alpha = 0{,}01$
2. $N(0;1): \ x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{1-0{,}005} = x_{0{,}995} = 2{,}576$
   $\Rightarrow B = (-\infty; -2{,}576) \cup (2{,}576; \infty)$
3. $v = \frac{499{,}28 - 500}{1{,}5} \cdot \sqrt{25} = -2{,}4$
4. $v \notin B \Rightarrow H_0$ nicht verwerfen




Interpretation: Zum Signifikanzniveau 1 % kann der Brauerei keine Abweichung vom Sollwert $\mu_0 = 500$ nachgewiesen werden.





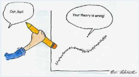
## Der jeweils geeignete Test hängt ab von ...

- dem zu testenden Hypothesenpaar $H_0, H_1$; unterscheide:
  - Parametrische Hypothesen:
    Beziehen sich auf unbekannte(n) Verteilungsparameter $(\mu, \sigma^2, \ldots)$
  - Nichtparametrische Hypothesen:
    Beinhalten sonstige Aussagen, z.B. „Alter und Einkommen sind unabh.“
- den Voraussetzungen an die Verteilung/parameter (z.B. $G \sim N(\mu; \sigma)$)
- den Voraussetzungen an den Stichprobenumfang (z.B. $n > 30$)
- Art und Anzahl der Stichproben; unterscheide:
  - Signifikanztests bei einer einfachen Stichprobe
  - Signifikanztests bei mehreren unabhängigen Stichproben
  - Signifikanztests bei zwei verbundenen Stichproben

In dieser Vorlesung: Nur **einfache Stichproben**

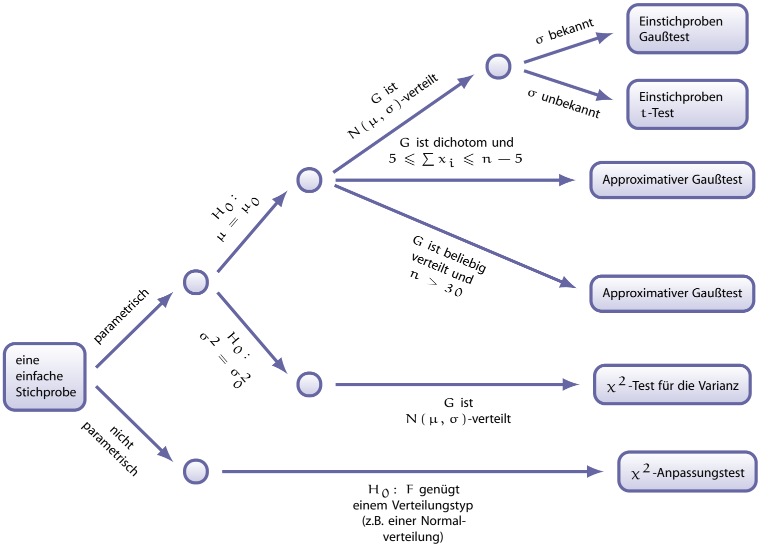
# Klassifizierung von Signifikanztests



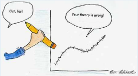




## Signifikanztests bei einer einfachen Stichprobe




(Umfangreichere Übersicht über alle möglichen Fälle siehe **bamberg2011** Seite 171ff.)





## Gegeben:

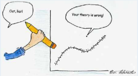
- Einfache Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ mit
- $E(X_i) = \mu, \quad Var(X_i) = \sigma^2$

## Hypothesenpaare:

$$
\begin{array}{lllll}
\text{a)} & H_0: \mu = \mu_0 & & H_1: \mu \neq \mu_0 \\
\text{b)} & H_0: \mu = \mu_0 & (\text{oder } \mu \geqq \mu_0), & H_1: \mu < \mu_0 \\
\text{c)} & H_0: \mu = \mu_0 & (\text{oder } \mu \leqq \mu_0), & H_1: \mu > \mu_0
\end{array}
$$

## Voraussetzungen:

1. Normalverteilung mit $\sigma$ unbekannt (Einstichproben-t-Test)
   **oder**
2. Beliebige Verteilung
   mit $n > 30$ bzw. $5 \leqq \sum x_i \leqq n - 5$ (bei $B(1;p)$)
   (approximativer Gaußtest)






## Ablauf:

1. Festlegen des Signifikanzniveaus $\alpha$ $\alpha = 0{,}05$

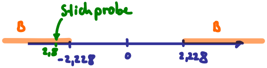
2. Festlegen des Verwerfungsbereichs $B$: $(-\infty; -2{,}228) \cup (2{,}228; \infty)$

   $(-\infty; -x_{0{,}975}) \cup (x_{0{,}975}; \infty)$

   - ✓ Falls $H_1 : \mu \neq \mu_0$: $\quad B = (-\infty; -x_{1-\alpha/2}) \cup (x_{1-\alpha/2}; \infty)$
   - Falls $H_1 : \mu < \mu_0$: $\quad B = (-\infty; -x_{1-\alpha})$
   - Falls $H_1 : \mu > \mu_0$: $\quad B = (x_{1-\alpha}; \infty)$

   Dabei steht $x_{1-\alpha/2}$ bzw. $x_{1-\alpha}$ für das jeweilige Fraktil

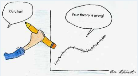
   - ✓ der $t(n-1)$-Verteilung bei $n \leqslant 29$ bzw.
   - der $N(0; 1)$-Verteilung bei $n \geqslant 30$.




3. Berechnen des Testfunktionswertes:

$$v = \begin{cases} \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n} & \text{falls Grundgesamtheit } N(\mu; \sigma)\text{-verteilt, } \sigma \text{ unbekannt oder falls Verteilung der GG beliebig, } n > 30,\ \sigma \text{ unbekannt} \\[2ex] \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} & \text{falls Verteilung der GG beliebig, } n > 30,\ \sigma \text{ bekannt} \\[2ex] \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\mu_0(1-\mu_0)}}\sqrt{n} & \text{falls GG gemäß } B(1; \mu)\text{-verteilt, } n > 30 \end{cases}$$

$-2{,}81$ ✓



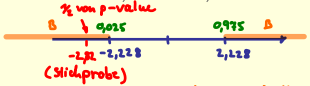
1. Einführung
2. Deskriptive Statistik
3. W-Theorie
4. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen
Tabellen

### Beispiel $t$-Test: Energieaufnahme von Frauen

- Empfohlene täglich Energieaufnahme für Frauen: 7724 kJ (1845 kcal)
- Nehme einfache Stichprobe von 11 Frauen und teste zum Signifkanzniveau $\alpha = 0{,}05$ für
- $H_0$: „Der Erwartungswert der täglichen Energieaufnahme für Frauen ist 7724 kJ“ ($\mu_0$)
- gegen $H_1$: $\mu \neq \mu_0$

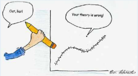
```
daily.intake <- c(5260, 5470, 5640, 6180, 6390, 6515, 6805, 7515, 7515, 8230, 8770)
t.test(daily.intake, alternative="two.sided", mu=7724, conf.level=0.95)

##
##  One Sample t-test
##
## data:  daily.intake
## t = -2.8179, df = 10, p-value = 0.01823
## alternative hypothesis: true mean is not equal to 7724
## 95 percent confidence interval:
##  5986.348 7520.925
## sample estimates:
## mean of x
##  6753.636
```




p-value < α ⇒ $H_0$ wird verworfen
" ≥ α ⇒ $H_0$ nicht verwerfen

# Einstichproben-t-Test, approx. Gaußtest





**Beispiel:**

$X_1, \ldots, X_{2000} \sim \mathrm{B}(1; p)$ mit

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls i-te Person Wähler einer bestimmten Partei} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Ergebnis der Stichprobe: $\sum\limits_{i=1}^{2000} x_i = 108$

Prüfe $H_0: p \leqq 0{,}05$ gegen $H_1: p > 0{,}05$ zum Signifikanzniveau 2 %

**Lösung:**

approximativer Gaußtest bei dichotomer (zweiwertiger) Verteilung; Voraussetzung 2 erfüllt: $5 \leqq 108 \leqq 2000 - 5$

1. $\alpha = 0{,}02$
2. $\mathrm{N}(0;1): x_{1-\alpha} = x_{0{,}98} = 2{,}05$ (Tabelle) $\Rightarrow B = (2{,}05; \infty)$
3. $v = \dfrac{\frac{108}{2000} - 0{,}05}{\sqrt{0{,}05 \cdot (1 - 0{,}05)}} \sqrt{2000} = 0{,}82$
4. $v \notin B \Rightarrow H_0$ nicht verwerfen

**Zusatzfrage:** Entscheidung, falls $\alpha = 0{,}01$? $\rightarrow$ Keine Änderung!

- Vorlesung 23.6. wird auf 25.6. um 13.00 – 15.30 Uhr
- Vorlesung 16.6. wird auf 9.6. 11.30 vorverlegt (danach regulär ab 13.15)

2.6.15

# Verteilungsfunktion $\Phi$ der Standardnormalverteilung





Dabei bedeutet $\Phi(x)$ zum Beispiel: $\Phi(2{,}13) = \Phi(2{,}1 + 0{,}03) = 0{,}9834$. Diesen Wert findet man in der Zeile mit $x_1 = 2{,}1$ und der Spalte mit $x_2 = 0{,}03$.

| $x_1 \backslash x_2$ | 0 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.50000 | 0.50399 | 0.50798 | 0.51197 | 0.51595 | 0.51994 | 0.52392 | 0.52790 | 0.53188 | 0.53586 |
| 0.1 | 0.53983 | 0.54380 | 0.54776 | 0.55172 | 0.55567 | 0.55962 | 0.56356 | 0.56749 | 0.57142 | 0.57535 |
| 0.2 | 0.57926 | 0.58317 | 0.58706 | 0.59095 | 0.59483 | 0.59871 | 0.60257 | 0.60642 | 0.61026 | 0.61409 |
| 0.3 | 0.61791 | 0.62172 | 0.62552 | 0.62930 | 0.63307 | 0.63683 | 0.64058 | 0.64431 | 0.64803 | 0.65173 |
| 0.4 | 0.65542 | 0.65910 | 0.66276 | 0.66640 | 0.67003 | 0.67364 | 0.67724 | 0.68082 | 0.68439 | 0.68793 |
| 0.5 | 0.69146 | 0.69497 | 0.69847 | 0.70194 | 0.70540 | 0.70884 | 0.71226 | 0.71566 | 0.71904 | 0.72240 |
| 0.6 | 0.72575 | 0.72907 | 0.73237 | 0.73565 | 0.73891 | 0.74215 | 0.74537 | 0.74857 | 0.75175 | 0.75490 |
| 0.7 | 0.75804 | 0.76115 | 0.76424 | 0.76730 | 0.77035 | 0.77337 | 0.77637 | 0.77935 | 0.78230 | 0.78524 |
| 0.8 | 0.78814 | 0.79103 | 0.79389 | 0.79673 | 0.79955 | 0.80234 | 0.80511 | 0.80785 | 0.81057 | 0.81327 |
| 0.9 | 0.81594 | 0.81859 | 0.82121 | 0.82381 | 0.82639 | 0.82894 | 0.83147 | 0.83398 | 0.83646 | 0.83891 |
| 1 | 0.84134 | 0.84375 | 0.84614 | 0.84850 | 0.85083 | 0.85314 | 0.85543 | 0.85769 | 0.85993 | 0.86214 |
| 1.1 | 0.86433 | 0.86650 | 0.86864 | 0.87076 | 0.87286 | 0.87493 | 0.87698 | 0.87900 | 0.88100 | 0.88298 |
| 1.2 | 0.88493 | 0.88686 | 0.88877 | 0.89065 | 0.89251 | 0.89435 | 0.89617 | 0.89796 | 0.89973 | 0.90147 |
| 1.3 | 0.90320 | 0.90490 | 0.90658 | 0.90824 | 0.90988 | 0.91149 | 0.91309 | 0.91466 | 0.91621 | 0.91774 |
| 1.4 | 0.91924 | 0.92073 | 0.92220 | 0.92364 | 0.92507 | 0.92647 | 0.92785 | 0.92922 | 0.93056 | 0.93189 |
| 1.5 | 0.93319 | 0.93448 | 0.93574 | 0.93699 | 0.93822 | 0.93943 | 0.94062 | 0.94179 | 0.94295 | 0.94408 |
| 1.6 | 0.94520 | 0.94630 | 0.94738 | 0.94845 | 0.94950 | 0.95053 | 0.95154 | 0.95254 | 0.95352 | 0.95449 |
| 1.7 | 0.95543 | 0.95637 | 0.95728 | 0.95818 | 0.95907 | 0.95994 | 0.96080 | 0.96164 | 0.96246 | 0.96327 |
| 1.8 | 0.96407 | 0.96485 | 0.96562 | 0.96638 | 0.96712 | 0.96784 | 0.96856 | 0.96926 | 0.96995 | 0.97062 |
| 1.9 | 0.97128 | 0.97193 | 0.97257 | 0.97320 | 0.97381 | 0.97441 | 0.97500 | 0.97558 | 0.97615 | 0.97670 |
| 2 | 0.97725 | 0.97778 | 0.97831 | 0.97882 | 0.97932 | 0.97982 | 0.98030 | 0.98077 | 0.98124 | 0.98169 |
| 2.1 | 0.98214 | 0.98257 | 0.98300 | 0.98341 | 0.98382 | 0.98422 | 0.98461 | 0.98500 | 0.98537 | 0.98574 |
| 2.2 | 0.98610 | 0.98645 | 0.98679 | 0.98713 | 0.98745 | 0.98778 | 0.98809 | 0.98840 | 0.98870 | 0.98899 |
| 2.3 | 0.98928 | 0.98956 | 0.98983 | 0.99010 | 0.99036 | 0.99061 | 0.99086 | 0.99111 | 0.99134 | 0.99158 |
| 2.4 | 0.99180 | 0.99202 | 0.99224 | 0.99245 | 0.99266 | 0.99286 | 0.99305 | 0.99324 | 0.99343 | 0.99361 |
| 2.5 | 0.99379 | 0.99396 | 0.99413 | 0.99430 | 0.99446 | 0.99461 | 0.99477 | 0.99492 | 0.99506 | 0.99520 |
| 2.6 | 0.99534 | 0.99547 | 0.99560 | 0.99573 | 0.99585 | 0.99598 | 0.99609 | 0.99621 | 0.99632 | 0.99643 |
| 2.7 | 0.99653 | 0.99664 | 0.99674 | 0.99683 | 0.99693 | 0.99702 | 0.99711 | 0.99720 | 0.99728 | 0.99736 |
| 2.8 | 0.99744 | 0.99752 | 0.99760 | 0.99767 | 0.99774 | 0.99781 | 0.99788 | 0.99795 | 0.99801 | 0.99807 |
| 2.9 | 0.99813 | 0.99819 | 0.99825 | 0.99831 | 0.99836 | 0.99841 | 0.99846 | 0.99851 | 0.99856 | 0.99861 |
| 3 | 0.99865 | 0.99869 | 0.99874 | 0.99878 | 0.99882 | 0.99886 | 0.99889 | 0.99893 | 0.99897 | 0.99900 |
| 3.1 | 0.99903 | 0.99906 | 0.99910 | 0.99913 | 0.99916 | 0.99918 | 0.99921 | 0.99924 | 0.99926 | 0.99929 |
| 3.2 | 0.99931 | 0.99934 | 0.99936 | 0.99938 | 0.99940 | 0.99942 | 0.99944 | 0.99946 | 0.99948 | 0.99950 |
| 3.3 | 0.99952 | 0.99953 | 0.99955 | 0.99957 | 0.99958 | 0.99960 | 0.99961 | 0.99962 | 0.99964 | 0.99965 |
| 3.4 | 0.99966 | 0.99968 | 0.99969 | 0.99970 | 0.99971 | 0.99972 | 0.99973 | 0.99974 | 0.99975 | 0.99976 |

# $\alpha$-Fraktile der $\chi^2$-Verteilung mit $n$ Freiheitsgraden





| $\downarrow\alpha \setminus n\rightarrow$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.005 | 0.00 | 0.01 | 0.07 | 0.21 | 0.41 | 0.68 | 0.99 | 1.34 | 1.73 | 2.16 | 2.60 | 3.07 | 3.56 | 4.07 | 4.60 |
| 0.01 | 0.00 | 0.02 | 0.11 | 0.30 | 0.55 | 0.87 | 1.24 | 1.65 | 2.09 | 2.56 | 3.05 | 3.57 | 4.11 | 4.66 | 5.23 |
| 0.025 | 0.00 | 0.05 | 0.22 | 0.48 | 0.83 | 1.24 | 1.69 | 2.18 | 2.70 | 3.25 | 3.82 | 4.40 | 5.01 | 5.63 | 6.26 |
| 0.05 | 0.00 | 0.10 | 0.35 | 0.71 | 1.15 | 1.64 | 2.17 | 2.73 | 3.33 | 3.94 | 4.57 | 5.23 | 5.89 | 6.57 | 7.26 |
| 0.1 | 0.02 | 0.21 | 0.58 | 1.06 | 1.61 | 2.20 | 2.83 | 3.49 | 4.17 | 4.87 | 5.58 | 6.30 | 7.04 | 7.79 | 8.55 |
| 0.2 | 0.06 | 0.45 | 1.01 | 1.65 | 2.34 | 3.07 | 3.82 | 4.59 | 5.38 | 6.18 | 6.99 | 7.81 | 8.63 | 9.47 | 10.31 |
| 0.25 | 0.10 | 0.58 | 1.21 | 1.92 | 2.67 | 3.45 | 4.25 | 5.07 | 5.90 | 6.74 | 7.58 | 8.44 | 9.30 | 10.17 | 11.04 |
| 0.4 | 0.28 | 1.02 | 1.87 | 2.75 | 3.66 | 4.57 | 5.49 | 6.42 | 7.36 | 8.30 | 9.24 | 10.18 | 11.13 | 12.08 | 13.03 |
| 0.5 | 0.45 | 1.39 | 2.37 | 3.36 | 4.35 | 5.35 | 6.35 | 7.34 | 8.34 | 9.34 | 10.34 | 11.34 | 12.34 | 13.34 | 14.34 |
| 0.6 | 0.71 | 1.83 | 2.95 | 4.04 | 5.13 | 6.21 | 7.28 | 8.35 | 9.41 | 10.47 | 11.53 | 12.58 | 13.64 | 14.69 | 15.73 |
| 0.75 | 1.32 | 2.77 | 4.11 | 5.39 | 6.63 | 7.84 | 9.04 | 10.22 | 11.39 | 12.55 | 13.70 | 14.85 | 15.98 | 17.12 | 18.25 |
| 0.8 | 1.64 | 3.22 | 4.64 | 5.99 | 7.29 | 8.56 | 9.80 | 11.03 | 12.24 | 13.44 | 14.63 | 15.81 | 16.98 | 18.15 | 19.31 |
| 0.9 | 2.71 | 4.61 | 6.25 | 7.78 | 9.24 | 10.64 | 12.02 | 13.36 | 14.68 | 15.99 | 17.27 | 18.55 | 19.81 | 21.06 | 22.31 |
| 0.95 | 3.84 | 5.99 | 7.81 | 9.49 | 11.07 | 12.59 | 14.07 | 15.51 | 16.92 | 18.31 | 19.68 | 21.03 | 22.36 | 23.68 | 25.00 |
| 0.975 | 5.02 | 7.38 | 9.35 | 11.14 | 12.83 | 14.45 | 16.01 | 17.53 | 19.02 | 20.48 | 21.92 | 23.34 | 24.74 | 26.12 | 27.49 |
| 0.99 | 6.63 | 9.21 | 11.34 | 13.28 | 15.09 | 16.81 | 18.48 | 20.09 | 21.67 | 23.21 | 24.73 | 26.22 | 27.69 | 29.14 | 30.58 |
| 0.995 | 7.88 | 10.60 | 12.84 | 14.86 | 16.75 | 18.55 | 20.28 | 21.95 | 23.59 | 25.19 | 26.76 | 28.30 | 29.82 | 31.32 | 32.80 |

| $\downarrow\alpha \setminus n\rightarrow$ | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.005 | 5.14 | 5.70 | 6.26 | 6.84 | 7.43 | 8.03 | 8.64 | 9.26 | 9.89 | 10.52 | 11.16 | 11.81 | 12.46 | 13.12 | 13.79 |
| 0.01 | 5.81 | 6.41 | 7.01 | 7.63 | 8.26 | 8.90 | 9.54 | 10.20 | 10.86 | 11.52 | 12.20 | 12.88 | 13.56 | 14.26 | 14.95 |
| 0.025 | 6.91 | 7.56 | 8.23 | 8.91 | 9.59 | 10.28 | 10.98 | 11.69 | 12.40 | 13.12 | 13.84 | 14.57 | 15.31 | 16.05 | 16.79 |
| 0.05 | 7.96 | 8.67 | 9.39 | 10.12 | 10.85 | 11.59 | 12.34 | 13.09 | 13.85 | 14.61 | 15.38 | 16.15 | 16.93 | 17.71 | 18.49 |
| 0.1 | 9.31 | 10.09 | 10.86 | 11.65 | 12.44 | 13.24 | 14.04 | 14.85 | 15.66 | 16.47 | 17.29 | 18.11 | 18.94 | 19.77 | 20.60 |
| 0.2 | 11.15 | 12.00 | 12.86 | 13.72 | 14.58 | 15.44 | 16.31 | 17.19 | 18.06 | 18.94 | 19.82 | 20.70 | 21.59 | 22.48 | 23.36 |
| 0.25 | 11.91 | 12.79 | 13.68 | 14.56 | 15.45 | 16.34 | 17.24 | 18.14 | 19.04 | 19.94 | 20.84 | 21.75 | 22.66 | 23.57 | 24.48 |
| 0.4 | 13.98 | 14.94 | 15.89 | 16.85 | 17.81 | 18.77 | 19.73 | 20.69 | 21.65 | 22.62 | 23.58 | 24.54 | 25.51 | 26.48 | 27.44 |
| 0.5 | 15.34 | 16.34 | 17.34 | 18.34 | 19.34 | 20.34 | 21.34 | 22.34 | 23.34 | 24.34 | 25.34 | 26.34 | 27.34 | 28.34 | 29.34 |
| 0.6 | 16.78 | 17.82 | 18.87 | 19.91 | 20.95 | 21.99 | 23.03 | 24.07 | 25.11 | 26.14 | 27.18 | 28.21 | 29.25 | 30.28 | 31.32 |
| 0.75 | 19.37 | 20.49 | 21.60 | 22.72 | 23.83 | 24.93 | 26.04 | 27.14 | 28.24 | 29.34 | 30.43 | 31.53 | 32.62 | 33.71 | 34.80 |
| 0.8 | 20.47 | 21.61 | 22.76 | 23.90 | 25.04 | 26.17 | 27.30 | 28.43 | 29.55 | 30.68 | 31.79 | 32.91 | 34.03 | 35.14 | 36.25 |
| 0.9 | 23.54 | 24.77 | 25.99 | 27.20 | 28.41 | 29.62 | 30.81 | 32.01 | 33.20 | 34.38 | 35.56 | 36.74 | 37.92 | 39.09 | 40.26 |
| 0.95 | 26.30 | 27.59 | 28.87 | 30.14 | 31.41 | 32.67 | 33.92 | 35.17 | 36.41 | 37.65 | 38.89 | 40.11 | 41.34 | 42.56 | 43.77 |
| 0.975 | 28.85 | 30.19 | 31.53 | 32.85 | 34.17 | 35.48 | 36.78 | 38.08 | 39.36 | 40.65 | 41.92 | 43.19 | 44.46 | 45.72 | 46.98 |
| 0.99 | 32.00 | 33.41 | 34.81 | 36.19 | 37.57 | 38.93 | 40.29 | 41.64 | 42.98 | 44.31 | 45.64 | 46.96 | 48.28 | 49.59 | 50.89 |
| 0.995 | 34.27 | 35.72 | 37.16 | 38.58 | 40.00 | 41.40 | 42.80 | 44.18 | 45.56 | 46.93 | 48.29 | 49.64 | 50.99 | 52.34 | 53.67 |

# $\alpha$-Fraktile der $t$-Verteilung mit $n$ Freiheitsgraden

| $\downarrow n \setminus \alpha \rightarrow$ | 0.6 | 0.75 | 0.8 | 0.9 | 0.95 | 0.975 | 0.99 | 0.995 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.325 | 1.000 | 1.376 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.820 | 63.657 |
| 2 | 0.289 | 0.816 | 1.061 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 |
| 3 | 0.277 | 0.765 | 0.979 | 1.638 | 2.353 | 3.183 | 4.541 | 5.841 |
| 4 | 0.271 | 0.741 | 0.941 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 |
| 5 | 0.267 | 0.727 | 0.920 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 |
| 6 | 0.265 | 0.718 | 0.906 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 |
| 7 | 0.263 | 0.711 | 0.896 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 |
| 8 | 0.262 | 0.706 | 0.889 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.897 | 3.355 |
| 9 | 0.261 | 0.703 | 0.883 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 |
| 10 | 0.260 | 0.700 | 0.879 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 |
| 11 | 0.260 | 0.698 | 0.875 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 |
| 12 | 0.259 | 0.696 | 0.873 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.054 |
| 13 | 0.259 | 0.694 | 0.870 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 |
| 14 | 0.258 | 0.692 | 0.868 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 |
| 15 | 0.258 | 0.691 | 0.866 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.603 | 2.947 |
| 16 | 0.258 | 0.690 | 0.865 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 |
| 17 | 0.257 | 0.689 | 0.863 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 |
| 18 | 0.257 | 0.688 | 0.862 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 |
| 19 | 0.257 | 0.688 | 0.861 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 |
| 20 | 0.257 | 0.687 | 0.860 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 |
| 21 | 0.257 | 0.686 | 0.859 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 |
| 22 | 0.256 | 0.686 | 0.858 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 |
| 23 | 0.256 | 0.685 | 0.858 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 |
| 24 | 0.256 | 0.685 | 0.857 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 |
| 25 | 0.256 | 0.684 | 0.856 | 1.316 | 1.708 | 2.059 | 2.485 | 2.787 |
| 26 | 0.256 | 0.684 | 0.856 | 1.315 | 1.706 | 2.055 | 2.479 | 2.779 |
| 27 | 0.256 | 0.684 | 0.855 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 |
| 28 | 0.256 | 0.683 | 0.855 | 1.312 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 |
| 29 | 0.256 | 0.683 | 0.854 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 |
| 30 | 0.256 | 0.683 | 0.854 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 |

# $\alpha$-Fraktile der F-Verteilung mit den Freiheitsgraden $\nu_1$ und $\nu_2$





$\alpha = 0{,}95$

| $\nu_1 \backslash \nu_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 15 | 20 | 30 | 40 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 161.4 | 18.51 | 10.13 | 7.71 | 6.61 | 5.99 | 5.59 | 5.32 | 5.12 | 4.96 | 4.54 | 4.35 | 4.17 | 4.08 | 4.03 | 3.94 |
| 2 | 199.5 | 19.00 | 9.55 | 6.94 | 5.79 | 5.14 | 4.74 | 4.46 | 4.26 | 4.10 | 3.68 | 3.49 | 3.32 | 3.23 | 3.18 | 3.09 |
| 3 | 215.7 | 19.16 | 9.28 | 6.59 | 5.41 | 4.76 | 4.35 | 4.07 | 3.86 | 3.71 | 3.29 | 3.10 | 2.92 | 2.84 | 2.79 | 2.70 |
| 4 | 224.6 | 19.25 | 9.12 | 6.39 | 5.19 | 4.53 | 4.12 | 3.84 | 3.63 | 3.48 | 3.06 | 2.87 | 2.69 | 2.61 | 2.56 | 2.46 |
| 5 | 230.2 | 19.30 | 9.01 | 6.26 | 5.05 | 4.39 | 3.97 | 3.69 | 3.48 | 3.33 | 2.90 | 2.71 | 2.53 | 2.45 | 2.40 | 2.31 |
| 6 | 234.0 | 19.33 | 8.94 | 6.16 | 4.95 | 4.28 | 3.87 | 3.58 | 3.37 | 3.22 | 2.79 | 2.60 | 2.42 | 2.34 | 2.29 | 2.19 |
| 7 | 236.8 | 19.35 | 8.89 | 6.09 | 4.88 | 4.21 | 3.79 | 3.50 | 3.29 | 3.14 | 2.71 | 2.51 | 2.33 | 2.25 | 2.20 | 2.10 |
| 8 | 238.9 | 19.37 | 8.85 | 6.04 | 4.82 | 4.15 | 3.73 | 3.44 | 3.23 | 3.07 | 2.64 | 2.45 | 2.27 | 2.18 | 2.13 | 2.03 |
| 9 | 240.5 | 19.38 | 8.81 | 6.00 | 4.77 | 4.10 | 3.68 | 3.39 | 3.18 | 3.02 | 2.59 | 2.39 | 2.21 | 2.12 | 2.07 | 1.97 |
| 10 | 241.9 | 19.40 | 8.79 | 5.96 | 4.74 | 4.06 | 3.64 | 3.35 | 3.14 | 2.98 | 2.54 | 2.35 | 2.16 | 2.08 | 2.03 | 1.93 |
| 15 | 245.9 | 19.43 | 8.70 | 5.86 | 4.62 | 3.94 | 3.51 | 3.22 | 3.01 | 2.85 | 2.40 | 2.20 | 2.01 | 1.92 | 1.87 | 1.77 |
| 20 | 248.0 | 19.45 | 8.66 | 5.80 | 4.56 | 3.87 | 3.44 | 3.15 | 2.94 | 2.77 | 2.33 | 2.12 | 1.93 | 1.84 | 1.78 | 1.68 |
| 30 | 250.1 | 19.46 | 8.62 | 5.75 | 4.50 | 3.81 | 3.38 | 3.08 | 2.86 | 2.70 | 2.25 | 2.04 | 1.84 | 1.74 | 1.69 | 1.57 |
| 40 | 251.1 | 19.47 | 8.59 | 5.72 | 4.46 | 3.77 | 3.34 | 3.04 | 2.83 | 2.66 | 2.20 | 1.99 | 1.79 | 1.69 | 1.63 | 1.52 |
| 50 | 251.8 | 19.48 | 8.58 | 5.70 | 4.44 | 3.75 | 3.32 | 3.02 | 2.80 | 2.64 | 2.18 | 1.97 | 1.76 | 1.66 | 1.60 | 1.48 |
| 100 | 253.0 | 19.49 | 8.55 | 5.66 | 4.41 | 3.71 | 3.27 | 2.97 | 2.76 | 2.59 | 2.12 | 1.91 | 1.70 | 1.59 | 1.52 | 1.39 |

$\alpha = 0{,}99$

| $\nu_1 \backslash \nu_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 15 | 20 | 30 | 40 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4052 | 98.50 | 34.12 | 21.20 | 16.26 | 13.75 | 12.25 | 11.26 | 10.56 | 10.04 | 8.68 | 8.10 | 7.56 | 7.31 | 7.17 | 6.90 |
| 2 | 5000 | 99.00 | 30.82 | 18.00 | 13.27 | 10.92 | 9.55 | 8.65 | 8.02 | 7.56 | 6.36 | 5.85 | 5.39 | 5.18 | 5.06 | 4.82 |
| 3 | 5403 | 99.17 | 29.46 | 16.69 | 12.06 | 9.78 | 8.45 | 7.59 | 6.99 | 6.55 | 5.42 | 4.94 | 4.51 | 4.31 | 4.20 | 3.98 |
| 4 | 5625 | 99.25 | 28.71 | 15.98 | 11.39 | 9.15 | 7.85 | 7.01 | 6.42 | 5.99 | 4.89 | 4.43 | 4.02 | 3.83 | 3.72 | 3.51 |
| 5 | 5764 | 99.30 | 28.24 | 15.52 | 10.97 | 8.75 | 7.46 | 6.63 | 6.06 | 5.64 | 4.56 | 4.10 | 3.70 | 3.51 | 3.41 | 3.21 |
| 6 | 5859 | 99.33 | 27.91 | 15.21 | 10.67 | 8.47 | 7.19 | 6.37 | 5.80 | 5.39 | 4.32 | 3.87 | 3.47 | 3.29 | 3.19 | 2.99 |
| 7 | 5928 | 99.36 | 27.67 | 14.98 | 10.46 | 8.26 | 6.99 | 6.18 | 5.61 | 5.20 | 4.14 | 3.70 | 3.30 | 3.12 | 3.02 | 2.82 |
| 8 | 5981 | 99.37 | 27.49 | 14.80 | 10.29 | 8.10 | 6.84 | 6.03 | 5.47 | 5.06 | 4.00 | 3.56 | 3.17 | 2.99 | 2.89 | 2.69 |
| 9 | 6022 | 99.39 | 27.35 | 14.66 | 10.16 | 7.98 | 6.72 | 5.91 | 5.35 | 4.94 | 3.89 | 3.46 | 3.07 | 2.89 | 2.78 | 2.59 |
| 10 | 6056 | 99.40 | 27.23 | 14.55 | 10.05 | 7.87 | 6.62 | 5.81 | 5.26 | 4.85 | 3.80 | 3.37 | 2.98 | 2.80 | 2.70 | 2.50 |
| 15 | 6157 | 99.43 | 26.87 | 14.20 | 9.72 | 7.56 | 6.31 | 5.52 | 4.96 | 4.56 | 3.52 | 3.09 | 2.70 | 2.52 | 2.42 | 2.22 |
| 20 | 6209 | 99.45 | 26.69 | 14.02 | 9.55 | 7.40 | 6.16 | 5.36 | 4.81 | 4.41 | 3.37 | 2.94 | 2.55 | 2.37 | 2.27 | 2.07 |
| 30 | 6261 | 99.47 | 26.50 | 13.84 | 9.38 | 7.23 | 5.99 | 5.20 | 4.65 | 4.25 | 3.21 | 2.78 | 2.39 | 2.20 | 2.10 | 1.89 |
| 40 | 6287 | 99.47 | 26.41 | 13.75 | 9.29 | 7.14 | 5.91 | 5.12 | 4.57 | 4.17 | 3.13 | 2.69 | 2.30 | 2.11 | 2.01 | 1.80 |
| 50 | 6303 | 99.48 | 26.35 | 13.69 | 9.24 | 7.09 | 5.86 | 5.07 | 4.52 | 4.12 | 3.08 | 2.64 | 2.25 | 2.06 | 1.95 | 1.74 |
| 100 | 6334 | 99.49 | 26.24 | 13.58 | 9.13 | 6.99 | 5.75 | 4.96 | 4.41 | 4.01 | 2.98 | 2.54 | 2.13 | 1.94 | 1.82 | 1.60 |