

Dezember 2016: Probeklausur Wirtschafts- und Finanzmathematik

Aufgabe 1

12 Punkte

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Aussage

$$A(n) : \sum_{i=1}^n (i-1)^3 = \frac{n^2(n-1)^2}{4}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

Aufgabe 2

20 Punkte

a) Entscheiden Sie, ob die Folgen (a_n) , (b_n) mit

$$a_n = \frac{(2n-1)^3}{n^2 - 7n^3}, \quad b_n = 1 - \frac{2n!}{3^n}$$

konvergieren und bestimmen Sie ggf. deren Grenzwert.

b) Gegeben ist die rekursive Definition einer Folge (c_n) mit

$$c_{n+1} = \frac{n}{5} \cdot c_n, \quad c_0 = -\frac{1}{3}.$$

Geben Sie eine explizite Form von (c_n) an.

c) Der Wert der zweiten Partialsumme einer konvergenten, geometrischen Reihe (s_n) sei

$$s_2 = \sum_{i=0}^2 q^i = \frac{37}{16}.$$

- Berechnen Sie den Wert von q und begründen Sie warum (s_n) durch die Angabe von s_2 eindeutig ist.
- Bestimmen Sie den Grenzwert $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ von (s_n) .

Aufgabe 3

10 Punkte

Herr Berger eröffnet am Tag der Geburt seiner Tochter Berta ein Konto, bei dem die Zinsen nach Maßgabe der Sparbuchmethode berechnet und jeweils zum Jahresende gutgeschrieben werden. Der zeitlich konstante Zinssatz beträgt 5 % pro Jahr. Unmittelbar nach Kontoeröffnung zahlt Herr Berger 40 000 DM auf das Konto ein. Weitere Buchungen (außer den jährlichen Zinsgutschriften) erfolgen nicht. Am 28.2.2017 löst Berta das Konto auf und erhält 70 000 € ausbezahlt.

- Wieviel *ganze* Jahre sind von Einzahlung bis Abhebung vergangen?
- Wieviele Zinstage sind im Einzahlungsjahr angefallen?
- An welchem Tag wurde Berta geboren?

Hinweise:

- ▶ Bankgebühren für Kontoführung, Löschung etc. sind zu vernachlässigen.
- ▶ Der Umrechnungsfaktor von DM zu € beträgt 1,95583 zu 1.

► *Tipp zu a): Vernachlässigen Sie zunächst den unterjährigen Zins*

Aufgabe 4

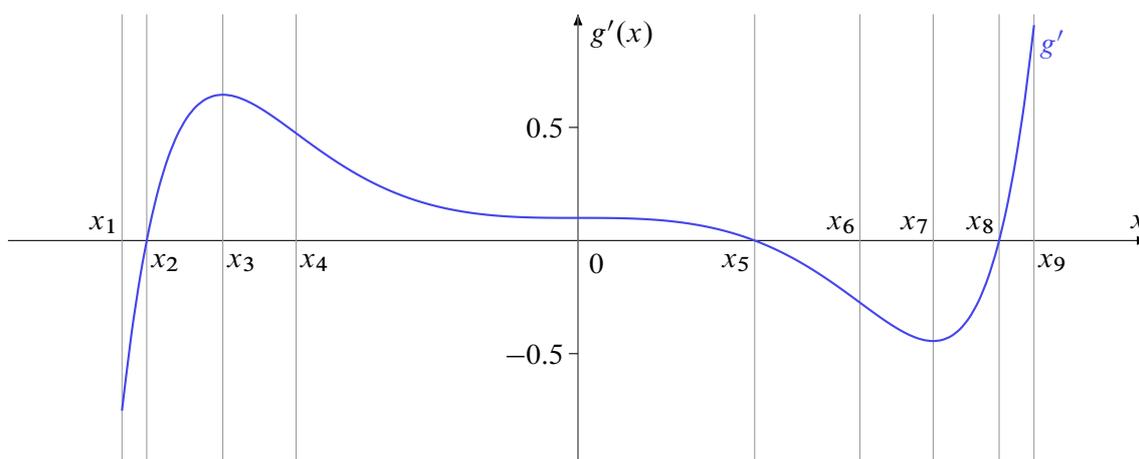
20 Punkte

Gegeben sei die Funktion f mit folgender Funktionsgleichung:

$$f(x) = e^{-x} \cdot \ln(x^2)$$

- Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $D_f \subset \mathbb{R}$ von f an.
- Berechnen Sie die Nullstellen von f .
- Bestimmen Sie die erste Ableitung f' und fassen Sie Ihr Ergebnis so weit wie möglich zusammen.
- Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten von f für $x \rightarrow -\infty$.

Für eine andere Funktion, die stetige und zweimal stetig differenzierbare Funktion $g : [x_1, x_9] \rightarrow \mathbb{R}$, ist lediglich der Graph ihrer *ersten Ableitung* g' gegeben:



Die folgenden Teilaufgaben beziehen sich auf die der Ableitung g' zugrundeliegenden Funktion g .

- Geben Sie die x -Werte der lokalen Minima von g an.
- Geben Sie die x -Werte der lokalen Maxima von g an.
- In welchem (bzw. welchen) Intervall(en) ist g monoton wachsend?
- In welchem (bzw. welchen) Intervall(en) ist g monoton fallend?
- In welchem (bzw. welchen) Intervall(en) ist g konvex?
- In welchem (bzw. welchen) Intervall(en) ist g konkav?

Aufgabe 5**18 Punkte**

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie die Inverse von A unter Benutzung des Algorithmus von Gauß und Jordan.
- Lösen Sie das Gleichungssystem

$$Ax = b \quad \text{mit} \quad b = (1,2,3)^\top,$$

indem Sie die Lösung aus Teilaufgabe a) verwenden.

- Sei B eine nicht invertierbare 3×3 -Matrix mit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass für die Matrix C mit $C = A \cdot B$ keine inverse Matrix existiert.

Aufgabe 6**10 Punkte**

Unimodulare Matrizen nennt man reelle Matrizen, deren Determinante gleich 1 ist.

Gegeben sind mit $x \in \mathbb{R}$ die beiden Matrizen A, B mit

$$A = \begin{pmatrix} 7x & 0 & -x \\ 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x-4 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2-x \end{pmatrix}.$$

- Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist A eine unimodulare Matrix?
- Für welche $x \in \mathbb{R}$ hat B nur negative Eigenwerte?