Dezember 2016: Probeklausur Wirtschafts- und Finanzmathematik Lösungshinweise

Prüfungsdatum: 7. Juli 2016 – Prüfer: Burkart, Etschberger, Jansen
Studiengang: IM und BW
Punkte: 12, 20, 10, 20, 18, 10 ;   Summe der Punkte: 90

Aufgabe 1 **12 Punkte**

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Aussage

$$A(n) : \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 = \frac{n^2(n-1)^2}{4}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

Lösungshinweis:

$A(1) : \sum_{i=1}^{1} (i-1)^3 = (1-1)^3 = 0 = \frac{1^2(1-1)^2}{4}$

$$\begin{aligned}
&n \to n+1 : \\
&\sum_{i=1}^{n+1} (i-1)^3 = \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 + \big((n+1)-1\big)^3 \\
&= \frac{n^2(n-1)^2}{4} + \big((n+1)-1\big)^3 \\
&= \frac{n^2(n-1)^2 \ + \ 4n^3}{4} \\
&= \frac{n^2(n^2-2n+1) \ + \ 4n^3}{4} \\
&= \frac{n^4-2n^3+n^2 \ + \ 4n^3}{4} \\
&= \frac{n^4+2n^3+n^2}{4} \\
&= \frac{n^2(n^2+2n+1)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2 \cdot \big((n+1)-1\big)^2}{4}
\end{aligned}$$

$$A(n): \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 = \frac{n^2(n-1)^2}{4}$$

$n = 1$: $\sum_{i=1}^{1} (i-1)^3 = 0^3 = 0 = \frac{1^2\cdot(1-1)^2}{4}$

$A(n) \overset{!}{\Rightarrow} A(n+1)$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} (i-1)^3 = \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 + (n+1-1)^3 = \frac{n^2\cdot(n-1)^2}{4} + n^3$$

$$= \frac{n^4-2n^3+n^2+4n^3}{4} = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$$

$$= \frac{(n^2+2n+1)\cdot n^2}{4} = \frac{(n+1)^2\cdot n^2}{4} = \frac{(n+1)^2\cdot(n+1-1)^2}{4}$$

Aufgabe 2 — 20 Punkte

a) Entscheiden Sie, ob die Folgen (a_n), (b_n) mit

6 $$a_n = \frac{(2n-1)^3}{n^2-7n^3}, \qquad b_n = 1 - \frac{2n!}{3^n}$$

konvergieren und bestimmen Sie ggf. deren Grenzwert.

b) Gegeben ist die rekursive Definition einer Folge (c_n) mit

6 $$c_{n+1} = \frac{n}{5}\cdot c_n, \qquad c_0 = -\frac{1}{3}.$$

Geben Sie eine explizite Form von (c_n) an.

c) Der Wert der zweiten Partialsumme einer konvergenten, geometrischen Reihe (s_n) sei

$$s_2 = \sum_{i=0}^{2} q^i = \frac{37}{16}.$$

5 i) Berechnen Sie den Wert von q und begründen Sie warum (s_n) durch die Angabe von s_2 eindeutig ist.

3 ii) Bestimmen Sie den Grenzwert $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ von (s_n).

a) $a_n = \frac{8n^3 + [\text{kleinere Pot. von } n]}{-7n^3 + [\cdots]} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{8}{7}$

b_n Zähler wächst schneller als Nenner $\Rightarrow$ divergent

b) $c_{n+1} = \frac{n}{5}\cdot c_n, \qquad c_0 = -\frac{1}{3}.$

$c_1 = \frac{0}{5}\cdot c_0 = \frac{0}{5}\cdot(-\frac{1}{3}) = 0$

$c_2 = \frac{1}{5}\cdot c_1 = \frac{1}{5}\cdot 0 = 0$, $c_3 = c_4 = \cdots = c_n = 0$ $(n \neq 0)$

---

andere Aufgabe : $d_{n+1} = \frac{n+1}{5}\cdot d_n$, $d_0 = -\frac{1}{3}$

$n=0$ $d_1 = \frac{1}{5}\cdot d_0 = \frac{1}{5}\cdot(-\frac{1}{3})$

$n=1$ $d_2 = \frac{2}{5}\cdot d_1 = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot(-\frac{1}{3})$, $n=2$ $d_3 = \frac{3}{5} d_2 = \frac{3\cdot2\cdot1}{5\cdot5\cdot5}\cdot(-\frac{1}{3})$

$d_n = \frac{n!}{5^n}\cdot(-\frac{1}{3})$

$$s_2 = \sum_{i=0}^{2} q^i = \frac{37}{16}.$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{q^0}_{=1} + q^1 + q^2 = \frac{37}{16}$$

$$\Leftrightarrow \quad q^2 + q - \frac{21}{16} = 0$$

$$q_{1/2} = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot \frac{21}{16}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} = -\frac{2}{4} \pm \frac{5}{4} = \begin{cases} 3/4 \\ -7/4 \end{cases}$$

da s_n konvergent, ist $q = 3/4$ einzig mögliche Lsg

$$\sum_{i=0}^{n} (3/4)^i = \frac{(3/4)^{n+1} - 1}{3/4 - 1} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{0-1}{3/4 - 1} = \frac{-1}{-1/4} = 4$$

Aufgabe 2 **20 Punkte**

a) Entscheiden Sie, ob die Folgen (a_n), (b_n) mit

$$a_n = \frac{(2n-1)^3}{n^2 - 7n^3}, \qquad b_n = 1 - \frac{2n!}{3^n}$$

konvergieren und bestimmen Sie ggf. deren Grenzwert.

b) Gegeben ist die rekursive Definition einer Folge (c_n) mit

$$c_{n+1} = \frac{n}{5} \cdot c_n, \qquad c_0 = -\frac{1}{3}.$$

Geben Sie eine explizite Form von (c_n) an.

c) Der Wert der zweiten Partialsumme einer konvergenten, geometrischen Reihe (s_n) sei

$$s_2 = \sum_{i=0}^{2} q^i = \frac{37}{16}.$$

i) Berechnen Sie den Wert von q und begründen Sie warum (s_n) durch die Angabe von s_2 eindeutig ist.

ii) Bestimmen Sie den Grenzwert $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ von (s_n).

Lösungshinweis:

a) ▶ Bei a_n ergibt sich nach Ausmultiplizieren des Zählers (Binomialsatz):

$$a_n = \frac{8n^3 - 6n^2 + 6n - 3}{-7n^3 + n^2}, \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{8}{7}.$$

▶ Da $n!$ schneller wächst als 3^n ist $\frac{2!}{3^n}$ divergent, und die Folge b_n hat keinen Grenzwert.

b) Man kann die Folge wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \frac{n}{5} \cdot \frac{n-1}{5} \cdot \frac{n-2}{5} \cdot \dots \cdot \frac{1}{5} \cdot c_0 \\ &= \frac{n!}{5^n} c_0 \\ &= -\frac{n!}{3 \cdot 5^n}. \end{aligned}$$

c) 1. Es gilt:

$$\frac{37}{16} \stackrel{!}{=} s_2 = 1 + q + q^2$$

Löst man dies mittels quadratischer Ergängung / p-q-Formel / Mitternachtsformel, so ergeben sich die beiden Lösungen: $q_1 = 3/4$ oder $q_2 = -7/4$. Da bekannt ist, dass die Reihe konvergiert muss $|q| < 1$ sein, und damit ist nur die Lösung $q = 3/4$ möglich.

2. Der Grenzwert der Folge ist dann

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^i = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 4.$$

Aufgabe 3 **10 Punkte**

Herr Berger eröffnet am Tag der Geburt seiner Tochter Berta ein Konto, bei dem die Zinsen nach Maßgabe der Sparbuchmethode berechnet und jeweils zum Jahresende gutgeschrieben werden. Der zeitlich konstante Zinssatz beträgt 5 % pro Jahr. Unmittelbar nach Kontoeröffnung zahlt Herr Berger 40 000 DM auf das Konto ein. Weitere Buchungen (außer den jährlichen Zinsgutschriften) erfolgen nicht. Am 28.2.2017 löst Berta das Konto auf und erhält 70 000 € ausbezahlt.

a) Wieviel *ganze* Jahre sind von Einzahlung bis Abhebung vergangen?

b) Wieviele Zinstage sind im Einzahlungsjahr angefallen?

c) An welchem Tag wurde Berta geboren?

*H*inweise:

- *Bankgebühren für Kontoführung, Löschung etc. sind zu vernachlässigen.*
- *Der Umrechnungsfaktor von DM zu € beträgt 1,95583 zu 1.*
- *Tipp zu a): Vernachlässigen Sie zunächst den unterjährigen Zins*

Lösungshinweis:

a) 40 000 DM entspricht $K_0 = {}^{40\,000}/_{1.95583} = 20\,451.68$ €
Ganze Jahre:

$$K_n = K_0 \cdot q^n \Leftrightarrow n = \frac{\ln(K_n) - \ln(K_0)}{\ln q} = \frac{\ln(70\,000) - \ln(20\,451.68)}{\ln(1.05)} \approx 25\,\text{Jahre}$$

b) Jetzt genau: 57 Zinstage im Auszahlungsjahr, gemischte Verzinsung:

$$70\,000 = 20\,451.68 \cdot \left(1 + 0.05 \cdot \frac{\Delta t_1}{360}\right) \cdot 1.05^{25} \cdot \left(1 + 0.05 \cdot \frac{57}{360}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{70\,000}{20\,451.68} \cdot 1.05^{-25} \cdot \left(1 + 0.05 \cdot \frac{57}{360}\right)^{-1} - 1 = 0.05 \cdot \frac{\Delta t_1}{360}$$

$$\Rightarrow \Delta t_1 \approx 20.120\,473\,6$$

Also Geburtstag am 10.12.1991 (auch in Ordnung ein Tag später)

Aufgabe 4 — 20 Punkte

Gegeben sei die Funktion f mit folgender Funktionsgleichung:

$$f(x) = e^{-x} \cdot \ln\left(x^2\right) \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

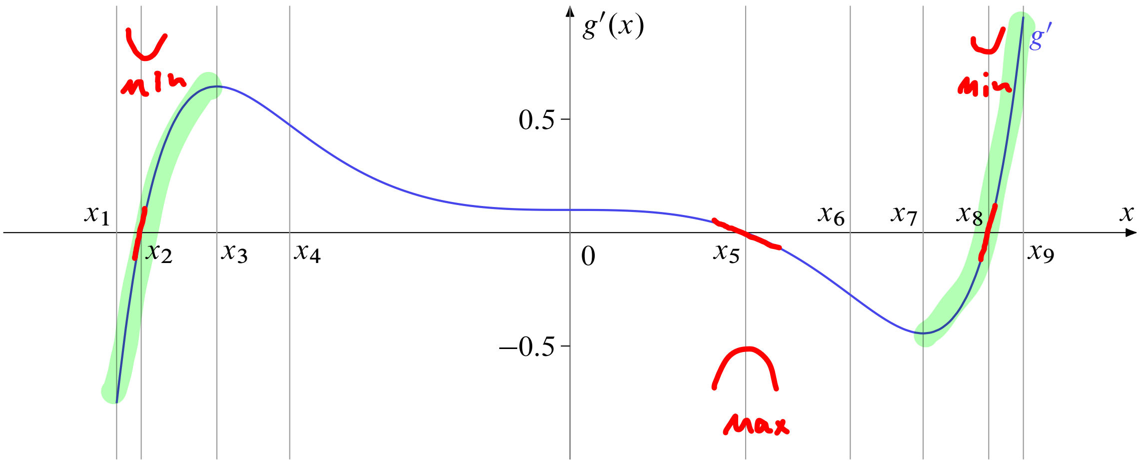
a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $D_f \subset \mathbb{R}$ von f an.

b) Berechnen Sie die Nullstellen von f.

c) Bestimmen Sie die erste Ableitung f' und fassen Sie Ihr Ergebnis so weit wie möglich zusammen. $f'(x) = -e^{-x} \cdot \ln(x^2) + e^{-x} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = e^{-x} \cdot \left(-\ln(x^2) + \frac{2}{x}\right)$

d) Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten von f für $x \to -\infty$.

Für eine andere Funktion, die stetige und zweimal stetig differenzierbare Funktion $g : [x_1, x_9] \to \mathbb{R}$, ist lediglich der Graph ihrer *ersten Ableitung* g' gegeben:



Die folgenden Teilaufgaben beziehen sich auf die der Ableitung g' zugrundeliegenden Funktion g.

e) Geben Sie die x-Werte der lokalen Minima von g an.

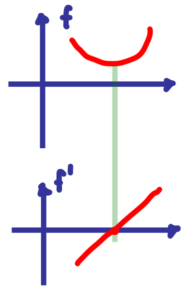
f) Geben Sie die x-Werte der lokalen Maxima von g an.

g) In welchem (bzw. welchen) Intervall(en) ist g monoton wachsend?

h) In welchem (bzw. welchen) Intervall(en) ist g monoton fallend?

i) In welchem (bzw. welchen) Intervall(en) ist g konvex?

j) In welchem (bzw. welchen) Intervall(en) ist g konkav?



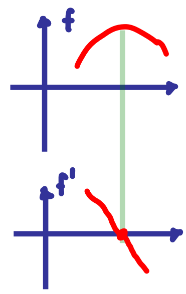
Lösungshinweis:

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) $f(x) = e^{-x} \cdot \ln\left(x^2\right) = 0$ für $\ln\left(x^2\right) = 0$
$\Rightarrow x^2 = 1 \quad \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$

c)
$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x} \cdot (-1) \cdot \ln\left(x^2\right) + e^{-x} \cdot \tfrac{1}{x^2} \cdot 2x \\ &= -e^{-x} \cdot \ln\left(x^2\right) + e^{-x} \cdot \tfrac{2}{x} \\ &= e^{-x}\left(\tfrac{2}{x} - \ln\left(x^2\right)\right) \end{aligned}$$

d) $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\Big[\underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty} \cdot \underbrace{\ln\left(x^2\right)}_{\to+\infty}\Big] = +\infty$$



e) Minimalstellen: x_2, x_8

f) Maximalstellen: x_1, x_5, x_9

g) g monoton wachsend für $x \in [x_2, x_5] \cup [x_8, x_9]$

h) g monoton fallend für $x \in [x_1, x_2] \cup [x_5, x_8]$

i) g konvex für $x \in [x_1, x_3] \cup [x_7, x_9]$

j) g konkav für $x \in [x_3, x_7]$

Aufgabe 5 **18 Punkte**

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Inverse von A unter Benutzung des Algorithmus von Gauß und Jordan.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$Ax = b \quad \text{mit} \quad b = (1,2,3)^\top,$$

indem Sie die Lösung aus Teilaufgabe a) verwenden.

c) Sei B eine nicht invertierbare 3×3-Matrix mit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass für die Matrix C mit $C = A \cdot B$ keine inverse Matrix existiert.

Lösungshinweis:

```
A = matrix(c(2, -1,0,
             3,-2,0,
             1,2,-1), nrow=3, byrow=T)

# a)
A.inv = solve(A)
A.inv

##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    2   -1    0
## [2,]    3   -2    0
## [3,]    8   -5   -1

# b)
x = A.inv %*% c(1,2,3)
as.vector(x)

## [1]  0 -1 -5
```

```
# c)

B = matrix(c(0,1,0,
             0,-1,1,
             0,0,-1), nrow=3, byrow=T)
C = A %*% B
C # kein voller Rang

##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    0    3   -1
## [2,]    0    5   -2
## [3,]    0   -1    3
```

Aufgabe 5 — 18 Punkte

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Inverse von A unter Benutzung des Algorithmus von Gauß und Jordan.

①	2	-1	0	1	0	0	
②	3	-2	0	0	1	0	
③	1	2	-1	0	0	1	
④	2	-1	0	1	0	0	①
⑤	3	-2	0	0	1	0	②
⑥	-1	-2	1	0	0	-1	$-1 \cdot$ ③
⑦	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$ ④
⑧	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	1	0	⑤ $- \frac{3}{2}$ ④
⑨	0	$-\frac{5}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	-1	⑥ $+ \frac{1}{2}$ ④
	1	0	0	2	-1	0	⑦ − ⑧
	0	1	0	3	-2	0	$-2 \cdot$ ⑧
	0	0	1	8	-5	-1	⑨ − 5 ⑧

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 8 & -5 & -1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}}$$

b) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$Ax = b \quad \text{mit} \quad b = (1,2,3)^\top,$$

indem Sie die Lösung aus Teilaufgabe a) verwenden.

$$Ax = b \iff A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot b$$

$$\iff E \cdot x = A^{-1} \cdot b \iff x = A^{-1} \cdot b$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 8 & -5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$\det(B) = 0$

c) Sei B eine nicht invertierbare 3×3-Matrix mit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass für die Matrix C mit $C = A \cdot B$ keine inverse Matrix existiert.

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(A) \cdot 0 = 0$$

Aufgabe 6 **10 Punkte**

Unimodulare Matrizen nennt man reelle Matrizen, deren Determinante gleich 1 ist.

Gegeben sind mit $x \in \mathbb{R}$ die beiden Matrizen A, B mit

$$A = \begin{pmatrix} 7x & 0 & -x \\ 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} x-4 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2-x \end{pmatrix}.$$

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist A eine unimodulare Matrix?

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ hat B nur negative Eigenwerte?

Lösungshinweis:

a) $\det(A) = 7x^3 - (x^2 \cdot (-x)) = 8x^3 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

b) $\det(B - \lambda \cdot E) = (x - 4 - \lambda)(-4 - \lambda)(2 - x - \lambda) = 0$,
also sind die Eigenwerte von B
$\lambda_1 = x - 4\,, \quad \lambda_2 = -4\,, \quad \lambda_3 = 2 - x$
Damit λ_1, λ_3 negativ sind muss also gelten
$x - 4 < 0$ und $2 - x < 0 \quad \Leftrightarrow x < 4$ und $x > 2 \quad \Leftrightarrow 2 < x < 4$

Aufgabe 6 **10 Punkte**

Unimodulare Matrizen nennt man reelle Matrizen, deren Determinante gleich 1 ist.

Gegeben sind mit $x \in \mathbb{R}$ die beiden Matrizen A, B mit

$$A = \begin{pmatrix} 7x & 0 & -x \\ 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} x-4 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2-x \end{pmatrix}.$$

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist A eine unimodulare Matrix?

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ hat B nur negative Eigenwerte?

a) $\det A = 7x^3 - (-x^3) = 8x^3 = 1 \iff x = 1/2$

b) $\det(B - \lambda \cdot E) = (x-4-\lambda)(-4-\lambda)\cdot(2-x-\lambda) = 0$

$\iff \lambda = x-4 \quad \vee \quad \lambda = -4 \quad \vee \quad \lambda = 2-x$

✓

damit alle $\lambda < 0$: $\quad x-4 < 0 \quad \wedge \quad 2-x < 0$

$\iff x < 4 \quad \wedge \quad 2 < x$

$\iff 2 < x < 4$

$\iff x \in (2; 4)$