Anmerkungen zur Vorlesung Statistik vom 13.12.2016

Inhalt:

- Grundlagen der induktiven Statistik
  - Wichtige Stichprobenfunktionen
  - Chi-Quadrat-Verteilung
  - t-Verteilung
- Punkt-Schätzung
  - Erwartungstreue
  - Wirksamkeit
- Intervall-Schätzung
  - Spezialfall: symmetrische Konfidenzintervalle
  - Herleitung eines Überblicks zur Intervall-Schätzung
  - Intervall und Stichprobenumfang n bei bekannter Varianz

Aufgabensammlung Statistik:

13.12.2016
Hausaufgabe
A78-A82 sowie
A86,A87a,A88a,
A89-A90

Klausurtermin: Freitag, 13. Januar 2017, 15:30 Uhr

13.1	15:30	IN3_2012	95	**Statistik**	Wins/Etschberger	90	M1.01	AW
13.1	15:30	IN3_2007	2	**Statistik**	Wins/Etschberger	90	M1.02	AW
13.1	15:30	WI2_2014	60	**Statistik**	Etschberger/Wins	90	J2.18	AW
13.1	15:30	WI2_2012	8	**Statistik**	Etschberger/Wins	90	J3.19	AW
13.1	15:30	WI2_2007	2	**Statistik**	Etschberger/Wins	90	W3.03	AW
13.1	15:30						Res.:	Wins/Etschberge

WDH-/Fragestunde: Dienstag, 10. Januar 2017, 14:00 – 17:00 Uhr, Raum W3.02
Fragen bitte vorab an anett.eins@wiwi.uni-augsburg.de

Kovarianz und Korrelation

- **Kovarianz:**

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= E[(X-E(X))(Y-E(Y))]\\ &= E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)\\ &\text{(Verschiebungssatz)}\end{aligned}$$

unter Unabhängigkeit: $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ (vgl. F. 154)

- **Korrelationskoeffizient:**

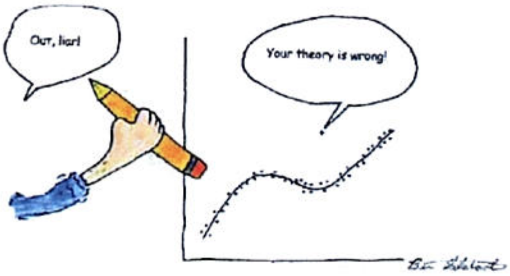
$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\cdot \mathrm{Var}(Y)}}$$

- **Bemerkungen:**
  - ρ ist r nachgebildet $\Rightarrow \rho \in [-1;1]$
  - $|\rho| = 1 \iff Y = a + bX$ (mit $b \neq 0$)
  - $\rho = 0 \iff X, Y$ **unkorreliert**
- Varianz einer Summe zweier ZV:

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$$

unter Unabhängigkeit:
$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

Statistik: Table of Contents



4 Induktive Statistik
- Grundlagen
- Punkt-Schätzung
- Intervall-Schätzung
- Signifikanztests

Grundlagen der induktiven Statistik

- Vollerhebung oft unmöglich,
- Deshalb: Beobachte Teilgesamtheit und schließe auf Grundgesamtheit

Beispiel

Warensendung von 1000 Stück; darunter M Stück Ausschuss.
M ist unbekannt.
$\rightarrow$ Zufällige Entnahme von $n = 30$ Stück („Stichprobe“).
Darunter 2 Stück Ausschuss.
Denkbare Zielsetzungen:

- Schätze M durch eine Zahl (z.B. $\frac{2}{30} \cdot 1000 = 66{,}67$) Punktschätzung (Wert, Parameter, ...)
- Schätze ein Intervall für M (z.B. $M \in [58; 84]$) Intervallschätzung
- Teste die Hypothese, dass $M > 50$ ist. Hypothesen-/Signifikanztests

Grundbegriffe

- Grundgesamtheit (G): Menge aller relevanten Merkmalsträger.
- Verteilung von G: $F(x) = P(X \leqq x)$ = Wahrscheinlichkeit, dass ein Merkmalsträger ausgewählt wird, der beim untersuchten Merkmal maximal die Ausprägung x aufweist.
- Uneingeschränkte (reine) Zufallsauswahl:
  Jedes Element von G hat die selbe Chance, ausgewählt zu werden.
- Stichprobenumfang (n): Anzahl der Merkmalsträger in der Stichprobe.
- Einfache Stichprobe:
  Uneingeschränkte Zufallsauswahl und unabhängige Ziehung.
  $\rightarrow$ Alle Stichprobenvariablen $X_1, \ldots, X_n$ sind iid. (independent + identical distributed) unabhängig und identisch verteilt
- Stichprobenergebnis:
  n-Tupel der Realisationen der Stichprobenvariablen, $(x_1, \ldots, x_n)$.

Punkt-Schätzung

kleines theta θ

- Ein unbekannter Parameter ϑ der Verteilung von G soll auf Basis einer Stichprobe geschätzt werden.
- Zum Beispiel: σ von $N(10; \sigma)$
- Schätzwert: $\hat{\vartheta}$
- Vorgehen: Verwendung einer Schätzfunktion

$$\hat{\Theta} = g(X_1, \ldots, X_n)$$

  Beachte: Der Schätzwert $\hat{\vartheta}$ ist die Realisierung der ZV (!) $\hat{\Theta}$.
- Frage: Welche Stichprobenfunktion ist zur Schätzung geeignet?
- Kriterien für die Beurteilung/Konstruktion von Schätzfunktionen!
- Im Folgenden: Vorliegen einer einfachen Stichprobe, d.h. $X_1, \ldots, X_n$ iid.

Beispiel

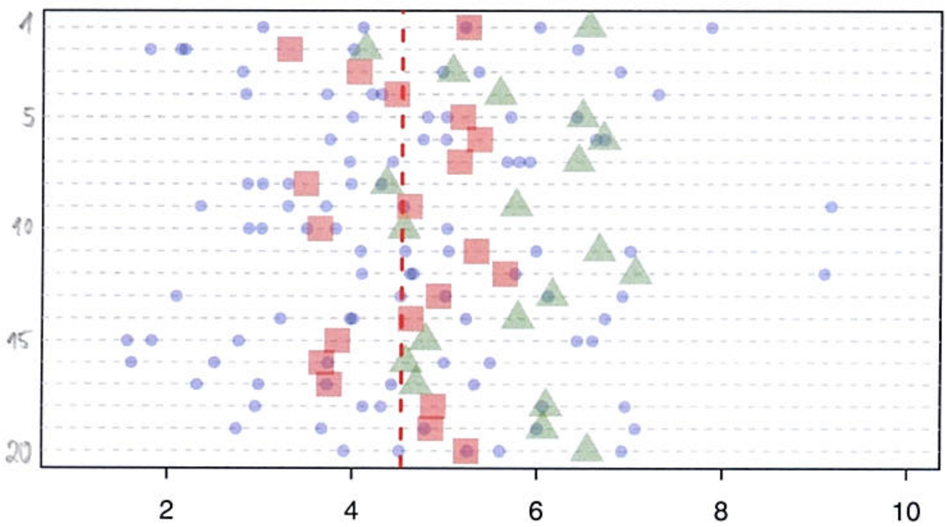
- Schätzen des Mittelwertes einer Grundgesamtheit
- dazu: Einfache Stichprobe vom Umfang 5
- und den beiden Stichprobenfunktionen

$$\hat{\Theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \hat{\Theta}_2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Beispiel

- Schätzen des Mittelwertes einer Grundgesamtheit
- dazu: Einfache Stichprobe vom Umfang 5
- und den beiden Stichprobenfunktionen

$$\hat{\Theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \hat{\Theta}_2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$$



Mittelwert Grundgesamtheit = 4.53

Statistik

1. Einführung
2. Deskriptive Statistik
3. W-Theorie
4. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen
Tabellen

173

Erwartungstreue und Wirksamkeit

- Eine Schätzfunktion $\widehat{\Theta} = g(X_1, \ldots, X_n)$ heißt erwartungstreu oder unverzerrt für ϑ, wenn unabhängig vom numerischen Wert von ϑ gilt:
$$E(\widehat{\Theta}) = \vartheta$$

Beispiel

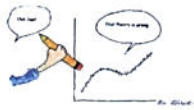
Sind $\widehat{\Theta}_1 = \bar{X}$, $\widehat{\Theta}_2 = \frac{X_1+X_n}{2}$, $\widehat{\Theta}_3 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$ erwartungstreu für μ?

a) $\widehat{\Theta}_1$: $\quad E(\bar{X}) = \mu$
$\Rightarrow \widehat{\Theta}_1$ ist erwartungstreu.

b) $\widehat{\Theta}_2$: $\quad E\left(\frac{X_1+X_n}{2}\right) = \frac{1}{2}[E(X_1) + E(X_n)] = \frac{1}{2}(\mu + \mu) = \mu$
$\Rightarrow \widehat{\Theta}_2$ ist erwartungstreu.

c) $\widehat{\Theta}_3$: $E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mu = \frac{n}{n-1}\mu \neq \mu$
$\Rightarrow \widehat{\Theta}_3$ ist nicht erwartungstreu

Erwartungstreue und Wirksamkeit



- Welche der erwartungstreuen Schätzfunktionen $\widehat{\Theta}_1, \widehat{\Theta}_2$ ist „besser"? → Voraussetzung!
- Von zwei erwartungstreuen Schätzfunktionen $\widehat{\Theta}_1$, $\widehat{\Theta}_2$ für ϑ heißt $\widehat{\Theta}_1$ wirksamer als $\widehat{\Theta}_2$, wenn unabhängig vom numerischen Wert von ϑ gilt:
$$\mathrm{Var}(\widehat{\Theta}_1) < \mathrm{Var}(\widehat{\Theta}_2)$$

Beispiel: ($\widehat{\Theta}_1 = \bar{X}$, $\widehat{\Theta}_2 = \frac{X_1+X_n}{2}$)
Wegen

$$\left.\begin{aligned} &a)\ \mathrm{Var}(\widehat{\Theta}_1) = \mathrm{Var}(\bar{X}) && = \frac{\sigma^2}{n} \\ &b)\ \mathrm{Var}(\widehat{\Theta}_2) = \mathrm{Var}\left(\frac{X_1+X_n}{2}\right) = \frac{1}{4}(\sigma^2+\sigma^2) && = \frac{\sigma^2}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathrm{Var}(\widehat{\Theta}_1) < \mathrm{Var}(\widehat{\Theta}_2)$$

(falls $n > 2$) ist $\widehat{\Theta}_1$ wirksamer als $\widehat{\Theta}_2$.

Erwartungstreue

a) $E(\hat{\Theta}_1) = E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \underbrace{E(X_i)}_{=\mu} = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$

$\Rightarrow \hat{\Theta}_1$ ist erwartungstreue Schätzfunktion für μ

b) $E(\hat{\Theta}_2) = E\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot E(X_1 + X_2) = \frac{1}{2} \cdot \left(\underbrace{E(X_1)}_{=\mu} + \underbrace{E(X_2)}_{=\mu}\right) = \frac{1}{2} \cdot 2\mu = \mu$

$\Rightarrow \hat{\Theta}_2$ ist erwartungstreue Schätzfunktion für μ

c) $E(\hat{\Theta}_3) = E\left(\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n-1} \cdot n \cdot \mu \neq \mu$

$\Rightarrow \hat{\Theta}_3$ ist nicht erwartungstreu (lediglich asymptotisch erwartungstreu, d.h. $E(\hat{\Theta}_3) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mu$)

Wirksamkeit

a) $Var(\hat{\Theta}_1) = Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

b) $Var(\hat{\Theta}_2) = Var\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{2}$

Anmerkung: i) $Var(a + b \cdot X) = b^2 \cdot Var(X)$

ii) $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$ falls X, Y unabhängig

$\frac{\sigma^2}{n} < \frac{\sigma^2}{2} \quad \forall n > 2$

$\Rightarrow \hat{\Theta}_1$ ist wirksamer als $\hat{\Theta}_2$ falls $n > 2$

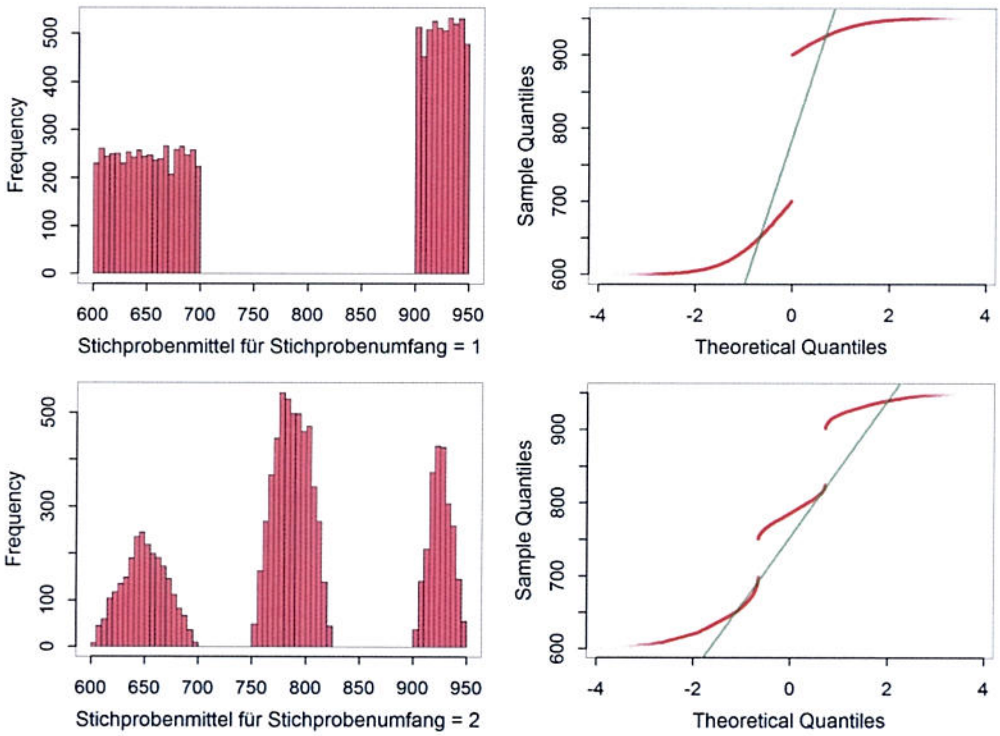
Wichtige Stichprobenfunktionen

- Gegeben: Einfache Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$, mit $E(X_i) = \mu$, $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$ Beliebige Verteilung,

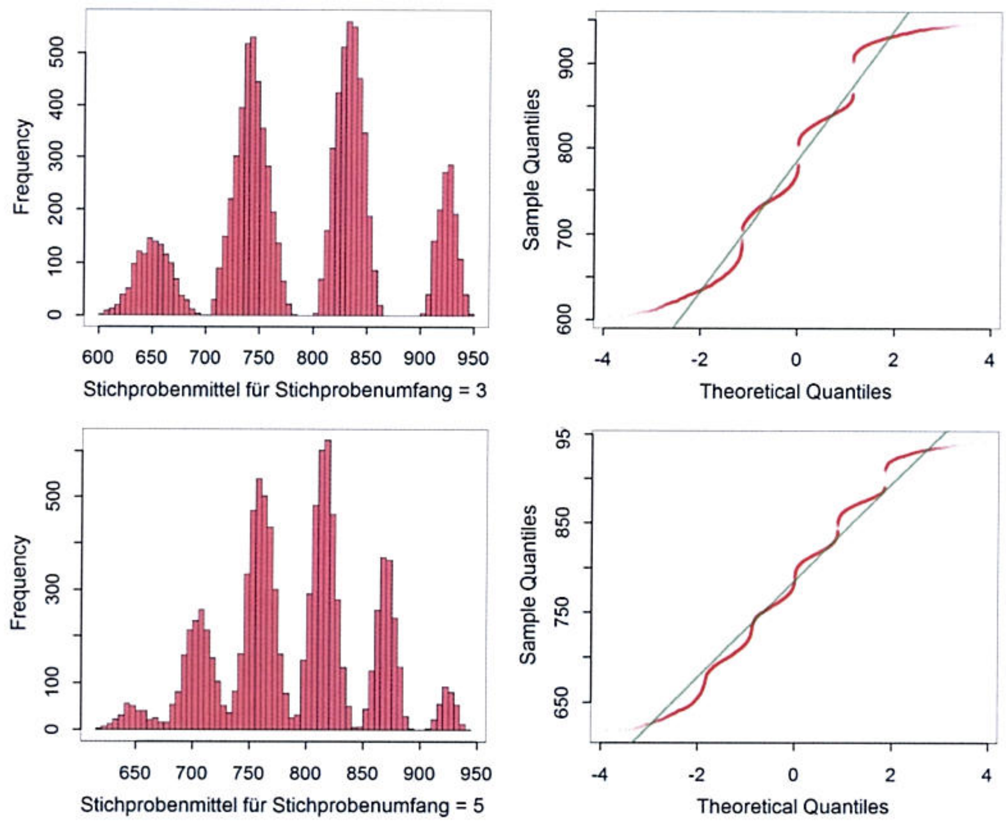
Stichprobenfunktion V	Bezeichnung	$E(V)$	$\mathrm{Var}(V)$
$\sum_{i=1}^{n} X_i$	Merkmalssumme	$n\mu$	$n\sigma^2$
$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	Stichprobenmittel	$E(\bar{X}) = \mu$	$\mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow \mathrm{Sd}(\bar{X}) = \sqrt{\mathrm{Var}(\bar{X})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$	Gauß-Statistik	0	1
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$	mittlere quadratische Abweichung bezüglich μ	σ^2	
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$	mittlere quadratische Abweichung	$\frac{n-1}{n}\sigma^2$	
$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$	Stichprobenvarianz	σ^2	
$S = \sqrt{S^2}$	Stichproben-Standardabweichung		
$\frac{\bar{X} - \mu}{S}\sqrt{n}$	t-Statistik		

Auswirkungen der Stichprobengröße

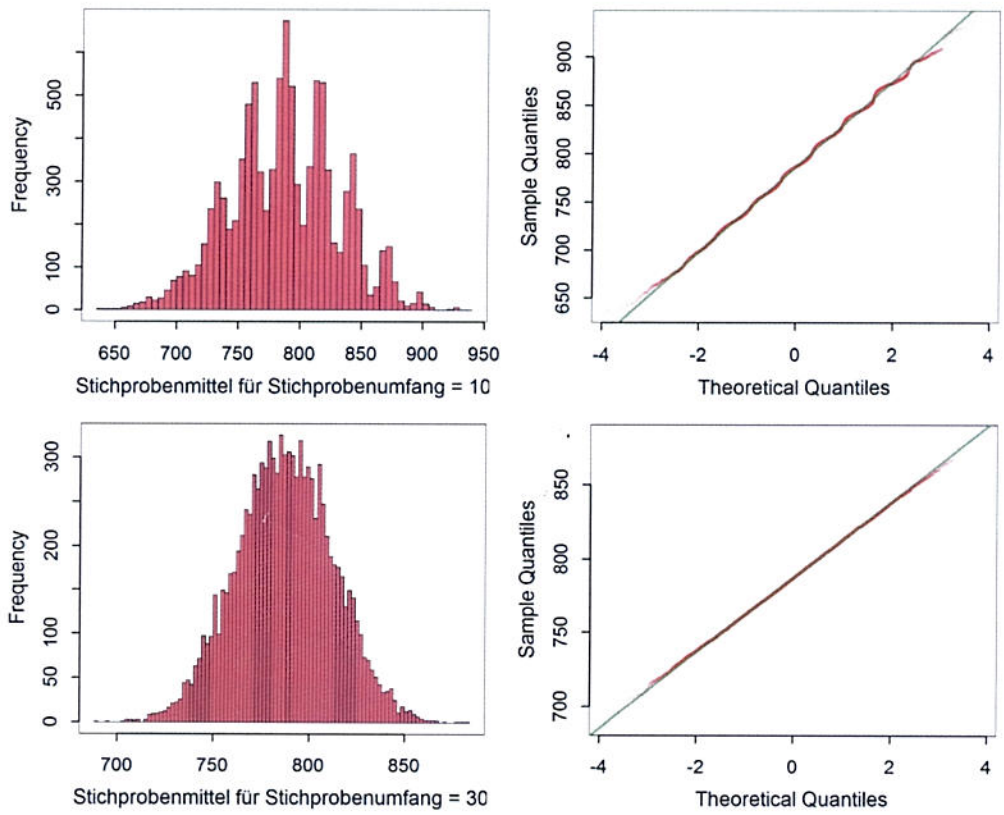
Ziehen von 10.000 Stichproben (jeweils vom Umfang n) und Berechnung der Stichprobenmittel (Verteilung: zwei überlagerte Gleichverteilungen):



Auswirkungen der Stichprobengröße



Auswirkungen der Stichprobengröße



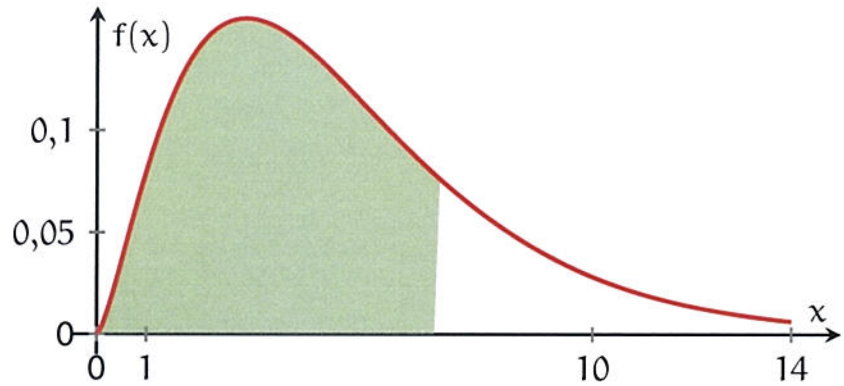
Testverteilungen

Chi-Quadrat-Verteilung

- Sind $X_1, \ldots, X_n$ iid $N(0;1)$-verteilte Zufallsvariablen, so wird die Verteilung von

$$Z = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

als Chi-Quadrat-Verteilung mit n Freiheitsgraden bezeichnet.



- Kurzschreibweise: $Z \sim \chi^2(n)$
- **Beispiel:** $\chi^2(30)$: $x_{0,975} = 46{,}98$

Quantilstabelle der χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden

$\alpha \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0.005	0.00	0.01	0.07	0.21	0.41	0.68	0.99	1.34	1.73	2.16	2.60	3.07	3.56	4.07	4.60
0.01	0.00	0.02	0.11	0.30	0.55	0.87	1.24	1.65	2.09	2.56	3.05	3.57	4.11	4.66	5.23
0.025	0.00	0.05	0.22	0.48	0.83	1.24	1.69	2.18	2.70	3.25	3.82	4.40	5.01	5.63	6.26
0.05	0.00	0.10	0.35	0.71	1.15	1.64	2.17	2.73	3.33	3.94	4.57	5.23	5.89	6.57	7.26
0.1	0.02	0.21	0.58	1.06	1.61	2.20	2.83	3.49	4.17	4.87	5.58	6.30	7.04	7.79	8.55
0.2	0.06	0.45	1.01	1.65	2.34	3.07	3.82	4.59	5.38	6.18	6.99	7.81	8.63	9.47	10.31
0.25	0.10	0.58	1.21	1.92	2.67	3.45	4.25	5.07	5.90	6.74	7.58	8.44	9.30	10.17	11.04
0.4	0.28	1.02	1.87	2.75	3.66	4.57	5.49	6.42	7.36	8.30	9.24	10.18	11.13	12.08	13.03
0.5	0.45	1.39	2.37	3.36	4.35	5.35	6.35	7.34	8.34	9.34	10.34	11.34	12.34	13.34	14.34
0.6	0.71	1.83	2.95	4.04	5.13	6.21	7.28	8.35	9.41	10.47	11.53	12.58	13.64	14.69	15.73
0.75	1.32	2.77	4.11	5.39	6.63	7.84	9.04	10.22	11.39	12.55	13.70	14.85	15.98	17.12	18.25
0.8	1.64	3.22	4.64	5.99	7.29	8.56	9.80	11.03	12.24	13.44	14.63	15.81	16.98	18.15	19.31
0.9	2.71	4.61	6.25	7.78	9.24	10.64	12.02	13.36	14.68	15.99	17.27	18.55	19.81	21.06	22.31
0.95	3.84	5.99	7.81	9.49	11.07	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31	19.68	21.03	22.36	23.68	25.00
0.975	5.02	7.38	9.35	11.14	12.83	14.45	16.01	17.53	19.02	20.48	21.92	23.34	24.74	26.12	27.49
0.99	6.63	9.21	11.34	13.28	15.09	16.81	18.48	20.09	21.67	23.21	24.73	26.22	27.69	29.14	30.58
0.995	7.88	10.60	12.84	14.86	16.75	18.55	20.28	21.95	23.59	25.19	26.76	28.30	29.82	31.32	32.80

$\alpha \backslash n$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0.005	5.14	5.70	6.26	6.84	7.43	8.03	8.64	9.26	9.89	10.52	11.16	11.81	12.46	13.12	13.79
0.01	5.81	6.41	7.01	7.63	8.26	8.90	9.54	10.20	10.86	11.52	12.20	12.88	13.56	14.26	14.95
0.025	6.91	7.56	8.23	8.91	9.59	10.28	10.98	11.69	12.40	13.12	13.84	14.57	15.31	16.05	16.79
0.05	7.96	8.67	9.39	10.12	10.85	11.59	12.34	13.09	13.85	14.61	15.38	16.15	16.93	17.71	18.49
0.1	9.31	10.09	10.86	11.65	12.44	13.24	14.04	14.85	15.66	16.47	17.29	18.11	18.94	19.77	20.60
0.2	11.15	12.00	12.86	13.72	14.58	15.44	16.31	17.19	18.06	18.94	19.82	20.70	21.59	22.48	23.36
0.25	11.91	12.79	13.68	14.56	15.45	16.34	17.24	18.14	19.04	19.94	20.84	21.75	22.66	23.57	24.48
0.4	13.98	14.94	15.89	16.85	17.81	18.77	19.73	20.69	21.65	22.62	23.58	24.54	25.51	26.48	27.44
0.5	15.34	16.34	17.34	18.34	19.34	20.34	21.34	22.34	23.34	24.34	25.34	26.34	27.34	28.34	29.34
0.6	16.78	17.82	18.87	19.91	20.95	21.99	23.03	24.07	25.11	26.14	27.18	28.21	29.25	30.28	31.32
0.75	19.37	20.49	21.60	22.72	23.83	24.93	26.04	27.14	28.24	29.34	30.43	31.53	32.62	33.71	34.80
0.8	20.47	21.61	22.76	23.90	25.04	26.17	27.30	28.43	29.55	30.68	31.79	32.91	34.03	35.14	36.25
0.9	23.54	24.77	25.99	27.20	28.41	29.62	30.81	32.01	33.20	34.38	35.56	36.74	37.92	39.09	40.26
0.95	26.30	27.59	28.87	30.14	31.41	32.67	33.92	35.17	36.41	37.65	38.89	40.11	41.34	42.56	43.77
0.975	28.85	30.19	31.53	32.85	34.17	35.48	36.78	38.08	39.36	40.65	41.92	43.19	44.46	45.72	46.98
0.99	32.00	33.41	34.81	36.19	37.57	38.93	40.29	41.64	42.98	44.31	45.64	46.96	48.28	49.59	50.89
0.995	34.27	35.72	37.16	38.58	40.00	41.40	42.80	44.18	45.56	46.93	48.29	49.64	50.99	52.34	53.67

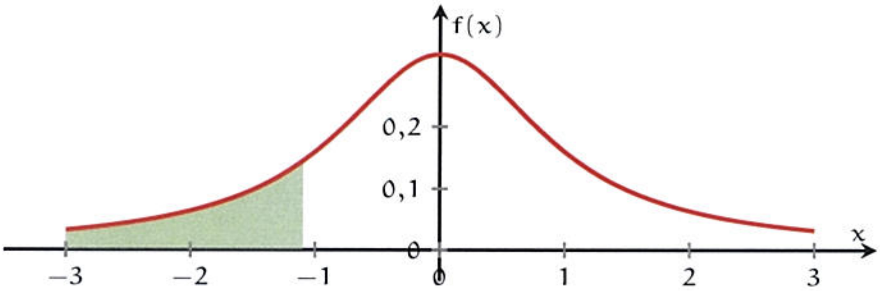
Testverteilungen: t-Verteilung

- Ist $X \sim N(0;1)$, $Z \sim \chi^2(n)$, X, Z unabhängig, so wird die Verteilung von

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{1}{n} Z}}$$

als t-Verteilung mit n Freiheitsgraden bezeichnet.

William Sealy Gosset
1876 – 1937



- Kurzschreibweise: $T \sim t(n)$
- **Beispiel:** $t(10)$ $x_{0,6} = 0{,}260$, $x_{0,5} = 0$, $x_{0,1} = -x_{0,9} = -1{,}372$

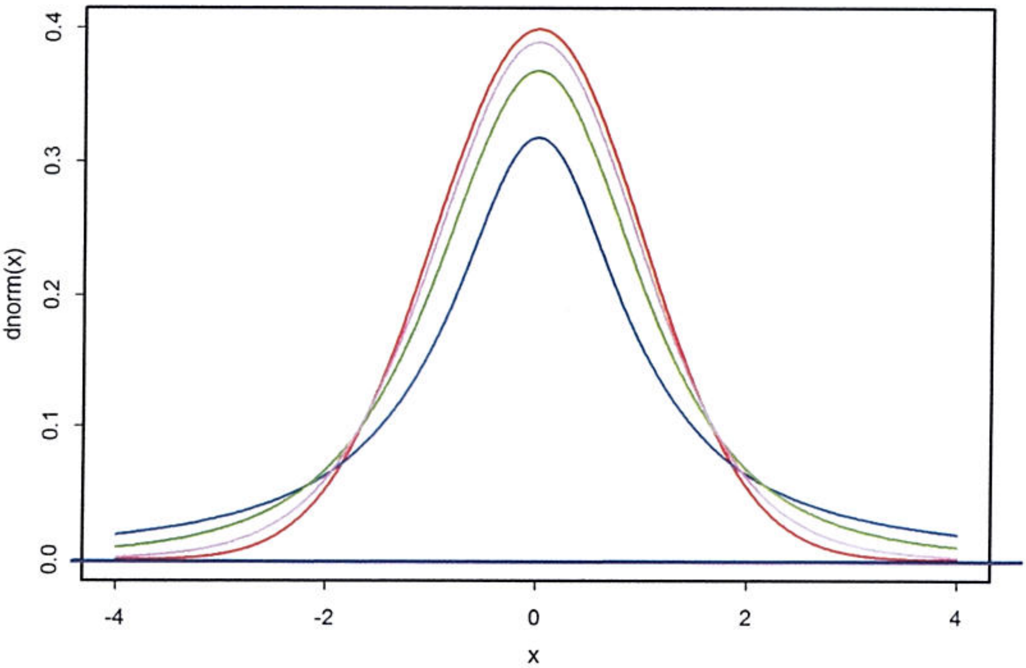
Quantilstabelle der t-Verteilung mit n Freiheitsgraden

$\alpha \backslash n$	0.6	0.75	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.325	1.000	1.376	3.078	6.314	12.706	31.820	63.657
2	0.289	0.816	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.765	0.979	1.638	2.353	3.183	4.541	5.841
4	0.271	0.741	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.727	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.718	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.711	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.706	0.889	1.397	1.860	2.306	2.897	3.355
9	0.261	0.703	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.700	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.698	0.875	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.696	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.054
13	0.259	0.694	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.692	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.691	0.866	1.341	1.753	2.131	2.603	2.947
16	0.258	0.690	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.689	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.688	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.688	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.687	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.686	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.686	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.685	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.685	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.684	0.856	1.316	1.708	2.059	2.485	2.787
26	0.256	0.684	0.856	1.315	1.706	2.055	2.479	2.779
27	0.256	0.684	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.683	0.855	1.312	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.683	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.683	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750

t-Verteilung vs. Normalverteilung

Dichtefunktion

- t-Verteilung mit 1 (blau), 3 (grün) und 10 (lila) Freiheitsgraden
- Standardnormalverteilung (rot)



Intervall-Schätzung

- Für einen unbekannten Verteilungsparameter ϑ soll auf Basis einer Stichprobe ein Intervall geschätzt werden.
- Verwendung der Stichprobenfunktionen V_u, V_o, so dass $V_u \leqq V_o$ und

$$P(V_u \leqq \vartheta \leqq V_o) = 1 - \alpha$$

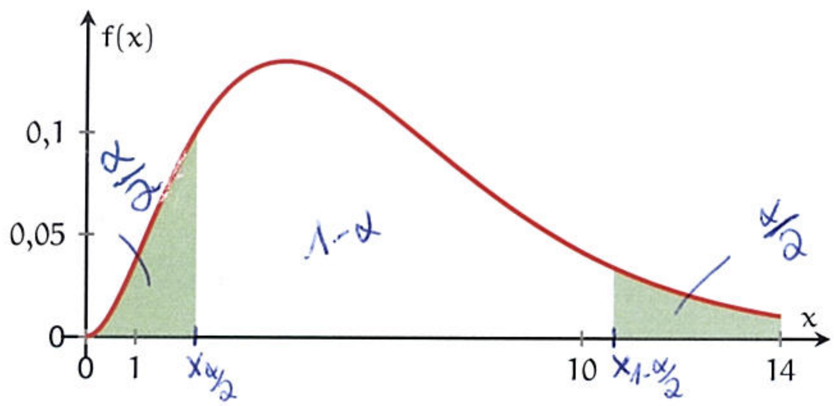
stets gelten.
$[V_u; V_o]$ heißt Konfidenzintervall (KI) für ϑ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$.
- Beachte: Das Schätzintervall $[v_u; v_o]$ ist Realisierung der Zufallsvariablen (!) V_u, V_o.
➠ Irrtumswahrscheinlichkeit α (klein, i.d.R. $\alpha \leqq 0{,}1$)
- Frage: Welche Konfidenzintervalle sind zur Schätzung geeignet?
➠ Hängt von Verteilung von G sowie vom unbekannten Parameter (μ, σ^2) ab!
- Im Folgenden: Einfache Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ mit $E(X_i) = \mu$, $Var(X_i) = \sigma^2$

Intervall-Schätzung

Wichtiger Spezialfall: Symmetrische Konfidenzintervalle

- Symmetrisch heißt **nicht**, dass die Dichte symmetrisch ist, sondern
- übereinstimmende Wahrscheinlichkeiten für Über-/Unterschreiten des Konfidenzintervalls, d.h.

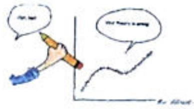
$$P(V_u > \vartheta) = P(V_o < \vartheta) = \tfrac{\alpha}{2}$$



- **Wichtig:** Eine Verkleinerung von α bewirkt eine Vergrößerung des Konfidenzintervalls.

1

Konfidenzintervall für μ bei Normalverteilung mit bekanntem σ^2

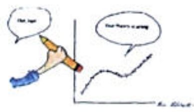


Vorgehensweise:

1. Festlegen des Konfidenzniveaus $1-\alpha$ μ, σ
2. Bestimmung des $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$-Fraktils c der $N(0,1)$-Verteilung
3. Berechnen des Stichprobenmittels $\bar{x}$
4. Berechnen des Wertes $\frac{\sigma c}{\sqrt{n}}$
5. Ergebnis der Intervall-Schätzung:

$$\left[\bar{x}-\frac{\sigma c}{\sqrt{n}}\,;\quad \bar{x}+\frac{\sigma c}{\sqrt{n}}\right]$$

Intervallschätzung: Beispiel



Beispiel

$X \sim N(\mu, \sigma = 2.4)$

Normalverteilung mit $\sigma = 2{,}4$
$(x_1, \dots, x_9) =$ (184.2, 182.6, 185.3, 184.5, 186.2, 183.9, 185.0, 187.1, 184.4)

Gesucht: Konfidenzintervall für μ zum Konfidenzniveau $1-\alpha = 0{,}99$

1. $1-\alpha = 0{,}99$
2. $N(0;1)$: $c = x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{1-\frac{0,01}{2}} = x_{0,995} = 2{,}576$ (Tab. 3; Interpolation) (Folie 218)
3. $\bar{x} = \frac{1}{9}(184{,}2 + \cdots + 184{,}4) = 184{,}8$
4. $\frac{\sigma c}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}4 \cdot 2{,}576}{\sqrt{9}} = 2{,}06$
5. $KI = [184{,}8 - 2{,}06; 184{,}8 + 2{,}06] = [182{,}74; 186{,}86]$

Interpretation: Mit 99 % Wahrscheinlichkeit ist $\mu \in [182{,}74; 186{,}86]$.

Wichtige Fraktilswerte

Wichtige $N(0;1)$-Fraktilswerte:

α	x_α
0,9	1,281552
0,95	1,644854
0,975	1,959964
0,99	2,326348
0,995	2,575829

(I.d.R. genügen drei Nachkommastellen.)

Intervalllänge

Statistik

1. Einführung
2. Deskriptive Statistik
3. W-Theorie
4. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen
Tabellen

- Bei bekannter Standardabweichung gilt offenkundig

$$L = V_o - V_u = \frac{2\sigma c}{\sqrt{n}}$$

- Welcher Stichprobenumfang n sichert eine vorgegebene (Maximal-)Länge L? $\Rightarrow$ Nach n auflösen! $\Rightarrow$

$$n \geqq \left(\frac{2\sigma c}{L}\right)^2$$

- Eine Halbierung von L erfordert eine Vervierfachung von n!
- Angewendet auf letztes **Beispiel**:

$$L = 4 \Rightarrow n \geqq \left(\tfrac{2 \cdot 2{,}4 \cdot 2{,}576}{4}\right)^2 = 9{,}556 \Rightarrow n \geqq 10$$

$$L = 2 \Rightarrow n \geqq \left(\tfrac{2 \cdot 2{,}4 \cdot 2{,}576}{2}\right)^2 = 38{,}222 \Rightarrow n \geqq 39$$

2

Konfidenzintervall für μ bei Normalverteilung mit unbekanntem σ^2

- Vorgehensweise:
  1. Festlegen des Konfidenzniveaus $1-\alpha$
  2. Bestimmung des $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$-Fraktils c der $t(n-1)$-Verteilung
  3. Berechnen des Stichprobenmittels $\bar{x}$ und der Stichproben-Standardabweichung s
  4. Berechnen des Wertes $\frac{sc}{\sqrt{n}}$
  5. Ergebnis der Intervall-Schätzung:

z.B.: $n=9 \Rightarrow (9-1)=8$ Freiheitsgrade
→ Fraktil aus der $t(8)$-Vtlg.

$s^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum x_i^2 - n\cdot\bar{x}^2\right)$
$\Leftrightarrow s = \sqrt{s^2}$

$$\left[\bar{x} - \frac{sc}{\sqrt{n}}\ ;\quad \bar{x} + \frac{sc}{\sqrt{n}}\right]$$

- Zu Schritt 2: Falls $n-1>30$ wird die $N(0;1)$-Verteilung verwendet.

Beispiel:
Wie das letzte Beispiel, jedoch σ unbekannt.

1. $1-\alpha = 0{,}99$
2. $t(8)$: $c = x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{1-\frac{0,01}{2}} = x_{0,995} = 3{,}355$ (Tab. 4) (Folie 220)
3. $\bar{x} = \frac{1}{9}(184{,}2 + \cdots + 184{,}4) = 184{,}8$
   $s = \sqrt{\frac{1}{8}\left[(184{,}2^2 + \cdots + 184{,}4^2) - 9\cdot 184{,}8^2\right]} = 1{,}31$
4. $\frac{sc}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}31\cdot 3{,}355}{\sqrt{9}} = 1{,}47$
5. $KI = [184{,}8 - 1{,}47; 184{,}8 + 1{,}47] = [183{,}33; 186{,}27]$

$s^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum x_i^2 - n\cdot\bar{x}^2\right)$
$\Leftrightarrow s = \sqrt{s^2}$

Interpretation: Mit 99 % Wahrscheinlichkeit ist $\mu \in [183{,}33; 186{,}27]$.

R Beispiel


```
x <- c(184.2, 182.6, 185.3, 184.5, 186.2,
       183.9, 185.0, 187.1, 184.4)
t.test(x,conf.level=.99)

##
##  One Sample t-test
##
## data:  x
## t = 422.1129, df = 8, p-value < 2.2e-16
## alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
## 99 percent confidence interval:
##  183.331 186.269
## sample estimates:
## mean of x
##     184.8
```


3 Konfidenzintervall für μ bei beliebiger Verteilung

$X \sim B(1,p)$

- Voraussetzung: $n > 30$, bzw. falls G dichotom: $5 \leqq \sum_{i=1}^{n} x_i \leqq n-5$

  binär 0/1

- Vorgehensweise:
  1. Festlegen des Konfidenzniveaus $1-\alpha$
  2. Bestimmung des $(1-\frac{\alpha}{2})$-Fraktils c der Standardnormalverteilung $N(0;1)$
  3. Berechnung des Stichprobenmittels $\bar{x}$ sowie eines Schätzwertes $\hat{\sigma}$ für die Standardabweichung σ der G mittels

$$\hat{\sigma} = \begin{cases} \sigma, & \text{falls } \sigma \text{ bekannt} \\ \sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})}, & \text{falls G dichotom} \\ s, & \text{sonst} \end{cases}$$

  4. Berechnung von $\frac{\hat{\sigma}c}{\sqrt{n}}$
  5. Ergebnis der Intervallschätzung:

$$\left[\bar{x} - \frac{\hat{\sigma}c}{\sqrt{n}}; \bar{x} + \frac{\hat{\sigma}c}{\sqrt{n}}\right]$$

- Zu Schritt 3: Manchmal kann anderer Schätzwert $\hat{\sigma}$ sinnvoller sein.

Konfidenzintervall für μ bei beliebiger Verteilung

Beispiel:

Poisson-Verteilung mit $\lambda \; (= \mu = \sigma^2)$ unbekannt.

$(x_1, \ldots, x_{40}) = (3; 8; \ldots; 6)$

Gesucht: KI für λ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0{,}9$

1. $1 - \alpha = 0{,}9$
2. $N(0;1)$: $c = x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{1-\frac{0,1}{2}} = x_{0,95} = 1{,}645$
3. $\bar{x} = \frac{1}{40}(3 + 8 + \cdots + 6) = 6{,}5$
   $\hat{\sigma} = \sqrt{\bar{x}} = \sqrt{6{,}5} = 2{,}55$ (da $\sigma^2 = \lambda$)
4. $\frac{\hat{\sigma}c}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}55 \cdot 1{,}645}{\sqrt{40}} = 0{,}66$
5. $\text{KI} = [6{,}5 - 0{,}66; 6{,}5 + 0{,}66] = [5{,}84; 7{,}16]$

Beispiel: Binomialverteilung mit Parameter p unbekannt.
bekannt: $\sum x_i = 15$
gesucht: KI für p zum Konfidenzniveau $1-\alpha = 0.95$
kurz: $\left[\bar{x} \pm \frac{\sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})} \cdot x_{0.975}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0.15 \pm \frac{\sqrt{0.1275} \cdot 1.96}{\sqrt{100}}\right] = [0.0800; 0.2200]$

4

Konfidenzintervall für σ^2 bei Normalverteilung

Statistik

1. Einführung
2. Deskriptive Statistik
3. W-Theorie
4. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen
Tabellen

Vorgehensweise

1. Festlegen eines Konfidenzniveaus $1 - a$
2. Bestimmung der $\frac{\alpha}{2}$- bzw. $(1 - \frac{\alpha}{2})$-Fraktile (c_1 bzw. c_2) der $\chi^2(n-1)$-Verteilung
3. Aus der Stichprobe: Berechnung der Größe

$$(n-1)s^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2$$

4. Berechnung des Konfidenzintervalls

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{c_2}; \frac{(n-1)s^2}{c_1}\right]$$

Überblick Intervallschätzung (Grundlage: einfache Stichprobe zu X)

Parameter?

- μ → **Verteilung?**
  - $X \sim N(\mu, \sigma)$
    - σ bekannt → 1 $\left[\bar{x} - \frac{\sigma \cdot c}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + \frac{\sigma \cdot c}{\sqrt{n}}\right]$ $c = x_{1-\alpha/2}$ des Φ
    - σ unbekannt → 2 $\left[\bar{x} - \frac{s \cdot c}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + \frac{s \cdot c}{\sqrt{n}}\right]$ $c = x_{1-\alpha/2}$ des t(n-1)-V…
      für $n > 30$: $c = x_{1-\alpha/2}$ der …
  - $X \sim B(1,p)$ ⇝ $\hat{\sigma} = \sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})}$
    Vor.: $5 \leq \sum x_i \leq n-5$
    → $\left[\bar{x} - \frac{\hat{\sigma} \cdot c}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + \frac{\hat{\sigma} \cdot c}{\sqrt{n}}\right]$ $c = x_{1-\alpha/2}$ der Φ
  - $X \sim$ bel. $n > 30$ (3)
    - σ bekannt → $\left[\bar{x} - \frac{\sigma \cdot c}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + \frac{\sigma \cdot c}{\sqrt{n}}\right]$ $c = x_{1-\alpha/2}$ des Φ
    - σ unbekannt → $\left[\bar{x} - \frac{s \cdot c}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + \frac{s \cdot c}{\sqrt{n}}\right]$ $c = x_{1-\alpha/2}$ der Φ
- σ^2 → **Verteilung?**
  - $X \sim N(\mu, \sigma)$
    mit $(n-1)s^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2$
    → 4 $\left[\frac{(n-1)s^2}{c_2} ; \frac{(n-1)s^2}{c_1}\right]$ $c_1 = x_{\alpha/2}$ der $\chi^2(n-1)$…
    $c_2 = x_{1-\alpha/2}$ des $\chi^2(n-1)$…

Falls σ bekannt:

a) Intervalllänge: $L = V_o - V_u = \frac{2 \cdot \sigma \cdot c}{\sqrt{n}}$

b) Stichprobenumfang n_{min}, der Maximallänge L sichert:

$$n \geq \left(\frac{2\sigma c}{L}\right)^2$$

KI für σ^2 bei Normalverteilung

Beispiel:

$G \sim N(\mu; \sigma)$;

$(x_1, \ldots, x_5) = (1, 1.5, 2.5, 3, 2)$

Gesucht: KI für σ^2 zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0{,}99$

1. $1 - \alpha = 0{,}99$
2. $\chi^2(5-1): \; c_1 = x_{\frac{\alpha}{2}} = x_{0{,}005} = 0{,}21$
   $c_2 = x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{0{,}995} = 14{,}86$ Folie 219 χ^2-Vtlg.
3. $\bar{x} = \frac{1}{5}(1 + 1{,}5 + 2{,}5 + 3 + 2) = 2$
   $\sum_{i=1}^{5} \underbrace{x_i^2}_{=22{,}5} - 5 \cdot \underbrace{\bar{x}^2}_{=2} = 1^2 + 1{,}5^2 + 2{,}5^2 + 3^2 + 2^2 - 5 \cdot 2^2 = 2{,}5$ TR möglich!
4. $\text{KI} = \left[\frac{2{,}5}{14{,}86}; \frac{2{,}5}{0{,}21}\right] = [0{,}17; 11{,}9]$

(Extrem groß, da n klein.)

Signifikanztests

- Vorliegen einer Hypothese über die Verteilung(en) der Grundgesamtheit(en).
- Beispiele:
  - „Der Würfel ist fair."
  - „Die Brenndauern zweier unterschiedlicher Glühbirnensorten sind gleich."
- Hypothese soll anhand einer Stichprobe überprüft werden.
- Prinzip:
  - Hypothese verwerfen, wenn „signifikanter" Widerspruch zur Stichprobe.
  - Ansonsten: Hypothese nicht verwerfen.
- Eine verworfene Hypothese gilt als statistisch widerlegt.
- Nicht-Verwerfung ist dagegen ein „Freispruch aus Mangel an Beweisen".

Zu Beachten:

Nicht-Verwerfung ist **kein** „statistischer Beweis", dass Hypothese wahr ist!
(„Trick": Hypothese falsch $\iff$ Gegenhypothese wahr!)