Anmerkungen zur Vorlesung Statistik vom 15.11.2016

Inhalt:

Kombinatorik, Zufall und Wahrscheinlichkeit:

- Permutationen und Kombinationen
- Begrifflichkeit: Zufallsvorgang, Ereignisse, etc.
- Sätze zu Wahrscheinlichkeiten:
    - Satz der bedingten Wahrscheinlichkeit (Unabhängigkeit von Ereignissen)
    - Satz der totalen Wahrscheinlichkeit
    - Satz von Bayes

Aufgabensammlung Statistik:

15.11.2016
Hausaufgabe
A34-A42

Kombinatorik

Permutationen:
Anordnung von n vorgegebenen Objekten

□ □ □ ... □
1k 2k 3k ... nte

[?] alle unterschiedlich/einmalig

Anmerkung: alle n vorgegebenen Objekte werden hier auch angeordnet / verwendet.

Kombinationen:
Auswahl von k aus n vorgegebenen Elementen

[?] mit Beachtung der Reihenfolge

[?] mit Wiederholung / „Zurücklegen"

Permutationen:

Fall 1: alle n Objekte unterschiedlich

Beispiel: Klausuraufgaben 1 bis 6
gesucht: Anzahl der möglichen Bearbeitungsreihenfolgen

□ □ □ □ □ □

$\Rightarrow 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$

allgemein: n (unterschiedliche) Objekte kann man auf $\boxed{n!}$ verschiedene Arten anordnen.

Ⓡ factorial(n)

Fall 2: n Objekte die jeweils einer von k < n Kategorien zugehören (zugehörige Häufigkeiten: n_k)

Beispiel: Korrektoren $\underbrace{S, S}, \underbrace{St, St}, D, A$

gesucht: Anzahl der unterscheidbaren Anordnungen (Aufgabenstellungszuordnungen)

□ □ □ □ □ □

$$\Rightarrow \frac{6!}{2!\,2!\,1!\,1!} = 180$$

allgemein: n Objekte aus k Gruppen zu jeweils $n_1, \dots, n_k$ nicht unterscheidbaren Elementen lassen sich auf

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} = \boxed{\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}}$$

verschiedene Arten anordnen.

Kombinationen:

Fall 1: mit Beachtung der Reihenfolge, mit Wiederholung

Beispiel: Anzahl möglicher EC-Karten-Pins
(... Zahlenschloss, Tresorcodes, TAN-Nummern, k-stellige Passwörter aus n-elementiger Menge, ...)

4-stelliger Code aus den Zahlen $\underbrace{0, 1, 2, \dots, 9}_{|\,| = n}$ ($4 = k$)

$\Rightarrow 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000 = 10^4$

allgemein: $\boxed{n^k}$

Fall 2: mit Beachtung der Reihenfolge, ohne Wiederholung

Beispiel: Top-3-Liste /-Anordnung eines Wettbewerbs mit 100 Teilnehmern ($3 = k$, $100 = n$)
gesucht: Anzahl der Möglichkeiten

$\Rightarrow 100 \cdot 99 \cdot 98 = 970\,200 = \frac{100!}{97!} = \frac{100!}{(100-3)!}$

allgemein: $\boxed{\frac{n!}{(n-k)!}}$

TR: 100 → nPr → 3 → =
$= 970.200$

Fall 3: ohne Beachtung der Reihenfolge, mit Wiederholung

Beispiel: Spezi (S), O-Limo (O), Z-Limo (Z) (3 Sorten $= n$)
gesucht: wieviele Möglichkeiten gibt es, einen Kasten mit 10 ($= k$) Flaschen zu kaufen? (Von Interesse ist nur die Kastenzusammensetzung)

$\Rightarrow \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66 = \frac{(10+3-1)!}{2!\,10!}$

allgemein: $\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!} = \boxed{\binom{n+k-1}{k}}$

Fall 4: ohne Beachtung der Reihenfolge, ohne Wiederholung

Beispiel: Wahl einer 4-köpfigen, gleichberechtigten Jury aus 20 Anwärtern
gesucht: Anzahl der Möglichkeiten

$\Rightarrow \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4!} = \frac{20!}{(20-4)!\,4!} = \binom{20}{4} = 4845$

Binomialkoeffizient: 4 aus 20

allgemein: $\boxed{\binom{n}{k}}$

$\boxed{\text{TR:}}$ $20 \boxed{nCr} \rightarrow 4 \rightarrow \boxed{=}$

$= 4845$

Zusammenhang / Anmerkung: Fall 2 Kombinationen entspricht für k = Fall 1 Permutationen, als falls alle n Objekt auch in eine Reihenfolge gebracht werden (ohne WDH).

Kombinatorik: Anzahl von Kombinationen bei Auswahl

2-mal Würfeln, das heißt Auswahl von $k = 2$ aus $n = 6$ Zahlen. →

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

- mit WH, mit RF: alle Möglichkeiten, $6^2 = 36$
- ohne WH, mit RF: Diagonale entfällt, $36 - 6 = 30 = 6 \cdot 5 = \frac{6!}{(6-2)!}$
- ohne WH, ohne RF: Hälfte des letzten Ergebnisses: $\frac{30}{2} = 15 = \frac{6!}{4!2!} = \binom{6}{2}$
- mit WH, ohne RF: Letztes Ergebnis plus Diagonale, $15 + 6 = 21 = \binom{7}{2}$

Auswahl von k aus n Dingen	mit Wiederholung	ohne Wiederholung
mit Reihenfolge	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$ TR: (nPr)
ohne Reihenfolge	$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ TR: nCr

Zufallsvorgänge, Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten

- **Zufallsvorgang:** Geschehen mit ungewissem Ausgang, z.B. Münzwurf, Würfelwurf
- **Elementarereignis** ω: Ein möglicher Ausgang, z.B. „Kopf" kleines Omega
  Elementarereignisse schließen sich gegenseitig aus („Kopf" oder „Zahl")!
- **Ergebnismenge** Ω: Menge aller ω
- **Beispiel:** Werfen zweier Würfel:

$$\Omega : \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & \cdots & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & \cdots & (2,6) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (6,1) & (6,2) & \cdots & (6,6) \end{Bmatrix}$$

Elementarereignisse eines Wurfs

Würfe

$$\Rightarrow \Omega = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \{1, \ldots, 6\}\} \; ; \; |\Omega| = 6^2 = 36$$

▷ Beispiel: 3-maliger Münzwurf

$$\Rightarrow \Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \{K, Z\}\}$$
$$= \{(K,K,K), (K,Z,K), (Z,K,K), (Z,Z,K), (K,K,Z), (K,Z,Z), (Z,K,Z), (Z,Z,Z)\} \; ; \; |\Omega| = 2^3 = 8$$

Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten

- Ereignis A: Folgeerscheinung eines Elementarereignisses
- Formal:

$$A \subset \Omega$$

A ist die Menge eines oder mehrerer Elementarereignisse ω, aber auch $\emptyset$ oder Ω sind möglich

- Ereignisse schließen sich nicht gegenseitig aus!

d.h. ein Elementarereignis ω kann $\in$ 2 verschiedenen Ereignisse A und B sein

- **Beispiel:** Werfen zweier Würfel:

Ereignis	verbal	formal
A	Augensumme $= 4$	$\{(1,3),\ (2,2),\ (3,1)\}$
B	Erste Zahl $= 2$	$\{(2,1),\ (2,2),\ \ldots,\ (2,6)\}$

- Wahrscheinlichkeit $P(A)$: Chance für das Eintreten von A
- Laplace-Wahrscheinlichkeit:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Fälle}}{\text{Anzahl aller möglichen Fälle}}$$

Laplace Wahrscheinlichkeit und Urnenmodell

- **Beispiel:** Werfen zweier Würfel:

$$\text{Augensumme} = 4: \quad A = \{(1,3),\ (2,2),\ (3,1)\}$$

$$|\Omega| = 36, \quad |A| = 3 \Rightarrow P(A) = \tfrac{3}{36} = \tfrac{1}{12} = 0{,}083$$

- Urnenmodell: Ziehe n Objekte aus einer Menge mit N Objekten
Anzahl Möglichkeiten:

mit Zurücklegen: N^n
ohne Zurücklegen: $N \cdot (N-1) \cdots (N-(n-1)) = \frac{N!}{(N-n)!}$

vgl. Kombinationen mit Beachtung der Reihenfolge (1. Zug, 2. Zug, ...)

- **Beispiel:**
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem gut gemischten 32-er Kartenblatt bei viermaligem Ziehen vier Asse zu bekommen?
a) Ziehen mit Zurücklegen,
b) Ziehen ohne Zurücklegen

$\left(\frac{4}{32}\right)^{4} = \frac{1}{4096}$ → # der Züge; W' für Ass in einem Zug

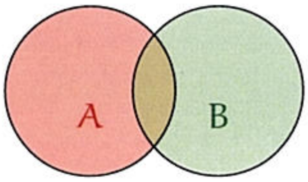
$\frac{\binom{4}{4}}{\binom{32}{4}} = \frac{1}{35960}$

Beispiele

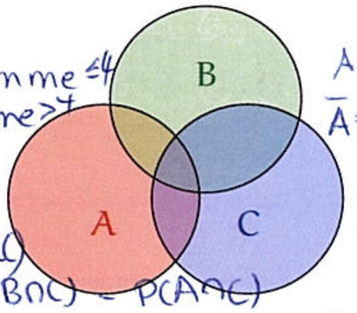
A	Augensumme = 12	$\{(6,6)\}$	Elementarereignis
B	Augensumme = 3	$\{(1,2),(2,1)\}$	2 Elementarereignisse
C	Augensumme ≤ 12	$\{(1,1), \ldots, (6,1), \ldots (1,6) \ldots, (6,6)\}$ $= \Omega$	Menge aller Elementarereignisse „sicheres Ereignis"
D	Augensumme > 12	$\{\} = \emptyset$	leere Menge „unmögliches Ereignis"

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

- Wichtige Rechenregeln:



1. $P(A) \leqq 1$
2. $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$
3. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqq P(B)$
4. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ⇝ A: Augensumme ≤ 4 ⇒ $\bar{A}$: Augensumme > 4
5. $P(A \cup B) =$
   $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



$A = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \{1, \dots, 6\} \wedge x_1 + x_2 \leq$
$\bar{A} = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \{1, \dots, 6\} \wedge x_1 + x_2 > 4$
$A \cup \bar{A} = \Omega$
$\bar{A}$ ist Komplementärereignis zu A

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$ (Einschluss-Ausschlussregel)

- **Beispiel:**

zu 4.) $P(\text{„Augenzahl} \leqq 5\text{“}) = 1 - P(\text{„Augenzahl} = 6\text{“}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Berechnung über Komplementärereignis sinnvoll falls „kompakter“

Beispiel Gegenereignis

Statistik

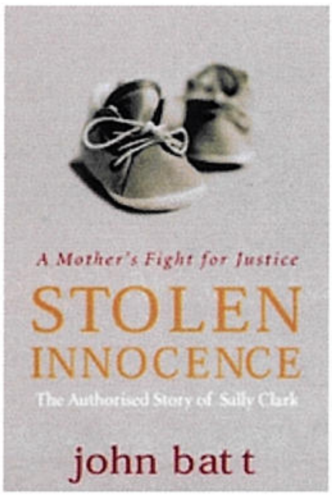
1. Einführung
2. Deskriptive Statistik
3. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
4. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Der Fall Sally Clark

- Sally Clarks Söhne Christopher und Harry sterben 1996 und 1997 beide kurz nach der Geburt an plötzlichem Kindstod.
- Kinderarzt: „Wahrscheinlich Mord, da 2 maliger plötzlicher Kindstod sehr unwahrscheinlich!“ (ohne konkrete Hinweise)
- Gerichtliche Untersuchung
- Hauptargument der Anklage gestützt durch Gerichtsgutachter Sir Roy Meadow (renommierter Facharzt für Kinderheilkunde): Wahrscheinlichkeit für plötzlichen Kindstod ist 1:8500, d.h. Wahrscheinlichkeit für 2 maliges Auftreten in einer Familie

$$p = \left(\frac{1}{8500}\right)^2 \approx 1 : 72\,000\,000$$

- Urteil: Doppelmord; Strafe: 2 mal lebenslang; Inhaftierung von Sally Clark 1999



Beispiel Gegenereignis

Der Fall Sally Clark

Gene find casts doubt on double 'cot death' murders

An expert said there was a one in 73 million chance Sally Clark's babies died naturally – and a jury agreed. Now new genetic research could help to clear her. **John Sweeney** and **Bill Law** investigate

- Problem: Es gibt sehr viele Familien mit 2 Kindern
- Europa: ca. 80 Mio Familien mit Kindern, davon ca. 50% mit mindestens zwei Kindern, also ca. 40 Mio.
- Wahrscheinlichkeit, dass in einer solchen Familie kein zweifacher plötzlicher Kindstod auftritt: $1 - \left(\frac{1}{8500}\right)^2$
  Annahmen:
  - Jede dieser Familien hat genau 2 Kinder; in Wirklichkeit: ca. 20% dieser Familien haben mindestens 3 Kinder
  - Zweiter plötzlicher Kindstod unabhängig von erstem (nicht untersucht)
- Wahrscheinlichkeit, dass in 40 Mio. Familien mindestens ein zweifacher plötzlicher Kindstod auftritt:

$$1 - \left(1 - \left(\frac{1}{8500}\right)^2\right)^{40\ 000\ 000} \approx 42{,}5\%$$

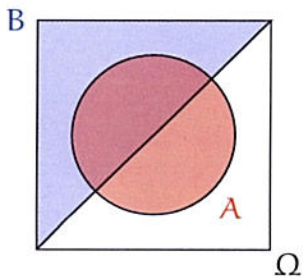
- 2001: Royal Statistical Society interveniert
- 2003: Sally Clark wird nach Revision freigesprochen
- 2007 findet man sie tot in ihrer Wohnung auf - gestorben an einer akuten Alkoholvergiftung. Sie habe sich, so ihre Familie, von dem Justizirrtum nie erholt.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

- Wahrscheinlichkeit von A hängt von anderem Ereignis B ab. (B kann zeitlich vor A liegen, muss aber nicht!)
- **Beispiel:** Wahrscheinlichkeit für Statistiknote hängt von Mathenote ab.
- Formal:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Im Venndiagramm:

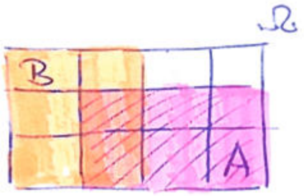


Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$$

„Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B" /
„... von A gegeben B"

Unabhängigkeit:
Zwei Ereignisse A und B heißen unabhängig, falls gilt:
P(A|B)=P(A)

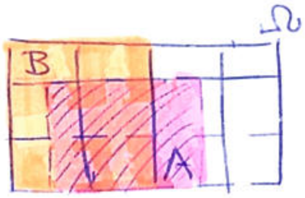


$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 6/12$

$\mathbb{P}(A\cap B) = 2/12$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A|B) = \frac{2/12}{6/12} = \frac{1}{3}$

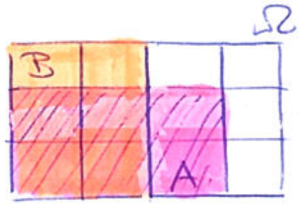
$< \mathbb{P}(A)$



$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 6/12$

$\mathbb{P}(A\cap B) = 3/12$

$\boxed{\Rightarrow \mathbb{P}(A|B) = \frac{3/12}{6/12} = 1/2 = \mathbb{P}(A)}$



$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 6/12$

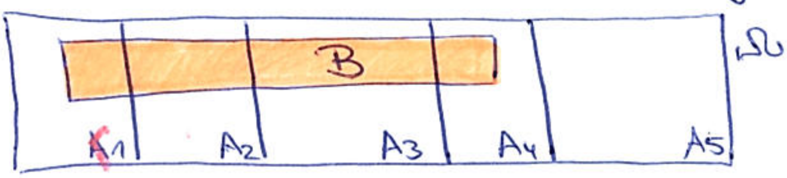
$\mathbb{P}(A\cap B) = 4/12$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A|B) = \frac{4/12}{6/12} = 2/3$

$> \mathbb{P}(A)$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Es gelte: $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \Omega$ und $A_i \cap A_j = \{\}$ (für $i \neq j$) (disjunkte Zerlegung von Ω)



$\boxed{2}$ Bestimme $\mathbb{P}(B)$ falls $\mathbb{P}(B|A_i)$ und $\mathbb{P}(A_i)$ $\forall i$ bekannt.

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1\cap B) + \mathbb{P}(A_2\cap B) + \mathbb{P}(A_3\cap B) + \mathbb{P}(A_4\cap B) + \mathbb{P}(A_5\cap B)$

[Es gilt: $\mathbb{P}(B|A_i) = \frac{\mathbb{P}(A_i\cap B)}{\mathbb{P}(A_i)}$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(A_i\cap B) = \mathbb{P}(B|A_i)\cdot \mathbb{P}(A_i)$]

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A_1)\cdot\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B|A_2)\cdot\mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(B|A_5)\cdot\mathbb{P}(A_5)$

allgemein gilt:

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(B|A_i)\cdot\mathbb{P}(A_i)}$$

Satz von Bayes

Es gilt: $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} \Leftrightarrow \mathbb{P}(A|B)\cdot\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A\cap B)$

und $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} \Leftrightarrow \mathbb{P}(B|A)\cdot\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A\cap B)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A|B)\cdot\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\cdot\mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\cdot\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}}$