Anmerkungen zur Vorlesung Statistik vom 20.12.2016

Inhalt:

- Intervall-Schätzung
    - Umsetzung mit R
- Signifikanztests
    - Grundlagen
    - Einstichproben-Gaußtest, Einstichproben-t-Test, approximativer Gaußtest
    - Chi-Quadrat Test für die Varianz
    - Kontingenztest

Aufgabensammlung Statistik:

20.12.2016
Hausaufgabe
A83-A85,
A87-A88 fertig
sowie
A91-A96

Klausurtermin: Freitag, 13. Januar 2017, 15:30 Uhr

13.1	15:30	IN3_2012	95	**Statistik**	Wins/Etschberger	90	M1.01	AW
13.1	15:30	IN3_2007	2	**Statistik**	Wins/Etschberger	90	M1.02	AW
13.1	15:30	WI2_2014	60	**Statistik**	Etschberger/Wins	90	J2.18	AW
13.1	15:30	WI2_2012	8	**Statistik**	Etschberger/Wins	90	J3.19	AW
13.1	15:30	WI2_2007	2	**Statistik**	Etschberger/Wins	90	W3.03	AW
13.1	15:30						Res.:	Wins/Etschberge

WDH-/Fragestunde: Dienstag, 10. Januar 2017, 14:00 – 17:00 Uhr, Raum W3.02
Fragen bitte vorab an anett.wins@wiwi.uni-augsburg.de

KI für σ^2 bei Normalverteilung

Beispiel:

$G \sim N(\mu; \sigma)$;

$(x_1, \dots, x_5) = (1, 1.5, 2.5, 3, 2)$

Gesucht: KI für σ^2 zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0{,}99$

1. $1 - \alpha = 0{,}99$
2. $\chi^2(5-1): \; c_1 = x_{\frac{\alpha}{2}} = x_{0{,}005} = 0{,}21$
   $c_2 = x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{0{,}995} = 14{,}86$ } Folie 219 χ^2-Vtlg.
3. $\bar{x} = \frac{1}{5}(1 + 1{,}5 + 2{,}5 + 3 + 2) = 2$
   $\sum_{i=1}^{5} \underbrace{x_i^2}_{=22{,}5} - 5 \cdot \underbrace{\bar{x}^2}_{=2} = 1^2 + 1{,}5^2 + 2{,}5^2 + 3^2 + 2^2 - 5 \cdot 2^2 = 2{,}5$ } TR möglich!
4. $\text{KI} = \left[\frac{2{,}5}{14{,}86}; \frac{2{,}5}{0{,}21}\right] = [0{,}17; 11{,}9]$

(Extrem groß, da n klein.)

Signifikanztests

- Vorliegen einer Hypothese über die Verteilung(en) der Grundgesamtheit(en).
- Beispiele:
  - „Der Würfel ist fair."
  - „Die Brenndauern zweier unterschiedlicher Glühbirnensorten sind gleich."
- Hypothese soll anhand einer Stichprobe überprüft werden.
- Prinzip:
  - Hypothese verwerfen, wenn „signifikanter" Widerspruch zur Stichprobe.
  - Ansonsten: Hypothese nicht verwerfen.
- Eine verworfene Hypothese gilt als statistisch widerlegt.
- Nicht-Verwerfung ist dagegen ein „Freispruch aus Mangel an Beweisen".

Zu Beachten:

Nicht-Verwerfung ist **kein** „statistischer Beweis", dass Hypothese wahr ist!
(„Trick": Hypothese falsch $\Longleftrightarrow$ Gegenhypothese wahr!)

Test des Erwartungswertes bei bekannter Varianz in der Grundgesamtheit

- Zunächst:
  - $G \sim N(\mu; \sigma)$ mit σ bekannt
  - Einfache Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$
  - (Null-)Hypothese $H_0: \mu = \mu_0$
- **Beispiel:**
  $X_1, \ldots, X_{25}$ mit X_i = Füllmenge der i-ten Flasche $\sim N(\mu; 1{,}5)$
  Nullhypothese $H_0: \mu = 500$, d.h. $\mu_0 = 500$
- Je nach Interessenlage sind unterschiedliche **Gegenhypothesen** möglich:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & H_1: \mu \neq \mu_0 \\ \text{b)} & H_1: \mu < \mu_0 \\ \text{c)} & H_1: \mu > \mu_0 \end{array}$$

- Entscheidung:

$$\begin{array}{lll} & H_0: \mu = \mu_0 & \text{wird abgelehnt gegenüber} \\ \text{a)} & H_1: \mu \neq \mu_0, & \text{wenn } |\bar{x} - \mu_0| \text{ „sehr groß" ist} \\ \text{b)} & H_1: \mu < \mu_0, & \text{wenn } \bar{x} \text{ „weit kleiner" als } \mu_0 \text{ ist} \\ \text{c)} & H_1: \mu > \mu_0, & \text{wenn } \bar{x} \text{ „weit größer" als } \mu_0 \text{ ist} \end{array}$$

Test des Erwartungswertes bei bekannter Varianz in der Grundgesamtheit

Entscheidungskriterium aus Stichprobe:

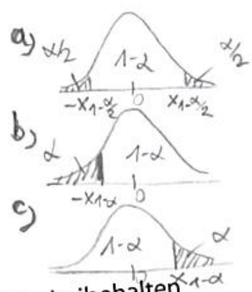
$$v = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$$

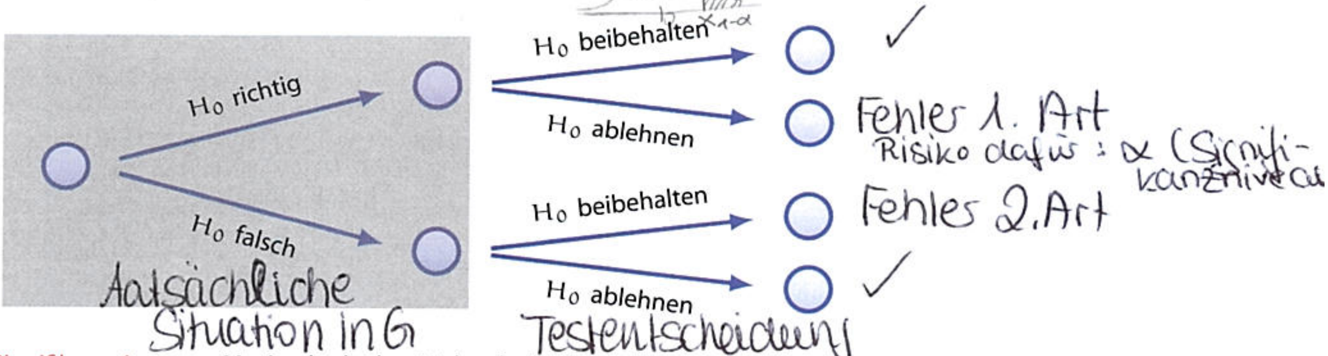
- Vorteil: Verteilung bekannt: $N(0; 1)$ $\quad V \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$
- Dann:

$$\begin{array}{llll} & H_0: \mu = \mu_0 & \text{wird abgelehnt gegenüber} & \\ \text{a)} & H_1: \mu \neq \mu_0, & \text{wenn } |v| \text{ „sehr groß"} & \text{ist} \\ \text{b)} & H_1: \mu < \mu_0, & \text{wenn } v \text{ „sehr negativ"} & \text{ist} \\ \text{c)} & H_1: \mu > \mu_0, & \text{wenn } v \text{ „sehr positiv"} & \text{ist} \end{array}$$

Mögliche Fehlentscheidungen

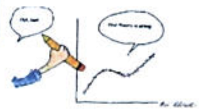
- **Ablehnung von H_0**, obwohl H_0 richtig ist: Fehler 1. Art
- **Nicht-Ablehnung von H_0**, obwohl H_0 falsch ist: Fehler 2. Art





- Signifikanzniveau α: Maximal erlaubte Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art.

Test des Erwartungswertes bei bekannter Varianz in der Grundgesamtheit

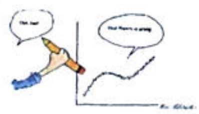


- Mithilfe von α und V kann geklärt werden, was „sehr groß“ usw. heißt:
  Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art im Fall a): $|v| > x$, obwohl H_0 richtig:

$$\begin{aligned} P(|V| > x) &= P(V > x) + P(V < -x) \\ &= 2 \cdot P(V > x) \qquad \text{(Symmetrie der Normalverteilung)} \\ &= 2 \cdot [1 - P(V \leqq x)] = 2 \cdot [1 - \Phi(x)] \stackrel{!}{=} \alpha \\ &\iff \Phi(x) = 1 - \tfrac{\alpha}{2} \\ &\iff x = x_{1-\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

  H_0 wird demnach verworfen,
  wenn $|v| > x_{1-\frac{\alpha}{2}}$ bzw. $v \in B$ ist.
  $B = (-\infty; -x_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (x_{1-\frac{\alpha}{2}}; \infty)$ heißt Verwerfungsbereich.
- Analoge Vorgehensweise für die Fälle b) und c)

Test des Erwartungswertes bei bekannter Varianz in der GG



Rezept

1. Ein Signifikanzniveau α wird festgelegt.
2. Der Verwerfungsbereich

$$\begin{aligned} B &= \left(-\infty;\ -x_{1-\alpha/2}\right) \cup \left(x_{1-\alpha/2};\ \infty\right) && \text{im Fall a)} \\ B &= \left(-\infty;\ -x_{1-\alpha}\right) && \text{im Fall b)} \\ B &= \left(x_{1-\alpha};\ \infty\right) && \text{im Fall c)} \end{aligned}$$

   wird festgelegt, wobei $x_{1-\alpha/2}$ bzw. $x_{1-\alpha}$ das $(1-\alpha/2)$- bzw. das $(1-\alpha)$-Fraktil der $N(0,1)$-Verteilung ist. (Wichtig: Der Ablehnungsbereich ist also unabhängig von der Stichprobe)
3. Wichtig: Erst jetzt werden die Daten der Stichprobe erhoben/beachtet:
   Der Testfunktionswert $v = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ wird berechnet.
4. H_0 wird genau dann verworfen, wenn $v \in B$ gilt.

Einstichproben-Gaußtest

Beispiel:

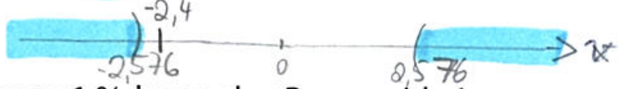
$X_1, \ldots, X_{25}$ mit $X_i \sim N(\mu; 1{,}5)$ und $\bar{x} = 499{,}28$

Prüfe $H_0: \ \mu = 500, \ H_1: \ \mu \neq 500$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}01$

Lösung: Einstichproben-Gaußtest, Fall a)

1. $\alpha = 0{,}01$
2. $N(0;1): \ x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{1-0{,}005} = x_{0{,}995} = 2{,}576$
   $\Rightarrow B = (-\infty; -2{,}576) \cup (2{,}576; \infty)$
3. $v = \frac{499{,}28-500}{1{,}5} \cdot \sqrt{25} = -2{,}4$
4. $v \notin B \Rightarrow H_0$ nicht verwerfen

B Wert der Teststatistik aus der STP v:
v=
-2,4



Interpretation: Zum Signifikanzniveau 1 % kann der Brauerei keine Abweichung vom Sollwert $\mu_0 = 500$ nachgewiesen werden.

Einstichproben-t-Test und approximativer Gaußtest

Gegeben:

- Einfache Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ mit
- $E(X_i) = \mu, \ Var(X_i) = \sigma^2$

Hypothesenpaare:

a) $H_0: \ \mu = \mu_0$, $H_1: \ \mu \neq \mu_0$
b) $H_0: \ \mu = \mu_0$ (oder $\mu \geqq \mu_0$), $H_1: \ \mu < \mu_0$
c) $H_0: \ \mu = \mu_0$ (oder $\mu \leqq \mu_0$), $H_1: \ \mu > \mu_0$

Voraussetzungen:

1. Normalverteilung mit σ unbekannt (Einstichproben-t-Test)
   oder
2. Beliebige Verteilung
   mit $n > 30$ bzw. $5 \leqq \sum x_i \leqq n - 5$ (bei $B(1;p)$)
   (approximativer Gaußtest) dichotom / 0-1-kodiert ...

Einstichproben-t-Test, approximativer Gaußtest

Ablauf:

1. Festlegen des Signifikanzniveaus α
2. Festlegen des Verwerfungsbereichs B:
   - Falls $H_1 : \mu \neq \mu_0$: $B = (-\infty; -x_{1-\alpha/2}) \cup (x_{1-\alpha/2}; \infty)$
   - Falls $H_1 : \mu < \mu_0$: $B = (-\infty; -x_{1-\alpha})$
   - Falls $H_1 : \mu > \mu_0$: $B = (x_{1-\alpha}; \infty)$

   Dabei steht $x_{1-\alpha/2}$ bzw. $x_{1-\alpha}$ für das jeweilige Fraktil
   - der $t(n-1)$-Verteilung bei $n \leqslant 29$ bzw.
   - der $N(0;1)$-Verteilung bei $n \geqslant 30$.
3. Berechnen des Testfunktionswertes:

$$v = \begin{cases} \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s}\sqrt{n} & \text{falls Grundgesamtheit } N(\mu;\sigma)\text{-verteilt, } \sigma \text{ unbekannt oder falls Verteilung der GG beliebig, } n > 30,\ \sigma \text{ unbekannt} \\ \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} & \text{falls Verteilung der GG beliebig, } n > 30,\ \sigma \text{ bekannt} \\ \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{\mu_0(1-\mu_0)}}\sqrt{n} & \text{falls GG gemäß } B(1;\underset{\text{dichotom}}{\overset{\hat{p}=}{\mu}})\text{-verteilt, } \cancel{n > 30}\ 5 \leq \sum x_i \leq n-5 \end{cases}$$

Einstichproben-t-Test: Beispiel

Beispiel t-Test: Energieaufnahme von Frauen

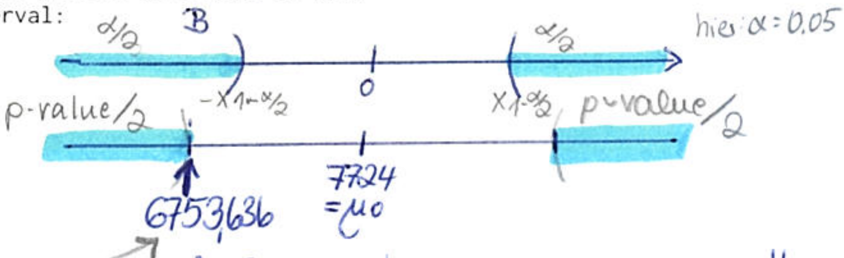
- Empfohlene täglich Energieaufnahme für Frauen: 7724 kJ (1845 kcal)
- Nehme einfache Stichprobe von 11 Frauen und teste zum Signifkanzniveau $\alpha = 0{,}05$ für
- H_0: „Der Erwartungswert der täglichen Energieaufnahme für Frauen ist 7724 kJ" (μ_0)
- gegen H_1: $\mu \neq \mu_0$

```
daily.intake <- c(5260, 5470, 5640, 6180, 6390, 6515, 6805, 7515, 7515, 8230, 8770)
t.test(daily.intake, alternative="two.sided", mu=7724, conf.level=0.95)

##
##  One Sample t-test
##
## data:  daily.intake
## t = -2.8179, df = 10, p-value = 0.01823
## alternative hypothesis: true mean is not equal to 7724
## 95 percent confidence interval:
##  5986.348 7520.925
## sample estimates:
## mean of x
##  6753.636
```

degrees of freedom / Freiheitsgrade

hier: $\alpha = 0{,}05$



⇒ Testentscheidung: $p < \alpha$ ⇒ H_0 ablehnen (signifik. Testergebnis)

Beispiel: Einstichproben-t-Test

vgl. S 194

$s = 1,6$

(1) $\alpha = 0,01$

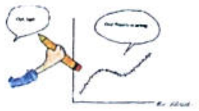
(2) $t(25-1) = t(24)$: $x_{0,995} = 2,797$

$\Rightarrow B = (-\infty; -2,797) \cup (2,797; \infty)$

(3) $v = \dfrac{499,28-500}{1,6} \cdot \sqrt{25} = -2,25$

(4) $v \notin B \Rightarrow H_0$ nicht verwerfen.

Einstichproben-t-Test: Beispiel



Beispiel t-Test: Energieaufnahme von Frauen

- Empfohlene täglich Energieaufnahme für Frauen: 7724 kJ (1845 kcal)
- Nehme einfache Stichprobe von 11 Frauen und teste zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$ für
- H_0: „Der Erwartungswert der täglichen Energieaufnahme für Frauen ist 7724 kJ" (μ_0)
- gegen H_1: $\mu \neq \mu_0$

```r
daily.intake <- c(5260, 5470, 5640, 6180, 6390, 6515, 6805, 7515, 7515, 8230, 8770)
t.test(daily.intake, alternative="two.sided", mu=7724, conf.level=0.95)

##
##  One Sample t-test
##
## data:  daily.intake
## t = -2.8179, df = 10, p-value = 0.01823
## alternative hypothesis: true mean is not equal to 7724
## 95 percent confidence interval:
##  5986.348 7520.925
## sample estimates:
## mean of x
##  6753.636
```


Einstichproben-t-Test, approx. Gaußtest

Beispiel:

$X_1, \ldots, X_{2000} \sim B(1;p)$ mit

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls i-te Person Wähler einer bestimmten Partei} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Ergebnis der Stichprobe: $\sum_{i=1}^{2000} x_i = 108$

Prüfe $H_0 : p \leqq 0{,}05$ gegen $H_1 : p > 0{,}05$ zum Signifikanzniveau 2 %

Lösung:

approximativer Gaußtest bei dichotomer (zweiwertiger) Verteilung; Voraussetzung 2 erfüllt: $5 \leqq 108 \leqq 2000 - 5$

1. $\alpha = 0{,}02$
2. $N(0;1) : x_{1-\alpha} = x_{0{,}98} = 2{,}05$ (Tabelle) $\Rightarrow B = (2{,}05; \infty)$
3. $v = \dfrac{\frac{108}{2000} - 0{,}05}{\sqrt{0{,}05 \cdot (1 - 0{,}05)}} \sqrt{2000} = 0{,}82$
4. $v \notin B \Rightarrow H_0$ nicht verwerfen

Zusatzfrage: Entscheidung, falls $\alpha = 0{,}01$? $\rightarrow$ Keine Änderung!

Chi-Quadrat-Test für die Varianz

- Gegeben: Einfache Stichprobe $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu; \sigma)$
- Hypothesenpaare:

a)	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$	$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
b)	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ (oder $\sigma^2 \geqq \sigma_0^2$),	$H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$
c)	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ (oder $\sigma^2 \leqq \sigma_0^2$),	$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$

- **Vorgehensweise:**
  1. Festlegen des Signifikanzniveaus α.
  2. Festlegen des Verwerfungsbereichs:

$B = [0; x_{\alpha/2}) \cup (x_{1-\alpha/2}; \infty)$ im Fall a)
$B = [0; x_\alpha)$ im Fall b)
$B = (x_{1-\alpha}; \infty)$ im Fall c)

⚠ Fraktilswerte der $\chi^2(n-1)$- Verteilung
= Freiheitsgrade

  3. Berechnung des Testfunktionswertes:

$$v = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

⚠ s^2 mit Taschenrechner (TR) berechnen!

Chi-Quadrat-Test für die Varianz

Statistik

1. Einführung
2. Deskriptive Statistik
3. W-Theorie
4. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen
Tabellen

Beispiel: $G \sim N(\mu; \sigma)$

$(x_1, \ldots, x_{10}) = (2100; 2130; 2150; 2170; 2210; 2070; 2230; 2150; 2230; 2200)$

Prüfe $H_0: \sigma = 40$, $H_1: \sigma \neq 40$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}1$

Lösung: χ^2-Test für die Varianz, Hypothese Fall a);
Voraussetzungen sind erfüllt

1. $\alpha = 0{,}1$
2. $\chi^2(9): x_{\frac{\alpha}{2}} = x_{0,05} = 3{,}33;\ x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{0,95} = 16{,}92$
(Tabelle der χ^2-Verteilung)

} Folie 219

$$\Rightarrow B = [0; 3{,}33) \cup (16{,}92; \infty)$$

3. $\bar{x} = \frac{1}{10}(2100 + 2130 + \cdots + 2200) = 2164$
$v = \frac{1}{40^2}[(2100 - 2164)^2 + \cdots + (2200 - 2164)^2] = 16{,}65$

oder: $v = \frac{\overset{9}{(n-1)}\,\overset{\text{mit TR}}{s^2}}{\underset{40^2}{\sigma_0^2}}$

$\Rightarrow v \notin B \Rightarrow H_0$ nicht verwerfen

Zwei verbundene einfache Stichproben: Kontingenztest

- Situation: In Grundgesamtheit G: Zwei verbundene einfache Stichproben, also Beobachtung zweier Merkmale X, Y
- Hypothese:

H_0 : Die beiden Merkmale X und Y sind in G unabhängig.
H_1 : X und Y sind in G abhängig.

Vorgehensweise Kontingenztest:

1. Festlegen des Signifikanzniveaus α.
2. Unterteilung der x-Achse in $k \geqslant 2$ und die y-Achse in $l \geqslant 2$ disjunkte, aneinander angrenzende Intervalle $A_1, \dots, A_k$ bzw. $B_1, \dots, B_l$
3. Erstellen einer Kontingenztabelle mit Randhäufigkeiten:

$x\downarrow\ y\rightarrow$	B_1	B_2	$\cdots$	B_l	
A_1	h_{11}	h_{12}	$\cdots$	h_{1l}	$h_{1\bullet}$
A_2	h_{21}	h_{22}	$\cdots$	h_{2l}	$h_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
A_k	h_{k1}	h_{k2}	$\cdots$	h_{kl}	$h_{k\bullet}$
	$h_{\bullet 1}$	$h_{\bullet 2}$	$\cdots$	$h_{\bullet l}$	n

Zwei verbundene einfache Stichproben: Kontingenztest

Vorgehensweise Kontingenztest (Fortsetzung):

#Zeilen #Spalten

4. Mit dem Fraktilswert $x_{1-\alpha}$ der χ^2-Verteilung mit $(k-1)\cdot(l-1)$ Freiheitsgraden: Berechnung des Verwerfungsbereichs

$$B = (x_{1-\alpha}; \infty)$$

5. Zu jeder Kombination aus $i = 1, \dots, k$ und $j = 1, \dots, l$: Berechnung der Größe

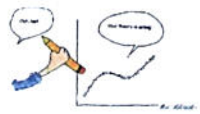
$$\tilde{h}_{ij} = \frac{h_{i\bullet} \cdot h_{\bullet j}}{n}$$

6. Berechnung des Testfunktionswerts v:

$$v = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{(\tilde{h}_{ij} - h_{ij})^2}{\tilde{h}_{ij}} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{h_{ij}^2}{\tilde{h}_{ij}} - n$$

7. Ablehnung von H_0 genau dann, wenn $v \in B$.

Zwei verbundene einfache Stichproben: Kontingenztest



Kontingenztest: Beispiel

- 400 Erstkandidaten einer praktischen Führerscheinprüfung schneiden abhängig von der besuchten Fahrschule folgendermaßen ab:

	Fahrschule		
	A	B	C
bestanden	130	88	62
durchgefallen	70	38	12

- Zum Signifikanzniveau von 5 % soll getestet werden, ob das Bestehen der Prüfung unabhängig von der besuchten Fahrschule ist.

Testdurchführung

$\tilde{h}_{11} = \frac{200 \cdot 280}{400} = 140$

1. Signifikanzniveau $\alpha = 5\,\%$
2. entfällt, da Skalenniveau nominal
3. Kontingenztabelle:

	A	B	C	$\sum$
best.	$h_{11} =$ 130	88	62	280
durchg.	70	38	12	120
$\sum$	200	126	74	400

4. χ^2-Verteilung mit $(3-1)\cdot(2-1) = 2$ Freiheitsgraden: $x_{1-0,05} = x_{0,95} = 5{,}99$:

$$B = (5{,}99; \infty)$$

5. Berechnung der $\tilde{h}_{ij}$:

	A	B	C
best.	$\tilde{h}_{11} =$ 140	88,2	51,8
durchg.	60	37,8	22,2

6. $$v = \frac{(140-130)^2}{140} + \ldots + \frac{(22{,}2-12)^2}{22{,}2} \approx 9{,}077$$

7. $v \in B$: Also wird H_0 abgelehnt, die Prüfungsergebnisse sind abhängig von der Fahrschule.

Quellenübersicht

Bücher

- Bamberg, Günter, Franz Baur und Michael Krapp (2011). **Statistik**. 16. Aufl. München: Oldenbourg Verlag. ISBN: 3486702580.
- Dalgaard, Peter (2002). **Introductory Statistics with R**. New York: Springer.
- Fahrmeir, Ludwig, Rita Künstler, Iris Pigeot und Gerhard Tutz (2009). **Statistik: Der Weg zur Datenanalyse**. 7. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer. ISBN: 3642019382.

Quellenübersicht

1. Einführung
2. Deskriptive Statistik
3. W-Theorie
4. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen

Quellen zu Bildern und Daten

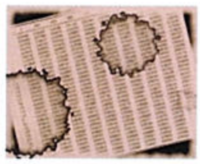
Anscombe, Francis (1973). „Graphs in Statistical Analysis“. In: **The American Statistician**, S. 195–199.

Bach, Axel, Reinhard Brüning, Katrin Krieft, Hilmar Liebsch und Martin Rosenberg (2006). **Mit Zahlen lügen**. URL: `http://www.wdr.de/tv/quarks/sendungsbeitraege/2006/1017/000_zahlen.jsp`.

Fahrmeir, Ludwig, Rita Künstler, Iris Pigeot und Gerhard Tutz (2009). **Statistik: Der Weg zur Datenanalyse**. 7. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer. ISBN: 3642019382.

Kramer, Walter (2011). **So lügt man mit Statistik**. Piper Verlag. ISBN: 3492264131.

Binomialverteilung $X \sim B(n;p)$, Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leqslant x)$



1. Einführung
2. Deskriptive Statistik
3. W-Theorie
4. Induktive Statistik
Quellen
Tabellen
Binomialverteilung
Poissonverteilung
Standardnormalverteilung
χ^2-Verteilung
t-Verteilung
F-Verteilung

$n = 2$

$\downarrow x \quad p \rightarrow$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5
0	0.9801	0.9604	0.9409	0.9216	0.9025	0.8836	0.8649	0.8464	0.8281	0.8100	0.6400	0.5625	0.4900	0.3600	0.2500
1	0.9999	0.9996	0.9991	0.9984	0.9975	0.9964	0.9951	0.9936	0.9919	0.9900	0.9600	0.9375	0.9100	0.8400	0.7500

$n = 3$

$\downarrow x \quad p \rightarrow$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5
0	0.9703	0.9412	0.9127	0.8847	0.8574	0.8306	0.8044	0.7787	0.7536	0.7290	0.5120	0.4219	0.3430	0.2160	0.1250
1	0.9997	0.9988	0.9974	0.9953	0.9928	0.9896	0.9860	0.9818	0.9772	0.9720	0.8960	0.8438	0.7840	0.6480	0.5000
2	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9993	0.9990	0.9920	0.9844	0.9730	0.9360	0.8750

$n = 4$

$\downarrow x \quad p \rightarrow$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5
0	0.9606	0.9224	0.8853	0.8493	0.8145	0.7807	0.7481	0.7164	0.6857	0.6561	0.4096	0.3164	0.2401	0.1296	0.0625
1	0.9994	0.9977	0.9948	0.9909	0.9860	0.9801	0.9733	0.9656	0.9570	0.9477	0.8192	0.7383	0.6517	0.4752	0.3125
2	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9992	0.9987	0.9981	0.9973	0.9963	0.9728	0.9492	0.9163	0.8208	0.6875
3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9984	0.9961	0.9919	0.9744	0.9375

$n = 5$

$\downarrow x \quad p \rightarrow$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5
0	0.9510	0.9039	0.8587	0.8154	0.7738	0.7339	0.6957	0.6591	0.6240	0.5905	0.3277	0.2373	0.1681	0.0778	0.0313
1	0.9990	0.9962	0.9915	0.9852	0.9774	0.9681	0.9575	0.9456	0.9326	0.9185	0.7373	0.6328	0.5282	0.3370	0.1875
2	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994	0.9988	0.9980	0.9969	0.9955	0.9937	0.9914	0.9421	0.8965	0.8369	0.6826	0.5000
3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9933	0.9844	0.9692	0.9130	0.8125
4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9990	0.9976	0.9898	0.9688

Überblick Signifikanztests

- STP?
  - eine einfache STP → Test auf?
    - $H_0: \mu = \mu_0$ (falls Θ dichotom entspricht $\mu_0 = p_0$) → Vtlg.?
      - $X \sim N(\mu, \sigma)$
        - σ bekannt → Einstichproben-Gaußtest: $\hat{\sigma} = \sigma$; Frakt. aus Φ
        - σ unbekannt → Einstichproben-t-Test: $\hat{\sigma} = s$; Frakt. aus $t(n-1)$
      - $X \sim B(1, p)$: $5 \leq \sum x_i \leq n-5$ (Voraussetzung) und $n > 30$ → approx. Gaußtest: $\hat{\sigma} = \sqrt{\mu_0(1-\mu_0)}$; Frakt. aus Φ
      - $X \sim$ bel. Vor.: $n > 30$
        - σ bekannt → approx. Gaußtest: $\hat{\sigma} = \sigma$; Frakt. aus Φ
        - σ unbekannt → approx. Gaußtest: $\hat{\sigma} = s$; Frakt. aus Φ
    - $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ → Vtlg.? → $X \sim N(\mu, \sigma)$ → Chi-Quadrat-Test für die Varianz
  - ...
  - zwei verbundene einfache STP → Test auf? → H_0: X, Y sind in G unabhängig → Kontingenztest

$$v = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\hat{\sigma}} \cdot \sqrt{n}$$

Alternativhypothese:

a) $H_1: \mu \neq \mu_0$
b) $H_1: \mu < \mu_0$
c) $H_1: \mu > \mu_0$

Ablehnbereich:

a) $B = (-\infty; -x_{1-\alpha/2}) \cup (x_{1-\alpha/2}; \infty)$
b) $B = (-\infty; -x_{1-\alpha})$
c) $B = (x_{1-\alpha}; \infty)$

$$v = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

a) $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$; $B = [0; x_{\alpha/2}) \cup (x_{1-\alpha/2}; \infty)$
b) $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$; $B = [0; x_{\alpha})$
c) $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$; $B = (x_{1-\alpha}; \infty)$

Frakt. aus $\chi^2(n-1)$ - Vtlg.

$$v = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{(h_{ij} - \tilde{h}_{ij})^2}{\tilde{h}_{ij}} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{h_{ij}^2}{\tilde{h}_{ij}} - n$$

(k: Zeilen, l: Spalten)

mit $\tilde{h}_{ij} = \frac{h_{i\cdot} \cdot h_{\cdot j}}{n}$ (erwartete Häufigkeiten)

H_1: X und Y sind in G abhängig; $B = (x_{1-\alpha}; \infty)$

Frakt. aus $\chi^2((k-1)\cdot(l-1))$ - Vtlg.

Testentscheidung: H_0 ablehnen falls i) $v \in B$
ii) p-value $< \alpha$ (Signifikanzniveau)
iii) $\mu_0 \notin KI_{\mu_0}$ ...

```
#####
# 13.12.2016: Konfidenzintervalle
#####

###Konfidenzintervall für μ bei unbekannter Varianz
#Datenvektor
x <- c(184.2, 182.6, 185.3, 184.5, 186.2, 183.9, 185.0, 187.1, 184.4)

#Konfidenzintervallbestimmung
t.test(x,conf.level=.99)
#t.test(x, mu=184, conf.level=.99)
t.test(x,conf.level=.95)
t.test(x,conf.level=.90)

#direkter Zugriff auf KI:
t.test(x,conf.level=.99)$conf.int


# -------------------------------------------------------------------------------
# Konfidenzintervall für μ bei unbekannter Varianz
setwd("C:/Users/winsanet/Dropbox/HSA/WS2016_17/Daten")
Umfrage<-read.csv2("Umfrage_HSA_2016_10.csv", header=T)
attach(Umfrage)

###Linearisierter QQ-Plot (Normalverteilung)
#qqnorm(Groesse, pch=20)
#qqline(Groesse, col=2, lwd=3, lty=2)

# Konfidenzintervall für μ bei unbekannter Varianz
N = 20 # Anzahl Stichproben
n = 5  # Umfang einzelne Stichprobe
conf.level=0.80 # Konfidenzniveau
mu = mean(Groesse)
A.Stichproben = matrix(nrow=N, ncol=n)
set.seed(5)
for(i in 1:N)
   { A.Stichproben[i,] = sample(Groesse, size = n, replace=TRUE) }

A.Stichproben[1,]

A.KI = matrix(nrow=N,ncol=2)
alpha = (1-conf.level)
x.c = qt(p=1-alpha/2, df = n-1)

for (i in 1:N) {
x = A.Stichproben[i,]
s = sd(x)
x.m = mean(x)
A.KI[i,] = x.m + s*x.c*c(-1,1)/sqrt(n)
}

A.KI[20,]

# ----------------------------------------------
min=min(A.Stichproben) - (max(A.Stichproben)-min(A.Stichproben))*0.5
max=max(A.Stichproben) + (max(A.Stichproben)-min(A.Stichproben))*0.5
plot(c(min,max), c(1, N), type="n", xlab="", yaxt="n", ylab="")
abline(h=1:N, col="lightgray", lty=2)
KI.falsch = 0
for(i in 1:N) {
```

```
   x.data = as.numeric(A.Stichproben[i,])
   x.KI = as.numeric(A.KI[i,])
   points(jitter(x.data), rep(i, n), pch=16, cex=1,col="#2040dd60")
   Farbe = "#dd203060"
   if (mu>=A.KI[i,1] & mu<=A.KI[i,2]) {Farbe = "#20dd3060"}
   else {KI.falsch = KI.falsch + 1}
   points(x.KI, rep(i, 2), pch=15, cex=2,col=Farbe)
   lines(x.KI, rep(i, 2), lwd=5, pch=16, cex=2,col=Farbe)
   text(min,i,labels = round(x.KI[1],2), cex=0.8, col="darkgreen")
   text(max,i,labels = round(x.KI[2],2), cex=0.8, col="darkgreen") }

# Zeichne mu
abline(v=mu, col="#20dd3099", lwd=2, lty=2)
title(sub=paste("Mittelwert Grundgesamtheit = ", round(mu, 2), "; Anzahl
falsch: ", KI.falsch, "; Fehlerquote = ", KI.falsch/N))
# -------------------------------------------------------------------------------



#####
# 20.12.2016: Signifikanztest - Kontingenztest
#####

setwd("C:/Users/winsanet/Dropbox/HSA/WS2016_17/Daten")
Umfrage<-read.csv2("Umfrage_HSA_2016_10.csv", header=T)
attach(Umfrage)

alpha=0.05
n=100
D = na.omit(Umfrage)
set.seed(2)
i = sample.int(length(D[,1]), size = n, replace = T)
# Test, ob Größe der Väter und Note unabhängig (H0)
G = D[i,"GroesseV"]
Groesse = cut(G, breaks=c(min(G), median(G), max(G)), include.lowest = T)
N = D[i,"NoteMathe"]
Note = cut(N, breaks=c(1,2,3,4,5), include.lowest = T)

Tabelle = table(Groesse, Note)
#install.packages("gmodels")    #Paket vor Erstnutzung insatllieren
library(gmodels)
Kontingenztabelle = CrossTable(Groesse, Note,
expected=TRUE,
prop.t=FALSE, prop.c=FALSE, prop.r=FALSE)


####weitere Beispiele: Gender-Effekt? Zufriedenheit?
# Test, ob Zufriedenheit und Note unabhängig (H0)
#Zufr = D[i,"MatheZufr"]
Gender = D[i,"Geschlecht"]
N = D[i,"NoteMathe"]
Note = cut(N, breaks=c(1,2,3,4,5), include.lowest = T)

#Tabelle = table(Zufr, Note)
Tabelle = table(Gender, Note)
###install.packages("gmodels")    #Paket vor Erstnutzung insatllieren
library(gmodels)
#Kontingenztabelle = CrossTable(Zufr, Note, expected=TRUE, prop.t=FALSE,
prop.c=FALSE, prop.r=FALSE)
Kontingenztabelle = CrossTable(Gender, Note,
```

```
expected=TRUE,
prop.t=FALSE, prop.c=FALSE, prop.r=FALSE)
```