**Anmerkungen zur Vorlesung Statistik vom 29.11.2016**

**Inhalt:**

- Diskrete Zufallsvariablen
  - Hypergeometrische Verteilung
  - Poisson-Verteilung
- Klausur SS2016: Aufgabe 4 (insb. Binomialverteilung)
- Stetige Zufallsvariablen
  - Einführung: Dichtefunktion und Eigenschaften, Verteilungsfunktion
  - Stetige Gleichverteilung

**Aufgabensammlung Statistik:**



22.11.2016
Hausaufgabe
A43-49 ohne 44
A50, A52, A60

29.11.2016
Hausaufgabe
A51,53-59

**Zur Hausaufgabe vom 29.11.2016:**
**Auch die Aufgaben A72 a-c und A73 sind bereits lösbar!**

## Binomialverteilung: Beispiel



### Beispiel

Aus einem 32-er Kartenblatt wird 3-mal eine Karte mit Zurücklegen gezogen.
Wie wahrscheinlich ist es, 2-mal Herz zu ziehen?

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } i\text{-te Karte Herz} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad X_i \sim B(1; \tfrac{8}{32})$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + X_3 \quad \Rightarrow \quad X \sim B(3; \tfrac{1}{4})$$

Mithilfe der Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$P(X=2) = f(2) = \binom{3}{2} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^1 = 0{,}1406$$

Mithilfe der Tabelle ($n = 3$):

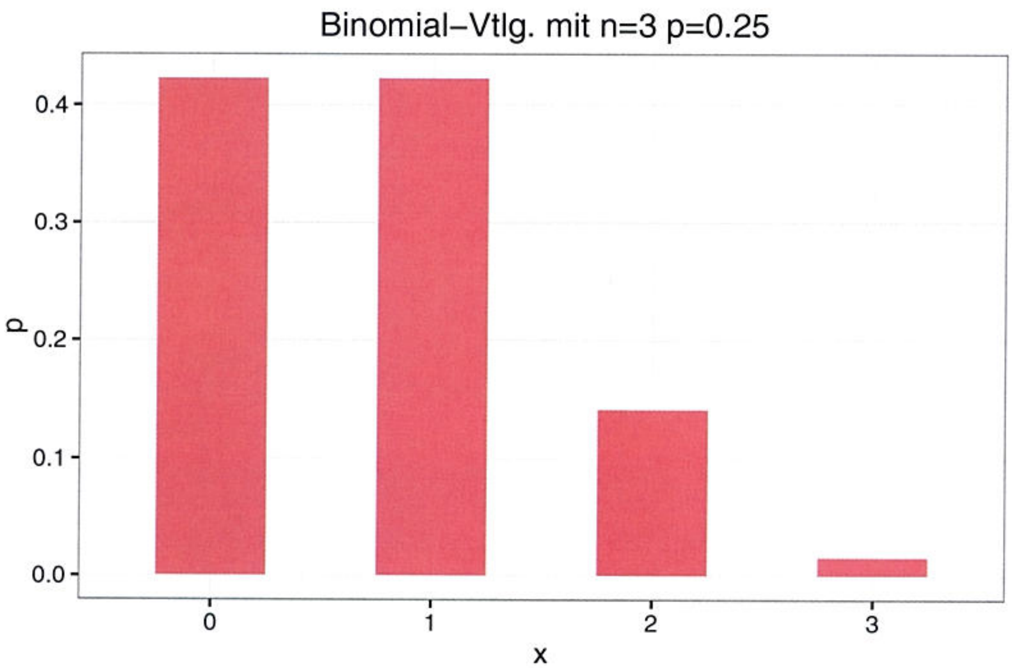
$$P(X=2) = F(2) - F(1) = 0{,}9844 - 0{,}8438 = 0{,}1406$$



## Binomialverteilung: Wahrscheinlichkeitsfunktion

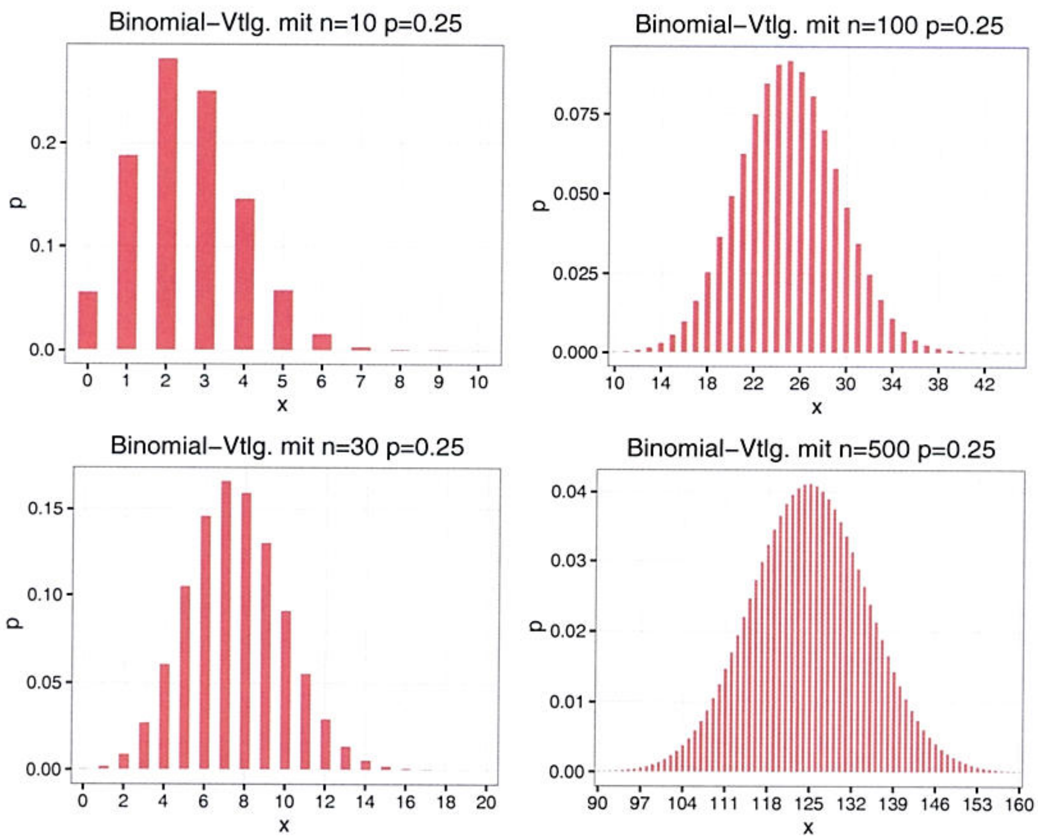


- $X \sim B(3, \frac{1}{4})$



# Binomialverteilung: Wahrscheinlichkeitsfunktion








# Hypergeometrische Verteilung



- $n$-faches Ziehen **ohne** Zurücklegen aus $N$ Objekten, davon $M$ markiert.

  $X :=$ "Anzahl gezogener Objekte mit Markierung"

  heißt hypergeometrisch verteilt mit den Parametern $N, M, n$.
- Kurzschreibweise: $X \sim \text{Hyp}(N; M; n)$
- Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, & \text{falls } x \text{ möglich} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$x = \{0, 1, 2, \dots, \min(M, n)\}$

- Ist $n \leq \frac{N}{20}$, so gilt: $\text{Hyp}(N; M; n) \approx B(n; \frac{M}{N})$ (Approximation)

## Beispiel: Hypergeometrische Verteilung





- Aus einem 32-Kartenblatt wird 3-mal eine Karte ohne Zurücklegen gezogen.
- Wie wahrscheinlich ist es, 2-mal "'Herz"' zu ziehen?
- D.h.: $N = 32,\ M = 8,\ n = 3,\ x = 2.$

$$P(X=2) = f(2) = \frac{\binom{8}{2}\binom{32-8}{3-2}}{\binom{32}{3}} = \frac{\binom{8}{2}\binom{24}{1}}{\binom{32}{3}} = \frac{\frac{8!}{2!\cdot 6!}\cdot 24}{\frac{32!}{3!\cdot 29!}}$$

$$= \frac{29!\cdot 8!\cdot 3!\cdot 24}{32!\cdot 6!\cdot 2!} = \frac{8\cdot 7\cdot 3\cdot 24}{32\cdot 31\cdot 30} = \frac{4032}{29760} = \frac{21}{155}$$

$$= 0{,}1355$$

Dabei wurde verwendet:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{und} \quad \binom{n}{1} = n.$$



## Hypergeometrische Verteilung

Zufallsvariable:
X:= „Anzahl der Richtigen"

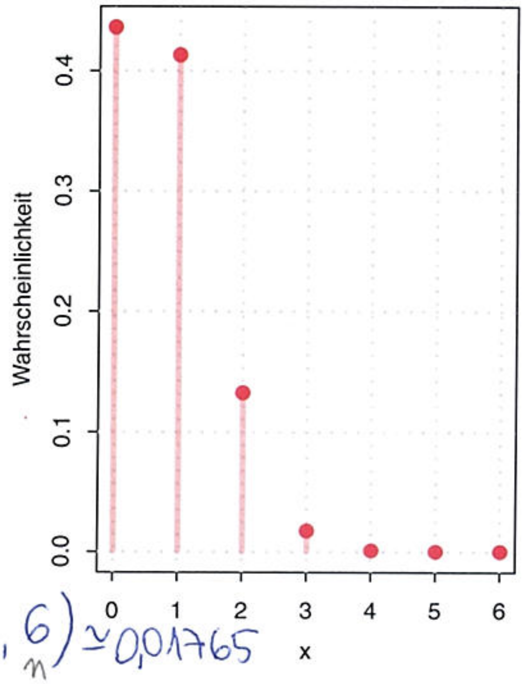




### Beispiel: $x$ Treffer im Lotto 6 aus 49

- $X \sim \text{Hyp}(49, 6, 6)$

| $x$ | $P(X = x)$ (in %) |
|---|---|
| 0 | 43.596498 |
| 1 | 41.301945 |
| 2 | 13.237803 $= \frac{\binom{6}{2}\binom{43}{4}}{\binom{49}{6}}$ |
| 3 | 1.765040 |
| 4 | 0.096862 |
| 5 | 0.001845 |
| 6 | 0.000007 |




⚠ keine Tabelle der Verteilungsfunktion:

Ⓡ $f(3)$: dhyper$(\underset{x}{3}, \underset{M}{6}, \underset{N-M}{43}, \underset{n}{6}) \simeq 0{,}01765$

$F(3)$: phyper$(\underset{x}{3}, \underset{M}{6}, \underset{N-M}{43}, \underset{n}{6}) \simeq 0{,}99901$

## Poisson-Verteilung





- Approximation für $B(n;p)$ und $Hyp(N;M;n)$
- Geeignet, wenn
  $p$ klein ($\leqq 0{,}1$), $n$ groß ($\geqq 50$) und $np \leqq 10$.
- „Verteilung der seltenen Ereignisse"
  (z.B. Anzahl 6-er pro Lottoausspielung)
- $X$ ist poissonverteilt mit Parameter $\lambda$: $X \sim P(\lambda)$
- Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}, & \text{falls } x = 0,1,2,\ldots \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- $F(x)$ in Tabelle
- Überblick: Approximation

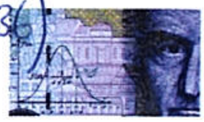
$$\boxed{Hyp(N;M;n) \xrightarrow{p=\frac{M}{N}} B(n;p) \xrightarrow{\lambda = np = n\frac{M}{N}} P(\lambda)}$$

Beispiele:
- Anzahl der 6-er pro Lottoausspielung
- Anzahl der Zwillingsgeburten pro Woche...
- Anzahl der Verkehrsunfälle an einer best. Kreuzung...



## Poissonverteilung: $X \sim P(\lambda)$, Tabelle der Verteilungsfunktionen





Beispiel: $X \sim P(2{,}5)$

$f(4) = \mathbb{P}(X=4) = F(4) - F(3) = 0.8912 - 0.7576 = 0.1336$ (vgl. $\frac{2.5^4}{4!} \cdot e^{-2.5} \simeq 0.1336$)

| $x \backslash \lambda$ | 1.6 | 1.7 | 1.8 | 1.9 | 2 | 2.1 | 2.2 | 2.3 | 2.4 | 2.5 | 2.6 | 2.7 | 2.8 | 2.9 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.2019 | 0.1827 | 0.1653 | 0.1496 | 0.1353 | 0.1225 | 0.1108 | 0.1003 | 0.0907 | 0.0821 | 0.0743 | 0.0672 | 0.0608 | 0.0550 | 0.0498 |
| 1 | 0.5249 | 0.4933 | 0.4628 | 0.4338 | 0.4060 | 0.3796 | 0.3546 | 0.3309 | 0.3085 | 0.2873 | 0.2674 | 0.2487 | 0.2311 | 0.2146 | 0.1992 |
| 2 | 0.7834 | 0.7572 | 0.7306 | 0.7037 | 0.6767 | 0.6496 | 0.6227 | 0.5960 | 0.5697 | 0.5438 | 0.5184 | 0.4936 | 0.4695 | 0.4460 | 0.4232 |
| 3 | 0.9212 | 0.9068 | 0.8913 | 0.8747 | 0.8571 | 0.8387 | 0.8194 | 0.7994 | 0.7787 | 0.7576 | 0.7360 | 0.7141 | 0.6919 | 0.6696 | 0.6472 |
| 4 | 0.9763 | 0.9704 | 0.9636 | 0.9559 | 0.9474 | 0.9379 | 0.9275 | 0.9163 | 0.9041 | 0.8912 | 0.8774 | 0.8629 | 0.8477 | 0.8318 | 0.8153 |
| 5 | 0.9940 | 0.9920 | 0.9896 | 0.9868 | 0.9834 | 0.9796 | 0.9751 | 0.9700 | 0.9643 | 0.9580 | 0.9510 | 0.9433 | 0.9349 | 0.9258 | 0.9161 |
| 6 | 0.9987 | 0.9981 | 0.9974 | 0.9966 | 0.9955 | 0.9941 | 0.9925 | 0.9906 | 0.9884 | 0.9858 | 0.9828 | 0.9794 | 0.9756 | 0.9713 | 0.9665 |
| 7 | 0.9997 | 0.9996 | 0.9994 | 0.9992 | 0.9989 | 0.9985 | 0.9980 | 0.9974 | 0.9967 | 0.9958 | 0.9947 | 0.9934 | 0.9919 | 0.9901 | 0.9881 |
| 8 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9997 | 0.9995 | 0.9994 | 0.9991 | 0.9989 | 0.9985 | 0.9981 | 0.9976 | 0.9970 | 0.9962 |
| 9 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9997 | 0.9996 | 0.9995 | 0.9993 | 0.9992 | 0.9989 |
| 10 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9997 |
| 11 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 |
| 12 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

→ F139

| $x \backslash \lambda$ | 3.1 | 3.2 | 3.3 | 3.4 | 3.5 | 3.6 | 3.7 | 3.8 | 3.9 | 4 | 4.1 | 4.2 | 4.3 | 4.4 | 4.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.0451 | 0.0408 | 0.0369 | 0.0334 | 0.0302 | 0.0273 | 0.0247 | 0.0224 | 0.0203 | 0.0183 | 0.0166 | 0.0150 | 0.0136 | 0.0123 | 0.0111 |
| 1 | 0.1847 | 0.1712 | 0.1586 | 0.1469 | 0.1359 | 0.1257 | 0.1162 | 0.1074 | 0.0992 | 0.0916 | 0.0845 | 0.0780 | 0.0719 | 0.0663 | 0.0611 |
| 2 | 0.4012 | 0.3799 | 0.3594 | 0.3397 | 0.3209 | 0.3028 | 0.2854 | 0.2689 | 0.2531 | 0.2381 | 0.2238 | 0.2102 | 0.1974 | 0.1852 | 0.1736 |
| 3 | 0.6248 | 0.6025 | 0.5803 | 0.5584 | 0.5366 | 0.5152 | 0.4942 | 0.4735 | 0.4533 | 0.4335 | 0.4142 | 0.3954 | 0.3772 | 0.3595 | 0.3423 |
| 4 | 0.7982 | 0.7806 | 0.7626 | 0.7442 | 0.7255 | 0.7064 | 0.6872 | 0.6679 | 0.6484 | 0.6288 | 0.6093 | 0.5898 | 0.5704 | 0.5512 | 0.5321 |
| 5 | 0.9057 | 0.8946 | 0.8829 | 0.8706 | 0.8576 | 0.8441 | 0.8301 | 0.8156 | 0.8006 | 0.7851 | 0.7693 | 0.7532 | 0.7367 | 0.7199 | 0.7029 |
| 6 | 0.9612 | 0.9554 | 0.9490 | 0.9422 | 0.9347 | 0.9267 | 0.9182 | 0.9091 | 0.8995 | 0.8893 | 0.8787 | 0.8675 | 0.8558 | 0.8437 | 0.8311 |
| 7 | 0.9858 | 0.9832 | 0.9802 | 0.9769 | 0.9733 | 0.9692 | 0.9648 | 0.9599 | 0.9546 | 0.9489 | 0.9427 | 0.9361 | 0.9290 | 0.9214 | 0.9134 |
| 8 | 0.9953 | 0.9943 | 0.9931 | 0.9917 | 0.9901 | 0.9883 | 0.9863 | 0.9840 | 0.9815 | 0.9786 | 0.9755 | 0.9721 | 0.9683 | 0.9642 | 0.9598 |
| 9 | 0.9986 | 0.9982 | 0.9978 | 0.9973 | 0.9967 | 0.9960 | 0.9952 | 0.9942 | 0.9931 | 0.9919 | 0.9905 | 0.9889 | 0.9871 | 0.9851 | 0.9829 |
| 10 | 0.9996 | 0.9995 | 0.9994 | 0.9992 | 0.9990 | 0.9987 | 0.9984 | 0.9981 | 0.9977 | 0.9972 | 0.9966 | 0.9959 | 0.9952 | 0.9943 | 0.9933 |
| 11 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9997 | 0.9996 | 0.9995 | 0.9994 | 0.9993 | 0.9991 | 0.9989 | 0.9986 | 0.9983 | 0.9980 | 0.9976 |
| 12 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9996 | 0.9995 | 0.9994 | 0.9992 |
| 13 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9998 |
| 14 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 |
| 15 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

R
$f(4) = \text{dpois}(4, 2.5) \simeq 0.1336$
$F(4) = \text{ppois}(4, 2.5) \simeq 0.8912$

## Poisson-Verteilung: Beispiel



### Beispiel

- $X \sim B(10\,000; 0{,}0003)$; In Tabelle der Binomialverteilung nicht vertafelt! Approximation:

$$\left.\begin{array}{rll} p = 0{,}0003 & < 0{,}1 \\ n = 10\,000 & > 50 \\ np = 3 & < 10 \end{array}\right\} \Rightarrow B(10\,000; 0{,}0003) \approx P(3)$$

$\Rightarrow \lambda$

- Mithilfe der Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$P(X = 5) = \frac{3^5}{5!} \cdot e^{-3} = 0{,}1008188$$

- Mithilfe der Tabelle der Poissonverteilung:

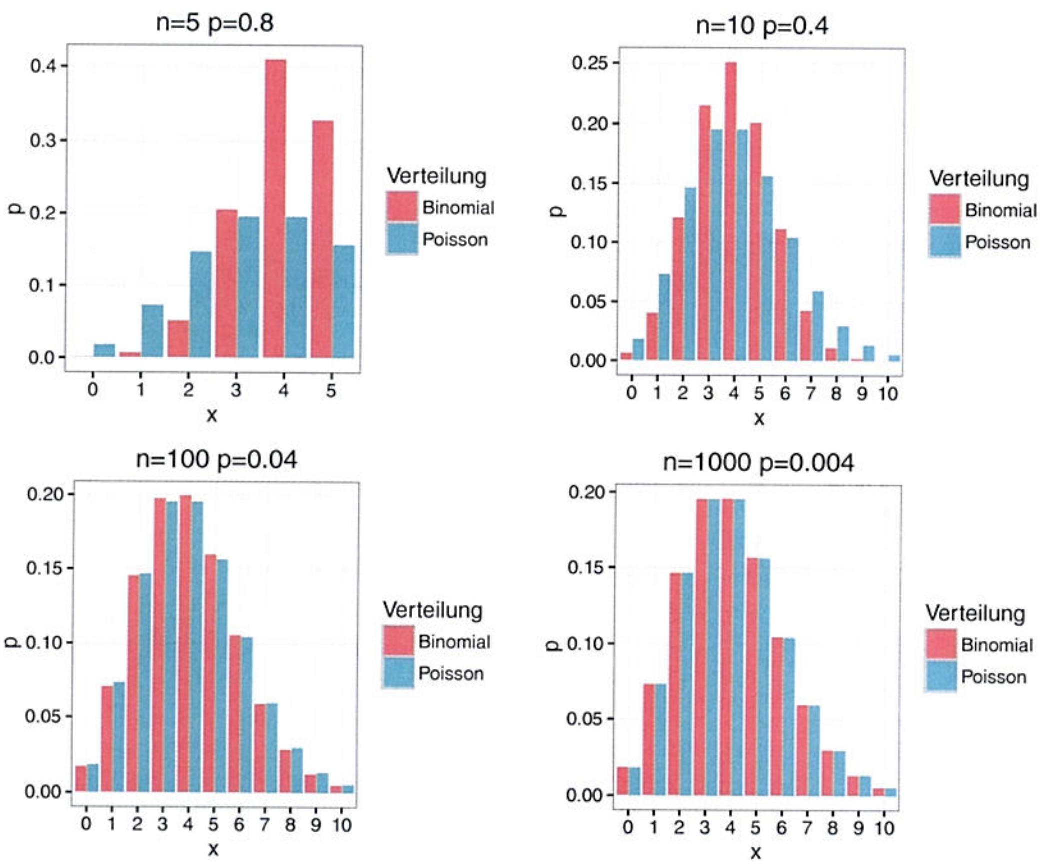
$$P(X = 5) = \underbrace{F(5) - F(4) = 0{,}9161 - 0{,}8153}_{\rightarrow F.138} = 0{,}1008$$

- Exakter Wert: $P(X = 5) = 0{,}1008239$  (R) dbinom(5, 10 000, 0.0003)



## Poisson- versus Binomialverteilung: Vergleich





**Diskrete Zufallsvariablen/Verteilungen:**

| | **Wahrscheinlichkeits-funktion**<br>$f(x) = P(X = x)$<br>$= F(x) - F(x-1)$ | **Verteilungs-funktion**<br>$F(x) = P(X \leq x)$ | **Approximation/ Beispiel** |
|---|---|---|---|
| **Binomial-verteilung $B(n; p)$** | $\binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$,<br>falls $x \in \{0,1,\ldots,n\}$<br>x: Treffer<br>n: Versuche<br>p: Trefferw'keit | ***tabelliert***<br>F. 208-215 | -<br>Zufallsvariable:<br>X = „Anzahl der Treffer beim n-maligen Durchführen eines Treffer/Niete Experiments mit konstanter Einzeltrefferwahrscheinlichkeit p." |
| | dbinom(x, size=n, prob=p) | pbinom(q=x, size=n, prob=p) | Aus einem 32-Kartenblatt wird 3-mal eine Karte mit Zurücklegen gezogen. Wie wahrscheinlich ist es, genau/höchstens 2-mal (x) Herz zu ziehen? |
| **Hypergeo-metrische Verteilung Hyp(N;M;n)** | $\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$,<br>falls x möglich<br>x: Treffer<br>n: Versuche<br>N: Gesamtanzahl<br>M: Anzahl „Markierte" | / | Ist $n \leq \frac{N}{20}$, so gilt:<br>$\text{Hyp}(N;M;n) \xrightarrow{p = \frac{M}{N}} B(n;p)$ |
| | dhyper(x, m=M, n=N-M, k=n)<br>x: Treffer<br>k: Versuche<br>m: Anz. „Markierte"<br>n: Anz. „Nichtmarkierte" | phyper(q=x, m=M, n=N-M, k=n) | Aus einem 32-Kartenblatt (N) wird 3-mal (n) eine Karte ohne Zurücklegen gezogen. Wie wahrscheinlich ist es, genau/höchstens 2-mal (x) Herz zu ziehen? (M=32/4=8) |
| **Poisson-verteilung $P(\lambda)$** | $\frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$,<br>falls $x = 0,1,2,\ldots$<br>x: Treffer<br>λ: Parameter λ | ***tabelliert***<br>F. 216\|217 | p klein ($\leq 0{,}1$), n groß ($\geq 50$) und $np \leq 10$.<br>$\text{Hyp}(N;M;n) \xrightarrow{p = \frac{M}{N}} B(n;p)$<br>$B(n;p) \xrightarrow{\lambda = np = n\frac{M}{N}} P(\lambda)$ |
| | dpois(x, lambda=λ) | ppois(q=x, lambda=λ) | „Verteilung der seltenen Ereignisse", z.B. Anzahl (genau/höchstens) der 6-er pro Lottoausspielung |

## Aufgabe 4 **23 Punkte**

Ein Mensch zwinkert durchschnittlich alle 5 Sekunden 1 mal. Gehen Sie davon aus, dass die Augen in einer Stunde durch Zwinkern durchschnittlich 4 Minuten und 48 Sekunden geschlossen sind.

a) Wie lange dauert ein Zwinkern durchschnittlich?

Fotograf Felix Fix fotografiert oft Menschen und denkt darüber nach, dass er gelegentlich Leute mit geschlossenen Augen auf seinen Bildern hat.

(*Hinweis*: Vernachlässigen Sie im Folgenden die Belichtungszeit der Fotos und gehen Sie davon aus, dass alle fotografierten Personen wach und ihre Gesichter auf dem Foto sichtbar sind)

b) Es wird ein Foto einer Person zufällig geschossen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person die Augen auf dem Foto nicht geschlossen hat.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass auf einem Foto mit 50 Leuten
   i) keiner
   ii) höchstens 3
   iii) 5 bis 10 Leute

   die Augen geschlossen haben.

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 5 Fotos mit 50 Leuten mindestens eins dabei ist auf dem niemand die Augen geschlossen hat?

e) Wie viele Fotos müssen mindestens geschossen werden, so dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % auf mindestens einem Foto niemand der 50 Leute die Augen geschlossen hat.

R f) Geben Sie die Lösungen zu den Teilaufgaben c) und d) jeweils mit Hilfe einer R-Funktion an.

# Klausuraufgabe 4 (SS 2016)

a) $12 \cdot 60 = 720$ pro Stunde

$288s : 720 = 0{,}4 s$

b) $p = \frac{288}{3600} = 0.08$ (Wk Augen geschl.)

$1-p = 1-0.08 = 0.92$ (Wk Augen offen)

c) X := „Anzahl der Personen mit geschl. Augen"

$X \sim B(50, 0.08)$

i) $P(X=0) = \begin{cases} f(0) = \binom{50}{0} \cdot 0.08^0 \cdot 0.92^{50} \approx 0.0155 \\ F(0) = 0.0155 \quad \text{(Tabelle Folie 214)} \end{cases}$

ii) $P(X \leq 3) = F(3) = 0.4253$ (Tabelle Folie 214)

iii) $P(5 \leq X \leq 10) = F(10) - F(4) = 0.9983 - 0.6290 = 0.3693$

d) Y := „Anzahl der Fotos mit ‚alle haben geöffnete Augen'"

$Y \sim B(5, 0.0155)$

$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - f(0) =$ (nicht F(0) tabelliert!)

Wk.fkt. $= 1 - \binom{5}{0} 0.0155^0 \cdot 0.9845^5 \approx 1 - 0.9249 \approx 0.0751$

e) Z := „Anz. der Fotos mit ‚alle haben geöff. Augen'"

$Z \sim B(n, 0.0155)$

$P(Z \geq 1) \geq 0.99$

$P(Z \geq 1) = 1 - \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} \cdot \underbrace{0.0155^0}_{=1} \cdot 0.9845^n \geq 0.99$

$0.01 \geq 0.9845^n$

$\ln 0.01 \geq n \cdot \ln 0.9845$

$\frac{\ln 0.01}{\ln 0.9845} \leq n$

$294{,}7992 \leq n \Rightarrow n \geq 295$

R f) ci) dbinom(0, size=50, prob=0.08)

cii) pbinom(3, size=50, prob=0.08)

ciii) pbinom(10, size=50, prob=0.08) − pbinom(4, size=50, prob=0.08)

d) 1−dbinom(0, size=5, prob=0.0155)

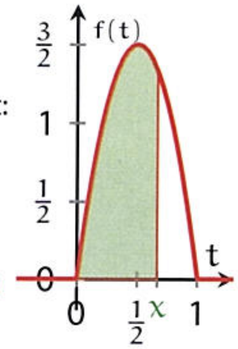
## Stetige Zufallsvariablen

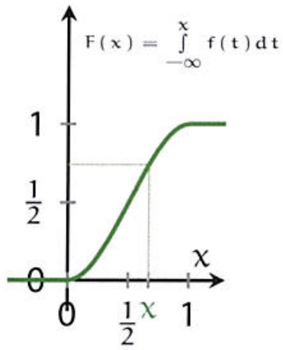


- $X$ heißt stetig, wenn $F(x)$ stetig ist.
- Dann existiert ein $f(t)$ mit:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

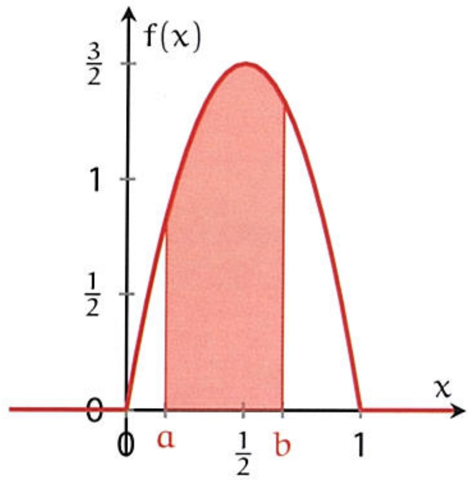
$f(x)$ heißt Dichtefunktion von $X$.




- Dann:

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P(a \leqq X < b) \\ &= P(a < X \leqq b) \\ &= P(a \leqq X \leqq b) \\ &= \textstyle\int_a^b f(x)\,dx \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$








## Dichtefunktion



### Eigenschaften der Dichtefunktion

- $f(x) \geqq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- Wegen $F(\infty) = 1$ muss stets gelten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

- $P(X = x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- $f(x) > 1$ ist möglich
- für $x \in \mathbb{R}$ ist $F(x)$ differenzierbar $\Rightarrow F'(x) = f(x)$.
- Intervallgrenzen spielen keine Rolle:

$$\begin{aligned} P(X \in [a;b]) &= P(X \in (a;b]) \\ &= P(X \in [a;b)) \\ &= P(X \in (a;b)) \\ &= F(b) - F(a) \quad = \int_a^b f(x)\,dx \end{aligned}$$

# Crash-Kurs Integration

Für $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$ heißt

$\boxed{F(x) = \int f(x)dx}$ Stammfunktion von $f(x)$
(oder auch: unbestimmtes Integral).

Beispiel: $\int \underbrace{x^2}_{= f(x)} dx = \frac{1}{3}x^3 = F(x)$

Regeln: (1) $\int a \cdot f(x)dx = a \int f(x)dx \quad (a \in \mathbb{R})$

(2) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Wichtige Stammfunktionen:

| | $f(x)$ | $F(x) = \int f(x)dx$ |
|---|---|---|
| $a \neq -1$ | $x^a$ | $\frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$ |
| | $x^{-1} = \frac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert + C$ |
| $b > 0$ | $b^x$ | $b^x \cdot \frac{1}{\ln b} + C$ |
| | $e^x$ | $e^x + C$ |
| | $e^{kx}$ | $\frac{1}{k} \cdot e^{kx} + C$ |
| | $\ln(x)$ | $x(\ln(x) - 1) + C$ |

Beispiele: $\int \left(\frac{1}{4}x^3 + 5^x - \sqrt{x} + \frac{3}{x} + e^{2x}\right)dx$

$= \frac{1}{4}\int x^3 dx + \int 5^x dx - \int x^{\frac{1}{2}} dx + 3\int \frac{1}{x}dx + \int e^{2x}dx =$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}x^4 + 5^x \cdot \frac{1}{\ln 5} - \frac{1}{\frac{1}{2}+1} \cdot x^{(\frac{1}{2}+1)} + 3\ln\lvert x\rvert + \frac{1}{2}e^{2x} + C =$

$= \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{\ln 5}5^x - \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} + \ln\lvert x^3\rvert + \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + C$

Differentiations und Integrationsregeln

(1) Produktregel: $(f(x) \cdot g(x))' = f' \cdot g + f \cdot g'$

(2) Quotientenregel: $\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)' = \frac{g' f - f' \cdot g}{g^2}$

(3) Partielle Integration: $\int f'(x) \cdot g(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)dx$

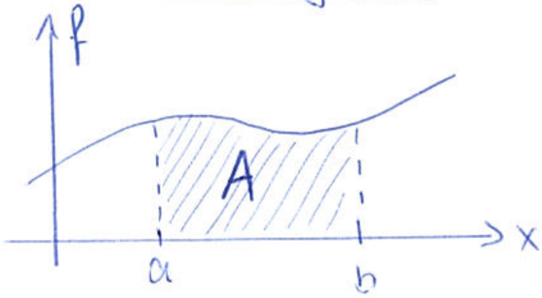
Beispiel: zu (3)

$$\int \underset{g}{x} \cdot \underset{f'}{e^{-x}}\,dx = \underset{g}{x} \cdot \underset{f}{(-e^{-x})} - \int \underset{f}{-e^{-x}} \cdot \underset{g'}{1}\,dx =$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x} + C =$$

$$= -e^{-x}(x+1) + C$$

## Bestimmte Integrale

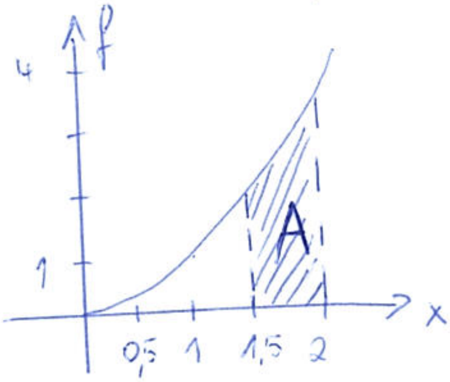



$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

heißt bestimmtes Integral von $f$ zwischen $a$ und $b$.

Schreibweise: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = \left[F(x)\right]_a^b$

Beispiel: $f(x) = x^2$; $A = \int_{1.5}^{2} f(x)dx = \int_{1.5}^{2} x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{1.5}^{2} =$




$$= \frac{1}{3} 2^3 - \frac{1}{3} \cdot 1.5^3 = \ldots = \frac{37}{24} \approx 1.54$$

Übertragen auf (stetige) ZVs bedeutet das meist:



$f(x)$ ist in der funktionalen Form gegeben, d.h. auf bestimmten „Abschnitten" definiert und gesucht ist zumeist:

① W^k-en $P(a \leq X \leq b)$, d.h. das $X$ in einem bestimmten Bereich liegt.

② den Nachweis, dass es sich um eine Dichte handelt $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1$

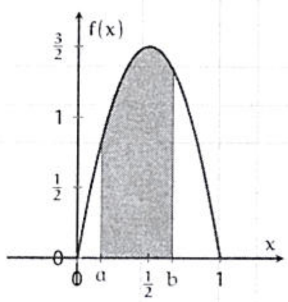
oder Bestimmung von Parametern oder Grenzen des Wertebereichs so dass dies gegeben ist

③ Bestimmung der Vtgsfkt. $F(x)$.

...

**Beispiel 1:** Zufallsvariable $X$ mit Dichte $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} -6x \cdot (x-1) & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$




**Frage:** $P(0.2 \leq X \leq 0.6)$ ?

$$= \int_{0.2}^{0.6} f(x)\,dx = \int_{0.2}^{0.6} -6x^2 + 6x \, dx$$

$$= \left[-6 \cdot \tfrac{1}{3} x^3 + 6 \cdot \tfrac{1}{2} x^2\right]_{0.2}^{0.6}$$

$$= -2 \cdot 0.6^3 + 3 \cdot 0.6^2 - (-2 \cdot 0.2^3 + 3 \cdot 0.2^2)$$

$$= -0.432 + 1.08 + 0.016 - 0.12$$

$$= 0.544$$

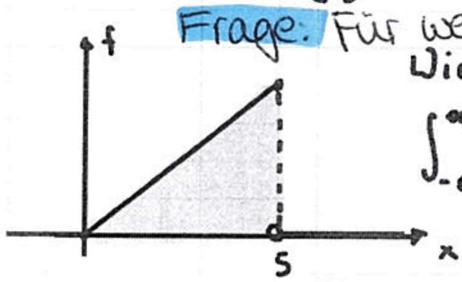
**Beispiel 2:** Zufallsvariable mit Dichte $f$

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{für } 0 \leq x \leq 5 \quad (a > 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Frage.** Für welchen Wert von $a$ ist $f(x)$ eine Dichte?

Wie groß ist $a$, so dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$




$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^5 a \cdot x \, dx = a \int_0^5 x \, dx = a \left[\tfrac{1}{2} x^2\right]_0^5$$

$$= a \cdot \left[\tfrac{1}{2} \cdot 5^2 - \tfrac{1}{2} \cdot 0^2\right] = 1$$

$$\Leftrightarrow a \cdot \frac{25}{2} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{2}{25}$$

**Beispiel 3:** Folie 143 (Bestimmung der Vtgsfkt. $F(x)$)

spezielle stetige Verteilungen von ZV:

① Gleichverteilung

② Normalverteilung

## Dichtefunktion: Beispiel





### Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad x < 0 \\ \frac{1}{10}, & \text{falls} \quad 0 \leqq x \leqq 10 \\ 0, & \text{falls} \quad x > 10 \end{cases}$$

Verteilungsfunktion:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{10}\,dt = \left[\frac{t}{10}\right]_0^x = \frac{x}{10} \Rightarrow$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad x < 0 \\ \frac{x}{10}, & \text{falls} \quad 0 \leqq x \leqq 10 \\ 1, & \text{falls} \quad x > 10 \end{cases}$$



## Gleichverteilung

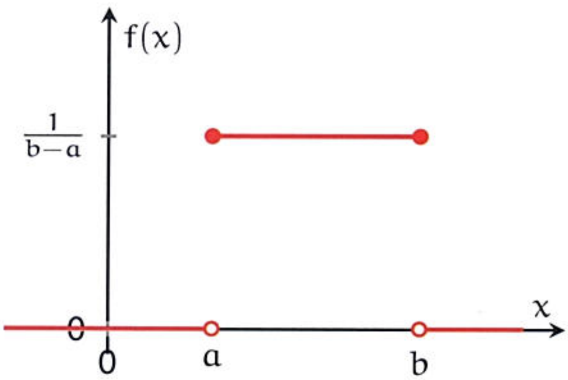




Eine Zufallsvariable $X$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{falls} \quad a \leqq x \leqq b \\ 0 \quad, & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt gleichverteilt im Intervall $[a; b]$.



# Gleichverteilung





- **Verteilungsfunktion der Gleichverteilung**:

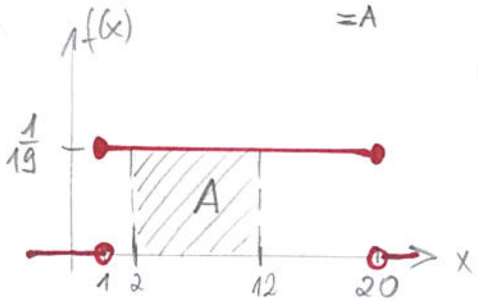
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{falls } a \leqq x \leqq b \\ 1, & \text{falls } x > b \end{cases}$$

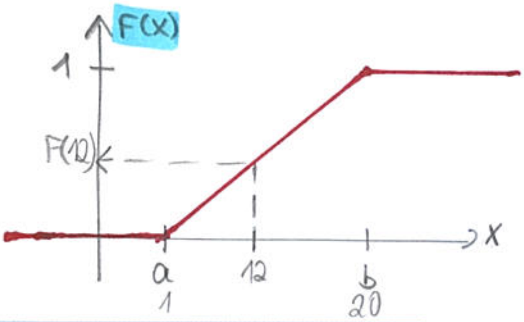
- **Beispiel:** $X$ gleichverteilt in $[1;20]$

$$\underbrace{P(2 \leqq X \leqq 12)}_{=A} = F(12) - F(2) = \frac{12-1}{20-1} - \frac{2-1}{20-1}$$

$$= \frac{12-2}{20-1} = \frac{10}{19}$$

$$= 0{,}5263$$






# Normalverteilung

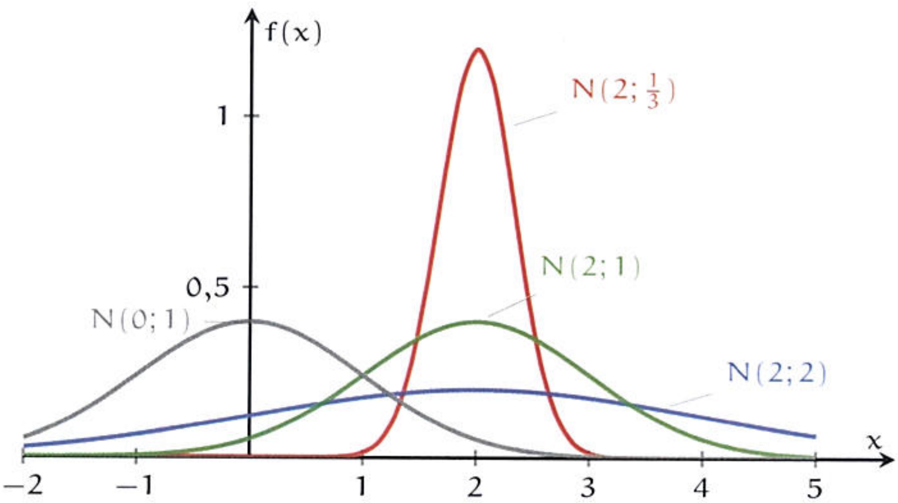




Eine Zufallsvariable $X$ mit einer Dichtefunktion

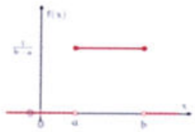
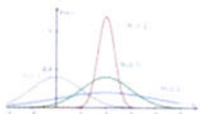
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

und $\sigma > 0$ heißt normalverteilt.




Kurzschreibweise: $X \sim N(\underbrace{\mu}_{\text{Lageparameter}}; \underbrace{\sigma}_{\text{Streuungsparameter}})$

**Stetige Zufallsvariablen/Verteilungen:**

| | Dichtefunktion | Verteilungsfunktion | E | Var |
|---|---|---|---|---|
| **stetige Gleichverteilung U(a; b)** | $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{falls } a \leqq x \leqq b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$<br><br>dunif(x, min=0, max=1) | $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{falls } a \leqq x \leqq b \\ 1, & \text{falls } x > b \end{cases}$<br>punif(x, min=0, max=1) | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ |
| **Normalverteilung** $N(\mu; \sigma)$ | $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$<br> | $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$<br>***Standardnormalverteilung N(0;1) ist tabelliert*** | $\mu$ | $\sigma^2$ |
| | Symmetrieeigenschaften:<br>1.) $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$<br>2.) $F(x) = 0.5 \rightarrow x = \mu$<br>3.) $F(x_1) = 1 - F(x_2) \rightarrow \mu = \frac{x_1+x_2}{2}$ | | | |
| | dnorm(x, mean=0, sd=1) | pnorm(x, mean=0, sd=1) | | |