Wirtschaftsmathematik

Einführung in einige Teilbereiche der Wirtschaftsmathematik

Wintersemester 2016

HSA Wing Sessionlist WS 2016				
			52	
Datum	N.	Zeit	UE	Themen
Dienstag, 20. September 2016	1	18.00-21.15	4	Einführung, Zinsen, Renten
Dienstag, 27. September 2016	2	18.00-21.15	4	Tilgung, Festverz. Wertpapiere
Dienstag, 4. Oktober 2016	3	18.00-21.15	4	Lineare Optimierung: Einführung, Lösungsmethoden
Samstag, 8. Oktober 2016	4	08.00-11.45	4	Lineare Optimierung: Standardmaximumproblem, Simplex
Dienstag, 11. Oktober 2016	5	18.00-21.15	4	Gewöhnliche Differentialgleichungen
Samstag, 15. Oktober 2016	6	08.00-11.45	4	Analytische Lösung linearer DGLs
Dienstag, 18. Oktober 2016	7	18.00-21.15	4	Einführung, univ. Statistik, Konzentration
Samstag, 22. Oktober 2016	8	11.45-15.00	4	Korrelation, Regression, Preisindizes
Dienstag, 25. Oktober 2016	9	18.00-21.15	4	Kombinatorik, Wahrscheinlichkeiten; Binomial, Hypergeo, Poisson
Samstag, 29. Oktober 2016	10	08.00-11.15	4	Zufallsvariablen, Lage- und Streuung, Stetige ZV, Gleich-vtlg.
Dienstag, 15. November 2016	11	18.00-21.15	4	Normalvtlg., Schätzen und Eigenschaften von Punktschätzern
Samstag, 26. November 2016	12	08.00-11.15	4	Konfidenzintervalle, t-Test
Dienstag, 29. November 2016	13	18.00-21.15	4	Puffer, Wiederholung Besprechung Probeklausur
Samstag, 3. Dezember 2016		09.30-11.00		Klausur (regulärer Termin 90 Min., mit Aufsicht)

Prof. Dr. Stefan Etschberger
HSA

Stundenplan (Stand 15.9.2016)

Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag
KW 38 19	WIMA, B 4.02, 18:00 20	21	22	23	24	25
KW 39 26	WIMA, B 4.02, 18:00 27	28	29	30		

Oktober 2016

Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag
					KW 39 1	2
KW 40 Tag der d. Einheit 3	WIMA, B 4.02, 18:00 4	5	6	7	WIMA, B 4.02, 08:00 8	9
KW 41 10	WIMA, B 4.02, 18:00 11	12	13	14	WIMA, B 4.02, 08:00 15	16
KW 42 17	WIMA, B 4.02, 18:00 18	19	20	21	WIMA, B 4.02, 11:45 22	23
KW 43 24	WIMA, B 4.02, 18:00 25	26	27	28	WIMA, B 4.02, 08:00 29	Herbstferien 30
KW 44 Herbstferien 31						

November 2016

Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag
	KW 44 Herbstferien 1	Herbstferien 2	Herbstferien 3	Herbstferien 4	Herbstferien 5	Herbstferien 6
KW 45 7	8	9	10	11	12	13
KW 46 14	WIMA, B 4.02, 18:00 15	16	17	18	19	20
KW 47 21	22	23	24	25	WIMA, B 4.02, 08:00 26	1. Advent 27
KW 48 28	WIMA, B 4.02, 18:00 29	30				

Dezember 2016

Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag
			KW 48 1	2	WIMA, B 4.02, 08:30 Prüfungstag 3	4

Gliederung

Vorlesungsbegleitende Unterlagen

- **Arbeitsmaterial**: Foliensatz, Aufgabenskript, Mitschrift auf Wunsch
- **Bücher** (unterstützend):

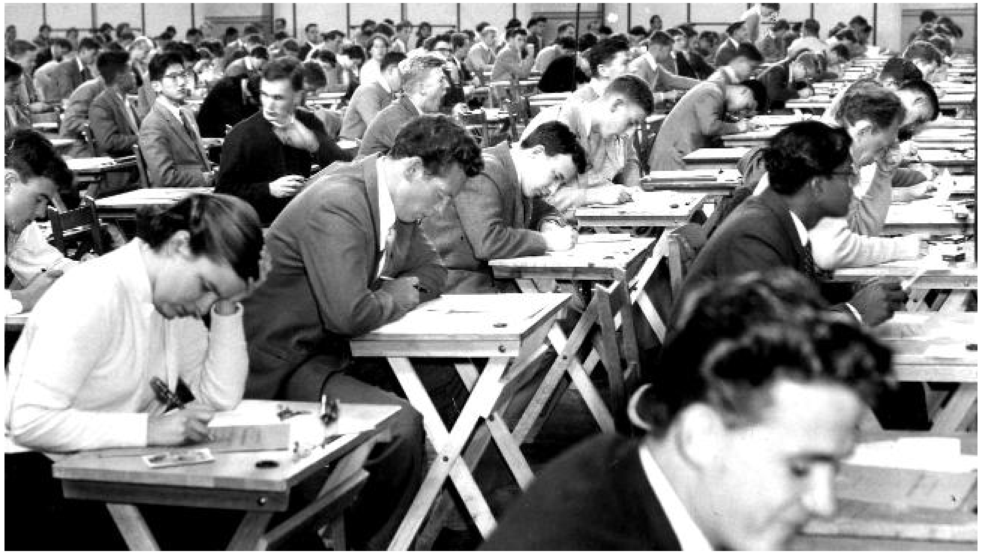
Bamberg, Günter, Franz Baur und Michael Krapp (2011). **Statistik**. 16. Aufl. München: Oldenbourg Verlag. ISBN: 3486702580.

Fahrmeir, Ludwig, Rita Künstler, Iris Pigeot und Gerhard Tutz (2009). **Statistik: Der Weg zur Datenanalyse**. 7. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer. ISBN: 3642019382.

Luderer, Bernd (2003). **Starthilfe Finanzmathematik. Zinsen, Kurse, Renditen**. 2. Aufl. Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden: Teubner.

Opitz, Otto (2004). **Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler**. 9. Aufl. München: Oldenbourg.

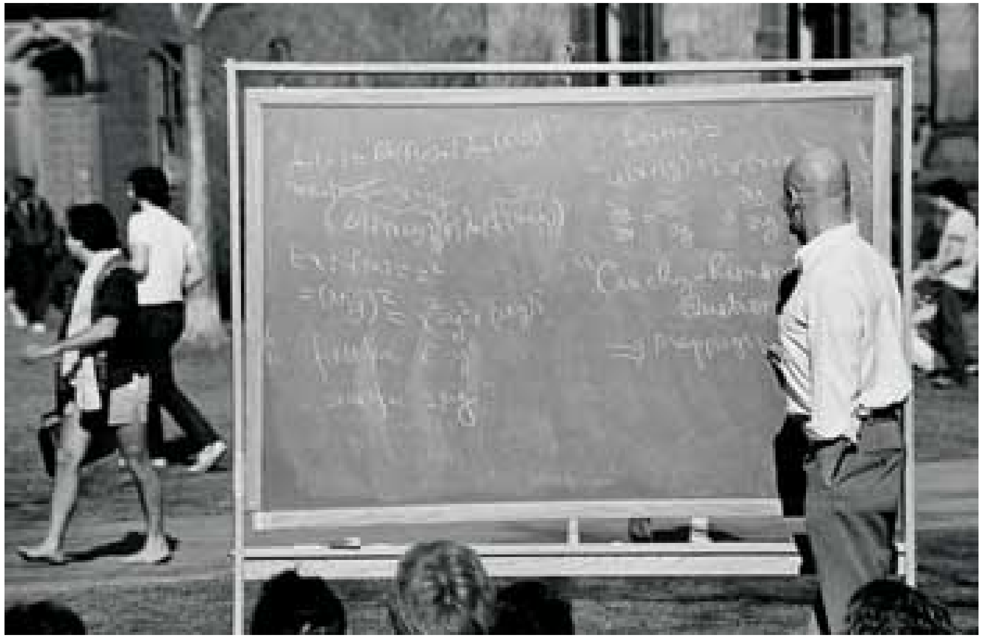
Klausur:



- Klausur am Ende des Semesters
- Bearbeitungszeit: 90 Minuten
- Erreichbare Punktzahl: 90
- Hilfsmittel:
  - Schreibzeug,
  - Taschenrechner, der nicht 70! berechnen kann,
  - ein Blatt (DIN-A4, vorne und hinten beschrieben) mit handgeschriebenen Notizen (keine Kopien oder Ausdrucke),

Veranstaltungskonzept

- Mitschrift!
- Folien sind nur ergänzendes Material zur Mitschrift
- Aufteilung in Vorlesung und Rechnen von Beispielen und Übungsaufgaben



- Viele Aufgaben als Hausaufgabe, Besprechung nur bei Fragen; sonst: selbst Lösungen vergleichen
- Ohne selbständiges Rechnen aller (!) Übungsaufgaben ist Nutzen der Veranstaltung sehr gering
- Fragenstellen ist jederzeit erwünscht
- Bei Fragen oder Problemen: E-Mail
- Informations-Backbone für Unterlagen und mehr: Moodle

Wirtschaftsmathematik: Table of Contents

Zinsen $\hat{=}$ Gebühren für überlassenes Kapital, abhängig von Dauer, Zinssatz, Betrag

K_0	:	Kapital zum Zeitpunkt 0
K_n	:	Kapital zum Ende der Laufzeit
K_t	:	" zum Zeitpunkt t
n	:	Laufzeit (oft in Jahren)
Z_t	:	Zinszahlung zum Zeitpunkt t
i	:	Zinssatz (z.B. $0.035 \hat{=} 3.5\%$)
$p = i \cdot 100$		Prozentzinssatz ($3.5 \hat{=} 3.5\%$)
$q = 1 + i$		Zinsfaktor (z.B. $1.035 \hat{=} 3.5\%$)

Einfache (lineare) Verzinsung

$$\boxed{K_n = K_0 (1 + i \cdot n)}$$

- keine Berücksichtigung von Zinseszinsen
- gesetzlich vorgeschrieben z.B. bei Verzugszinsen oder Privatkrediten

Beispiel : $K_0 = 100\,€$, $n = 500$, $i = 0.05$

$$K_n = 100 \cdot (1 + 0.05 \cdot 500) = 2600\,€$$

Exponentielle Verzinsung (Zinseszinsen)

Beispiel : Kontostand $K_0 = -1000\,€$

jährliche (p.a.) Zinsabrechnung mit $i = 0.15$

per annum

nach 1 Jahr : $K_1 = -1000 + (-1000) \cdot 0.15$
$= -1000 \cdot 1.15$

nach 2 Jahren : $K_2 = K_1 \cdot 1.15$
$= -1000 \cdot 1.15 \cdot 1.15$
$= -1000 \cdot 1.15^2 = -1322.50$

⋮

nach 5 Jahren : $K_5 = -1000 \cdot 1.15^5 = -2011.36$

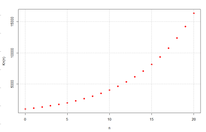
allgemein : $\boxed{K_n = K_0 \cdot q^n}$ Zinseszinsformel

[Exkurs : Tabellen mit TR :

Mode → table

„f(x) =" $1000 \cdot 1.15^x$ $\boxed{=}$

START 0
END 20
SCHRITTW. 2



	n	Kn
1	0	1000.000
2	1	1150.000
3	2	1322.500
4	3	1520.875
5	4	1749.006
6	5	2011.357
7	6	2313.061
8	7	2660.020
9	8	3059.023
10	9	3517.876
11	10	4045.558
12	11	4652.391
13	12	5350.250
14	13	6152.788
15	14	7075.706
16	15	8137.062
17	16	9357.621
18	17	10761.264
19	18	12375.454
20	19	14231.772
21	20	16366.537

]

Beispiel : $k_0 = 100$, $n = 500$, $i = 0.05$

$$k_n = 100 \cdot 1.05^{500} = 3.93 \cdot 10^{12} €$$

Beispiel : $k_n = 1$ Mio €, $k_0 = 100000$ €
$n = 40$

gesucht : q $\quad k_n = k_0 \cdot q^n$

$$\Leftrightarrow q = \sqrt[n]{\frac{k_n}{k_0}} = \sqrt[40]{10} \approx 1.0593$$
$$\hat{=} 5.93\,\%$$

- **Zinsen**: Gebühr, die ein Schuldner für die befristete Überlassung von Kapital bezahlt
- **Betrag der Zinsen (Z)**: Abhängig von Höhe des überlassenen Kapitals K, dem vereinbartem Zinssatz und der Dauer der Überlassung

Verwendete Symbole:

Symbol	Bezeichnung
K_0	Betrag zu Beginn
K_t	Betrag zum Zeitpunkt t
K_n	Endbetrag (Zeitpunkt n)
n	ganzzahlige Laufzeit
Z_t	Zinsen zum Zeitpunkt t
$i = \frac{p}{100}$	(konstanter) Zinssatz
$q = 1 + i$	Zinsfaktor
p	(Prozentzinssatz)

Einfache Verzinsung

- Einfache (lineare) Verzinsung gemäß

$$\begin{aligned} K_n &= K_0 + Z \\ &= K_0 + K_0 \cdot i \cdot n \\ &= K_0 \cdot (1 + i \cdot n) \end{aligned}$$

- Gesetzlich vorgeschrieben für Verzugszinsen und bei Kreditgeschäften zwischen Privatpersonen (BGB, §248)
- K_0 unbekannt: Barwert K_0 über Abzinsung bzw. Diskontierung bzw. Barwertberechnung
- Amtliche Diskontierung:

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + ni}$$

- Kaufmännische Diskontierung (Nur erste Näherung):

$$K_0 = K_n(1 - ni)$$

Unterjährige einfache Verzinsung: Sparbuchmethode

- Sparbuchmethode: Einteilung des Zinsjahres in 12 Monate zu je 30 Tagen,
- Maximal: 360 Zinstage pro Jahr
- Dadurch Berechnung von Monats- bzw. Tageszinsen möglich
- Dazu: Berechnung des Bruchteils eines Zinsjahres über die Anzahl der Zinstage $t \in \{0, 1, \dots, 360\}$
- Regeln: Einzahlungstag wird komplett verzinst, Auszahlungstag gar nicht
- Daraus ergibt sich

$$K_n = K_0 + K_0 \cdot i \cdot \frac{t}{360} = K_0 \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)$$

Beispiel: 3.4.2016: Einzahlung von 1000 € auf Konto mit $i = 0.01$
20.9.16: Abhebung inkl. Zinsen

1.4. 1.9.
3.4. 28 4·30 19 20.9.

$K_n = 1000 \cdot \left(1 + 0.01 \cdot \frac{167}{360}\right)$
$= 1004.63$ €

Beispiel: Einzahlung 1 Mrd € am 28.2.2017 um 23.59 Uhr
Abheben am 1.3.2017 um 0.01 Uhr
($i = 0.01$)
3 Zinstage: $Z = 1$ Mrd. $\cdot\, 0.01 \cdot \frac{3}{360}$
$= 83\,333{,}33$ €

Die Zinseszinsformel

- Während Laufzeit Zinszahlungen mit sofortiger Wiederanlage und Verzinsung zum Zinssatz i
- Entwicklung des Kapitals:

$$\begin{aligned}
K_1 &= K_0 + K_0 \cdot i = K_0 \cdot (1+i) = K_0 \cdot q \\
K_2 &= K_1 \cdot (1+i) = (K_0 \cdot q) \cdot q = K_0 \cdot q^2 \\
K_3 &= K_2 \cdot (1+i) = \left(K_0 \cdot q^2\right) \cdot q = K_0 \cdot q^3 \\
&\dots
\end{aligned}$$

- Damit: Zinseszinsformel, mit n (zunächst) ganzzahlig.

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot q^n}$$

- q^n heißt Aufzinsungfaktor

Die Zinseszinsformel

Auflösung der Zinseszinsformel nach K_0, q und n:

$$K_0 = K_n q^{-n}$$

- Abzinsungs- oder Diskontierungsformel
- q^{-n} heißt Abzinsungsfaktor

$$q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} \quad \text{bzw.} \quad i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

$$n = \frac{\ln K_n - \ln K_0}{\ln q}$$

Gemischte Verzinsung

- Üblich: Einfache Verzinsung bei Restlaufzeiten kleiner einem ganzzahliges Vielfachen der Zinsperiode
- Genauer: Mit
  - Δt_1 (Anzahl Zinstage im ersten Jahr),
  - n (die weiteren, ganzen Zinsperioden) und
  - Δt_2 (Zinstage im letzten Jahr),

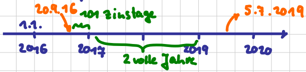
  gilt für das Endkapital K_x:

$$K_x = K_0 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{\Delta t_1}{360}\right) \cdot (1+i)^n \cdot \left(1 + i \cdot \frac{\Delta t_2}{360}\right)$$

- Gemischte Zinsrechnung unter Verwendung der Sparbuchmethode zur Bestimmung der Anzahl der Zinstage

Gemischte Verzinsung

Beispiel: Einzahlung 20.9.16: 1000 €
auf Konto mit $i = 0.03$



Abheben inkl. Zinsen am 5.7.19

Kontostand am 1.1.2017: $1000 \cdot \left(1+0.03\cdot\frac{101}{360}\right)$

Kontostand am 1.1.2019: $\ldots \cdot 1.03^2$

" am 5.7.2019 $\ldots \cdot 1.03^2 \cdot \left(1+0.03\cdot\frac{184}{360}\right)$

$= 1086.22$ €

allgemein:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1+i\,\frac{\Delta t_1}{360}\right)\cdot q^n \cdot \left(1+i\cdot\frac{\Delta t_2}{360}\right)$$

Δt_1: Zinstage im Einzahlungsjahr
n: ganze Jahre dazwischen
Δt_2: Zinstage im Auszahlungsjahr

Unterjährige Verzinsung

Beispiel: Girokonto, 17% p.a.
quartalsweise Abrechnung

Kontostand am 1.1.2016: -1000 €
" am 1.4.16: $-1000\cdot\left(1+\frac{0.17}{4}\right)$
" am 1.7.16: $-1000\cdot\left(1+\frac{0.17}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{0.17}{4}\right)$
⋮
am 1.1.17: $-1000\cdot\left(1+\frac{0.17}{4}\right)^4 = -1181,15$ €

allgemein: $q_{eff} = \left(1+\frac{i}{m}\right)^m$

m: Anzahl der Zinsabrechnungen pro Jahr

	m	qeff.m.
1	~~1~~	~~1.170000~~
2	2	1.177225
3	4	1.181148
4	12	1.183892
5	52	1.184976
6	365	1.185258
7	8760	1.185303
8	31536000	1.1853048486890851

∞ $e^{0.17} \approx 1.185304851$

$$\left(1+\frac{i}{m}\right)^m \xrightarrow[m\to\infty]{} e^i$$

stetige Verzinsung

$q_{eff} = e^i$

Gemischte Verzinsung: Beispiel

Beispiel

Am 15.9.2016 wurden € 12 000 zu 3,75 % angelegt. Wie hoch ist der Endbetrag bei Kontoauflösung am 21.9.2023 (letzter Zinstag 20.9.2023)?

Lösung:

$$15.9. \;\widehat{=}\; (9-1)\cdot 30 + 15 = 255$$

$$\Rightarrow \Delta t_1 = 360 - (255 - 1) = 106$$

$$20.9. \;\widehat{=}\; (9-1)\cdot 30 + 20 = 260$$

$$\Rightarrow \Delta t_2 = 260$$

$(n = 6)$:

$$K_x = 12\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 106}{360}\right) \cdot 1{,}0375^6 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 260}{360}\right)$$

$$= 15\,541{,}20$$

Gemischte Verzinsung: Anmerkungen

- Würde man – von t_0 ausgehend – in ganze Jahre und einem Rest aufteilen, so ergäbe sich:

$$K_x = 12\,000 \cdot 1{,}0375^7 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 6}{360}\right) = 15\,537{,}08$$

(7 Jahre von 15.9.16 bis 14.9.23; dazu 6 Tage)

- Würde man die **Zinseszinsformel** mit nicht-ganzzahligem Exponenten verwenden, so ergäbe sich Folgendes:

$$K_x = 12\,000 \cdot 1{,}0375^{7+\frac{6}{360}} = 15\,536{,}90$$

- Gemischte Verzinsung ist also (zumindest für Kapitalanleger) verbraucherfreundlich

Gemischte Verzinsung: Anmerkungen

Nachteil der gemischten Verzinsung

- Die gemischte Verzinsung ist inkonsistent und vom Zeitpunkt des Zinszuschlages (bzw. der Einzahlung) abhängig.
- Im Beispiel: Wäre der Zeitraum um einen Monat verschoben (vom 15.10.16 bis zur Auflösung am 21.10.23), so ergäbe sich ...

$$
\begin{aligned}
K_x &= 12\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 76}{360}\right) \cdot 1{,}0375^6 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 290}{360}\right) \\
&= 15\,540{,}31
\end{aligned}
$$

Die Widersprüche verschwinden, wenn eine unterjährige Verzinsung zum konformen Zinssatz vorgenommen wird.

Unterjährige Verzinsung

- Abrechnung und Zahlung von Zinsen nicht jährlich, sondern in kürzeren Abständen
- Dazu: m gleich lange Zinsperioden pro Jahr
- Typische Aufteilungen: $m = 2, 4, 12$ Zinsperioden
- Annahme: Laufzeit n in Jahren sei (aus Vereinfachungsgründen) ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{1}{m}$ (z.B. $m = 2$, $n = 1{,}5$ oder $m = 12$, $n = 1{,}25$).

Bei m Zinsabschnitten pro Jahr heißt gegeben, so heißt:

- der Zins i oder i_{nom} der nominelle Jahreszins oder Jahreszins,
- $i_{\text{rel}} = \frac{i}{m}$ der relative Periodenzins,
- i_{kon} der zu i konforme Periodenzins, mit dem die periodische Verzinsung über i_{rel} zum selben Ergebnis führt wie die jährliche Verzinsung mit i.

$$(1 + i_{\text{kon}})^m = (1 + i)$$

Unterjährige Verzinsung

Betrachte den relativen Periodenzinsen $i_{\text{rel}} = \frac{i}{m}$, so heißt:

- i der nominelle Jahreszins
- i_{eff} der effektive Jahreszins, wenn jährliche Verzinsung mit i_{eff} zum selben Ergebnis führt wie periodische Verzinsung mit i_{rel}. (Entsprechendes gilt für $q_{\text{rel}}, q\text{kon}, q_{\text{eff}}$).

$$K_1 = K_0 \cdot q_{\text{rel}}^m = K_0 \cdot q_{\text{eff}}$$

$$\Rightarrow q_{\text{eff}} = q_{\text{rel}}^m$$

$$\text{mit } q_{\text{rel}} = 1 + i_{\text{rel}} = 1 + \frac{i}{m}$$

Unterjährige Verzinsung: Formel

- Damit: Effektivzins q_{eff} ist

$$q_{\text{eff}} = (1 + i_{\text{rel}})^m = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$$

- Endkapital K_n ist:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i_{\text{rel}})^{m \cdot n} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}$$

- **Anmerkung**: $m \cdot n$ muss nach o.g. Bedingungen ganzzahlig sein.

Beispiel zur unterjährigen Verzinsung

Beispiel

Ein Betrag von 10 000 € soll zu 5 % nominal bei monatlicher Verzinsung angelegt werden. Welcher Betrag kann nach 16 Monaten entnommen werden? Wie hoch ist der Effektivzins?

Lösung:

Mit $i = 5\,\%$, $m = 12$ und $m \cdot n = 16$ gilt:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n} = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}05}{12}\right)^{16} = 10\,687{,}91\,€$$

Effektiver Jahreszins:

$$i_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{0{,}05}{12}\right)^{12} - 1 = 5{,}12\,\%$$

Beispiel zur unterjährigen Verzinsung mit dem konformen Zinssatz

- Widersprüche der gemischten Verzinsung verschwinden, wenn eine unterjährige Verzinsung mit dem konformen Zinssatz gemäß den Richtlinien für den internationalen Wertpapierhandel (ISMA – International Securities Market Association) vorgenommen wird.

Beispiel

Am 15.9.2016 (15.10.2016) wurden 12 000 € zu **effektiv** 3,75 % angelegt. Wie hoch ist der Endbetrag bei Kontoauflösung am 21.9.2023 (21.10.2023)?

Lösung

- Verwendung des konformen Zinses auf täglicher Basis,
- also $q_{\text{kon}} = \sqrt[360]{1{,}0375} = 1{,}0375^{\frac{1}{360}}$
- $K_n = 12\,000 \cdot 1{,}0375^{\frac{106}{360}} \cdot 1{,}0375^6 \cdot 1{,}0375^{\frac{260}{360}} = 15\,536{,}90$
- alternativ: $K_n = 12\,000 \cdot 1{,}0375^{\frac{76}{360}} \cdot 1{,}0375^6 \cdot 1{,}0375^{\frac{290}{360}} = 15\,536{,}90$

Stetige Verzinsung

- Lässt man $m \to \infty$ wachsen, so erhält man aus der obigen Formel

$$K_n = \lim_{m \to \infty} K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n} = K_0 \left[\lim_{m \to \infty} \left(\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m\right)\right]^n = K_0 \left(e^i\right)^n$$

- die Formel für die stetige Verzinsung:

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot e^{i \cdot n}}$$

- Für den effektiven Jahreszinssatz gilt damit:

$$\boxed{i_{\text{eff}} = e^i - 1}$$

- Anwendung stetiger Wachstumsprozesse:
  - Ökonomie (Bevölkerungswachstum),
  - Physik (radioaktiver Zerfall),
  - BWL (Portfolio- und Kapitalmarkttheorie)

Beispiel zur stetigen Verzinsung

Beispiel (überzogenes Girokonto)

$K_0 = 10\,000\,€$, $n = 5$, nominaler Jahreszins $i = 0{,}19$. Wie hoch ist K_n und p_{eff} bei stetiger Verzinsung?

Lösung:

$$K_n = K_0 \cdot e^{i \cdot n} = 10\,000 \cdot e^{0{,}19 \cdot 5} = 25\,857{,}10\,€$$

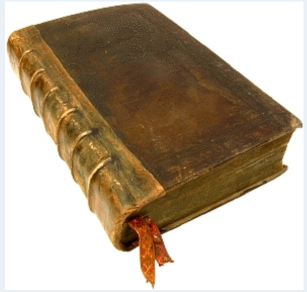
$$i_{\text{eff}} = e^{0{,}19} - 1 = 20{,}925\,\%$$

Anmerkungen

- Bei Variation von m ergeben sich:

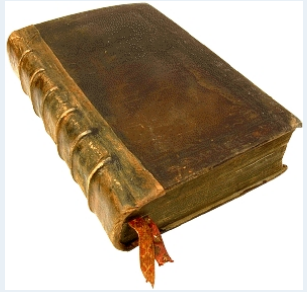
m	1	2	4	12	∞
p_{eff}	5	19,903	20,397	20,745	20,925

- Die stetige Verzinsung wird z.B. in der Portfoliotheorie verwendet, da sie mathematisch einfacher zu handhaben ist als die diskrete Verzinsung.



Bücher

- Bamberg, Günter, Franz Baur und Michael Krapp (2011). **Statistik**. 16. Aufl. München: Oldenbourg Verlag. ISBN: 3486702580.
- Fahrmeir, Ludwig, Rita Künstler, Iris Pigeot und Gerhard Tutz (2009). **Statistik: Der Weg zur Datenanalyse**. 7. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer. ISBN: 3642019382.
- Luderer, Bernd (2003). **Starthilfe Finanzmathematik. Zinsen, Kurse, Renditen**. 2. Aufl. Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden: Teubner.
- Opitz, Otto (2004). **Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler**. 9. Aufl. München: Oldenbourg.



Quellen zu Bildern und Daten

- Anscombe, Francis (1973). „Graphs in Statistical Analysis". In: **The American Statistician**, S. 195–199.
- Bach, Axel, Reinhard Brüning, Katrin Krieft, Hilmar Liebsch und Martin Rosenberg (2006). **Mit Zahlen lügen**. URL: `http://www.wdr.de/tv/quarks/sendungsbeitraege/2006/1017/000_zahlen.jsp`.
- Fahrmeir, Ludwig, Rita Künstler, Iris Pigeot und Gerhard Tutz (2009). **Statistik: Der Weg zur Datenanalyse**. 7. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer. ISBN: 3642019382.
- Kramer, Walter (2011). **So lügt man mit Statistik**. Piper Verlag. ISBN: 3492264131.