Wirtschaftsmathematik

Einführung in einige Teilbereiche der Wirtschaftsmathematik

Wintersemester 2016

HSA Wing Sessionlist WS 2016				
			52	
Datum	N.	Zeit	UE	Themen
Dienstag, 20. September 2016	1	18.00-21.15	4	Einführung, Zinsen, Renten
Dienstag, 27. September 2016	2	18.00-21.15	4	Tilgung, Festverz. Wertpapiere
Dienstag, 4. Oktober 2016	3	18.00-21.15	4	Lineare Optimierung: Einführung, Lösungsmethoden
Samstag, 8. Oktober 2016	4	08.00-11.45	4	Lineare Optimierung: Standardmaximumproblem, Simplex
Dienstag, 11. Oktober 2016	5	18.00-21.15	4	Gewöhnliche Differentialgleichungen
Samstag, 15. Oktober 2016	6	08.00-11.45	4	Analytische Lösung linearer DGLs
Dienstag, 18. Oktober 2016	7	18.00-21.15	4	Einführung, univ. Statistik, Konzentration
Samstag, 22. Oktober 2016	8	11.45-15.00	4	Korrelation, Regression, Preisindizes
Dienstag, 25. Oktober 2016	9	18.00-21.15	4	Kombinatorik, Wahrscheinlichkeiten; Binomial, Hypergeo, Poisson
Samstag, 29. Oktober 2016	10	08.00-11.15	4	Zufallsvariablen, Lage- und Streuung, Stetige ZV, Gleich-vtlg.
Dienstag, 15. November 2016	11	18.00-21.15	4	Normalvtlg., Schätzen und Eigenschaften von Punktschätzern
Samstag, 26. November 2016	12	08.00-11.15	4	Konfidenzintervalle, t-Test
Dienstag, 29. November 2016	13	18.00-21.15	4	Puffer, Wiederholung Besprechung Probeklausur
Samstag, 3. Dezember 2016		09.30-11.00		Klausur (regulärer Termin 90 Min., mit Aufsicht)

Prof. Dr. Stefan Etschberger
HSA

Beispiel: 2 Konten, $i = 0.05$ p.a. Zinssatz

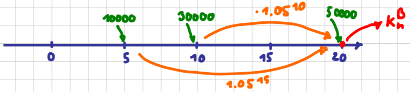
Einzahlungen

Zeitpunkt [Jahre]	0	5	10	20
Konto A	50000	0	0	0
Konto B	0	10000	30000	50000

Vergleich des „Wertes" von A, B über Kontoendstand:

$$K_n^A = 50000 \cdot 1.05^{20} \approx 132\,664{,}88\ €$$

$$K_n^B = 10000 \cdot 1.05^{15} + 30000 \cdot 1.05^{10} + 50000 \approx 119\,656.12\ €$$



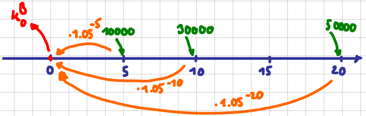
Jetzt: Vergleich über den „Wert" der Konten zum Zeitpunkt 0:

$$K_0^A = 50000$$

$$K_0^B = K_n^B \cdot \underbrace{1.05^{-20}}_{\text{abzinsen, diskontieren}} = (10' \cdot 1.05^{15} + 30' \cdot 1.05^{10} + 50') \cdot 1.05^{-20}$$

$$= 10' \cdot 1.05^{-5} + 30' \cdot 1.05^{-10} + 50' \cdot 1.05^{-20}$$

$$\approx 45\,097{,}13\ €$$



Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik

Definition:

$$K_0 = \sum_{t=0}^{n} \underbrace{A_t \cdot q^{-t}}_{\text{Barwerte}}$$

Kapitalwert des Zahlungsstroms $A_0, A_1, \dots, A_n$

K_0: Kapitalwert
A_t: Zahlung zum Zeitpunkt t
q: Zinsfaktor

Zwei Zahlungsströme A_t, B_t sind finanzmath. äquivalent, wenn ihre Kapitalwerte gleich hoch sind.

Beobachtungen:

- Bei zwei Projekten ist das mit dem höheren Kapitalwert vorzuziehen
- Nur Projekte mit pos. Kapitalwert sind rentabel

Beispiel:

Kalkulationszins	25%				
Zeitpunkt	0	1	2	5	10
Zahlung	-2.000.000,00 €	-1.000.000,00 €	1.000.000,00 €	2.000.000,00 €	5.000.000,00 €
Barwert	-2.000.000,00 €	- 800.000,00 €	640.000,00 €	655.360,00 €	536.870,91 €
Kapitalwert	- 967.769,09 €				

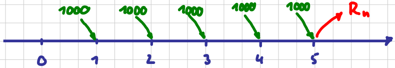
Anmerkung: Gilt bei Betrachtung des Kapitalwertes in Abh. von q (Kalkulationszins)

$K_0(\tilde{q}) = 0$, so nennt man $\tilde{q}$ den internen Zins

- Interner Zins > Kalkulationszins ⇒ Projekt rentabel (bei „Normal"-Investition)

Renten $\hat{=}$ Regelmäßige Zahlungen in konstanter Höhe

Beispiel: Einzahlung von 1000 € jeweils zum Jahresende, 5 Jahre lang ($i = 0.05$)



Kontostand bei $t=5$:

$$R_n = 1000 \cdot 1.05^4 + 1000 \cdot 1.05^3 + 1000 \cdot 1.05^2 + 1000 \cdot 1.05^1 + 1000 \cdot 1.05^0$$

$$= 1000 \cdot \sum_{i=0}^{4} 1.05^i$$

[Exkurs: $(x^0 + x^1 + \dots + x^n) \cdot (x - 1)$

$$= x + x^2 + \dots + x^n + x^{n+1} - 1 - x - x^2 - \dots - x^n$$

$$= x^{n+1} - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^0 + x^1 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$]

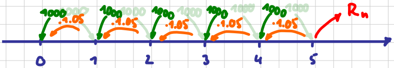
zurück zum Beispiel: $R_n = 1000 \cdot \sum_{i=0}^{4} 1.05^i = 1000 \cdot \frac{1.05^5 - 1}{1.05 - 1}$

$$= 5525{,}63 \text{ €}$$

allgemein: n Zahlungen, jeweils zum Jahresende (nachschüssig) in Höhe von r

$$\boxed{R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$ nachschüssiger Rentenendwert

Vorschüssige Zahlungen



allgemein: Zahlungen jeweils zum Jahresbeginn

$$\boxed{R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q}$$ vorschüssiger Rentenendwert

Rentenbarwerte

bei nachschüssigen Raten

$$\boxed{R_0 = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q^{-n}}$$

nachschüssiger Rentenbarwert

bei vorschüssigen Raten

$$\boxed{R_0 = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q \cdot q^{-n}}$$

vorschüssiger Rentenbarwert

Beispiel: Konto mit 5 % p.a.
$n = 40$, $R_n = 500\,000$ €
soll mit nachschüssigen Raten angespart werden

gesucht: r

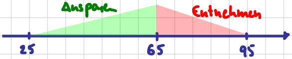
$$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{(nachsch. Rentenendwert)}$$

$$\Leftrightarrow \quad r = R_n \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1} = 500000 \cdot \frac{1.05 - 1}{1.05^{40} - 1} \approx 4139{,}08$$

Beispiel: Altersvorsorge; $i = 0.03$ p.a.

Entnahmephase: Ab 65, 30 Jahre lang, 12000 € p.a. vorschüssig

Ansparphase: 40 Jahre lang, nachschüssig



ges: Rate r der Ansparphase

Idee: Endwert der Ansparphase gleich Barwert der Entnahmephase

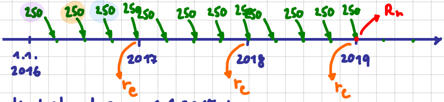
$$R_n^A = R_0^E$$

$$\Leftrightarrow \quad r \cdot \frac{1.03^{40}-1}{1.03-1} = 12000 \cdot \frac{1.03^{30}-1}{1.03-1} \cdot 1.03 \cdot 1.03^{-30}$$

$$\Leftrightarrow \quad r = \frac{\dots}{\dots} \approx 3212{,}96$$

Unterjährige Raten

Beispiel: Quartalsweise, nachschüssig jeweils 250 € auf Konto mit $i = 0.05$, 3 Jahre lang



Kontostand zum 1.1.2017:

$$250 \cdot \left(1 + 0.05 \cdot \frac{3}{4}\right) + 250 \cdot \left(1 + 0.05 \cdot \frac{2}{4}\right) + 250 \cdot \left(1 + 0.05 \cdot \frac{1}{4}\right) + 250 \cdot \left(1 + 0.05 \cdot \frac{0}{4}\right) = 250 \cdot \left[4 + \frac{0.05}{4}(3+2+1+0)\right]$$

Beispiel: 1 Mio € soll durch monatliche vorschüssige Raten in Höhe von 50 € bei Zinssatz $i = 0.05$ p.a.

gesucht: Laufzeit

① Rentenersatzrate (vorschüssig)

$$r_e = r \cdot \left[m + i \cdot \frac{m+1}{2}\right] = 50 \cdot \left(12 + 0.05 \cdot \frac{12+1}{2}\right) = 616.25 \text{ €}$$

② Einsetzen in nachschüssige jährliche Rentenendwertformel

$$R_n = 1 \text{ Mio} = 616.25 \cdot \frac{1.05^n - 1}{1.05 - 1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1 \text{ Mio}}{616.25} \cdot 0.05 + 1 = 1.05^n$$

$$\Leftrightarrow \quad n = \log_{1.05}(\dots) \approx 90.35 \text{ Jahre}$$

Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik

- Das Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik für Vergleich von Zahlungen, welche zu verschiedenen Zeitpunkten anfallen.

Vereinfachende Annahmen:

- Zinseszinsliche Verzinsung
- Zahlungen stets am Anfang oder am Ende einer Zinsperiode

Prinzip

- Vergleich von 2 oder mehreren zu verschiedenen Zeitpunkten anfallende Geldbeträge: Beziehen auf den gleichen Zeitpunkt durch geeignetes Auf- oder Abzinsen.
- Wahl des Zeitpunktes dabei unerheblich.
- Meist: Zeitpunkt $t = 0$ oder $t = n$ (Ende der Laufzeit)
  - $t = 0$ den Anfang des ersten Zinszeitraums („heute“).
  - $t = 1$ Beginn des 2. Zinszeitraums (1.1. des 2. Jahres).
  - $t = 2$ Beginn des 3. Zinszeitraums (1.1. des 3. Jahres).
  - $t = n$ Ende des letzten Zinszeitraumes (31.12. des n-ten Jahres)

Äquivalenzprinzip: Herleitung

- Zwei Zahlungen, A im Zeitpunkt t_A und B im Zeitpunkt t_B, sind dann gleichwertig ($A \sim B$), wenn ihre Zeitwerte in jedem Zeitpunkt t übereinstimmen.

Beispiel

Gegeben: $A = 10\,000$, $t_A = 2$, $p = 7\%$
Gesucht: B mit $t_B = 5$ so, dass $A \sim B$.

Lösung:

$$B = 10\,000 \cdot 1{,}07^{(5-2)} = 12\,250{,}43 \text{ €}$$

Eine Zahlung von € $12\,250{,}43$ nach 5 Jahren ist also gleichwertig zu einer Zahlung von € $10\,000$ nach 2 Jahren. Der Barwert („Wert heute“) beider Zahlungen ist übrigens
$10\,000 \cdot 1{,}07^{-2} = 12\,250{,}43 \cdot 1{,}07^{-5} = 8\,734{,}39$ [€].

Zahlungsströme, Barwert, Endwert

- Ein Zahlungsstrom $(A_0, \ldots, A_n)$ ist eine Folge von Zahlungen mit Zahlungszeitpunkten $t = 0, \ldots, n$.
- Summe aller auf $t = 0$ abgezinsten Zahlungen (Kapitalwert):

$$K_0 = \sum_{t=0}^{n} \frac{A_t}{q^t} = \sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{-t}$$

- Summe aller auf $t = n$ abgezinsten Zahlungen (Endwert):

$$K_n = \sum_{t=0}^{n} q^n \frac{A_t}{q^t} = \sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{n-t}$$

Gleichheit zweier Zahlungsströme

Zwei Zahlungsströme (A_t), (B_t), $t = 0, \ldots, n$ sind genau dann äquivalent, wenn sie zu einem beliebigen Zeitpunkt T den gleichen Zeitwert besitzen:

$$
\begin{aligned}
(A_t) \sim (B_t) \quad \Leftrightarrow \quad \textstyle\sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{T-t} &= \textstyle\sum_{t=0}^{n} B_t \cdot q^{T-t} \\
\Leftrightarrow \quad q^T \textstyle\sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{-t} &= q^T \textstyle\sum_{t=0}^{n} B_t \cdot q^{-t} \\
\Leftrightarrow \quad \textstyle\sum_{t=0}^{n} (A_t - B_t) \cdot q^{-t} &= 0
\end{aligned}
$$

$$
(A_t) \sim (B_t) \;\Leftrightarrow\; \sum_{t=0}^{n} (A_t - B_t)\, q^{-t} = 0
$$

Investitionsrechnung: Beispiel

Beispiel

Kalkulationszinssatz gleich $5\,\%$. Welches Projekt ist zu bevorzugen?

Jahr t	0	1	2	3	4	5
A_t	0	1000	0	1000	0	1000
B_t	400	400	400	600	600	600

Lösung: Kapitalwert von (A_t):

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{5} A_t \cdot 1{,}05^{-t} &= 0 \cdot 1{,}05^{0} + 1000 \cdot 1{,}05^{-1} + 0 \cdot 1{,}05^{-2} + 1000 \cdot 1{,}05^{-3} \\ &\quad + 0 \cdot 1{,}05^{-4} + 1000 \cdot 1{,}05^{-5} \\ &= 2599{,}74\end{aligned}$$

Kapitalwert von (B_t):

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{5} B_t \cdot 1{,}05^{-t} &= 400 \cdot 1{,}05^{0} + 400 \cdot 1{,}05^{-1} + 400 \cdot 1{,}05^{-2} + 600 \cdot 1{,}05^{-3} \\ &\quad + 600 \cdot 1{,}05^{-4} + 600 \cdot 1{,}05^{-5} \\ &= 2625{,}80\end{aligned}$$

Alternative B ist der Alternative A vorzuziehen.

Definition

Rente: Zahlungsstrom mit Zahlungen in gleichen zeitlichen Abständen und (meistens) in konstanter Höhe

Unterscheidung zwischen Renten

- mit Zahlung am Ende einer Rentenperiode (nachschüssig)
- mit Zahlung zu Beginn einer Rentenperiode vorschüssig)

- mit endlicher Laufzeit (endliche Renten)
- mit unendlicher Laufzeit (ewige Renten)

Rentenrechnung: Symbole

Symbol	Bezeichnungen
r_t	Rentenrate in Periode t
n	Laufzeit $(t = 1, \ldots, n)$
m	Anzahl der Rentenzahlungen pro Zinsperiode
q	Zinsfaktor
R_0	Barwert der Rente
R_n	Endwert der Rente

Nachschüssige konstante (endliche) Renten

Rentenzahlung jeweils am Ende einer Zinsperiode, jeweils in Höhe von

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_n = \text{const.} = r$$

$\Rightarrow$ Rentenendwert R_n:

$$\begin{aligned}
R_n &= r \cdot q^{n-1} + r \cdot q^{n-2} + \ldots + r \cdot q + r \\
&= r \cdot \left(q^{n-1} + \cdot q^{n-2} + \ldots + q + 1\right) \\
&= r \cdot \sum_{t=0}^{n-1} q^t \qquad \text{(geometrische Reihe)} \\
&= r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}
\end{aligned}$$

Rentenendwert und Rentenbarwert

- Endwert R_n der Rente:

$$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r \cdot \text{NREF}_{p,n}$$

- NREF: Nachschüssiger Rentenendwertfaktor für endliche konstante Rente.

- Barwert der Rente:

$$R_0 = R_n \cdot q^{-n} = r \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q-1)} = r \cdot \frac{q^n - 1}{q^{n+1} - q^n} = r \cdot \text{NRBF}_{p,n}$$

- NRBF: Nachschüssiger Rentenbarwertfaktor

Beispiel Rentenendwert

Beispiel

Genau 10 Jahre lang wurde jeweils zum Jahresende ein Betrag von 12.000 € zum Zinssatz von 4% angelegt. Wieviel kann zu Beginn des 11. Jahres (entspricht dem Ende des 10. Jahres) abgehoben werden?

Lösung:

Mit $n = 10$, $q = 1{,}04$ und $r = 12\,000$ gilt Folgendes:

$$R_{10} = 12\,000 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04 - 1}$$

$$= 12\,000 \cdot 12{,}006107$$

$$= 144\,073{,}28 \quad [€\,]$$

Beispiel Rentenbarwert

Beispiel

Aus welchem zum Zeitpunkt 0 eingezahlten Betrag kann 10 Jahre lang bei 4% Zins eine konstante nachschüssige Rente von 12.000 € bezahlt werden?

Lösung: Frage nach dem Barwert einer Rente. Mit $n = 10$, $q = 1{,}04$ und $r = 12\,000$ gilt:

$$\begin{aligned} R_0 &= 12\,000 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04^{11} - 1{,}04^{10}} \\ &\approx 12\,000 \cdot 8{,}110896 \\ &\approx 97\,330{,}75 \quad [€\,] \end{aligned}$$

Umformung der Rentenbar- und -endwertformel

- Je nach Fragestellung: Laufzeit n, Rentenzahlung r, Verzinsungsfaktor q.
- Rentenzahlung r:

$$r = \frac{R_0}{\text{NRBF}_{p,n}} = R_0 \cdot \frac{q^{n+1} - q^n}{q^n - 1} = \frac{R_n}{\text{NREF}_{p,n}} = R_n \cdot \frac{q-1}{q^n - 1}$$

- Laufzeit n aus R_n:

$$n = \frac{\ln\left(1 + \frac{R_n \cdot i}{r}\right)}{\ln q}$$

- Laufzeit n aus R_0:

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{R_0 \cdot i}{r}\right)}{\ln q}$$

- q aus R_0:

$$R_0 q^{n+1} - (R_0 + r) q^n + r \stackrel{!}{=} 0\,.$$

- q aus R_n:

$$r \cdot q^n - R_n \cdot q + R_n - r \stackrel{!}{=} 0\,.$$

- Berechnung von q im Allgemeinen nur näherungsweise (iterativ) möglich

Beispiel

Ein Steuerberater kauft die Kanzlei eines älteren Kollegen und muss als Kaufpreis 10 Jahre lang jährlich–nachschüssig je 12.500 € zahlen. Durch welchen Betrag könnte der Steuerberater diese Zahlungsverpflichung sofort bei Vertragsabschluss ablösen, wenn mit 8% Zinsen kalkuliert wird?

Lösung: Gesucht ist der Rentenbarwert mit $r = 12\,500$, $q = 1{,}08$ und $n = 10$. Es gilt dann:

$$
\begin{aligned}
R_0 &= 12\,500 \cdot \frac{1{,}08^{10} - 1}{1{,}08^{11} - 1{,}08^{10}} \\
&= 12\,500 \cdot 6{,}710081 \\
&= 83\,876{,}01 \quad [€\,]
\end{aligned}
$$

Beispiel

Der Barwert einer über 15 Jahre laufenden nachschüssigen Jahresrente beträgt bei 5%-iger Verzinsung 10.380 €. Wie hoch sind die jährlichen Rentenzahlungen?

Lösung: Gesucht sind die Rentenzahlungen r mit $R_0 = 10\,380$, $q = 1{,}05$ und $n = 15$. Es gilt dann:

$$r = 10\,380 \cdot \frac{1{,}05^{16} - 1{,}05^{15}}{1{,}05^{15} - 1}$$

$$= 10\,380 \cdot 0{,}096342$$

$$= 1\,000{,}03 \quad [€]$$

Vorschüssige konstante Renten

- Rentenbetrag wird jeweils zu **Beginn der Zinsperiode** in Höhe von $r'_1 = r'_2 = \cdots = r'_n = r'$ bezahlt.
- äquivalenzprinzip $\Rightarrow$ Endwert der Rente:
- vorschüssige Rentenzahlung $r' \sim$ nachschüssige Rentenzahlung $r \quad \Rightarrow \quad r = r'q$

$$R_n = r' \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r' \cdot \text{VREF}_{p,n}$$

- **VREF**: Vorschüssiger Rentenendwertfaktor

- Barwert der Rente:

$$\begin{aligned} R_0 &= R_n \cdot q^{-n} \\ &= r' \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q - 1)} = r' \cdot \frac{q^n - 1}{q^n - q^{n-1}} = r' \cdot \text{VRBF}_{p,n} \end{aligned}$$

- **VRBF**: Vorschüssiger Rentenbarwertfaktor

Aufteilung der Zinsperiode in mehrere gleich lange Rentenperioden, d.h. m Rentenzahlungen pro Zinsperiode (= Jahr). Dazu:

- Rechnung mit einfacher Verzinsung innerhalb der Zinsperiode
- Rentenzahlungen nachschüssig (also am Ende jeder unterj. Rentenperiode) oder vorschüssig möglich

Lösung: Errechnung von konformen (gleichwertigen) jährlich nachschüssigen Ersatzzahlungen zu den m unterjährigen Zahlungen.

Definition

r_e heißt konforme jährlich nachschüssige Ersatzrentenrate einer nachschüssigen (oder vorschüssigen) unterjährigen Rentenrate r.

Berechnung von r_e:

falls unterjährige Rente **nachschüssig**:

$$\begin{aligned} r_e &= r + r \cdot \left(1 + \frac{1}{m} \cdot i\right) \\ &\quad + r \cdot \left(1 + \frac{2}{m} \cdot i\right) \\ &\quad + \ldots \\ &\quad + r \cdot \left(1 + \frac{m-1}{m} \cdot i\right) \\ &= r \cdot m \\ &\quad + i \cdot r \cdot \frac{1}{m} \left(1 + 2 + \ldots + (m-1)\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{r_e = r \cdot \left[m + i \cdot \frac{m-1}{2}\right]}$$

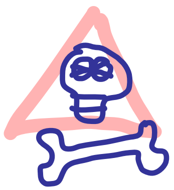
falls unterjährige Rente **vorschüssig**:

$$\begin{aligned} r_e &= r \cdot \left(1 + \frac{1}{m} \cdot i\right) \\ &\quad + r \cdot \left(1 + \frac{2}{m} \cdot i\right) \\ &\quad + \ldots \\ &\quad + r \cdot \left(1 + \frac{m}{m} \cdot i\right) \\ &= r \cdot m \\ &\quad + i \cdot r \cdot \frac{1}{m} \left(1 + 2 + \ldots + m\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{r_e = r \cdot \left[m + i \cdot \frac{m+1}{2}\right]}$$

Aus Ersatzrentenrate r_e: Weiterrechnen mit Formeln für jährliche nachschüssige Rente

Achtung ! ! ! r_e muss immer in nachschüssige jährliche Formeln eingesetzt werde ! ! !



Beispiel konforme Ersatzrentenraten

Beispiel

Ein Sparer legt monatliche nachschüssig 1.000 € auf ein Konto. Wie hoch ist der Kontostand nach 10 Jahren bei einem Zinssatz von 4%?

Lösung: Gesucht ist der Rentenendwert auf Basis der konformen Rentenraten. Mit $n = 10$, $m = 12$, $q = 1{,}04$ und $r = 1\,000$ ergibt sich Folgendes:

$$R_{10} = 1\,000 \cdot \underbrace{\left[12 + \frac{0{,}04 \cdot 11}{2}\right]}_{12{,}22} \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04 - 1}$$

$$= 12\,220 \cdot 12{,}006107 = 146\,714{,}63$$

Beim Zinssatz von $i = 4\%$ kann eine monatlich nachschüssige Rente von 1.000 € durch eine jährlich nachschüssige Rentenzahlung von 12.220 € gleichwertig ersetzt werden. Der Kontostand nach 10 Jahren beträgt $146\,714{,}63$ €.

Ewige Renten

- Eine Rente heißt ewige Rente, wenn Anzahl n der Ratenzahlungen nicht begrenzt, n also beliebig groß wird ($n \to \infty$).
- Berechnung des Rentenendwertes dann nicht möglich
- Rentenbarwert R_0 existiert jedoch:

$$
\begin{aligned}
R_0 &= \lim_{n\to\infty} (r \cdot \text{NRBF}) = r \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \\
&= r \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{q^n}}{q - 1} \right) = r \cdot \frac{1}{q - 1} = \frac{r}{i}
\end{aligned}
$$

- Damit: Rentenbarwert einer nachschüssigen ewigen Rente:

$$
\boxed{R_0 = \frac{r}{i}}
$$

Ewige Renten: Beispiel

Beispiel

Wie groß ist der Barwert einer ewigen nachschüssigen Rente von 40.000 € pro Jahr, wenn der Zins bei 8% liegt?

Lösung:

$$R_0 = \frac{40\,000}{0{,}08} = 500\,000$$

- Anmerkung: Geht man von einer vorschüssigen ewigen Rente aus, so ergibt sich für den Rentenbarwert:

$$R_0 = r' + \frac{r'}{i}$$