# Wirtschaftsmathematik

## Einführung in einige Teilbereiche der Wirtschaftsmathematik

Wintersemester 2016

| HSA Wing Sessionlist WS 2016 | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | 52 | |
| Datum | N. | Zeit | UE | Themen |
| Dienstag, 20. September 2016 | 1 | 18.00-21.15 | 4 | Einführung, Zinsen, Renten |
| Dienstag, 27. September 2016 | 2 | 18.00-21.15 | 4 | Tilgung, Festverz. Wertpapiere |
| Dienstag, 4. Oktober 2016 | 3 | 18.00-21.15 | 4 | Lineare Optimierung: Einführung, Lösungsmethoden |
| Samstag, 8. Oktober 2016 | 4 | 08.00-11.45 | 4 | Lineare Optimierung: Standardmaximumproblem, Simplex |
| Dienstag, 11. Oktober 2016 | 5 | 18.00-21.15 | 4 | Gewöhnliche Differentialgleichungen |
| Samstag, 15. Oktober 2016 | 6 | 08.00-11.45 | 4 | Analytische Lösung linearer DGLs |
| Dienstag, 18. Oktober 2016 | 7 | 18.00-21.15 | 4 | Einführung, univ. Statistik, Konzentration |
| Samstag, 22. Oktober 2016 | 8 | 11.45-15.00 | 4 | Korrelation, Regression, Preisindizes |
| Dienstag, 25. Oktober 2016 | 9 | 18.00-21.15 | 4 | Kombinatorik, Wahrscheinlichkeiten; Binomial, Hypergeo, Poisson |
| Samstag, 29. Oktober 2016 | 10 | 08.00-11.15 | 4 | Zufallsvariablen, Lage- und Streuung, Stetige ZV, Gleich-vtlg. |
| Dienstag, 15. November 2016 | 11 | 18.00-21.15 | 4 | Normalvtlg., Schätzen und Eigenschaften von Punktschätzern |
| Samstag, 26. November 2016 | 12 | 08.00-11.15 | 4 | Konfidenzintervalle, t-Test |
| Dienstag, 29. November 2016 | 13 | 18.00-21.15 | 4 | Puffer, Wiederholung Besprechung Probeklausur |
| Samstag, 3. Dezember 2016 | | 09.30-11.00 | | Klausur (regulärer Termin 90 Min., mit Aufsicht) |

Prof. Dr. Stefan Etschberger
HSA

# Stundenplan (Stand 15.9.2016)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| KW 38 19 | WIMA, B 4.02, 18:00 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| KW 39 26 | WIMA, B 4.02, 18:00 27 | 28 | 29 | 30 | | |

## Oktober 2016

| Montag | Dienstag | Mittwoch | Donnerstag | Freitag | Samstag | Sonntag |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | KW 39 1 | 2 |
| KW 40 Tag der d. Einheit 3 | WIMA, B 4.02, 18:00 4 | 5 | 6 | 7 | WIMA, B 4.02, 08:00 8 | 9 |
| KW 41 10 | WIMA, B 4.02, 18:00 11 | 12 | 13 | 14 | WIMA, B 4.02, 08:00 15 | 16 |
| KW 42 17 | WIMA, B 4.02, 18:00 18 | 19 | 20 | 21 | WIMA, B 4.02, 11:45 22 | 23 |
| KW 43 24 | WIMA, B 4.02, 18:00 25 | 26 | 27 | 28 | WIMA, B 4.02, 08:00 29 | Herbstferien 30 |
| KW 44 Herbstferien 31 | | | | | | |

## November 2016

| Montag | Dienstag | Mittwoch | Donnerstag | Freitag | Samstag | Sonntag |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | KW 44 Herbstferien 1 | Herbstferien 2 | Herbstferien 3 | Herbstferien 4 | Herbstferien 5 | Herbstferien 6 |
| KW 45 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| KW 46 14 | WIMA, B 4.02, 18:00 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| KW 47 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | WIMA, B 4.02, 08:00 26 | 1. Advent 27 |
| KW 48 28 | WIMA, B 4.02, 18:00 29 | 30 | | | | |

## Dezember 2016

| Montag | Dienstag | Mittwoch | Donnerstag | Freitag | Samstag | Sonntag |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | KW 48 1 | 2 | WIMA, B 4.02, 08:30 Prüfungstag 3 | 4 |

# Tilgungsrechnung

- Rückzahlung oder Tilgung größerer Darlehen oft in mehreren Raten
- Hier betrachtet: Tilgung in mehreren Teilbeträgen, in konstanten Zeitabständen
- Jede zu bezahlende Rate beinhaltet Zinsen und Tilgung
- Verwendete Symbole:

| Symbol | Bezeichnung |
|---|---|
| $S$ | Darlehenssumme, Anfangsschuld |
| $R_k$ | Restschuld nach $k$ Jahren |
| $n$ | Tilgungsdauer ($\in \mathbb{N}$) |
| $Z_k$ | Zins am Ende des $k$-ten Jahres |
| $T_k$ | Tilgungsquote am Ende des $k$-ten Jahres |
| $A_k = z_k + T_k$ | Annuität am Ende des $k$-ten Jahres |

- Unterscheidung zwischen Ratentilgung und Annuitätentilgung



# Ratentilgung

- Während Laufzeit sind Tilgungsquoten konstant. Daraus folgt:

$$T_k = T = \frac{S}{n}$$

- und damit:

| | |
|---|---|
| $R_k = S - k \cdot T$ | Restschuld nach $k$ Jahren |
| $Z_k = R_{k-1} \cdot i$ | Zins am Ende des $k$-ten Jahres |
| $A_k = Z_k + T$ | Annuität am Ende des $k$-ten Jahres |

# Annuitätentilgung

Annuitätentilgung vs. Renten (nachschüssig)

Schuldsumme S | Rentenbarwert $R_0$

Annuität A | Rate r

$S = A \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} \cdot q^{-n}$ | $R_0 = r \frac{q^n-1}{q-1} \cdot q^{-n}$

$\Leftrightarrow A = S \cdot \frac{q-1}{q^n-1} \cdot q^n$

- Problem der Ratentilgung: Belastung anfangs hoch, später geringer
- Ausweg: Konstanthalten der Annuitäten über Rentenformel

$$A_k = A = S \cdot \frac{q^n(q-1)}{q^n - 1}$$

- Daraus ergibt sich:

| | |
|---|---|
| $R_k = S \cdot q^k - A \frac{q^k - 1}{q - 1}$ | Restschuld nach $k$ Jahren |
| $Z_k = R_{k-1} \cdot i = A \cdot \left(1 - q^{k-n-1}\right)$ | Zinsen im $k$-ten Jahr |
| $T_k = A - Z_k = A \cdot q^{k-n-1}$ | Tilgung im $k$-ten Jahr |

Annuitätentilgung: Berechnung der Restschuld nach $k$ Jahren (zu Beginn des $k+1$-ten Jahres)

$$R_k = S \cdot q^k - A \cdot \frac{q^k - 1}{q - 1}$$

Beispiel: $S = 350000$, $i = 0.0178$, $n = 40$
( $A =$

gesucht: Restschuld zu Beginn des 11. Jahres ($k = 10$)

$$R_{10} = 350000 \cdot 1.05^{10} - 20397.36 \cdot \frac{1.05^{40} - 1}{0.05}$$

$= 313\,557{,}32$ €

jetzt: geg. $S = 350000$, $A = 15000$, $i = 0.0178$

ges.: Laufzeit

$$S = A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q^{-n} \iff \frac{S \cdot \overbrace{(q-1)}^{i}}{A} = 1 - q^{-n}$$

$$\iff q^{-n} = 1 - \frac{Si}{A} \iff n = -\log_q\left[1 - \frac{S \cdot i}{A}\right]$$

$$\iff n = -\log_{1.0178}\left[1 - \frac{350 \cdot 0.0178}{15}\right]$$

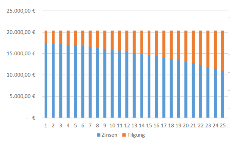
$\approx 30.42$ Jahre

Annuitätentilgung

| | |
|---|---|
| S | 350.000,00 € |
| n | 40 |
| i | 5,00% |
| A | 20.397,36 € |
| Tilgungsplan | |

| Jahr | Restschuld zu Beginn | Zinsen | Tilgung | Annuität |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 350.000,00 € | 17.500,00 € | 2.897,36 € | 20.397,36 € |
| 2 | 347.102,64 € | 17.355,14 € | 3.042,22 € | 20.397,36 € |
| 3 | 344.060,42 € | 17.203,03 € | 3.194,33 € | 20.397,36 € |
| 4 | 340.866,09 € | 17.043,31 € | 3.354,05 € | 20.397,36 € |
| 5 | 337.512,04 € | 16.875,61 € | 3.521,75 € | 20.397,36 € |
| 6 | 333.990,29 € | 16.699,52 € | 3.697,84 € | 20.397,36 € |
| 7 | 330.292,45 € | 16.514,63 € | 3.882,73 € | 20.397,36 € |
| 8 | 326.409,72 € | 16.320,49 € | 4.076,87 € | 20.397,36 € |
| 9 | 322.332,85 € | 16.116,65 € | 4.280,71 € | 20.397,36 € |
| 10 | 318.052,14 € | 15.902,61 € | 4.494,75 € | 20.397,36 € |
| 11 | 313.557,39 € | 15.677,87 € | 4.719,49 € | 20.397,36 € |
| 12 | 308.837,90 € | 15.441,90 € | 4.955,46 € | 20.397,36 € |
| 13 | 303.882,44 € | 15.194,13 € | 5.203,23 € | 20.397,36 € |
| 14 | 298.679,21 € | 14.933,97 € | 5.463,39 € | 20.397,36 € |
| 15 | 293.215,82 € | 14.660,80 € | 5.736,56 € | 20.397,36 € |
| 16 | 287.479,26 € | 14.373,97 € | 6.023,39 € | 20.397,36 € |
| 17 | 281.455,87 € | 14.072,80 € | 6.324,56 € | 20.397,36 € |
| 18 | 275.131,31 € | 13.756,57 € | 6.640,79 € | 20.397,36 € |
| 19 | 268.490,52 € | 13.424,53 € | 6.972,83 € | 20.397,36 € |
| 20 | 261.517,69 € | 13.075,89 € | 7.321,47 € | 20.397,36 € |
| 21 | 254.196,22 € | 12.709,82 € | 7.687,54 € | 20.397,36 € |
| 22 | 246.508,68 € | 12.325,44 € | 8.071,92 € | 20.397,36 € |
| 23 | 238.436,76 € | 11.921,84 € | 8.475,52 € | 20.397,36 € |
| 24 | 229.961,24 € | 11.498,07 € | 8.899,29 € | 20.397,36 € |
| 25 | 221.061,95 € | 11.053,10 € | 9.344,26 € | 20.397,36 € |
| 26 | 211.717,69 € | 10.585,89 € | 9.811,47 € | 20.397,36 € |

= 313 557,32 €



## Festverzinsliche Wertpapiere

- Wertpapier: Investor erwirbt für bestimmten Preis ein Recht auf Zahlungen
- Hier: Gesamtfällige festverzinsliche Wertpapiere
- Emission (Erstausgabe): Investor zahlt pro 100 € Nennwert einen Preis $C_0$ (Emissionskurs)
- Emittend: Zahlt während Laufzeit Zinsen (Kuponszahlung) und (meist nach Ablauf) Tilgung (Rücknahmekurs)
- Kuponzahlung: mittels nominellen Jahreszinses $i^*$ (oder Jahreszinsfuß $p^*$) auf den Nennwert an Investor, meist jährlich nachschüssig
- Falls $i^* = 0$: Null-Kupon-Anleihen oder Zerobonds
- Rücknahmekurs: Tilgung in einem Betrag am Ende der Laufzeit $C_n$ als Prozentsatz des Nennwertes
- Rendite: $i_{\text{eff}}$ Jährlicher Effektivzins, der Leistung des Investors und des Emittenden gleichwertig macht



## Äquivalenzgleichung für Emissionskurs

$$C_0 = \underbrace{p^*}_{\text{Kuponzahlung}} \cdot \underbrace{\frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q^{-n}}_{\text{nachsch. Rentenbarwertfaktor}} + \overbrace{C_n}^{\text{„Abschlusszahlung"}} \cdot q^{-n}$$

## Dabei:

- $n$ : Laufzeit in Jahren
- $C_0$ : Emissionskurs
- $p^*$ : Nominalzinsfuß, jährliche Zinszahlung pro 100 € Nennwert
- $C_n$ : Rücknahmekurs am Ende der Laufzeut
- $q = 1 + i_{\text{eff}}$ : Effektiver Jahreszins bzw. Rendite des festverz. Wertpapiers

## Anmerkungen:

- Gleichung i.a. nicht elementar nach $q$ auflösbar
- Deswegen oft: Näherung durch Iteration (z.B. regula falsi)
- Emissionskurs $\triangleq$ mit Rendite abgezinster Kapitalwert sämtlicher zukünftiger Leistungen des Wertpapiers

Beispiel: Papier mit 5% Kupon
und 100% Rücknahmekurs
Laufzeit 10 Jahre,
Umlaufrendite 25%

$$C_0 = 5 \cdot \frac{1.25^{10}-1}{1.25-1} \cdot 1.25^{-10} + 100 \cdot 1.25^{-10}$$

$$= 28.58 €$$

Beispiel: Papier wie oben, aber Umlaufrendite -0.1%

$$C_0 = 5 \cdot \frac{0.999^{10}-1}{0.999-1} \cdot 0.999^{-10} + 100 \cdot 0.999^{-10}$$

$$\approx 151.28 €$$



## Ganzzahlige Restlaufzeiten

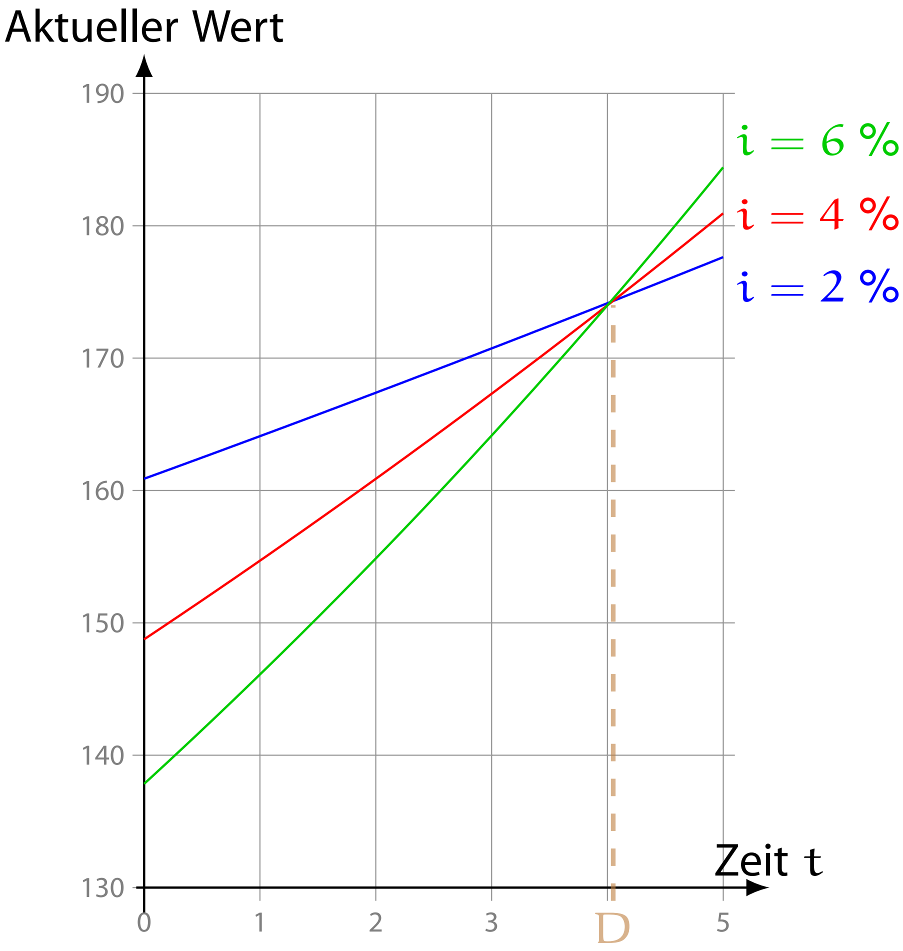
- Festverzinsliche Wertpapiere können meist jederzeit gehandelt werden
- Annahme zunächst: Handel nur unmittelbar nach Kuponzahlung möglich
- Gesucht: Kurs $C_t$ für eine Restlaufzeit von $t$ Jahren
- Lösung: Preis eines Wertpapiers ist zu jedem Zeitpunkt der Kapitalwert aller in der Restlaufzeit noch ausstehenden Leistungen
- Abgezinst wird dabei mit dem Marktzins (auch: Umlaufrendite)

Restlaufzeit

$$C_t = p^* \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1} \cdot q^{-t} + C_n \cdot q^{-t}$$

## Risikoanalyse – Duration

- Änderung des Marktzinses: Abhängig von Zeitpunkt Auswirkung auf aktuellen Wert des Papiers
- Fall 1 (Zins steigt): $C_0$ ist niedriger, aber Wiederanlage der Kuponzahlungen erbringen mehr Rendite
- Fall 2 (Zins fällt): $C_0$ ist höher, aber Wiederanlage der Kuponzahlungen erbringen weniger Rendite
- Vermutung: An einem (Zeit-)Punkt heben sich diese beiden Effekte auf
- Dieser Zeitpunkt heißt Duration D.





## Risikoanalyse – Duration

- Der aktuelle Wert eines Papiers $C_t(q) = q^t \cdot C_0(q)$ ändert sich also nicht bzgl. Änderungen von $q$, wenn $t = D$
- damit gilt für die Duration $D$

$$\frac{\partial C_D(q)}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\left(q^D \cdot C_0(q)\right) = D \cdot q^{D-1} C_0(q) + q^D \frac{\partial C_0(q)}{\partial q} = 0$$

- Da $q^{D-1}$ immer positiv ist muss also für $D$ gelten $D \cdot C_0(q) + q \cdot \frac{\partial C_0(q)}{\partial q} = 0$ und damit:

$$\boxed{D = -\frac{\partial C_0(q)}{\partial q} \cdot \frac{q}{C_0(q)} = -q \cdot \frac{C_0'(q)}{C_0(q)}}$$

- Weitere mögliche Interpretation der Duration als Bruttozinselastizität des Barwertes.



# Kursrechnung

## Partielle Ableitung des Kapitalwertes

- Für die Berechnung von $D$ ist $C_0'(q)$ zu bestimmen;
- bei einem festverzinslichen Wertpapier ergibt sich so

$$C_0'(q) = -\frac{n}{q^{n+1}}\left(p * \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + C_n\right) + \frac{p*}{q^n} \cdot \frac{n \cdot q^{n-1}(q-1) - (q^n - 1)}{(q-1)^2}$$

## Varianten der Duration

- Modifizierte Duration:

$$MD = \frac{D}{q} = -\frac{C_0'(q)}{C_0(q)}$$

- Elastizität (von $i$):

$$\varepsilon_{C_0,i} = \frac{C_0'(i)}{C_0(i)} \cdot i = -\frac{i}{q} \cdot D = -MD \cdot i$$

## Auswirkungen von Zinsänderungen

- Bei bekanntem Emissionskurs: Auswirkungen kleiner Zinsänderungen über Duration

$$C_0(i + \Delta i) \approx C_0(i) \cdot (1 - MD \cdot \Delta i)$$

# Wirtschaftsmathematik: Table of Contents



# Lineare Programe: Beispiel





Ein holzverarbeitender Betrieb möchte ein Produktionsprogramm für Spanplatten festlegen. Dabei sind folgende Restriktionen zu berücksichtigen:

- Es werden zwei Typen von Spanplatten hergestellt:

  Typ A in der Quantität $x_1$ für den Außenbereich und Typ B in der Quantität $x_2$ für den Innenbereich. Zur Herstellung der Spanplatten werden zwei Arten von Furnierblättern $F_1$ bzw. $F_2$ unterschiedlicher Qualität benutzt. Die Spanplatten werden mittels einer Presse, in der die Furniere verleimt werden, hergestellt.
- Zur Herstellung einer Platte vom Typ A wird ein Blatt von $F_1$ und zwei Blätter von $F_2$ benötigt, während bei Typ B drei Blätter von $F_1$ und ein Blatt von $F_2$ benutzt werden.
- Von $F_1$ bzw. $F_2$ stehen 1500 bzw. 1200 Stück zur Verfügung.
- Die Presse steht insgesamt 700 Minuten zur Verfügung, wobei zur Verleimung beider Plattentypen pro Stück jeweils eine Minute benötigt wird.

# Lineare Produktionsplanung: Beispiel





Tabellarische Darstellung der Problemdaten:

| Produkt | Menge | Einheiten von $F_1$ | Einheiten von $F_2$ | Pressminuten pro Stück |
|---|---|---|---|---|
| Typ A | $x_1$ | 1 | 2 | 1 |
| Typ B | $x_2$ | 3 | 1 | 1 |
| Kapazitäten | | 1500 | 1200 | 700 |

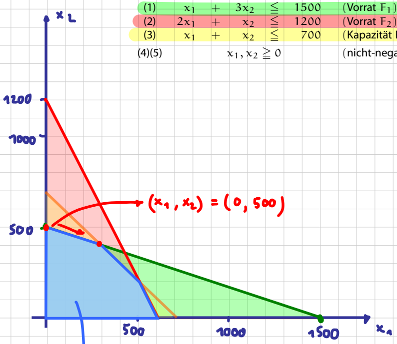
Zusammenhang von Daten und Variablen durch System von linearen Ungleichungen beschreibbar:

**Restriktionen:**

$$
\begin{array}{llllll}
(1) & x_1 & + & 3x_2 & \leqq & 1500 & (\text{Vorrat } F_1) \\
(2) & 2x_1 & + & x_2 & \leqq & 1200 & (\text{Vorrat } F_2) \\
(3) & x_1 & + & x_2 & \leqq & 700 & (\text{Kapazität Presse})
\end{array}
$$

$$(4)(5) \qquad x_1, x_2 \geqq 0 \qquad (\text{nicht-negative Mengen})$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | $x_1$ | + | $3x_2$ | $\leqq$ | 1500 | (Vorrat $F_1$) |
| (2) | $2x_1$ | + | $x_2$ | $\leqq$ | 1200 | (Vorrat $F_2$) |
| (3) | $x_1$ | + | $x_2$ | $\leqq$ | 700 | (Kapazität Presse) |
| (4)(5) | | | $x_1, x_2 \geqq 0$ | | | (nicht-negative Mengen) |




Zulässigkeitsbereich

Jetzt zusätzlich: Zielfunktion $ZF(x_1, x_2)$

$$ZF(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \quad \text{(Gewinn)}$$

Deckungsbeitrag (Gewinn pro Einheit ohne Ber. der Fixkosten)

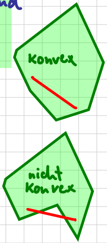
Erste Idee: Deckungsbeitrag von Typ B (5€) ist höher, deswegen: Produziere möglichst viele Einheiten vom Typ B

$\Rightarrow x_1 = 0, \; x_2 = 500 \Rightarrow ZF(0, 500) = 4 \cdot 0 + 5 \cdot 500$
$= 2500$ €

Aber: Reduktion der Produktion von $x_2$ um 1 Einheit (5 € weniger Gewinn) ermöglicht zus. Prod. von 3 Einheiten $x_1$ ($+3 \cdot 4 = 12$ € Gewinn)
also ZF-Zuwachs: $12 - 5 = 7$ €

Funktioniert, bis nächste Restriktion greift

**Allgemein:** Bei linearen Zielfunktionen und konvexem Zulässigkeitsbereich Z liegt das Optimum in einer Ecke von Z



## Begriffe und Beobachtungen

- Jede $(x_1, x_2)$-Kombination, die alle Restriktionen (1) bis (5) erfüllt, bezeichnet man als zulässige Lösung.
- Die Menge

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^2 : \quad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leqq 1500; \\ 2x_1 + x_2 &\leqq 1200; \\ x_1 + x_2 &\leqq 700 \end{aligned} \right\}$$

  nennt man Zulässigkeitsbereich des Problems.
- Wegen Restriktion $x \in \mathbb{R}_+^2$: Erster Quadrant des Koordinatensystems genügt für graphische Darstellung des Zulässigkeitsbereiches.

# Beispiel: Graphische Darstellung Zulässigkeitsbereich



- Ungleichung (1) mit $x_1 + 3x_2 \leqq 1500$ entspricht dreieckigem Bereich in $\mathbb{R}^2_+$
- Begrenzung durch die drei Geraden mit $x_1 + 3x_2 = 1500,\ x_1 = 0$ und $x_2 = 0$
- Also: Grenzpunkte $(0{,}500),\ (1500{,}0),\ (0{,}0)$
- Analog für die übrigen Nebenbedingungen

(Zeichnung siehe Vorlesung)

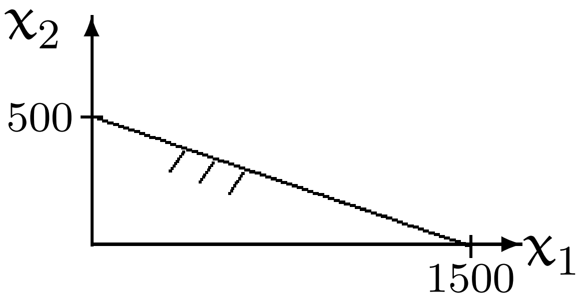
# Beispiel: Graphische Darstellung Zulässigkeitsbereich



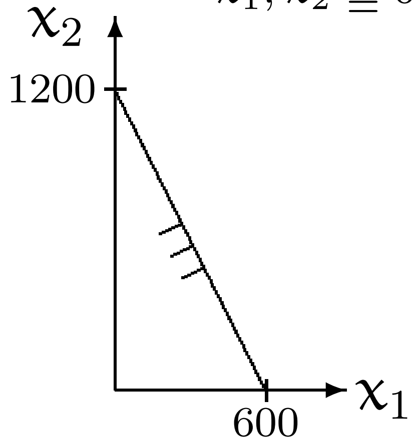


- Ungleichung (1) mit $x_1 + 3x_2 \leqq 1500$ entspricht dreieckigem Bereich in $\mathbb{R}^2_+$
- Begrenzung durch die drei Geraden mit $x_1 + 3x_2 = 1500,\ x_1 = 0$ und $x_2 = 0$
- Also: Grenzpunkte $(0{,}500),\ (1500{,}0),\ (0{,}0)$
- Analog für die übrigen Nebenbedingungen

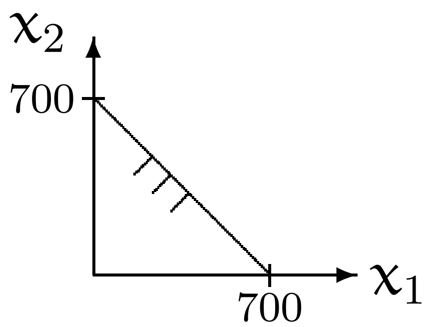
(1) $x_1 + 3x_2 \leqq 1500$, $x_1, x_2 \geqq 0$




(2) $2x_1 + x_2 \leqq 1200$, $x_1, x_2 \geqq 0$




(3) $x_1 + x_2 \leqq 700$, $x_1, x_2 \geqq 0$




Beispiel: Graphische Darstellung der Restriktionen

# Beispiel: Graphische Darstellung Zulässigkeitsbereich



- Die gesamte zulässige Lösungsmenge $Z$ ergibt sich dann aus dem Durchschnitt der angegebenen Bereiche.
- Alle $(x_1, x_2)$-Kombinationen im mit $Z$ gekennzeichneten Bereich erfüllen damit die vorgegebenen Restriktionen.

# Mögliche Fälle für Z

1. $Z = \emptyset$, d.h., es existiert keine zulässige $(x_1, x_2)$-Kombination.
2. $|Z| = 1$, d.h., es existiert genau eine zulässige $(x_1, x_2)$-Kombination. Dieser Fall tritt meist dann auf, wenn die Restriktionen in Form von Gleichungen formuliert werden.
3. $|Z| > 1$, d.h., es existieren mehrere zulässige Lösungen.

- In den ersten beiden Fällen ist durch die Restriktionen das Planungsergebnis festgelegt.
  - Im ersten Fall können nicht alle Restriktionen gleichzeitig erfüllt werden,
  - im zweiten Fall gibt es eine einzige Lösung, die alle Restriktionen erfüllt.
- Im letzten Fall entsteht weiterer Planungsbedarf, da für die Modellvariablen noch Spielraum besteht. Um diesen Spielraum weiter einzuschränken, ist eine Zielsetzung zu formulieren, die die zulässigen Lösungen bewertet. Kann diese Zielsetzung $z$ als lineare Funktion der Modellvariablen modelliert werden, so entsteht ein lineares Optimierungsproblem mit der Zielfunktion $z(x)$ und Nebenbedingungen in Form von Gleichungen und/oder Ungleichungen.



Der holzverarbeitende Betrieb aus Beispiel 1 verfolgt die Zielsetzung der Gewinnmaximierung. Die Spanplatten vom Typ A bringen 4 €, die vom Typ B 5 € Gewinn pro Stück.

Zusammen mit den Restriktionen aus Beispiel 1 kann nun ein mathematisches Modell in Form eines linearen Optimierungsproblems formuliert werden.

**Zielfunktion:**

# Lineare Produktionsplanung: Beispiel

Der holzverarbeitende Betrieb aus Beispiel 1 verfolgt die Zielsetzung der Gewinnmaximierung. Die Spanplatten vom Typ A bringen 4 €, die vom Typ B 5 € Gewinn pro Stück.

Zusammen mit den Restriktionen aus Beispiel 1 kann nun ein mathematisches Modell in Form eines linearen Optimierungsproblems formuliert werden.

**Zielfunktion:**

$$z(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \qquad \longrightarrow \text{max} \qquad \text{(Gewinnmaximierung)}$$

**Nebenbedingungen:**

Der holzverarbeitende Betrieb aus Beispiel 1 verfolgt die Zielsetzung der Gewinnmaximierung. Die Spanplatten vom Typ A bringen 4 €, die vom Typ B 5 € Gewinn pro Stück.

Zusammen mit den Restriktionen aus Beispiel 1 kann nun ein mathematisches Modell in Form eines linearen Optimierungsproblems formuliert werden.

**Zielfunktion:**

$$z(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \qquad \longrightarrow \text{max} \qquad \text{(Gewinnmaximierung)}$$

**Nebenbedingungen:**

$$\begin{array}{lrcrcrl}
(1) & x_1 & + & 3x_2 & \leqq & 1500 & (\text{Vorrat } F_1) \\
(2) & 2x_1 & + & x_2 & \leqq & 1200 & (\text{Vorrat } F_2) \\
(3) & x_1 & + & x_2 & \leqq & 700 & (\text{Kapazität Presse})
\end{array}$$

$$(4)(5) \qquad x_1, x_2 \geqq 0 \qquad \text{(nicht-negative Mengen)}$$

# Beispiel: Graphische Lösung



- Zur graphischen Lösung des Problems: Zusätzlich Zielfunktion in Graphik
- Zu diesem Zweck: Darstellung von Isogewinngeraden
- Für Gewinn in Höhe von $c$:

$$z(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 = c \quad \text{bzw.} \quad x_2 = \frac{c}{5} - \frac{4}{5}x_1 \ .$$

- Graphische Darstellung der Optimallösung im Beispiel
- Nur der Achsenabschnitt $= c/5$ hängt vom Wert $c$ ab, die Steigung $= -4/5$ jedoch nicht.
- Im Beispiel maximaler $c$-Wert im Schnittpunkt der Geraden für die Nebenbedingungen (1) und (3), d.h. in $(x_1, x_2) = (300{,}400)$.
- Ein höherer Zielfunktionswert als

$$z(300{,}400) = 4 \cdot 300 + 5 \cdot 400 = 3200$$

kann unter Einhaltung der Restriktionen nicht erreicht werden. Man spricht von einer optimalen Lösung.

# Beispiel, Bereich optimaler Lösungen

- Variante: Gewinnbeiträge der Spanplatten aus Beispiel 1 jetzt für beide Typen gleich 4.- € pro Stück, d.h. $z(x_1, x_2) = 4x_1 + 4x_2$,
- In diesem Fall: kein eindeutiges Optimum
- Bereich $Z^*$ optimaler Lösungen; beschreibbar durch folgende Menge:

$$Z^* = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_+ : 4x_1 + 4x_2 = 2800, x_1 \in [300{,}500] \right\}$$

$Z^*$ entspricht der durch die Punkte $C = (300{,}400)$ und $D = (500{,}200)$ begrenzten Strecke.

**Zusammenfassung für graphische Lösung linearer Optimierungsprobleme (mit nicht-konstanter Zielfunktion):**

- Optimale Lösungen liegen stets auf dem Rand des zulässigen Bereiches $Z$ beziehungsweise in „Ecken“ von $Z$.
- Mindestens eine Ecke gehört zur optimalen Lösung.
- Entspricht Menge der Optimallösungen genau einer Ecke von $Z \iff$ ist Optimallösung eindeutig.
- Gibt es zwei „optimale Ecken“ , so ist die Menge aller Punkte der durch diese Ecken festgelegten Strecke optimal.