Wirtschaftsmathematik

Einführung in einige Teilbereiche der Wirtschaftsmathematik

Wintersemester 2016

HSA Wing Sessionlist WS 2016

Datum	N.	Zeit	UE	Themen
			52	
Dienstag, 20. September 2016	1	18.00-21.15	4	Einführung, Zinsen, Renten
Dienstag, 27. September 2016	2	18.00-21.15	4	Tilgung, Festverz. Wertpapiere
Dienstag, 4. Oktober 2016	3	18.00-21.15	4	Lineare Optimierung: Einführung, Lösungsmethoden
Samstag, 8. Oktober 2016	4	08.00-11.45	4	Lineare Optimierung: Standardmaximumproblem, Simplex
Dienstag, 11. Oktober 2016	5	18.00-21.15	4	Gewöhnliche Differentialgleichungen
Samstag, 15. Oktober 2016	6	08.00-11.45	4	Analytische Lösung linearer DGLs
Dienstag, 18. Oktober 2016	7	18.00-21.15	4	Einführung, univ. Statistik, Konzentration
Samstag, 22. Oktober 2016	8	11.45-15.00	4	Korrelation, Regression, Preisindizes
Dienstag, 25. Oktober 2016	9	18.00-21.15	4	Kombinatorik, Wahrscheinlichkeiten; Binomial, Hypergeo, Poisson
Samstag, 29. Oktober 2016	10	08.00-11.15	4	Zufallsvariablen, Lage- und Streuung, Stetige ZV, Gleich-vtlg.
Dienstag, 15. November 2016	11	18.00-21.15	4	Normalvtlg., Schätzen und Eigenschaften von Punktschätzern
Samstag, 26. November 2016	12	08.00-11.15	4	Konfidenzintervalle, t-Test
Dienstag, 29. November 2016	13	18.00-21.15	4	Puffer, Wiederholung Besprechung Probeklausur
Samstag, 3. Dezember 2016		09.30-11.00		Klausur (regulärer Termin 90 Min., mit Aufsicht)

Prof. Dr. Stefan Etschberger
HSA

Mögliche Fälle für Z

1. $Z = \emptyset$, d.h., es existiert keine zulässige (x_1, x_2)-Kombination.
2. $|Z| = 1$, d.h., es existiert genau eine zulässige (x_1, x_2)-Kombination. Dieser Fall tritt meist dann auf, wenn die Restriktionen in Form von Gleichungen formuliert werden.
3. $|Z| > 1$, d.h., es existieren mehrere zulässige Lösungen.

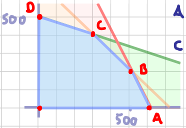
- In den ersten beiden Fällen ist durch die Restriktionen das Planungsergebnis festgelegt.
  - Im ersten Fall können nicht alle Restriktionen gleichzeitig erfüllt werden,
  - im zweiten Fall gibt es eine einzige Lösung, die alle Restriktionen erfüllt.
- Im letzten Fall entsteht weiterer Planungsbedarf, da für die Modellvariablen noch Spielraum besteht. Um diesen Spielraum weiter einzuschränken, ist eine Zielsetzung zu formulieren, die die zulässigen Lösungen bewertet. Kann diese Zielsetzung z als lineare Funktion der Modellvariablen modelliert werden, so entsteht ein lineares Optimierungsproblem mit der Zielfunktion $z(x)$ und Nebenbedingungen in Form von Gleichungen und/oder Ungleichungen.

Allgemein: Bei linearen Zielfunktionen und konvexem Zulässigkeitsbereich Z liegt das Optimum in einer Ecke von Z

Lösungsvariante „Holzhammer"

① Berechne alle Ecken des Zulässigkeitsbereichs

② Setze in Zielfunktion ein und nimm die beste Ecke



D: $ZF(0,500) = 4\cdot 0 + 5\cdot 500 = 2500$

A: $ZF(600,0) = 4\cdot 600 + 5\cdot 0 = 2400$

C: $(1)-(3)$: $2x_2 = 800 \Rightarrow x_2 = 400$

in (3): $x_1 = 300$

$ZF(300,400) = 4\cdot 300 + 5\cdot 400 = 3200$

B: $(2)-(3)$: $x_1 = 500$, $x_2 = 200$

$ZF(500,200) = 4\cdot 500 + 5\cdot 200 = 3000$

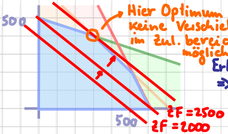
(1)	x_1	+ $3x_2$	$\leq$	1500	(Vorrat F_1)
(2)	$2x_1$	+ x_2	$\leq$	1200	(Vorrat F_2)
(3)	x_1	+ x_2	$\leq$	700	(Kapazität Presse)
(4)(5)		$x_1, x_2 \geq 0$			(nicht-negative Mengen)

$\Rightarrow C = (300,400) = (x_1, x_2)$ ist optimal

Graphische Lösung

Lege konstanten Zielfunktionswert fest

z.B. $\underbrace{ZF = 4x_1 + 5x_2 = 2000}_{\text{Isonutzengerade}}$



Erhöhung des ZF-Wertes
$\Rightarrow$ parallele Verschiebung der Isonutzengerade nach oben

Lösungsvariante 3: Excel

	Typ A	Typ B				
	300	400	Wert Zielfunktion			
Deckungsbeiträge	4,00 €	5,00 €	3.200,00 €			
			Wert Nebenbedingungen			Reserve
Kapazität Furnier 1	1	3	1500	<=	1500	0
Kapazität Furnier 2	2	1	1000	<=	1200	200
Pressminuten pro Stück	1	1	700	<=	700	0

Microsoft Excel 16.0 Antwortbericht
Arbeitsblatt: [2016_10_08_LP.xlsx]Tabelle1
Bericht erstellt: 08.10.2016 09:17:37
Ergebnis: Solver hat eine Lösung gefunden. Alle Nebenbedingungen und Optionen wurden eingehalten.
Solver-Modul
Modul: Simplex-LP
Lösungszeit: 54,844 Sekunden
Iterationen: 2 Teilprobleme: 0
Solver-Optionen
Höchstzeit Unbegrenzt, Iterationen Unbegrenzt, Precision 0,000001, Automatische Skalierung verwenden, Iterationsergebnisse anzeigen
Höchstzahl der Teilprobleme Unbegrenzt, Max. Ganzzahllösungen Unbegrenzt, Ganzzahltoleranz 1%, Nicht-negativ annehmen

Zielzelle (Max.)

Zelle	Name	Ursprünglicher Wert	Lösungswert
$D$3	Deckungsbeiträge Wert Zielfunktion	4.600,00 €	3.200,00 €

Variablenzellen

Zelle	Name	Ursprünglicher Wert	Lösungswert	Integer
$B$2	Typ A	25	300	Fortlaufend
$C$2	Typ B	900	400	Fortlaufend

Nebenbedingungen

Zelle	Name	Zellwert	Formel	Status	Puffer
$D$5	Kapazität Furnier 1 Wert Nebenbedingungen	1500	$D$5<=$F$5	Einschränkend	0
$D$6	Kapazität Furnier 2 Wert Nebenbedingungen	1000	$D$6<=$F$6	Nicht einschränkend	200
$D$7	Pressminuten pro Stück Wert Nebenbedingungen	700	$D$7<=$F$7	Einschränkend	0

Microsoft Excel 16.0 Sensitivitätsbericht
Arbeitsblatt: [2016_10_08_LP.xlsx]Tabelle1
Bericht erstellt: 08.10.2016 09:17:38

Variablenzellen

Zelle	Name	Endgültig Endwert	Reduziert Kosten	Ziel Koeffizient	Zulässig Erhöhen	Zulässig Verringern
$B$2	Typ A	300	0	4	1	2,333333333
$C$2	Typ B	400	0	5	7	1

Nebenbedingungen

Zelle	Name	Endgültig Endwert	Schatten Preis	Nebenbedingung Rechte Seite	Zulässig Erhöhen	Zulässig Verringern
$D$5	Kapazität Furnier 1 Wert Nebenbedingungen	1500	0,5	1500	600	400
$D$6	Kapazität Furnier 2 Wert Nebenbedingungen	1000	0	1200	1E+30	200
$D$7	Pressminuten pro Stück Wert Nebenbedingungen	700	3,5	700	80	200

Simplex - Algorithmus

Standard Maximumproblem

Beispiel

$4x_1 + 5x_2 \to \max.$

$1x_1 + 3x_2 \leq 1500$
$2x_1 + 1x_2 \leq 1200$
$1x_1 + 1x_2 \leq 700$

allgemein

$c^T x \to \max.$

$A \cdot x \leq b$

$\left[\; c = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix},\; A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\; b = \begin{pmatrix} 1500 \\ 1200 \\ 700 \end{pmatrix} \;\right]$

Normalform

$4x_1 + 5x_2 \to \max$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 1x_2 \\ 1x_1 + 1x_2 \end{matrix}}_{\substack{\text{Struktur-}\\\text{variablen}\\ x_1, x_2}} \underbrace{\begin{matrix} +y_1 & & \\ & +y_2 & \\ & & +y_3 \end{matrix}}_{\substack{\text{Schlupf-}\\\text{variablen}\\ y_1, y_2, y_3}} \begin{matrix} = 1500 \\ = 1200 \\ = 700 \end{matrix}$$

allgemein

$c^T x \to \max$

$Ax + Ey = b$

Bedeutung im Optimum: $(x_1, x_2) = (300, 400)$

$1 \cdot 300 + 3 \cdot 400 + y_1 = 1500 \Rightarrow y_1 = 0$ ausgeschöpft
$2 \cdot 300 + 1 \cdot 400 + y_2 = 1200 \Rightarrow y_2 = 200$ Reserve
$1 \cdot 300 + 1 \cdot 400 + y_3 = 700 \Rightarrow y_3 = 0$ ausgeschöpft

Lösungsalgorithmus

1) Zielfunktion als Gleichung $c^T x = z$
2) Nebenbedingungen $(A\;E) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b$

Basislösung $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^{m+n}$ Lineares Gl. system mit Basis und Nichtbasis

im Beispiel $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T = (0, 0, 1500, 1200, 700)$

Basis: y_1, y_2, y_3, Nicht Basis: x_1, x_2

Satz:
- $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ Basislösung $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist Ecke im Zulässigkeitsbereich
- Basiswechsel $\Leftrightarrow$ Eckenwechsel

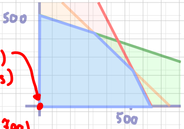
Beispiel:

Pivot-Element in dieser Spalte, da -5 negativ und betragsmäßig größer als -4

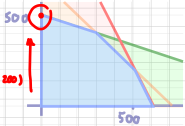
		x_1	x_2	y_1	y_2	y_3		
	①	-4	-5	0	0	0	0	
$1500/3 = 500$	②	1	3	1	0	0	1500	
$1200/1 = 1200$	③	2	1	0	1	0	1200	
$700/1 = 700$	④	1	1	0	0	1	700	
	⑤	$-7/3$	0	$5/3$	0	0	2500	① + $5/3$ ②
$500/(1/3) = 1500$	⑥	$1/3$	1	$1/3$	0	0	500	$1/3$ · ②
$700 : 5/3 = 420$	⑦	$5/3$	0	$-1/3$	1	0	700	③ − $1/3$ ②
$200 : 2/3 = 300$	⑧	$2/3$	0	$-1/3$	0	1	200	④ − $1/3$ ②
	⑨	0	0	$1/2$	0	$7/2$	3200	⑤ + $7/2$ · ⑧
	⑩	0	1	$1/2$	0	$-1/2$	400	⑥ − $1/2$ ⑧
	⑪	0	0	$1/2$	1	$-5/2$	200	⑦ − $5/2$ ⑧
	⑫	1	0	$-1/2$	0	$3/2$	300	$3/2$ ⑧

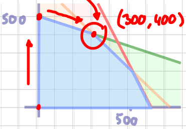
Wähle Pivot-Element in dieser Zeile, da hier knappster Vorrat

Startpunkt
$(x_1, x_2) = (0,0)$ (Nichtbasis)
$(y_1, y_2, y_3) = (1500, 1200, 700)$



Basiswechsel
$(x_1, y_1) = (0,0)$ (Nichtbasis)
$(x_2, y_2, y_3) = (500, 700, 200)$
ZF hier: 2500





$\Rightarrow$ Jetzt: y_1, y_3 Nichtbasis, also $y_1 = y_3 = 0$ (ausgeschöpft)

damit: $x_1 = 300$ (⑫)
$x_2 = 400$ (⑩)
$y_2 = 200$ (⑪) (Reserve)

$ZF = 3200$ (⑨)

Lineare Produktionsplanung: Beispiel

Der holzverarbeitende Betrieb aus Beispiel 1 verfolgt die Zielsetzung der Gewinnmaximierung. Die Spanplatten vom Typ A bringen 4 €, die vom Typ B 5 € Gewinn pro Stück.

Zusammen mit den Restriktionen aus Beispiel 1 kann nun ein mathematisches Modell in Form eines linearen Optimierungsproblems formuliert werden.

Zielfunktion:

$$z(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \quad \longrightarrow \text{max} \quad \text{(Gewinnmaximierung)}$$

Nebenbedingungen:

$$\begin{array}{lrcrcrl}
(1) & x_1 & + & 3x_2 & \leqq & 1500 & (\text{Vorrat } F_1) \\
(2) & 2x_1 & + & x_2 & \leqq & 1200 & (\text{Vorrat } F_2) \\
(3) & x_1 & + & x_2 & \leqq & 700 & (\text{Kapazität Presse})
\end{array}$$

$$(4)(5) \qquad x_1, x_2 \geqq 0 \qquad (\text{nicht-negative Mengen})$$

Beispiel: Graphische Lösung

- Zur graphischen Lösung des Problems: Zusätzlich Zielfunktion in Graphik
- Zu diesem Zweck: Darstellung von Isogewinngeraden
- Für Gewinn in Höhe von c:

$$z(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 = c \quad \text{bzw.} \quad x_2 = \frac{c}{5} - \frac{4}{5}x_1 \ .$$

- Graphische Darstellung der Optimallösung im Beispiel
- Nur der Achsenabschnitt $= c/5$ hängt vom Wert c ab, die Steigung $= -4/5$ jedoch nicht.
- Im Beispiel maximaler c-Wert im Schnittpunkt der Geraden für die Nebenbedingungen (1) und (3), d.h. in $(x_1, x_2) = (300{,}400)$.
- Ein höherer Zielfunktionswert als

$$z(300{,}400) = 4 \cdot 300 + 5 \cdot 400 = 3200$$

kann unter Einhaltung der Restriktionen nicht erreicht werden. Man spricht von einer optimalen Lösung.

Beispiel, Bereich optimaler Lösungen

- Variante: Gewinnbeiträge der Spanplatten aus Beispiel 1 jetzt für beide Typen gleich 4.- € pro Stück, d.h. $z(x_1, x_2) = 4x_1 + 4x_2$,
- In diesem Fall: kein eindeutiges Optimum
- Bereich Z^* optimaler Lösungen; beschreibbar durch folgende Menge:

$$Z^* = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_+ : 4x_1 + 4x_2 = 2800, x_1 \in [300{,}500] \right\}$$

Z^* entspricht der durch die Punkte $C = (300{,}400)$ und $D = (500{,}200)$ begrenzten Strecke.

Zusammenfassung für graphische Lösung linearer Optimierungsprobleme (mit nicht-konstanter Zielfunktion):

- Optimale Lösungen liegen stets auf dem Rand des zulässigen Bereiches Z beziehungsweise in „Ecken“ von Z.
- Mindestens eine Ecke gehört zur optimalen Lösung.
- Entspricht Menge der Optimallösungen genau einer Ecke von $Z \iff$ ist Optimallösung eindeutig.
- Gibt es zwei „optimale Ecken“ , so ist die Menge aller Punkte der durch diese Ecken festgelegten Strecke optimal.