Wirtschaftsmathematik

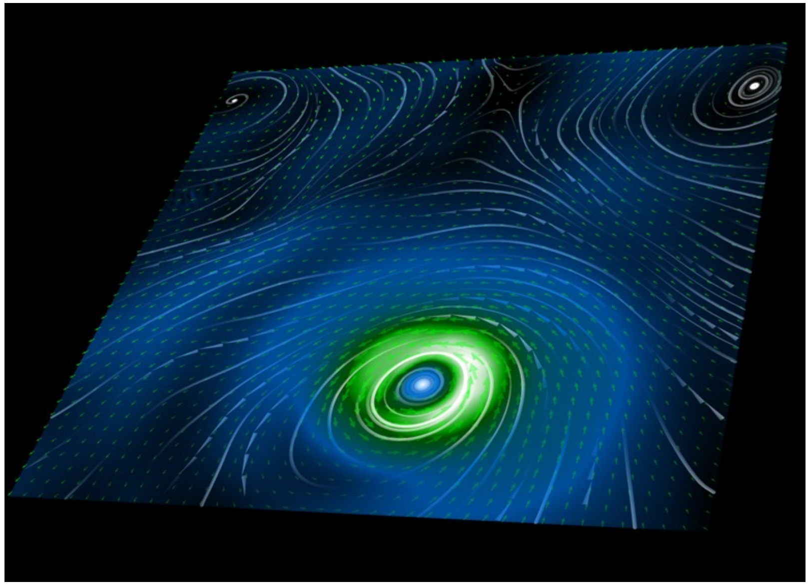
Einführung in einige Teilbereiche der Wirtschaftsmathematik

Wintersemester 2016

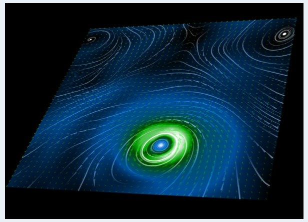
HSA Wing Sessionlist WS 2016				
			52	
Datum	N.	Zeit	UE	Themen
Dienstag, 20. September 2016	1	18.00-21.15	4	Einführung, Zinsen, Renten
Dienstag, 27. September 2016	2	18.00-21.15	4	Tilgung, Festverz. Wertpapiere
Dienstag, 4. Oktober 2016	3	18.00-21.15	4	Lineare Optimierung: Einführung, Lösungsmethoden
Samstag, 8. Oktober 2016	4	08.00-11.45	4	Lineare Optimierung: Standardmaximumproblem, Simplex
Dienstag, 11. Oktober 2016	5	18.00-21.15	4	Gewöhnliche Differentialgleichungen
Samstag, 15. Oktober 2016	6	08.00-11.45	4	Analytische Lösung linearer DGLs
Dienstag, 18. Oktober 2016	7	18.00-21.15	4	Einführung, univ. Statistik, Konzentration
Samstag, 22. Oktober 2016	8	11.45-15.00	4	Korrelation, Regression, Preisindizes
Dienstag, 25. Oktober 2016	9	18.00-21.15	4	Kombinatorik, Wahrscheinlichkeiten; Binomial, Hypergeo, Poisson
Samstag, 29. Oktober 2016	10	08.00-11.15	4	Zufallsvariablen, Lage- und Streuung, Stetige ZV, Gleich-vtlg.
Dienstag, 15. November 2016	11	18.00-21.15	4	Normalvtlg., Schätzen und Eigenschaften von Punktschätzern
Samstag, 26. November 2016	12	08.00-11.15	4	Konfidenzintervalle, t-Test
Dienstag, 29. November 2016	13	18.00-21.15	4	Puffer, Wiederholung Besprechung Probeklausur
Samstag, 3. Dezember 2016		09.30-11.00		Klausur (regulärer Termin 90 Min., mit Aufsicht)

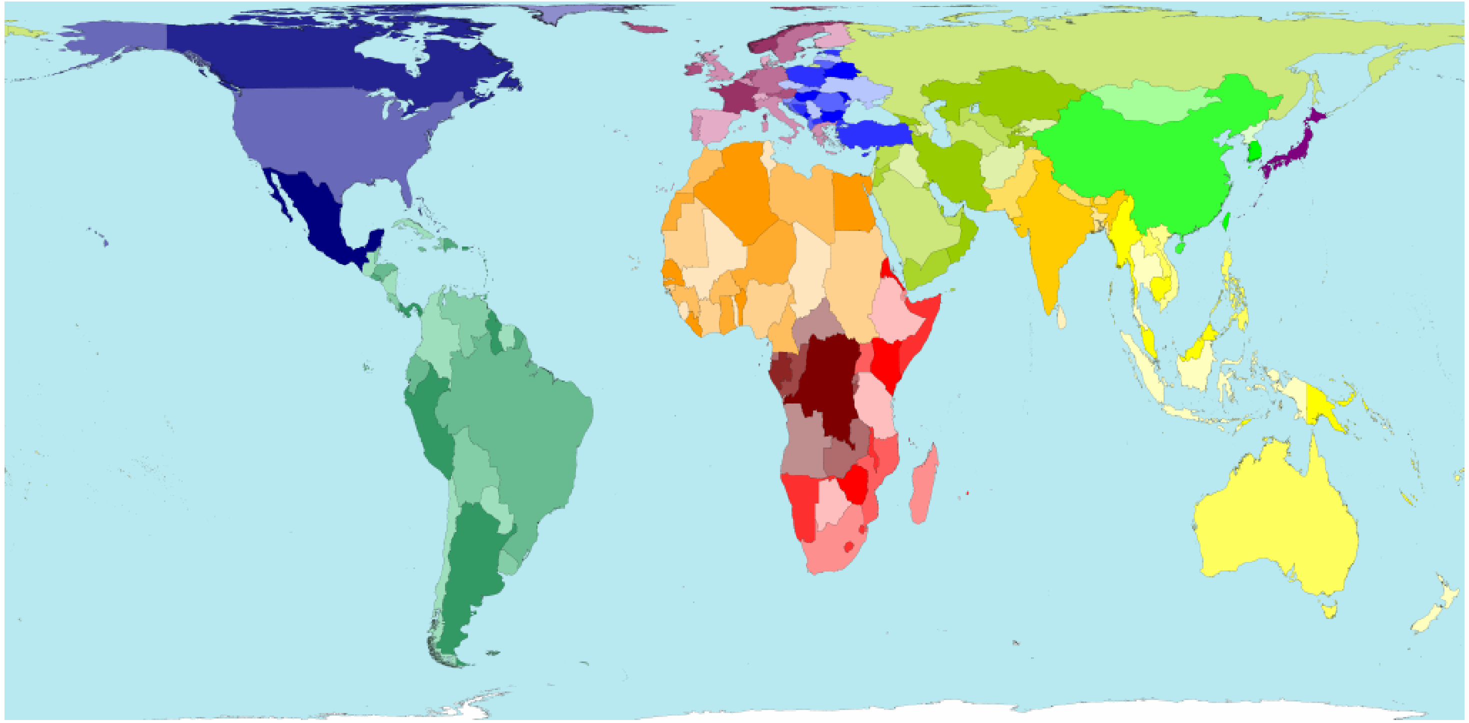
Prof. Dr. Stefan Etschberger
HSA

Wirtschaftsmathematik: Table of Contents

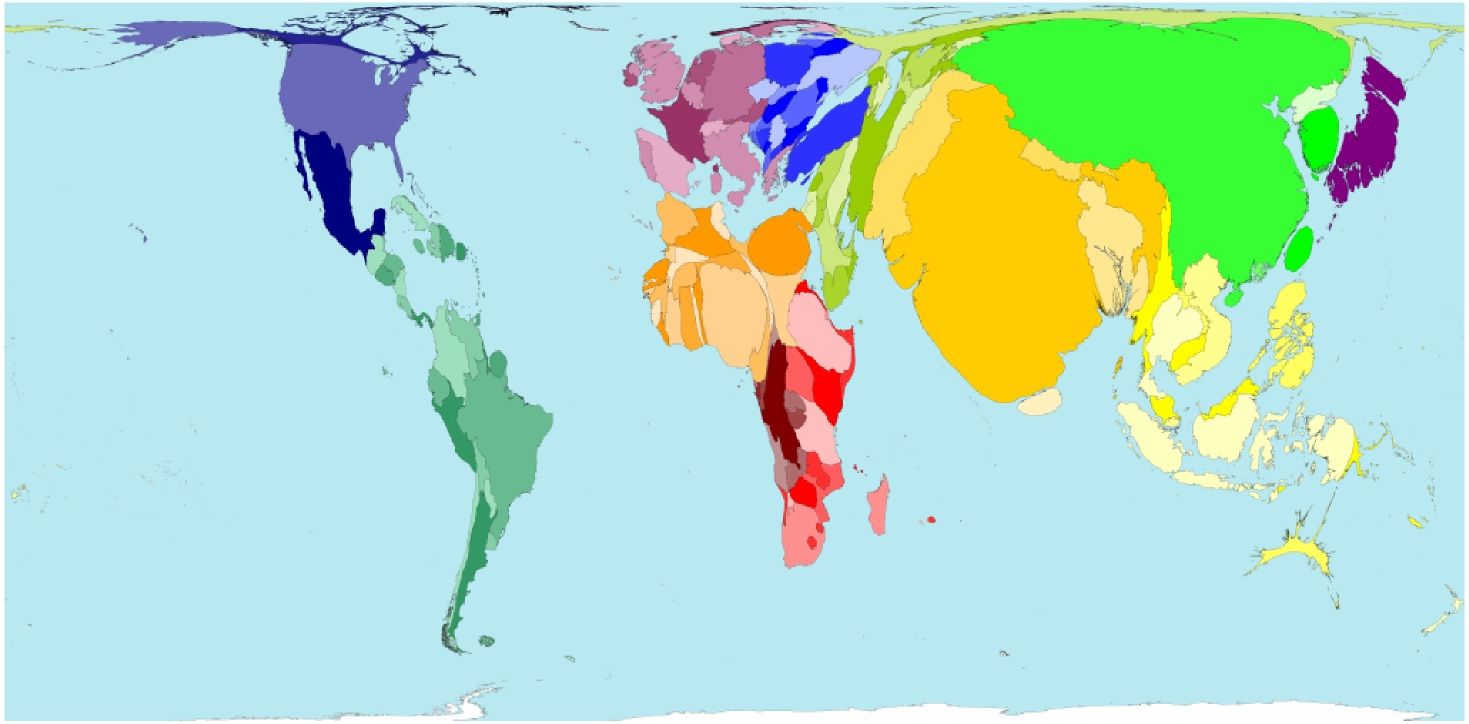


Weltkarte

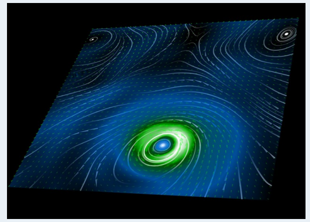




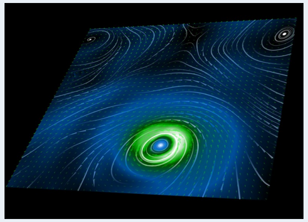
Kartenanamorphose der Bevölkerungsverteilung

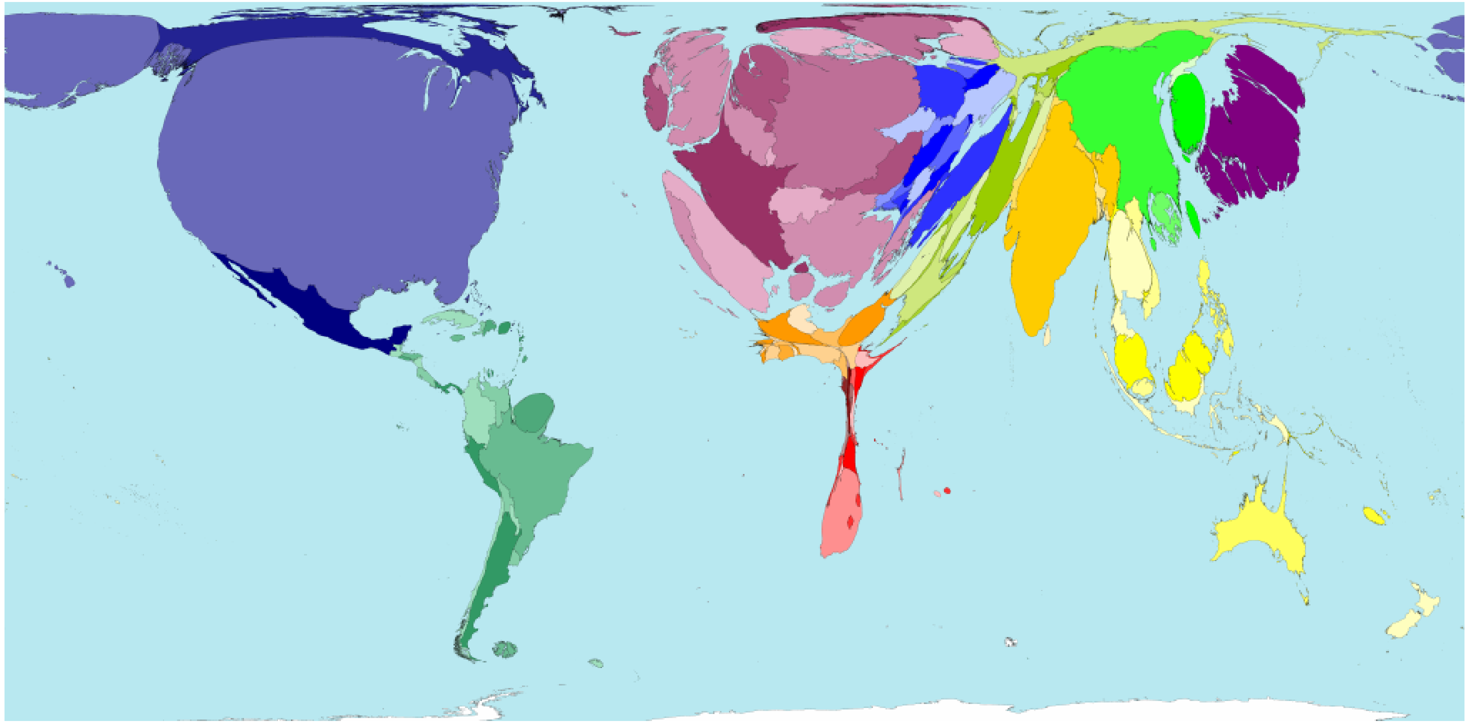


Quelle: worldmapper.com



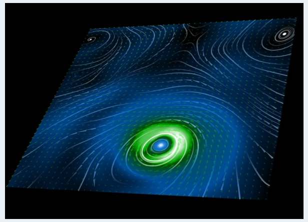
Ausgaben im tertiären Bildungssektor

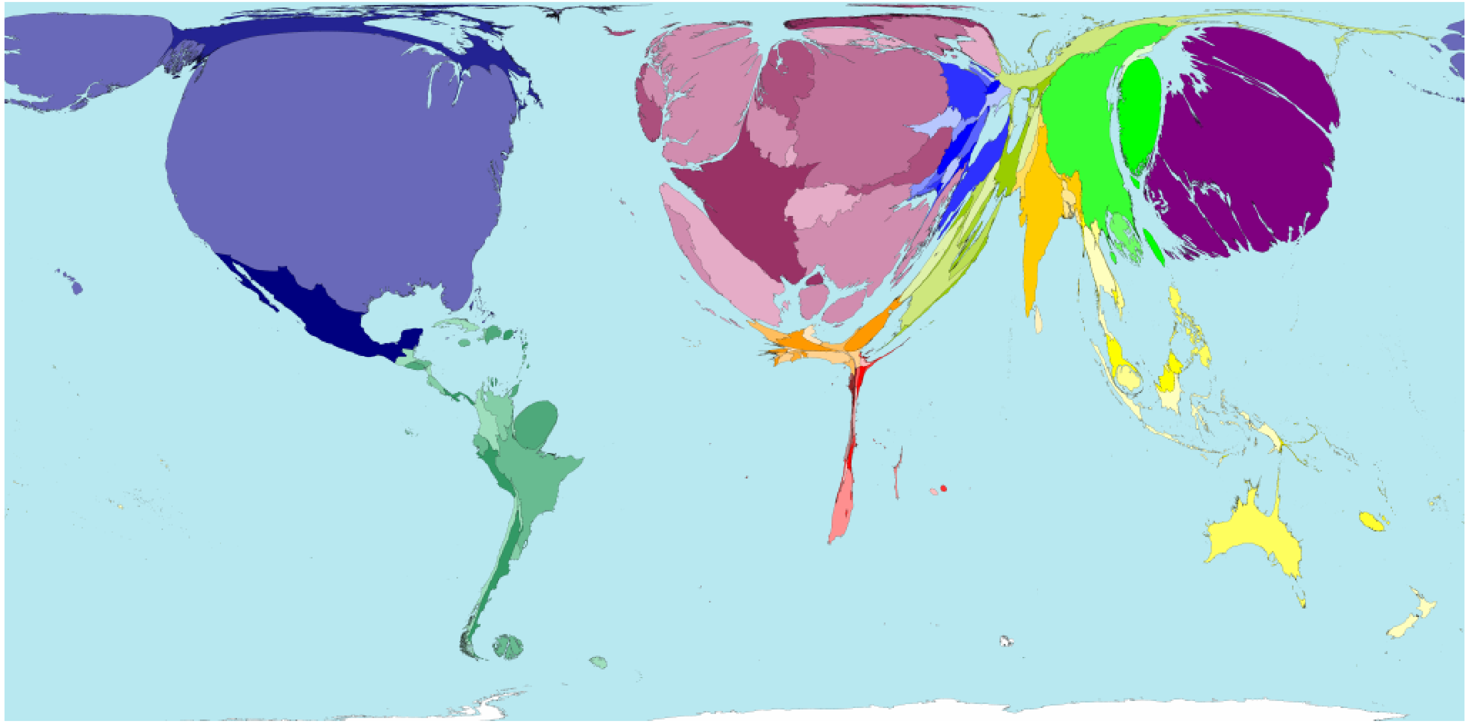




Quelle: worldmapper.com

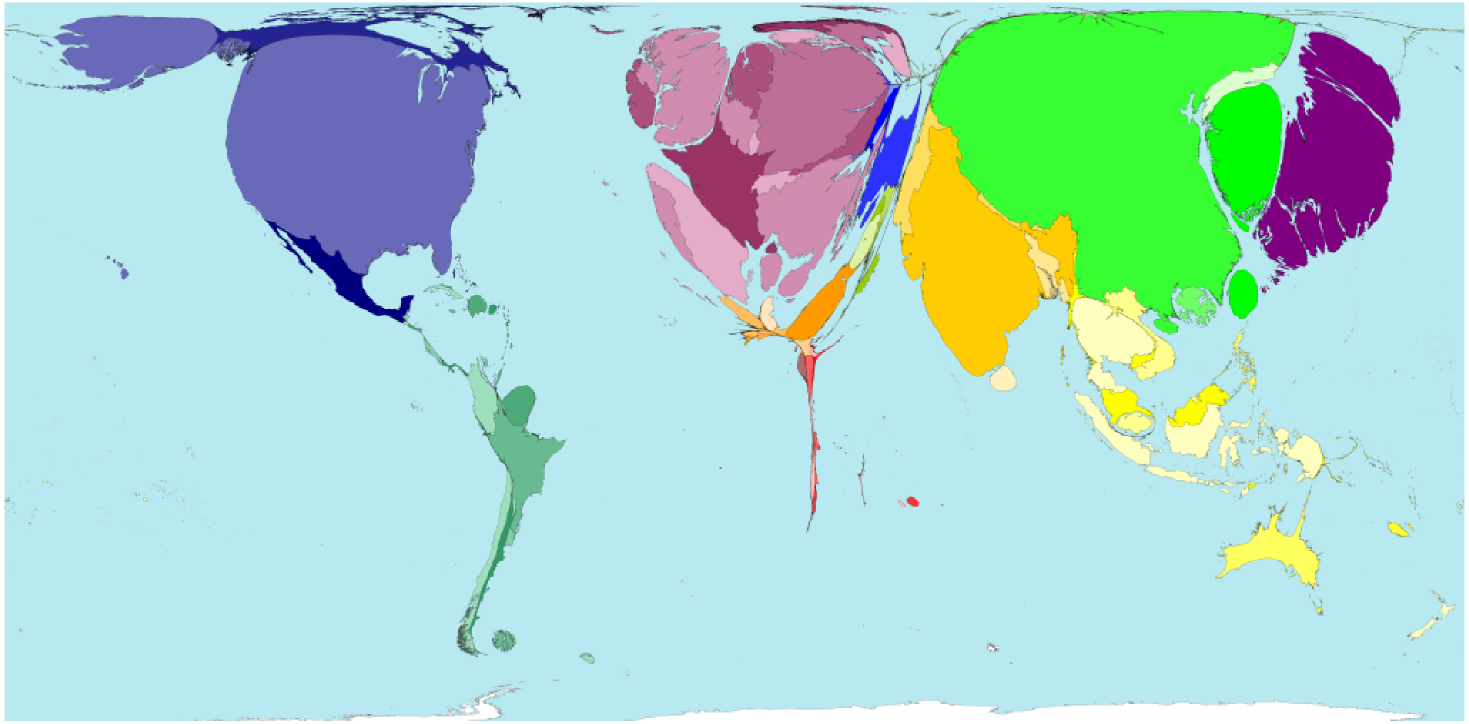
Bruttoinlandsprodukt 2002



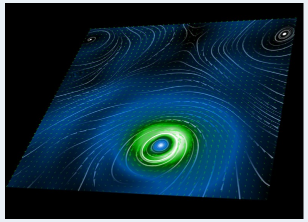


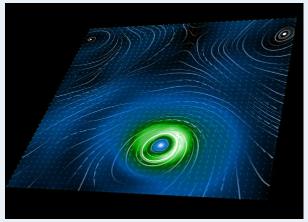
Quelle: worldmapper.com

BIP Wachstum zwischen 1975 und 2002

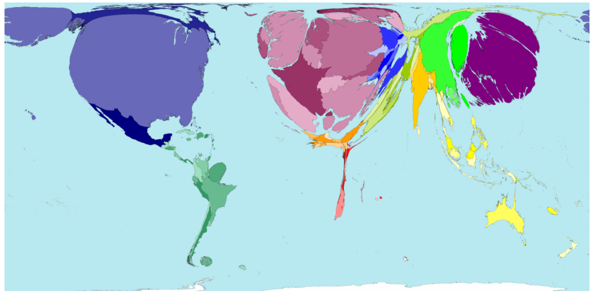


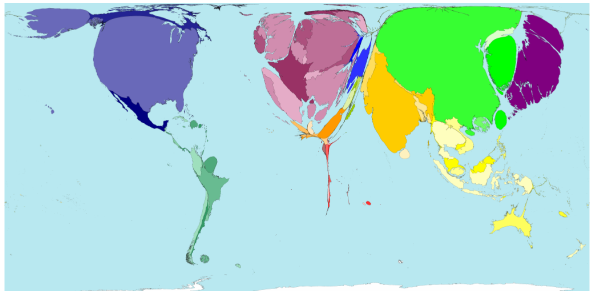
Quelle: worldmapper.com





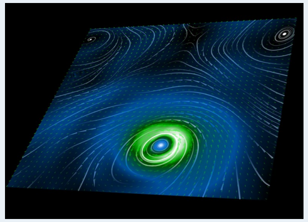
- Lassen sich Beobachtungen an wirtschaftlichen Daten und vor allem deren Veränderung nutzen,
- um Entwicklungen aggregierter Größen in Volkswirtschaften wie z.B.
  - den **Beschäftigungsgrad** oder
  - das **Bruttoinladsprodukt**
- zu modellieren und zu analysieren?





Dazu: **Makroökonomische Modelle**

Das Modell zyklischen Wachstums von Goodwin



Lohnquote und Beschäftigungsgrad: Problem

▸ Modellannahmen

- Betrachtung einer wirtschaftlichen Wachstumsphase
- Gesucht: Ausdruck für sich gegenseitig beeinflussende Lohnquote $u(t)$ und Beschäftigungsgrad $v(t)$

Streikende bei der Telekom

Verwendete Symbole:

- Wachstumsfaktor der Arbeitsproduktivität bzw. des Arbeitskräftepotentials: α, β
- Linearisierungskonstanten: ρ, γ
- Output pro Kapital: κ

Modellannahmen reduzieren sich zu:

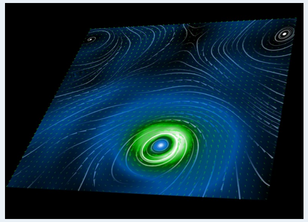
$$
\begin{aligned}
\frac{\dot{v}(t)}{v(t)} &= (\kappa - \alpha - \beta) - \kappa \cdot u(t) \\
\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} &= -(\gamma + \alpha) + \rho \cdot v(t)
\end{aligned}
$$

- Mit den Abkürzungen:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \kappa - \alpha - \beta \quad ; \quad a_2 = \kappa \\
b_1 &= \gamma + \alpha \quad ; \quad b_2 = \rho
\end{aligned}
$$

- ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\frac{\dot{v}(t)}{v(t)} &= a_1 - a_2 u(t) \\
\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} &= -b_1 + b_2 v(t)
\end{aligned}
$$

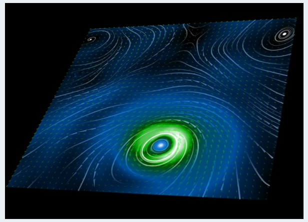


Beschäftigungsgrad und Lohnquote

$$
\begin{aligned}
\frac{\dot{v}(t)}{v(t)} &= a_1 - a_2 \cdot u(t) \\
\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} &= -b_1 + b_2 \cdot v(t)
\end{aligned}
$$

- Gleichungen beinhalten jeweils die gesuchte Funktion und ihre Ableitung
- Und nur **eine Veränderliche** (hier t)
- Solche Gleichungen nennt man gewöhnliche Differentialgleichungen
- Nötig für weitere Analyse der Modelle: Aussagen über Verhalten des Systems

Begriffe



- Differentialgleichung: Eine Gleichung einer gesuchten Funktion y und einigen ihrer Ableitungen
- Gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung: Gleichung gesuchter Funktion y und einigen Ableitungen nach **einer** Veränderlichen x, also Gleichungen der Form:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

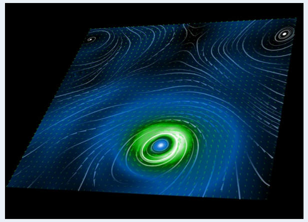
oder

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

- Explizite Differentialgleichung erster Ordnung: $y' = f(y, x)$
- Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) &= 0, \\ y(x_0) &= y_0, \\ y'(x_0) &= y_0', \dots, \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{n-1} \end{aligned}$$

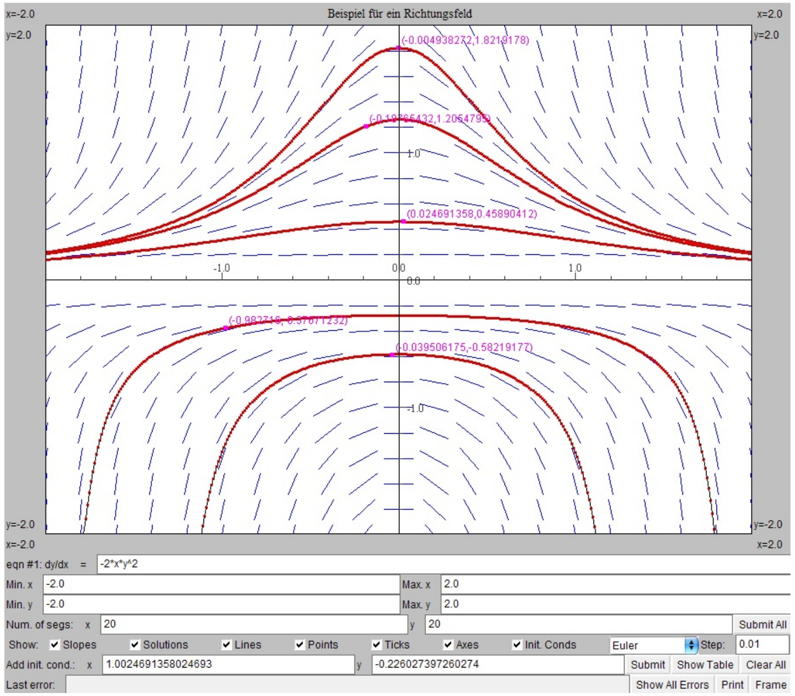
Analyse von Differentialgleichungen

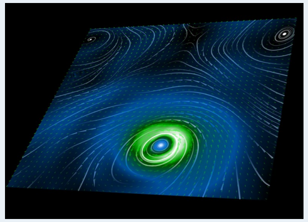


- Wichtige Fragen:
  - Gibt es eine explizite Lösung?
  - Falls vorhanden: Eindeutigkeit?
- Oft trotz Existenz und Eindeutigkeit analytische Lösung nicht möglich; dann zum Beispiel:
  - Richtungsfelder
  - **Numerische Lösungen**

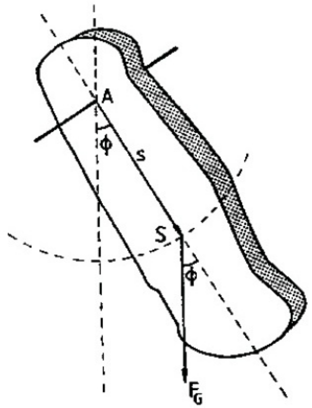
Beispiel numerischer Lösungen:

$$\frac{dy}{dx} = -2xy^2$$





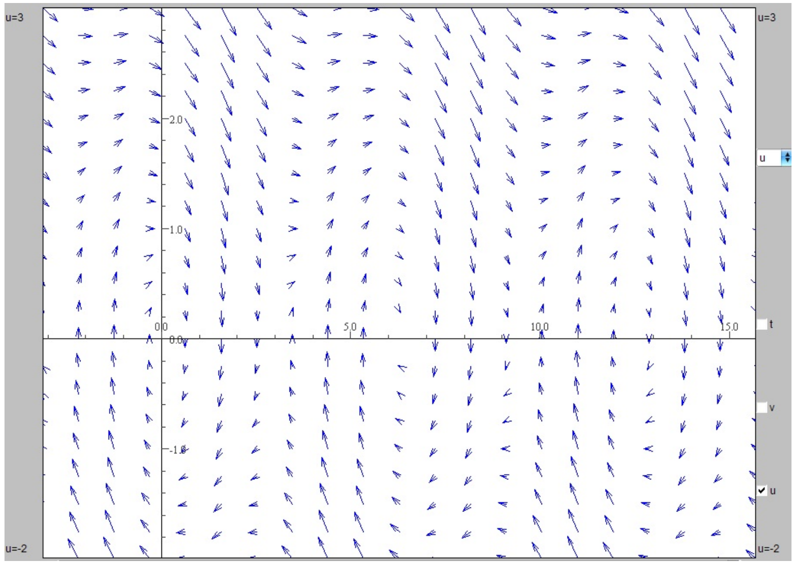
- Wichtige Fragen:
  - Gibt es eine explizite Lösung?
  - Falls vorhanden: Eindeutigkeit?
- Oft trotz Existenz und Eindeutigkeit analytische Lösung nicht möglich; dann zum Beispiel:
  - Richtungsfelder
  - **Numerische Lösungen**
  - Bei Systemen ohne Abhängigkeit von Parameter: Trajektorien

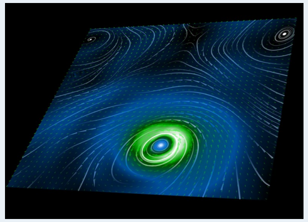


- Physikalisches Pendel, Winkel $v(t)$, Winkelgeschwindigkeit $u(t)$, Dämpfung $\lambda > 0$

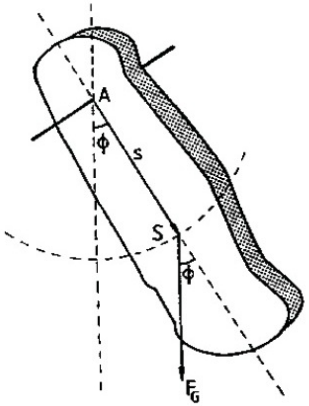
$$\frac{dv}{dt} = u(t)$$

$$\frac{du}{dt} = -\sin(v) - \lambda \cdot u(t)$$





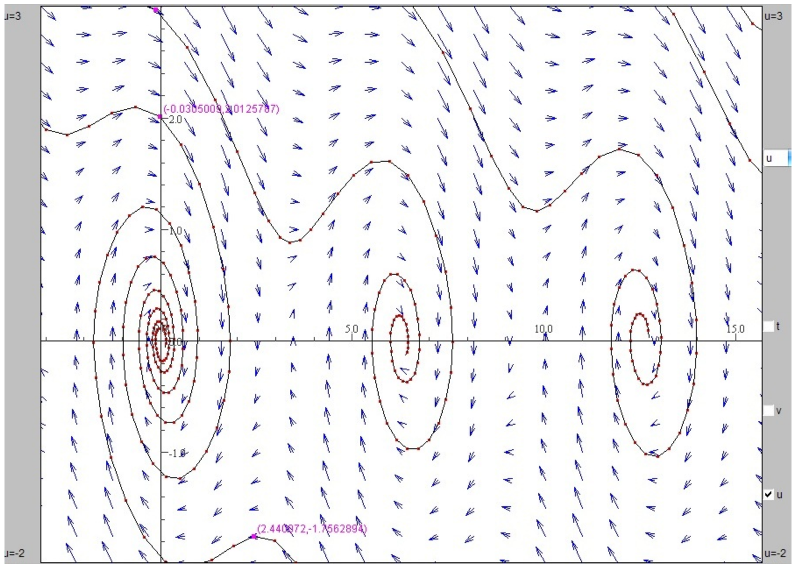
- Wichtige Fragen:
  - Gibt es eine explizite Lösung?
  - Falls vorhanden: Eindeutigkeit?
- Oft trotz Existenz und Eindeutigkeit analytische Lösung nicht möglich; dann zum Beispiel:
  - Richtungsfelder
  - **Numerische Lösungen**
  - Bei Systemen ohne Abhängigkeit von Parameter: Trajektorien
  - Stabile Punkte



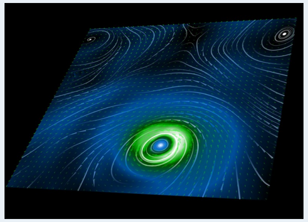
- Physikalisches Pendel, Winkel $v(t)$, Winkelgeschwindigkeit $u(t)$, Dämpfung $\lambda > 0$

$$\frac{dv}{dt} = u(t)$$

$$\frac{du}{dt} = -\sin(v) - \lambda \cdot u(t)$$



Beispiel: Räuber-Beute-Dynamik



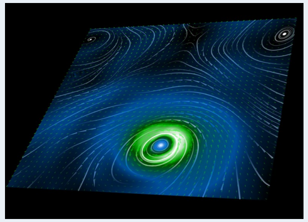
- Pflanzenfresserpopulation $B(t)$ wächst (ungestört) mit konstanter Rate a_1.
- Bei Existenz von Raubtieren mit den Pflanzenfressern als Beute: Raubtierbestand $R(t)$ vermindert Wachstumsrate der Beutetiere proportional:

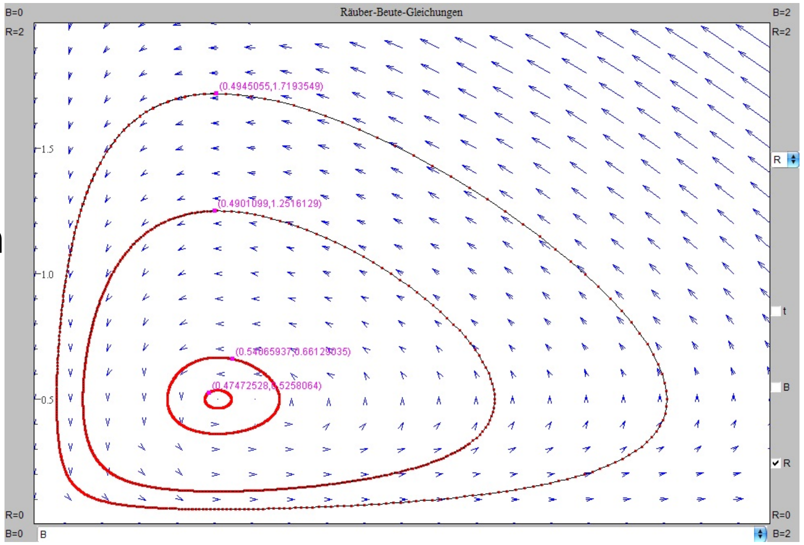
$$\frac{\dot{B}(t)}{B(t)} = a_1 - a_2 \cdot R(t)$$

- Ohne Beute ($B(t) = 0$) schrumpft Raubtierbestand kontinuierlich mit konstanter Rate b_1.
- Andererseite wächst ihr Bestand proportional zur vorhandenen Menge der Beutetiere:

$$\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} = -b_1 + b_2 \cdot B(t)$$

Beispiel: Räuber-Beute-Dynamik





- Pflanzenfresserpopulation $B(t)$ wächst (ungestört) mit konstanter Rate a_1.
- Bei Existenz von Raubtieren mit den Pflanzenfressern als Beute: Raubtierbestand $R(t)$ vermindert Wachstumsrate der Beutetiere proportional:

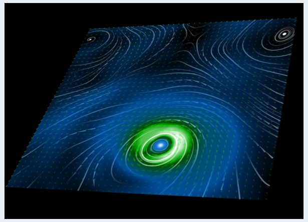
$$\frac{\dot{B}(t)}{B(t)} = a_1 - a_2 \cdot R(t)$$

- Ohne Beute ($B(t) = 0$) schrumpft Raubtierbestand kontinuierlich mit konstanter Rate b_1.
- Andererseite wächst ihr Bestand proportional zur vorhandenen Menge der Beutetiere:

$$\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} = -b_1 + b_2 \cdot B(t)$$

- System von Differentialgleichungen beschreibt im B-R-Diagramm zyklische Kurven.
- Bekannt als Lotka-Volterra-Gleichungen

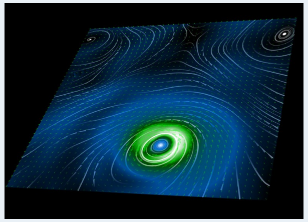
Analogie der Modelle



Beute-Jäger-Modell	Goodman-Modell
$$\begin{aligned}\frac{\dot{B}(t)}{B(t)} &= a_1 - a_2 \cdot R(t)\\ \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} &= -b_1 + b_2 \cdot B(t)\end{aligned}$$	$$\begin{aligned}\frac{\dot{v}(t)}{v(t)} &= a_1 - a_2 \cdot u(t)\\ \frac{\dot{u}(t)}{u(t)} &= -b_1 + b_2 \cdot v(t)\end{aligned}$$

- Die Beschäftigungsgrad $v(t)$ entspricht der Beute,
- Die Lohnquote $u(t)$ den Räubern
- Jede Lösung: Zyklus im u-v-Diagramm
- Anfangsbedingungen bestimmen Orbit
- Stationäre Lösung bei $u = a_1/a_2$ und $v = b_1/b_2$

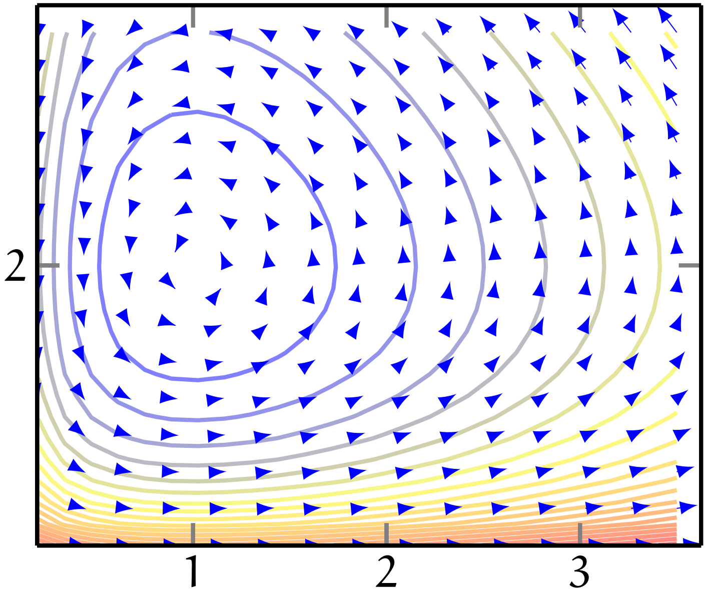
Mechanik des Modells

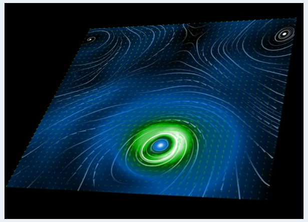


1. Beschäftigungsgrad v kleiner als $b_1/b_2 \to$ Lohndruck ist gering, Reallöhne sinken.
2. Dadurch: Sinkende Lohnquote (und steigende Gewinnquote $\to$ wachsende Investitionen)
3. Diese erhöhen die Wachstumsrate der Produktion und sobald diese das Wachstum der Arbeitsproduktivität übersteigt, kommt es zu Neueinstellungen und der Beschäftigungsgrad nimmt zu.
4. Dann: Steigender Beschäftigungsgrad und Lohndruck; Reallöhne wachsen, senken die Gewinnquote, die Investitionen und die Wachstumsrate der Wirtschaft. Sobald diese unter die Wachstumsrate der Arbeitsproduktivität gesunken ist, sinkt der Beschäftigungsgrad wieder.

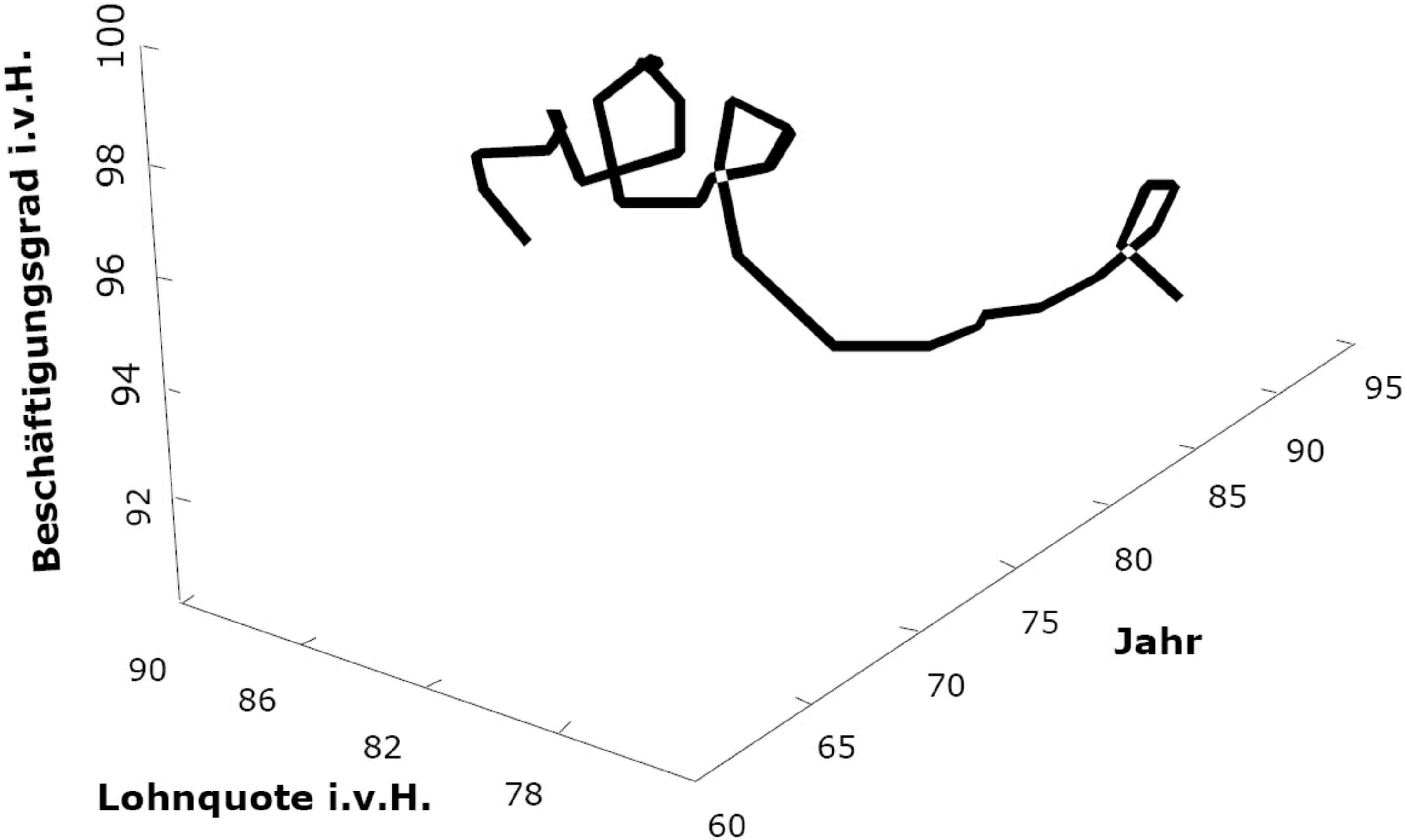
$$
\begin{aligned}
\frac{\dot v(t)}{v(t)} &= a_1 - a_2 \cdot u(t) \\
\frac{\dot u(t)}{u(t)} &= -b_1 + b_2 \cdot v(t)
\end{aligned}
$$

Richtungsfeld mit $a_1 = 2, \quad a_2 = b_1 = b_2 = 1$

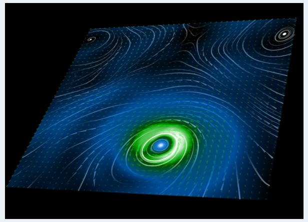




Westdeutsche Daten 1960-1995



Quelle: Sachverständigenrat (1996)



Beispiele für analytisch lösbare DGL

- Konstante Beschleunigung:

$$\ddot{s}(t) = -g$$

$\dot{s}(t) = \int_0^t \ddot{s}(x)\,dx = -gt$

$s(t) = \int_0^t \dot{s}(x)\,dx = -\frac{1}{2}gt^2$

- DGL der Form

$$y' = f(x) \cdot g(x), \quad \text{z.B. } y' = x^2 y$$

$\frac{dy}{dx} = x^2 y$

Trennung der Variablen:

$\frac{dy}{y} = x^2 dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \ln|y| = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$

$\Leftrightarrow \ln|y| = \frac{1}{3}x^3 + c$

$\Leftarrow \quad y = e^{\frac{1}{3}x^3 + c}$

- Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung der Form

$$y' + f(x)y = g(x)$$

mit

- $g(x) = 0$: homogene DGL
- $g(x) \neq 0$: inhomogene DGL

Differentialgleichungen

Lineare DGL 1. Ordnung

Gesucht: Funktion $y: \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$

mit $y' = y \cdot f(x) + s(x)$

Homogene DGL: $y' = y \cdot f(x)$

Beispiel: $y' = 2 \cdot y \Leftarrow y(x) = e^{2x}$

angenommen: y ist Lösung der homogenen DGL

$$(C \cdot y)' = C \cdot y' = (C \cdot y) \cdot f(x)$$

also: Jedes Vielfache einer Lösung ist auch eine Lösung der homogenen DGL

Wie findet man eine Lösung?

Annahme: Wir haben eine stetige Funktion f auf Intervall I

mit $A(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \qquad x_0, x \in I$

nach differenzieren

$$\frac{d}{dx}\left(\underbrace{e^{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}}_{z(x)}\right) = \underbrace{e^{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}}_{z(x)} \cdot f(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad z'(x) = z(x) \cdot f(x)$$

Also ist die Funktion $z(x) = e^{\int f(x)dx}$ eine Lsg. der homogenen DGL (Vielfache von $z(x)$ auch)

Gibt es noch andere Lösungen von $y' = y \cdot f(x)$?

Dazu: Annahme: $z_2(x)$ ist so eine andere Lsg

$$\left(\frac{z_2(x)}{z(x)}\right)' = \frac{z_2' \cdot z - z_2 \cdot z'}{z^2} = \frac{z_2 \cdot f(x) \cdot z - z_2 \cdot \underbrace{e^{\int f(x)dx}}_{z} \cdot f(x)}{z^2}$$

$$= \frac{0}{z^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z_2}{z}\right)' = 0 \Leftrightarrow z^2(x) = C \cdot z(x)$$

also: alle Lösungen der homogenen DGL

$y' = y \cdot f(x)$ haben die Form

$$y(x) = C \cdot e^{\int f(x)dx}$$

Beispiel (Aufgabe 38)

a) $xy' = 4y + x^5$

gesucht: Lösung der homogenen DGL

für $x \neq 0 \Rightarrow y' = \underbrace{\frac{4}{x}}_{f(x)} \cdot y + \underbrace{x^4}_{s(x)}$

homogen: $y' = \frac{4}{x} \cdot y$

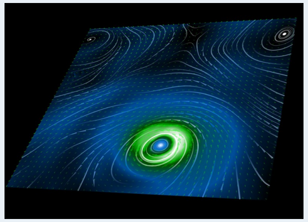
$$y_H = C \cdot e^{\int \frac{4}{x}dx} = C \cdot e^{4 \cdot \ln|x|}$$

$x > 0$: $y_H = C \cdot e^{4 \cdot \ln x} = C \cdot e^{\ln x^4}$

$$y_H = C \cdot x^4$$

[Probe: $y_H' = C \cdot 4x^3 \overset{\checkmark}{=} \frac{4}{x} \cdot C \cdot x^4 = \frac{4}{x} \cdot y_H$]

Lineare DGl erster Ordnung



Motivation

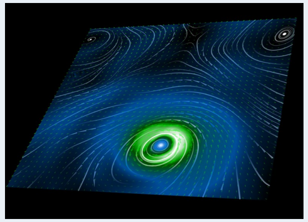
- $\dot{u}(t) = \alpha \cdot u(t)$ mit konstantem α beschreibt Wachstums- oder Schrumpfungsprozesse
- Aber: Um 1650 jährliche Wachstumsrate der Weltbevölkerung 0,3% ($\alpha \approx 0{,}003$), heute ca. 2% ($\alpha \approx 0{,}02$)
- Also: α nicht konstant $\rightarrow \alpha(t)$
- Und: Gegebenfalls Zufuhr oder Abwanderung von/nach außen (Immi- bzw. Emigration)
- Dann DGl: $\dot{u}(t) = \alpha(t)u(t) + s(t)$

Definition

- Lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\boxed{y' = f(x)y + s(x)}$$

- $s(x)$ heißt Störfunktion
- Wenn $s(x) : x \mapsto 0$: Homogene DGl $\boxed{y' = f(x)y}$
- Andernfalls: Inhomogene DGl



Zunächst: Lösung der homogenen Gleichung

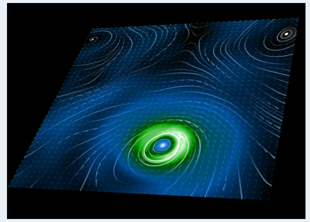
- Klar: Wenn $y(x)$ eine Lösung der DGl, dann ist auch ein Vielfaches Cy eine Lösung
- Annahme: $f(x)$ soll stetig auf Intervall I sein. Damit existiert Stammfunktion

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t \quad \text{für alle } x \in I \quad \text{mit } x_0 \in I \text{ fest}$$

- Es gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{\int f(x)\mathrm{d}x} = f(x) e^{\int f(x)\mathrm{d}x}$$

- Damit $z : x \mapsto e^{\int f(x)\mathrm{d}x}$ ist Lösung, jedes Vielfache Cz auch
- Das sind auch alle Lösungen, denn bei beliebiger Lösung y gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{y}{z} = 0$, also y/z konstant, z.B. C, damit $y = Cz$

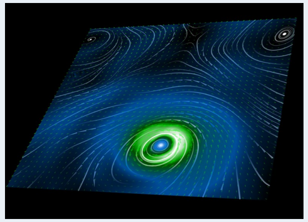


Satz zur Lösung von homogenen linearen DGls 1. Ordnung

- Voraussetzung: $f(x)$ auf dem Intervall I stetig.
- Dann sind die Lösungen der DGL $y' = f(x)y$ genau die Funktionen

$$y : x \mapsto C \cdot e^{\int f(x)dx} \quad \text{mit der freien Konstante } C$$

- Und: Die Anfangswertaufgabe $y' = f(x)y$, $y(x_0) = y_0$ (mit $x_0 \in I$, y_0 beliebig) besitzt genau eine Lösung
- Bestimmung von C über über Anpassung der Anfangsbedingung.
- Beispiele:
  - $y' = (\sin x)y, \quad y(0) = 1$
  - $y' = \frac{1}{x}y, \quad y(1) = 2$



Lösung der inhomogenen Gleichung

- Gegeben: $y' = f(x)y + s(x)$, wobei f und s auf dem Intervall I definiert sind, und $f(x)$ auf I stetig.
- Zuerst: Suche davon eine partikuläre Lösung y_p, dann gilt für jede andere Lösung der DGl:

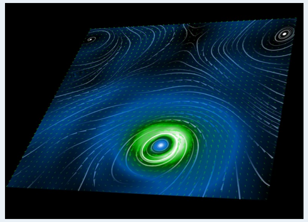
$$(y - y_p)' = fy + s - (fy_p + s) = f(y - y_p)$$

- $y - y_p$ ist also Lösung der homogenen DGl und damit gilt für y

$$\boxed{y(x) = y_p(x) + C \cdot e^{\int f(x)dx}}$$

- Damit ist das die allgemeine Lösung der DGl.
- Praktisch: Zur Lösung der inhomogenen Gleichung ausreichend: Finden irgendeiner partikulären Lösung y_p
- Methode: Variation der Konstanten

Lineare DGl erster Ordnung



Variation der Konstanten

- Fasse C als differenzierbare Funktion in $y_p := C \cdot e^{\int f(x)dx}$ auf
- Eingesetzt in $y' = f(x)y + s(x)$ ergibt sich

$$C(x)f(x) \cdot e^{\int f(x)dx} + C'(x) \cdot e^{\int f(x)dx} = f(x)C(x) \cdot e^{\int f(x)dx} + s(x)$$

- Damit gilt für die „Konstante“ $C(x)$ in der partikulären Lösung y_p:

$$C(x) := \int s(x) \cdot e^{-\int f(x)dx} dx$$

Zusammenfassung

allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung =
partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung +
allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung