Wirtschaftsmathematik

Einführung in einige Teilbereiche der Wirtschaftsmathematik

Wintersemester 2016

HSA Wing Sessionlist WS 2016				
			52	
Datum	N.	Zeit	UE	Themen
Dienstag, 20. September 2016	1	18.00-21.15	4	Einführung, Zinsen, Renten
Dienstag, 27. September 2016	2	18.00-21.15	4	Tilgung, Festverz. Wertpapiere
Dienstag, 4. Oktober 2016	3	18.00-21.15	4	Lineare Optimierung: Einführung, Lösungsmethoden
Samstag, 8. Oktober 2016	4	08.00-11.45	4	Lineare Optimierung: Standardmaximumproblem, Simplex
Dienstag, 11. Oktober 2016	5	18.00-21.15	4	Gewöhnliche Differentialgleichungen
Samstag, 15. Oktober 2016	6	08.00-11.45	4	Analytische Lösung linearer DGLs
Dienstag, 18. Oktober 2016	7	18.00-21.15	4	Einführung, univ. Statistik, Konzentration
Samstag, 22. Oktober 2016	8	11.45-15.00	4	Korrelation, Regression, Preisindizes
Dienstag, 25. Oktober 2016	9	18.00-21.15	4	Kombinatorik, Wahrscheinlichkeiten; Binomial, Hypergeo, Poisson
Samstag, 29. Oktober 2016	10	08.00-11.15	4	Zufallsvariablen, Lage- und Streuung, Stetige ZV, Gleich-vtlg.
Dienstag, 15. November 2016	11	18.00-21.15	4	Normalvtlg., Schätzen und Eigenschaften von Punktschätzern
Samstag, 26. November 2016	12	08.00-11.15	4	Konfidenzintervalle, t-Test
Dienstag, 29. November 2016	13	18.00-21.15	4	Puffer, Wiederholung Besprechung Probeklausur
Samstag, 3. Dezember 2016		09.30-11.00		Klausur (regulärer Termin 90 Min., mit Aufsicht)

Prof. Dr. Stefan Etschberger
HSA

Exkurs: Integrieren und Co.

- $\log_c(a\cdot b) = \log_c a + \log_c b$

  $\log_c(a^b) = b\cdot \log_c a$

- Stammfunktionen

	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$(a\neq -1)$	x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$
$(x\neq 0)$	x^{-1}	$\ln\lvert x\rvert$
	e^x	e^x
$(a>0)$	a^x	$a^x\cdot\frac{1}{\ln a}$
	$\sin x$	$-\cos x$
	$\cos x$	$\sin x$

$$(a^x)' = \left[\ln\left(e^{a^x}\right)\right]' = \left[e^{\ln(a^x)}\right]' = \left[e^{x\cdot\ln a}\right]'$$
$$= e^{x\cdot\ln a}\cdot\ln a = a^x\cdot\ln a$$

- Partielle Integration

$$\boxed{\int f'\cdot g\,dx = f\cdot g - \int f\cdot g'\,dx}$$

$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$
(Produktregel)
$\Leftrightarrow\ f'\cdot g = (f\cdot g)' - f\cdot g'$
$\Leftrightarrow\ \int f'\cdot g\,dx = f\cdot g - \int f\cdot g'\,dx$

Beispiel: $\int \underset{}{\overset{g}{x}}\cdot \overset{f'}{e^{-x}}\,dx$

$$= \underset{f}{-e^{-x}}\cdot\underset{g}{x} - \int \underset{f}{(-e^{-x})}\cdot\underset{g'}{1}\,dx$$

$$= -x\cdot e^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}\cdot(x+1) + C$$

[Probe: $(-e^{-x}\cdot(x+1))' = e^{-x}\cdot(x+1) + (-e^{-x})\cdot 1 = e^{-x}\cdot x$]

Beispiel: $\int \ln(x)\,dx = \int \underset{f'}{1}\cdot\underset{g}{\ln(x)}\,dx$

$$= \underset{f}{x}\cdot\underset{g}{\ln(x)} - \int \underset{f}{x}\cdot\underset{g'}{\frac{1}{x}}\,dx = x\cdot\ln(x) - x + C$$
$$= x\cdot(\ln(x) - 1) + C$$

- Integration durch Substitution

$$\boxed{\int f(z(x))\cdot z'(x)\,dx = \int f(z)\,dz}$$

Kettenregel $z(x)$, $f(z(x))$
gesucht: $\frac{d}{dx}f(z(x))$
$= f'(z)\cdot z'(x)$

Beispiel: $\int e^{-x^2}\cdot x\,dx$

$-2\cdot\frac{1}{2}x^2$

Substituiere: $z(x) = \frac{1}{2}x^2$

$$\Rightarrow \int e^{-x^2}\cdot x\,dx = \int e^{-2\cdot z}\cdot \underbrace{z'(x)\,dx}_{dz} = \int e^{-2z}\,dz$$

$$= -\tfrac{1}{2}\cdot e^{-2z} = -\tfrac{1}{2}e^{-2\cdot\frac{1}{2}x^2} = -\tfrac{1}{2}\cdot e^{-x^2}$$

z wieder einsetzen

Beispiel:

$$\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = \int \frac{-1}{\underbrace{-\cos(x)}_{\to z(x)}} \cdot \underbrace{\sin(x)\,dx}_{z'(x)dx = dz}$$

$$= -\int \frac{1}{z}\,dz = -\ln|z| + c = -\ln|-\cos(x)| + c$$

$$= -\ln|\cos x| + c = \ln(\cos(x))^{-1} + c$$

für $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$= \ln \frac{1}{\cos(x)} + c$$

Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y'(x) = y(x)\cdot f(x) + s(x) \qquad \text{(DGL)}$$

Annahme: Es gibt eine Lösung (irgendeine) (partikuläre Lösung) y_P

dann gilt für jede andere Lösung y

$$(y - y_P)' = y' - y_P' = y\cdot f + \cancel{s} - (y_P \cdot f + \cancel{s})$$

$$= (y - y_P)\cdot f$$

$\Rightarrow$ $y - y_P$ ist Lsg der homogenen DGL (ohne s)

$\Rightarrow$ $y - y_P = c \cdot e^{\int f(x)dx}$

$\Rightarrow$ $y = c\cdot e^{\int f(x) dx} + y_P$

Also: Jede Lsg. von (DGL) hat die Form

Konstante · homogene Lösung + partik. Lsg.

Noch zu klären: Wie findet man y_P?

$\to$ **Variation der Konstanten**

Idee: Fasse Konstante in homogener Lösung als Funktion in Abh. von x auf

Also: $y = C(x)\cdot e^{\int f(x)dx} = C(x)\cdot y_H$

einsetzen in DGL: $y' = y \cdot f + s$

$$\Leftrightarrow \quad c'(x)\cdot y_H + \cancel{c(x)\cdot \underbrace{y_H\cdot f}_{y_H'}}$$

$$= \cancel{c(x)\cdot y_H \cdot f} + s(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad c'(x)\cdot y_H = s(x) \quad \Leftrightarrow \quad c'(x) = \frac{s(x)}{y_H}$$

$$\Leftrightarrow \quad c(x) = \int \frac{s(x)}{y_H}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad y_P = c(x)\cdot y_H = y_H \cdot \int \frac{s(x)}{y_H}\,dx$$

$$y_P = y_H \cdot \int \frac{s}{y_H}\,dx \qquad \left(y_H = e^{\int f(x)\,dx} \right)$$

Gesamtlösung: $y(x) = y_P + c\cdot y_H$

Beispiel: (A 35a)

$$xy' = 4y + x^5 \quad (x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad y' = y\cdot\frac{4}{x} + x^4$$

f(x) s(x)

x>0

① $y_H = c\cdot e^{\int f(x)dx} = c\cdot e^{4\int\frac{1}{x}dx} = c\cdot e^{\ln x^4} = c\cdot x^4$

② $y_P = y_H\cdot\int\frac{s(x)}{y_H}dx = x^4\cdot\int\frac{x^4}{x^4}dx = x^4\cdot\int 1\,dx = x^5$

③ Gesamtlösung: $y(x) = x^5 + C\cdot x^4$

[Probe: $x\cdot y' = x\cdot(5x^4 + C\cdot 4\cdot x^3) = 5x^5 + 4C\cdot x^4$
$4y + x^5 = 4\cdot(x^5 + C\cdot x^4) + x^5 = 4x^5 + 4Cx^4 + x^5$ } gleich ✓]

Beispiel (A38b)

f(x) s(x)

$$y' = y\cdot\tan x - 2\sin x$$

① Homogene Lösung: $y_H = c\cdot e^{\int f(x)dx} = c\cdot e^{\int\tan x\,dx}$
$= c\cdot e^{\ln\frac{1}{\cos x}} = c\cdot\frac{1}{\cos x}$

② Partikuläre Lösung: $y_P = \frac{1}{\cos x}\cdot\int\frac{-2\sin x}{\frac{1}{\cos x}}dx$
$= \frac{1}{\cos x}\cdot\int 2\cdot\underbrace{\cos x}_{z}\cdot\underbrace{(-\sin x)\,dx}_{dz}$ $\quad\left(\int 2z\,dz = z^2\right)$
$= \frac{1}{\cos x}\cdot z^2 = \frac{1}{\cos x}\cos^2 x = \cos x$

③ Gesamtlösung: $y(x) = \cos x + C\cdot\frac{1}{\cos x}$

Aufgabe 39 a a) $y' = 2xy + x, \quad y(0) = 1$

f s

$$y' = y\cdot 2x + x$$

① Homogen: $y_H = c\cdot e^{\int 2x\,dx} = c\cdot e^{x^2}$

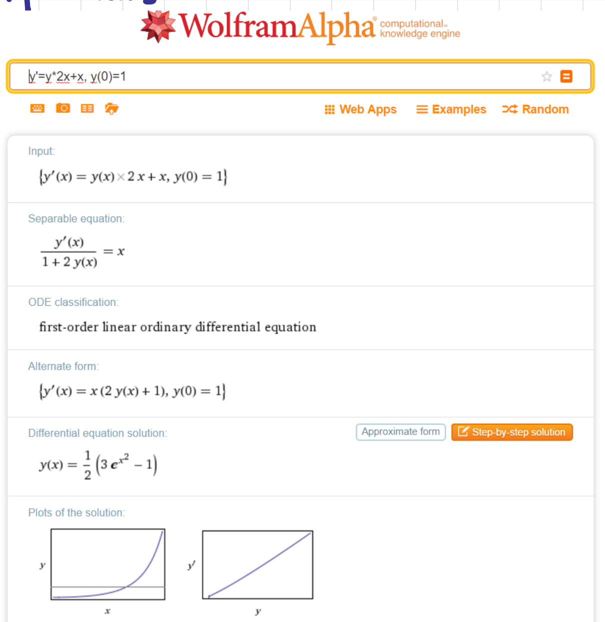
② Partikulär: $y_P = e^{x^2}\cdot\int\frac{x}{e^{x^2}}dx$
$= e^{x^2}\cdot\int e^{\overbrace{-x^2}^{z}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\underbrace{(-2x)\cdot dx}_{z'\cdot dx}$
$= -\frac{1}{2}e^{x^2}\cdot\int e^z dz = -\frac{1}{2}e^{x^2}\cdot e^z = -\frac{1}{2}e^{x^2}\cdot e^{-x^2} = -\frac{1}{2}$
$\Rightarrow y_P = -\frac{1}{2}$

③ Gesamt: $y(x) = -\frac{1}{2} + c\cdot e^{x^2}$

④ Einsetzen der Anfangsbed.:
$y(0) = -\frac{1}{2} + c\cdot e^0 = -\frac{1}{2} + c = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{2}$

⇒ Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(x) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{x^2}$$



Aufgabe 39b

b) $y' = \frac{1}{1-x} y + x - 1 \quad$ mit $\quad y(2) = 0 \quad (\Rightarrow x > 1)$

$$\text{Homogen:} \quad y_{\text{hom.}} = e^{\int \frac{1}{1-x}\,dx} = C\frac{1}{1-x}$$

$$\text{Partikulär:} \quad y_{\text{part.}} = C(x) \cdot \frac{1}{1-x} \quad \Rightarrow \quad C'(x) = -x^2 + 2x - 1$$

$$\Rightarrow \quad C(x) = -1/3 \cdot x^3 + x^2 - x$$

$$\text{Allgemein:} \quad y_{\text{allg.}} = y_{\text{hom.}} + y_{\text{part.}} = \frac{1}{1-x}(C - 1/3 \cdot x^3 + x^2 - x)$$

$$\text{Anfangsbedingung:} \quad 0 = -1(C - 8/3 + 4 - 2) \quad \Rightarrow \quad C = 2/3$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{1-x}(2/3 - 1/3 \cdot x^3 + x^2 - x)$$

① $y_H = c \cdot e^{\int \frac{1}{1-x} dx} = c \cdot e^{-\int \frac{1}{x-1} dx} = c \cdot e^{-\ln(x-1)}$

$= c \cdot \frac{1}{x-1}$

$= \tilde{c} \cdot \frac{1}{1-x}$

$y' = \frac{1}{1-x} y + x - 1 \quad$ mit $\quad y(2) = 0$

② $y_P = y_H \cdot \int \frac{s}{y_H} dx = \frac{1}{1-x} \cdot \int \frac{x-1}{\frac{1}{1-x}} dx = \frac{-1}{1-x} \int (x^2 - 2x + 1)\, dx$

$= \frac{1}{x-1} \cdot \left(\frac{1}{3} x^3 - x^2 + x\right)$

gesamt: $\quad y = \frac{\frac{1}{3} x^3 - x^2 + x}{x-1} + c \cdot \frac{1}{1-x}$

$y(2) = \frac{\frac{8}{3} - 4 + 2}{2-1} + c \cdot \frac{1}{1-2} = \frac{2}{3} - c = 0 \iff c = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{x-1} \cdot \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x - \frac{2}{3}\right)$

Stundenplan

Stundenplan (Stand 15.9.2016)

KW 38 19	WIMA, B 4.02, 18:00 20	21	22	23	24	25
KW 39 26	WIMA, B 4.02, 18:00 27	28	29	30		

Oktober 2016

Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag
					KW 39 1	2
KW 40 Tag der d. Einheit 3	WIMA, B 4.02, 18:00 4	5	6	7	WIMA, B 4.02, 08:00 8	9
KW 41 10	WIMA, B 4.02, 18:00 11	12	13	14	WIMA, B 4.02, 08:00 15	16
KW 42 17	WIMA, B 4.02, 18:00 18	19	20	21	WIMA, B 4.02, 11:45 22	23
KW 43 24	WIMA, B 4.02, 18:00 25	26	27	28	WIMA, B 4.02, 08:00 29	Herbstferien 30
KW 44 Herbstferien 31						

November 2016

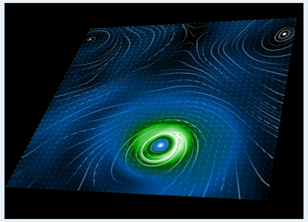
Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag
	KW 44 Herbstferien 1	Herbstferien 2	Herbstferien 3	Herbstferien 4	Herbstferien 5	Herbstferien 6
KW 45 7	8	9	10	11	12	13
KW 46 14	WIMA, B 4.02, 18:00 15	16	17	18	19	20
KW 47 21	22	23	24	25	WIMA, B 4.02, 08:00 26	1. Advent 27
KW 48 28	WIMA, B 4.02, 18:00 29	30				

Dezember 2016

Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag
			KW 48 1	2	WIMA, B 4.02, 08:30 Prüfungstag 3	4

Gliederung

Beispiele für analytisch lösbare DGL



- Konstante Beschleunigung:

$$\ddot{s}(t) = -g$$

- DGL der Form

$$y' = f(x) \cdot g(x), \quad \text{z.B. } y' = x^2 y$$

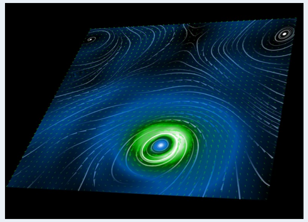
- Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung der Form

$$y' + f(x)y = g(x)$$

mit

- $g(x) = 0$: homogene DGL
- $g(x) \neq 0$: inhomogene DGL

Lineare DGl erster Ordnung



Motivation

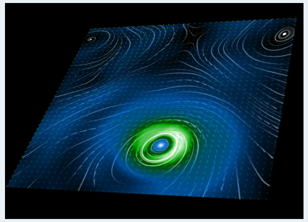
- $\dot{u}(t) = \alpha \cdot u(t)$ mit konstantem α beschreibt Wachstums- oder Schrumpfungsprozesse
- Aber: Um 1650 jährliche Wachstumsrate der Weltbevölkerung 0,3% ($\alpha \approx 0{,}003$), heute ca. 2% ($\alpha \approx 0{,}02$)
- Also: α nicht konstant $\to \alpha(t)$
- Und: Gegebenfalls Zufuhr oder Abwanderung von/nach außen (Immi- bzw. Emigration)
- Dann DGl: $\dot{u}(t) = \alpha(t)u(t) + s(t)$

Definition

- Lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = f(x)y + s(x)$$

- $s(x)$ heißt Störfunktion
- Wenn $s(x) : x \mapsto 0$: Homogene DGl $y' = f(x)y$
- Andernfalls: Inhomogene DGl



Zunächst: Lösung der homogenen Gleichung

- Klar: Wenn $y(x)$ eine Lösung der DGl, dann ist auch ein Vielfaches Cy eine Lösung
- Annahme: $f(x)$ soll stetig auf Intervall I sein. Damit existiert Stammfunktion

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \quad \text{für alle } x \in I \quad \text{mit } x_0 \in I \text{ fest}$$

- Es gilt:

$$\frac{d}{dx} e^{\int f(x)dx} = f(x)e^{\int f(x)dx}$$

- Damit $z : x \mapsto e^{\int f(x)dx}$ ist Lösung, jedes Vielfache Cz auch
- Das sind auch alle Lösungen, denn bei beliebiger Lösung y gilt $\frac{d}{dx}\frac{y}{z} = 0$, also y/z konstant, z.B. C, damit $y = Cz$

Lineare DGl erster Ordnung

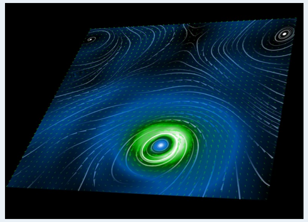
Satz zur Lösung von homogenen linearen DGls 1. Ordnung

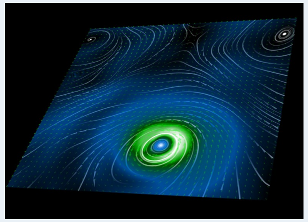
- Voraussetzung: $f(x)$ auf dem Intervall I stetig.
- Dann sind die Lösungen der DGL $y' = f(x)y$ genau die Funktionen

$$y : x \mapsto C \cdot e^{\int f(x)dx} \quad \text{mit der freien Konstante } C$$

- Und: Die Anfangswertaufgabe $y' = f(x)y$, $y(x_0) = y_0$ (mit $x_0 \in I$, y_0 beliebig) besitzt genau eine Lösung
- Bestimmung von C über über Anpassung der Anfangsbedingung.

- Beispiele:
  - $y' = (\sin x)y, \quad y(0) = 1$
  - $y' = \frac{1}{x}y, \quad y(1) = 2$





Lösung der inhomogenen Gleichung

- Gegeben: $y' = f(x)y + s(x)$, wobei f und s auf dem Intervall I definiert sind, und $f(x)$ auf I stetig.
- Zuerst: Suche davon eine partikuläre Lösung y_p, dann gilt für jede andere Lösung der DGl:

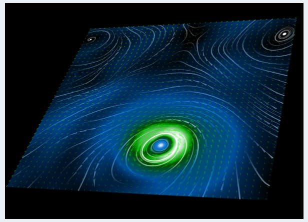
$$(y - y_p)' = fy + s - (fy_p + s) = f(y - y_p)$$

- $y - y_p$ ist also Lösung der homogenen DGl und damit gilt für y

$$y(x) = y_p(x) + C \cdot e^{\int f(x)dx}$$

- Damit ist das die allgemeine Lösung der DGl.
- Praktisch: Zur Lösung der inhomogenen Gleichung ausreichend: Finden irgendeiner partikulären Lösung y_p
- Methode: Variation der Konstanten

Lineare DGl erster Ordnung



Variation der Konstanten

- Fasse C als differenzierbare Funktion in $y_p := C \cdot e^{\int f(x) dx}$ auf
- Eingesetzt in $y' = f(x)y + s(x)$ ergibt sich

$$C(x)f(x) \cdot e^{\int f(x)dx} + C'(x) \cdot e^{\int f(x)dx} = f(x)C(x) \cdot e^{\int f(x)dx} + s(x)$$

- Damit gilt für die „Konstante“ $C(x)$ in der partikulären Lösung y_p:

$$C(x) := \int s(x) \cdot e^{-\int f(x)dx} dx$$

Zusammenfassung

allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung =
partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung +
allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung