Wirtschaftsmathematik

Einführung in einige Teilbereiche der Wirtschaftsmathematik

Wintersemester 2016

HSA Wing Sessionlist WS 2016				
			52	
Datum	N.	Zeit	UE	Themen
Dienstag, 20. September 2016	1	18.00-21.15	4	Einführung, Zinsen, Renten
Dienstag, 27. September 2016	2	18.00-21.15	4	Tilgung, Festverz. Wertpapiere
Dienstag, 4. Oktober 2016	3	18.00-21.15	4	Lineare Optimierung: Einführung, Lösungsmethoden
Samstag, 8. Oktober 2016	4	08.00-11.45	4	Lineare Optimierung: Standardmaximumproblem, Simplex
Dienstag, 11. Oktober 2016	5	18.00-21.15	4	Gewöhnliche Differentialgleichungen
Samstag, 15. Oktober 2016	6	08.00-11.45	4	Analytische Lösung linearer DGLs
Dienstag, 18. Oktober 2016	7	18.00-21.15	4	Einführung, univ. Statistik, Konzentration
Samstag, 22. Oktober 2016	8	11.45-15.00	4	Korrelation, Regression, Preisindizes
Dienstag, 25. Oktober 2016	9	18.00-21.15	4	Kombinatorik, Wahrscheinlichkeiten; Binomial, Hypergeo, Poisson
Samstag, 29. Oktober 2016	10	08.00-11.15	4	Zufallsvariablen, Lage- und Streuung, Stetige ZV, Gleich-vtlg.
Dienstag, 15. November 2016	11	18.00-21.15	4	Normalvtlg., Schätzen und Eigenschaften von Punktschätzern
Samstag, 26. November 2016	12	08.00-11.15	4	Konfidenzintervalle, t-Test
Dienstag, 29. November 2016	13	18.00-21.15	4	Puffer, Wiederholung Besprechung Probeklausur
Samstag, 3. Dezember 2016		09.30-11.00		Klausur (regulärer Termin 90 Min., mit Aufsicht)

Prof. Dr. Stefan Etschberger
HSA

"Sollen wir das arithmetische Mittel als durchschnittliche Körpergröße nehmen und den Gegner erschrecken, oder wollen wir ihn einlullen und nehmen den Median?"

Modus x_{Mod}: häufigster Wert

Beispiel:

a_j	1	2	4
$h(a_j)$	4	3	1

$\Rightarrow x_{\text{Mod}} = 1$

Sinnvoll bei allen Skalenniveaus.

Median x_{Med}: ‚mittlerer Wert', d.h.

1. Urliste aufsteigend sortieren: $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$
2. Dann

$$x_{\text{Med}} \begin{cases} = x_{\frac{n+1}{2}}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \in [x_{\frac{n}{2}}; x_{\frac{n}{2}+1}], & \text{falls } n \text{ gerade (meist } x_{\text{Med}} = \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})) \end{cases}$$

Im Beispiel oben:

$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 4 \Rightarrow x_{\text{Med}} \in [1; 2]$, z.B. $x_{\text{Med}} = 1{,}5$

Sinnvoll ab ordinalem Skalenniveau.

Lageparameter (2)

- **Arithmetisches Mittel** $\bar{x}$: Durchschnitt, d.h.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} a_j \cdot h(a_j)$$

Im Beispiel:

$$\bar{x} = \tfrac{1}{8} \cdot (\underbrace{1+1+1+1}_{1\cdot 4} + \underbrace{2+2+2}_{2\cdot 3} + \underbrace{4}_{4\cdot 1}) = 1{,}75$$

Sinnvoll nur bei kardinalem Skalenniveau.
Bei klassierten Daten:

$$\bar{x}^* = \tfrac{1}{n} \sum \text{Klassenmitte} \cdot \text{Klassenhäufigkeit}$$

Im Beispiel:

$$\bar{x}^* = \tfrac{1}{12} \cdot (2{,}5 \cdot 5 + 10 \cdot 5 + 22{,}5 \cdot 2) = 8{,}96 \neq 7{,}5 = \bar{x}$$

Lageparameter

Ausgaben für Schuhe

```
median(na.exclude(AusgSchuhe))

## [1] 200

mean(na.exclude(AusgSchuhe))

## [1] 270.4529
```

Alter

```
median(Alter)

## [1] 21

mean(Alter)

## [1] 22.12537
```

Lieblingsfarbe

```
summary(Geschlecht)

## Frau Mann
##  389  281
```

Alter der Mutter

```
median(na.exclude(AlterM))

## [1] 51

mean(na.exclude(AlterM))

## [1] 51.63677
```

Streuungsparameter

- Voraussetzung: kardinale Werte $x_1, \ldots, x_n$
- **Beispiel:**

$$\left.\begin{array}{ll|ccc} \text{a)} & x_i & 1950 & 2000 & 2050 \\ \hline \text{b)} & x_i & 0 & 0 & 6000 \end{array}\right\} \text{je } \bar{x} = 2000$$

- Spannweite: $SP = \max\limits_i x_i - \min\limits_i x_i$

  Im Beispiel:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & SP = 2050 - 1950 = 100 \\ \text{b)} & SP = 6000 - 0 = 6000 \end{array}$$

- Mittlere quadratische Abweichung:

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2}_{\text{Verschiebungssatz}}$$

Streuungsparameter (2)

- **Mittlere quadratische Abweichung** im Beispiel:

  a) $$s^2 = \tfrac{1}{3} \cdot (50^2 + 0^2 + 50^2)$$
  $$= \tfrac{1}{3} \cdot (1950^2 + 2000^2 + 2050^2) - 2000^2 = 1666{,}67$$

  b) $$s^2 = \tfrac{1}{3} \cdot (2000^2 + 2000^2 + 4000^2)$$
  $$= \tfrac{1}{3} \cdot (0^2 + 0^2 + 6000^2) - 2000^2 = 8000000$$

- **Standardabweichung:** $s = \sqrt{s^2}$

  Im Beispiel:

  a) $$s = \sqrt{1666{,}67} = 40{,}82$$

  b) $$s = \sqrt{8000000} = 2828{,}43$$

- **Variationskoeffizient:** $V = \dfrac{s}{\bar{x}}$ (maßstabsunabhängig)

  Im Beispiel:

  a) $$V = \frac{40{,}82}{2000} = 0{,}02 \ (\widehat{=}\, 2\,\%)$$

  b) $$V = \frac{2828{,}43}{2000} = 1{,}41 \ (\widehat{=}\, 141\,\%)$$

Lage und Streuung: Überblick

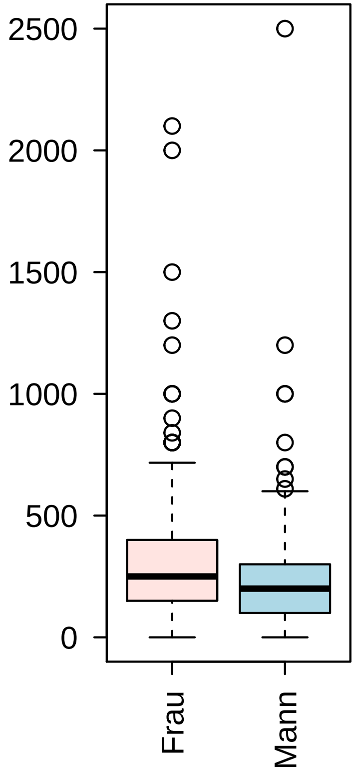
```r
LageStreuung = function(x) {
  x=na.omit(x)  # ignoriere fehlende Werte
  n = length(x) # Anzahl nicht fehlender Werte
  popV = var(x)*(n-1)/n # var() ist nicht mittl. qu. Abweichung
  return(list(mean=mean(x),
              median=median(x),
              Variance=popV,
              StdDev=sqrt(popV),
              VarCoeff=sqrt(popV)/mean(x)))
}
mat1 = sapply(MyData[c("Alter","AlterV","AlterM", # sapply: pro Spalte anwenden
                       "Geschwister", "AnzSchuhe", "AusgSchuhe")],
              LageStreuung)
```

	Alter	AlterV	AlterM	Geschwister	AnzSchuhe	AusgSchuhe
mean	22.13	54.28	51.64	1.51	21.22	270.45
median	21.00	54.00	51.00	1.00	16.00	200.00
Variance	11.36	35.35	25.74	1.18	415.51	56333.39
StdDev	3.37	5.95	5.07	1.08	20.38	237.35
VarCoeff	0.15	0.11	0.10	0.72	0.96	0.88

Lage und Streuung als Grafik: Boxplot

- Graphische Darstellung von Lage und Streuung
- Box: Oberer/Unterer Rand: 3. bzw. 1. Quartil ($\tilde{x}_{0,75}$ bzw. $\tilde{x}_{0,25}$),
- Linie in Mitte: Median
- Whiskers: Länge: Max./Min Wert, aber beschränkt durch das 1,5-fache des Quartilsabstands (falls größter/kleinster Wert größeren/kleineren Abstand von Box: Länge Whiskers durch größten/kleinsten Wert innerhalb dieser Schranken)
- Ausreißer: Alle Objekte außerhalb der Whisker-Grenzen

```
boxplot(AusgSchuhe ~ Geschlecht,
        col=c("mistyrose", "lightblue"),
        data=MyData, main="", las=2)
```



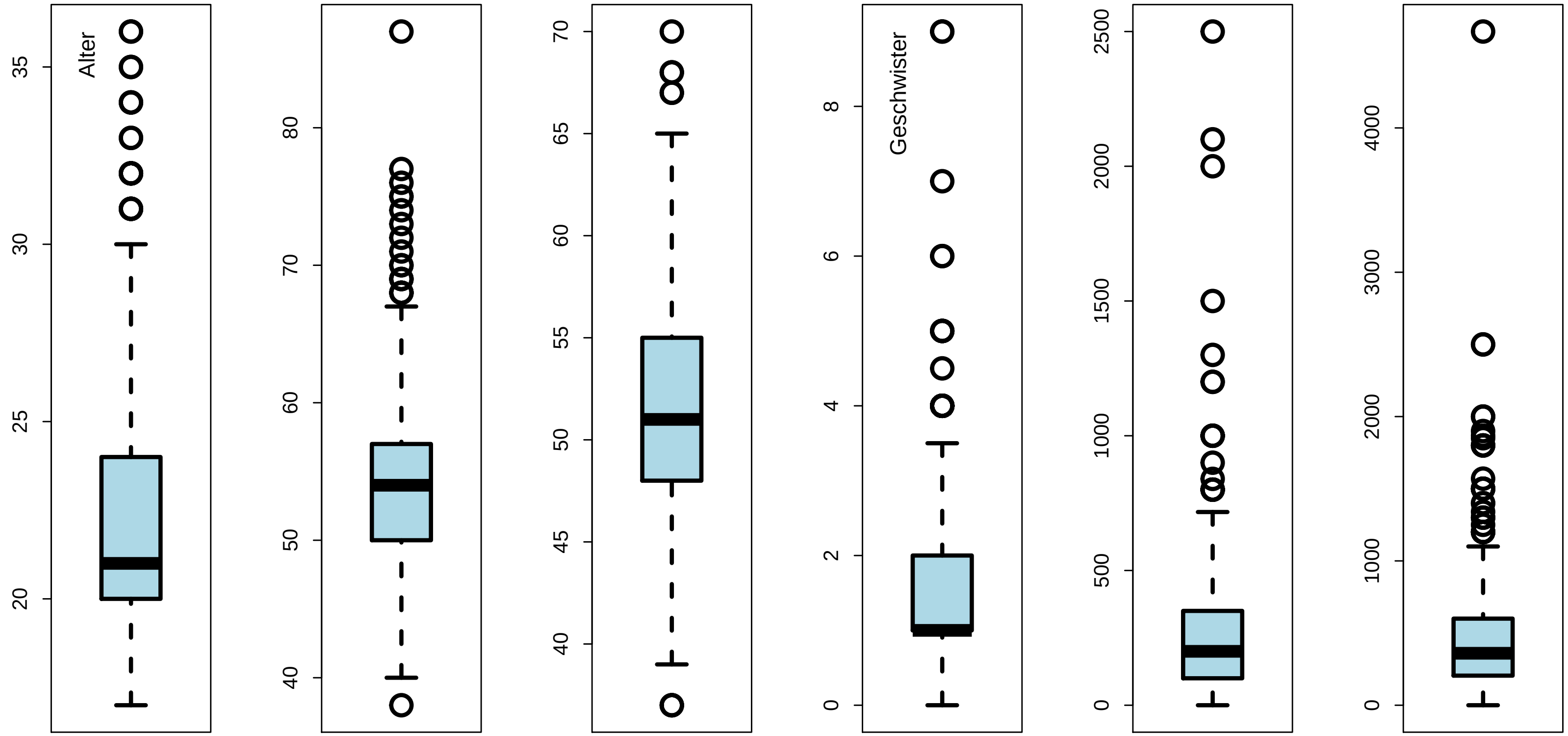
Ausgaben für Schuhe


```r
summary(MyData)

##     Jahrgang        Alter          Groesse      Geschlecht     AlterV          AlterM
##  Min.   :2014   Min.   :17.00   Min.   :150.0   Frau:389   Min.   :38.00   Min.   :37.00
##  1st Qu.:2014   1st Qu.:20.00   1st Qu.:166.0   Mann:281   1st Qu.:50.00   1st Qu.:48.00
##  Median :2015   Median :21.00   Median :172.0              Median :54.00   Median :51.00
##  Mean   :2015   Mean   :22.13   Mean   :173.1              Mean   :54.28   Mean   :51.64
##  3rd Qu.:2016   3rd Qu.:24.00   3rd Qu.:180.0              3rd Qu.:57.00   3rd Qu.:55.00
##  Max.   :2016   Max.   :36.00   Max.   :198.0              Max.   :87.00   Max.   :70.00
##                                                            NA's   :1       NA's   :1
##     GroesseV        GroesseM       Geschwister        Farbe        AusgKomm          AnzSchuhe
##  Min.   :160.0   Min.   : 76.0   Min.   :0.000   blau   : 31   Min.   :   0.0   Min.   :  2.00
##  1st Qu.:175.0   1st Qu.:162.0   1st Qu.:1.000   gelb   :  5   1st Qu.: 207.5   1st Qu.:  8.00
##  Median :180.0   Median :165.0   Median :1.000   rot    : 24   Median : 360.0   Median : 16.00
##  Mean   :179.1   Mean   :166.2   Mean   :1.509   schwarz:333   Mean   : 458.1   Mean   : 21.22
##  3rd Qu.:183.0   3rd Qu.:170.0   3rd Qu.:2.000   silber : 82   3rd Qu.: 600.0   3rd Qu.: 30.00
##  Max.   :204.0   Max.   :192.0   Max.   :9.000   weiss  :195   Max.   :4668.0   Max.   :275.00
##  NA's   :11      NA's   :8                                     NA's   :2
##    AusgSchuhe          Essgewohnheiten Raucher       NoteMathe               MatheZufr     Studiengang
##  Min.   :   0.0   carnivor     :420    ja  : 81   Min.   :1.000   unzufrieden    :185   BW   :107
##  1st Qu.: 100.0   fruktarisch  :  1    nein:381   1st Qu.:2.650   geht so        :151   ET   :  1
##  Median : 200.0   pescetarisch: 26     NA's:208   Median :3.300   zufrieden      :114   IM   : 74
##  Mean   : 270.5   vegan        :  3               Mean   :3.233   sehr zufrieden: 74   Inf  : 48
##  3rd Qu.: 350.0   vegetarisch : 15                3rd Qu.:4.000   NA's           :146   WI   : 59
##  Max.   :2500.0   NA's         :205               Max.   :5.000                         NA's:381
##  NA's   :1                                        NA's   :162
```

Boxplots

```
for(attribute in c("Alter", "AlterV", "AlterM", "Geschwister",
                   "AusgSchuhe", "AusgKomm")) {
  data=MyData[, attribute]
  boxplot(data, # all rows, column of attribute
          col="lightblue",      # fill color
          lwd=3,                # line width
          cex=2,                 # character size
          oma=c(1,1,2,1)
          )
  text(0.7,max(data), attribute, srt=90, adj=1)
}
```



Konzentrationsmaße

- Gegeben: kardinale Werte $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$
- **Achtung!** Die Werte <u>müssen</u> aufsteigend sortiert werden!
- Lorenzkurve:

> Wieviel Prozent der Merkmalssumme entfällt auf die x Prozent kleinsten Merkmalsträger?

- **Beispiel:** Die 90 % ärmsten besitzen 20 % des Gesamtvermögens.
- Streckenzug: $(0{,}0),\ (u_1, v_1),\ \ldots,\ (u_n, v_n) = (1{,}1)$ mit

$$v_k = \text{Anteil der } k \text{ kleinsten MM-Träger an der MM-Summe} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}$$

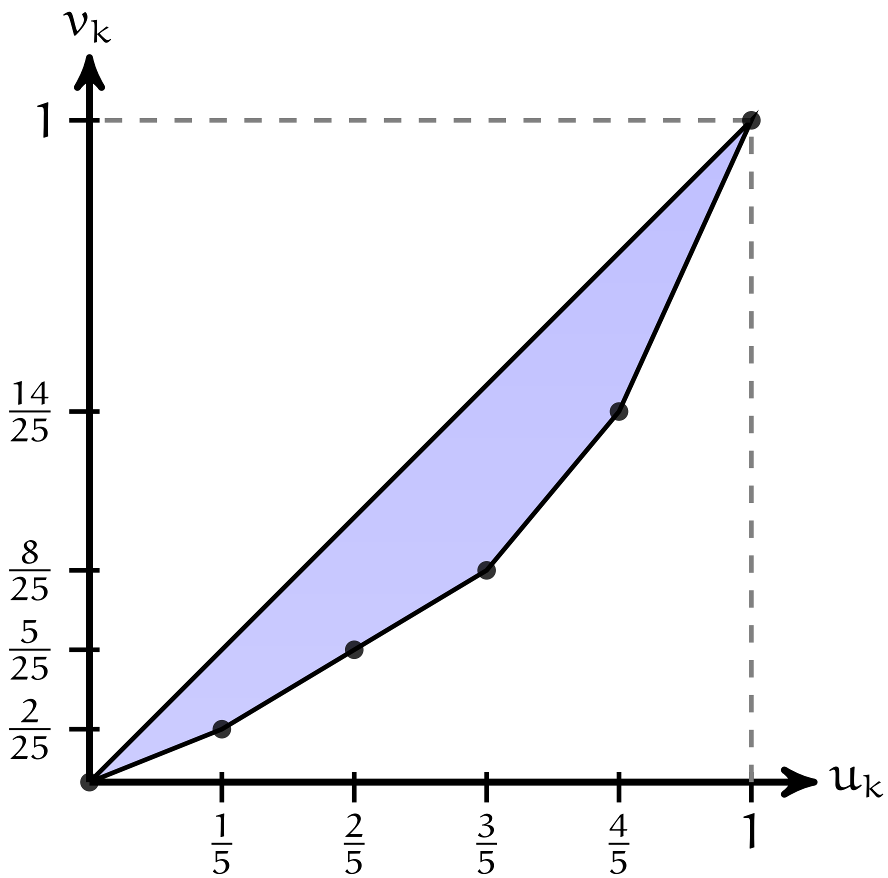
$$u_k = \text{Anteil der } k \text{ kleinsten an der Gesamtzahl der MM-Träger} = \frac{k}{n}$$

Lorenzkurve: Beispiel

Markt mit fünf Unternehmen; Umsätze: 6, 3, 11, 2, 3 (Mio. €)

$$\Rightarrow n = 5,\ \sum_{k=1}^{5} x_k = 25$$

k	1	2	3	4	5
x_k	2	3	3	6	11
p_k	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{11}{25}$
v_k	$\frac{2}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{14}{25}$	1
u_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1

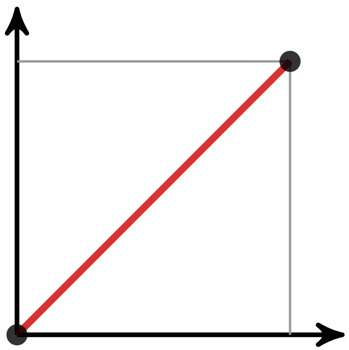


Knickstellen:

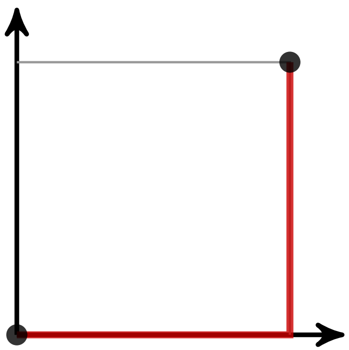
- Bei i-tem Merkmalsträger $\iff x_{i+1} > x_i$
- Empirische Verteilungsfunktion liefert Knickstellen:

a_j	2	3	6	11
$h(a_j)$	1	2	1	1
$f(a_j)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
$F(a_j)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1

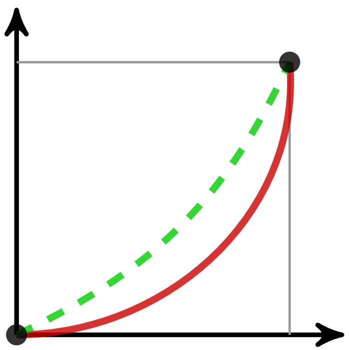
Vergleich von Lorenzkurven:



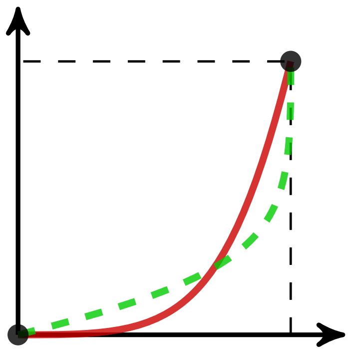
Gleichverteilung



extreme Konzentration



stärker konzentriert als

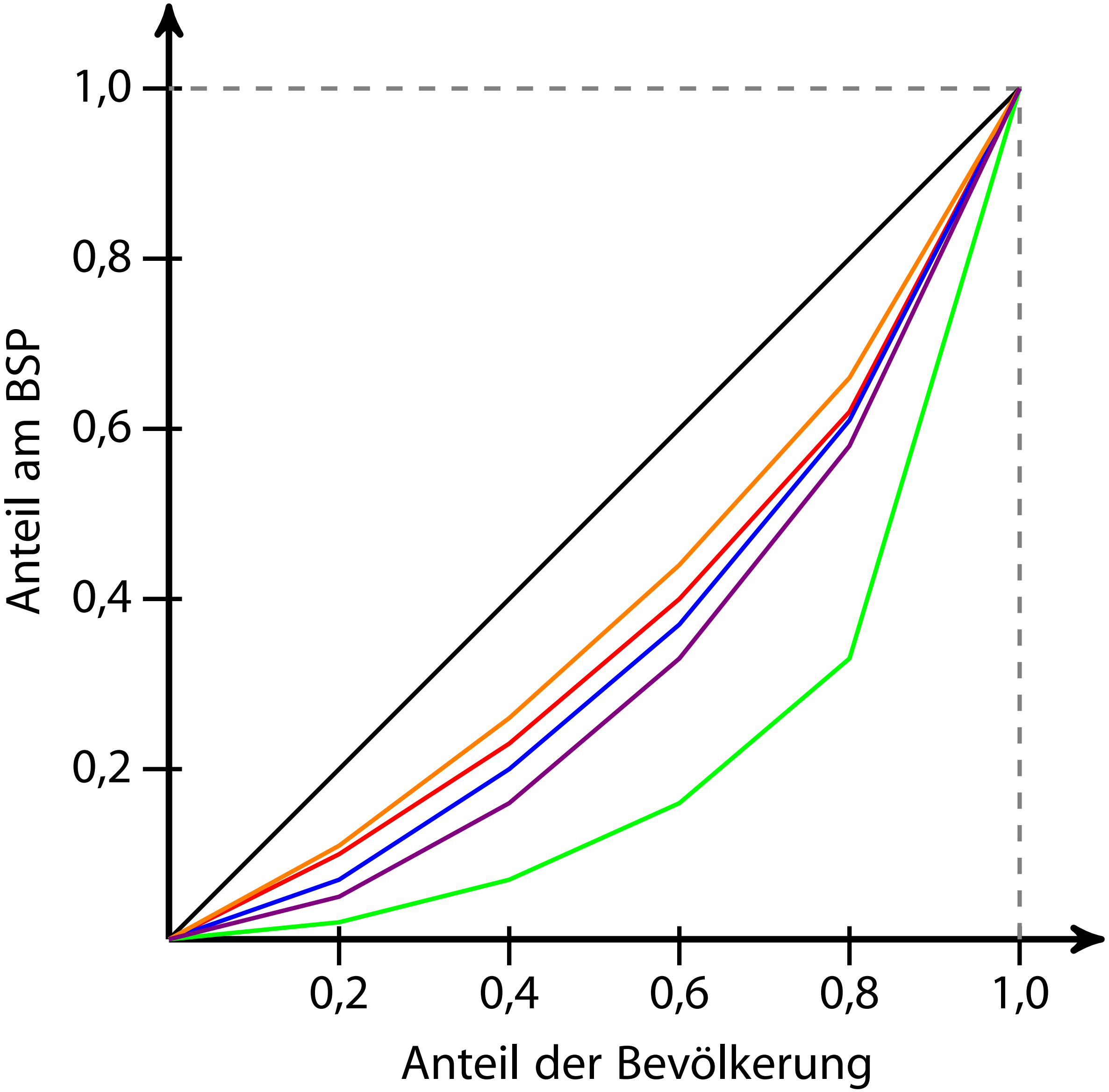


schwer vergleichbar

Lorenzkurve: Beispiel Bevölkerungsanteil gegen BSP

Bangladesch
Brasilien
Deutschland
Ungarn
USA

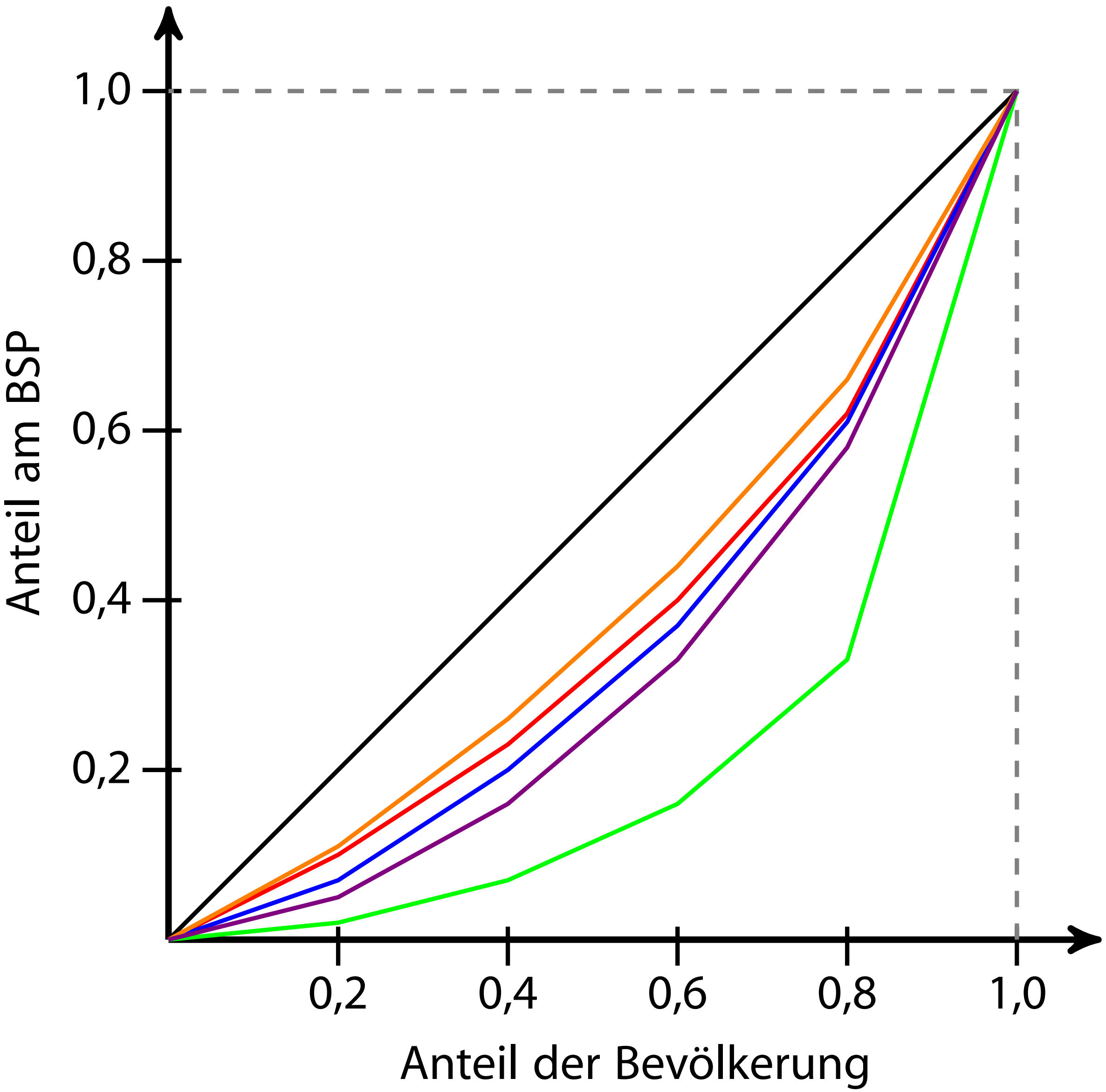
(Stand 2000)



Lorenzkurve: Beispiel Bevölkerungsanteil gegen BSP

Bangladesch
Brasilien
Deutschland
Ungarn
USA

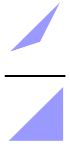
(Stand 2000)



Gini-Koeffizient

- Numerisches Maß der Konzentration: Gini-Koeffizient G

$$G = \frac{\text{Fläche zwischen } 45^\circ\text{-Linie und } L}{\text{Fläche unter } 45^\circ\text{-Linie}} =$$



- Aus den Daten:

$$G = \frac{2\sum\limits_{i=1}^{n} i\,x_i - (n+1)\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} = \frac{2\sum\limits_{i=1}^{n} i\,p_i - (n+1)}{n} \quad \text{wobei} \quad p_i = \frac{x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}$$

- Problem: $G_{\text{max}} = \frac{n-1}{n}$

➠ Normierter Gini-Koeffizient:

$$G_* = \frac{n}{n-1} \cdot G \in [0; 1]$$

Beispiel:

i	1	2	3	4	$\sum$
x_i	1	2	2	15	20
p_i	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{15}{20}$	1

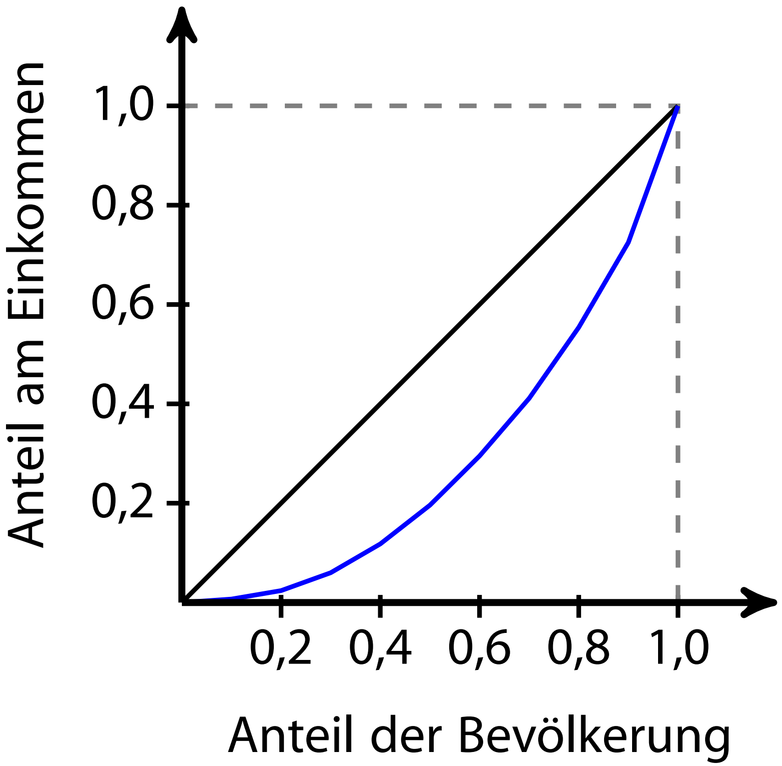
$$G = \frac{2 \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{20} + 2 \cdot \frac{2}{20} + 3 \cdot \frac{2}{20} + 4 \cdot \frac{15}{20}\right) - (4+1)}{4} = 0{,}525$$

Mit $G_{\text{max}} = \frac{4-1}{4} = 0{,}75$ folgt

$$G_* = \frac{4}{4-1} \cdot 0{,}525 = 0{,}7$$

Armutsbericht der Bundesregierung 2008

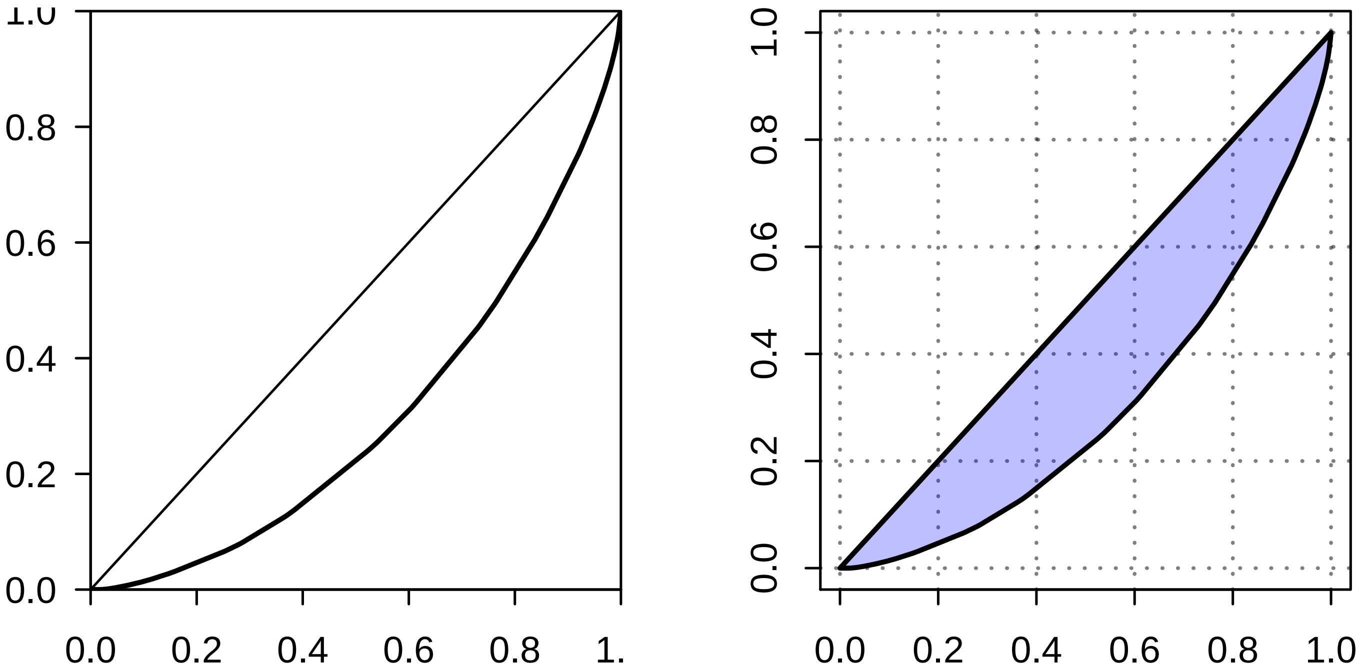
- Verteilung der Bruttoeinkommen in Preisen von 2000
- aus unselbständiger Arbeit der Arbeitnehmer/-innen insgesamt



	2002	2003	2004	2005
Arithmetisches Mittel	24.873	24.563	23.987	23.648
Median	21.857	21.531	20.438	20.089
Gini-Koeffizient	0,433	0,441	0,448	0,453

Lorenzkurve mit R

```r
require(ineq) # inequality Paket
Lorenz = Lc(na.exclude(MyData$AusgSchuhe))
   plot(Lorenz, xlab="", ylab="", main="") # Standard plot
   plot(c(0,1), c(0,1), type="n", # bisschen netter
       panel.first=grid(lwd=1.5, col=rgb(0,0,0,1/2)),
       xlab="", main="", ylab="")
   polygon(Lorenz$p, Lorenz$L, density=-1, col=rgb(0,0,1,1/4), lwd=2)
```




```r
Gini(na.exclude(AusgSchuhe)) # Gini-Koeffizient

## [1] 0.4069336
```

Weitere Konzentrationsmaße

- Konzentrationskoeffizient:

$$CR_g = \text{Anteil, der auf die } g \text{ größten entfällt} = \sum_{i=n-g+1}^{n} p_i = 1 - v_{n-g}$$

- Herfindahl-Index:

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \qquad (\in [\tfrac{1}{n}; 1])$$

Es gilt: $H = \frac{1}{n}(V^2 + 1)$ bzw. $V = \sqrt{n \cdot H - 1}$

- Exponentialindex:

$$E = \prod_{i=1}^{n} p_i^{p_i} \qquad (\in [\tfrac{1}{n}; 1]) \qquad \text{wobei} \qquad 0^0 = 1$$

- Im Beispiel mit $x = (1, 2, 2, 15)$:

$$CR_2 = \frac{17}{20} = 0{,}85$$

$$H = \left(\frac{1}{20}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{15}{20}\right)^2 = 0{,}59$$

$$E = \left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{1}{20}} \cdots \left(\frac{15}{20}\right)^{\frac{15}{20}} = 0{,}44$$

Zweidimensionale Urliste

Urliste vom Umfang n zu **zwei** Merkmalen X und Y:

$$(x_1, y_1),\quad (x_2, y_2),\quad \ldots,\quad (x_n, y_n)$$

Kontingenztabelle:

Sinnvoll bei wenigen Ausprägungen bzw. bei klassierten Daten.

	Ausprägungen von Y			
Ausprägungen von X	b_1	b_2	$\ldots$	b_l
a_1	h_{11}	h_{12}	$\ldots$	h_{1l}
a_2	h_{21}	h_{22}	$\ldots$	h_{2l}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
a_k	h_{k1}	h_{k2}	$\ldots$	h_{kl}

Kontingenztabelle

Unterscheide:

- **Gemeinsame Häufigkeiten:**

$$h_{ij} = h(a_i, b_j)$$

- **Randhäufigkeiten:**

$$h_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{l} h_{ij} \quad \text{und} \quad h_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{k} h_{ij}$$

- **Bedingte (relative) Häufigkeiten:**

$$f_1(a_i \mid b_j) = \frac{h_{ij}}{h_{\cdot j}} \quad \text{und} \quad f_2(b_j \mid a_i) = \frac{h_{ij}}{h_{i\cdot}}$$

Beispiel: 400 unfallbeteiligte Autoinsassen:

	leicht verletzt ($= b_1$)	schwer verletzt ($= b_2$)	tot ($= b_3$)	
angegurtet ($= a_1$)	264 ($= h_{11}$)	90 ($= h_{12}$)	6 ($= h_{13}$)	360 ($= h_{1\cdot}$)
nicht angegurtet ($= a_2$)	2 ($= h_{21}$)	34 ($= h_{22}$)	4 ($= h_{23}$)	40 ($= h_{2\cdot}$)
	266 ($= h_{\cdot 1}$)	124 ($= h_{\cdot 2}$)	10 ($= h_{\cdot 3}$)	400 ($= n$)

$f_2(b_3 \mid a_2) = \frac{4}{40} = 0{,}1$ (10 % der nicht angegurteten starben.)

$f_1(a_2 \mid b_3) = \frac{4}{10} = 0{,}4$ (40 % der Todesopfer waren nicht angegurtet.)

Beispiel:

i	1	2	3	4	5	$\sum$
x_i	2	4	3	9	7	25
y_i	4	3	6	7	8	28

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\bar{y} = \frac{28}{5} = 5{,}6$$

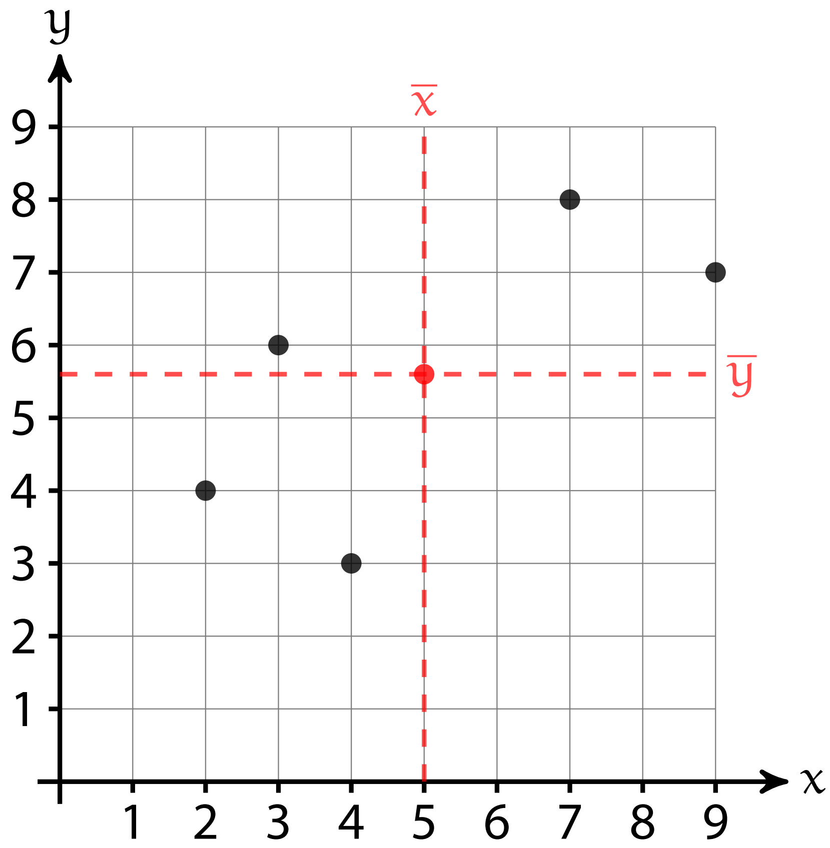
Streuungsdiagramm sinnvoll bei vielen verschiedenen Ausprägungen (z.B. stetige Merkmale)

➠ Alle (x_i, y_i) sowie $(\bar{x}, \bar{y})$ in Koordinatensystem eintragen.

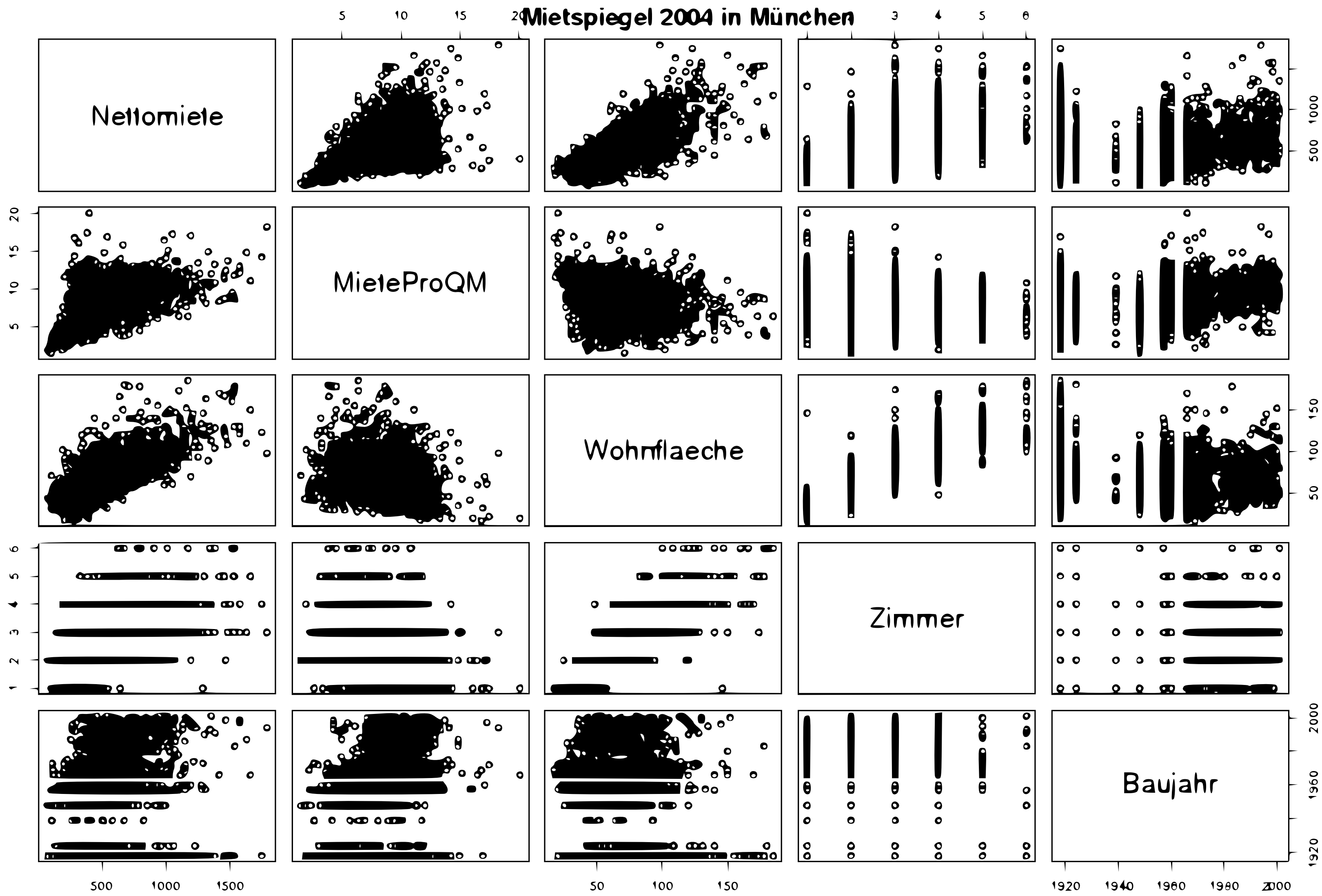
Beispiel:

i	1	2	3	4	5	$\sum$
x_i	2	4	3	9	7	25
y_i	4	3	6	7	8	28

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{25}{5} = 5$$
$$\bar{y} = \frac{28}{5} = 5{,}6$$



Beispiel Streuungsdiagramm

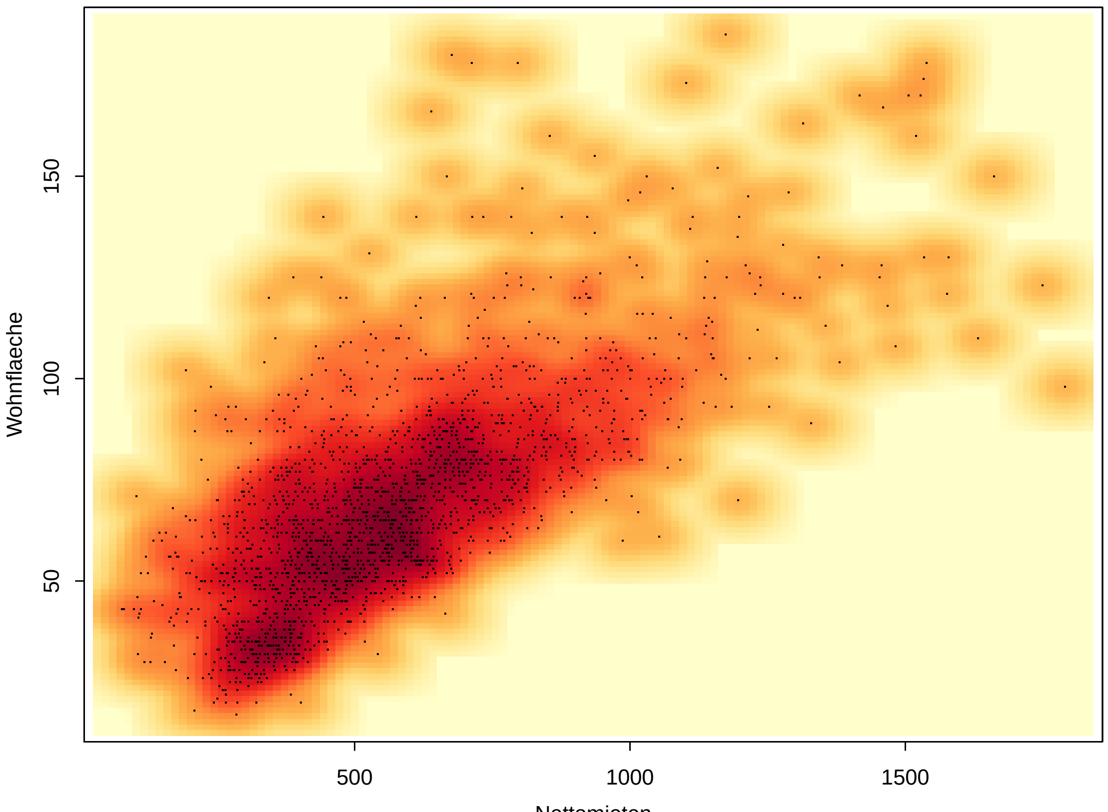


(Datenquelle: Fahrmeir u. a., (2009))

Beispiel Streuungsdiagramm

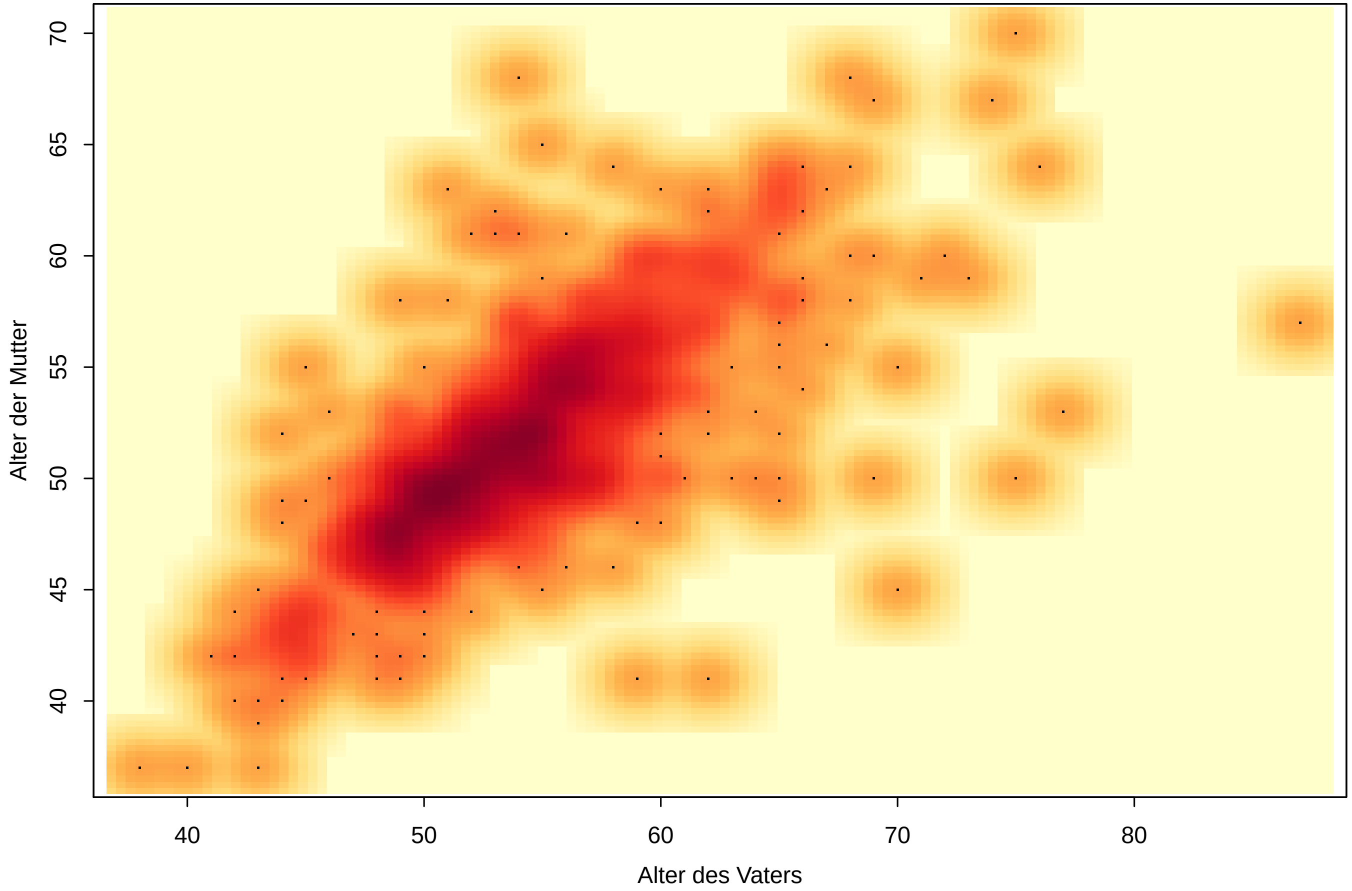
```r
if (!require("RColorBrewer")) {
install.packages("RColorBrewer")
library(RColorBrewer)
}
mieten <- read.table('http://goo.gl/jhpJW4', header=TRUE, sep='\t',
                     check.names=TRUE, fill=TRUE, na.strings=c('',''))
x <- cbind(Nettomieten=mieten$nm, Wohnflaeche=mieten$wfl)

library("geneplotter")  ## from BioConductor
smoothScatter(x, nrpoints=Inf,
              colramp=colorRampPalette(brewer.pal(9,"YlOrRd")),
              bandwidth=c(30,3))
```

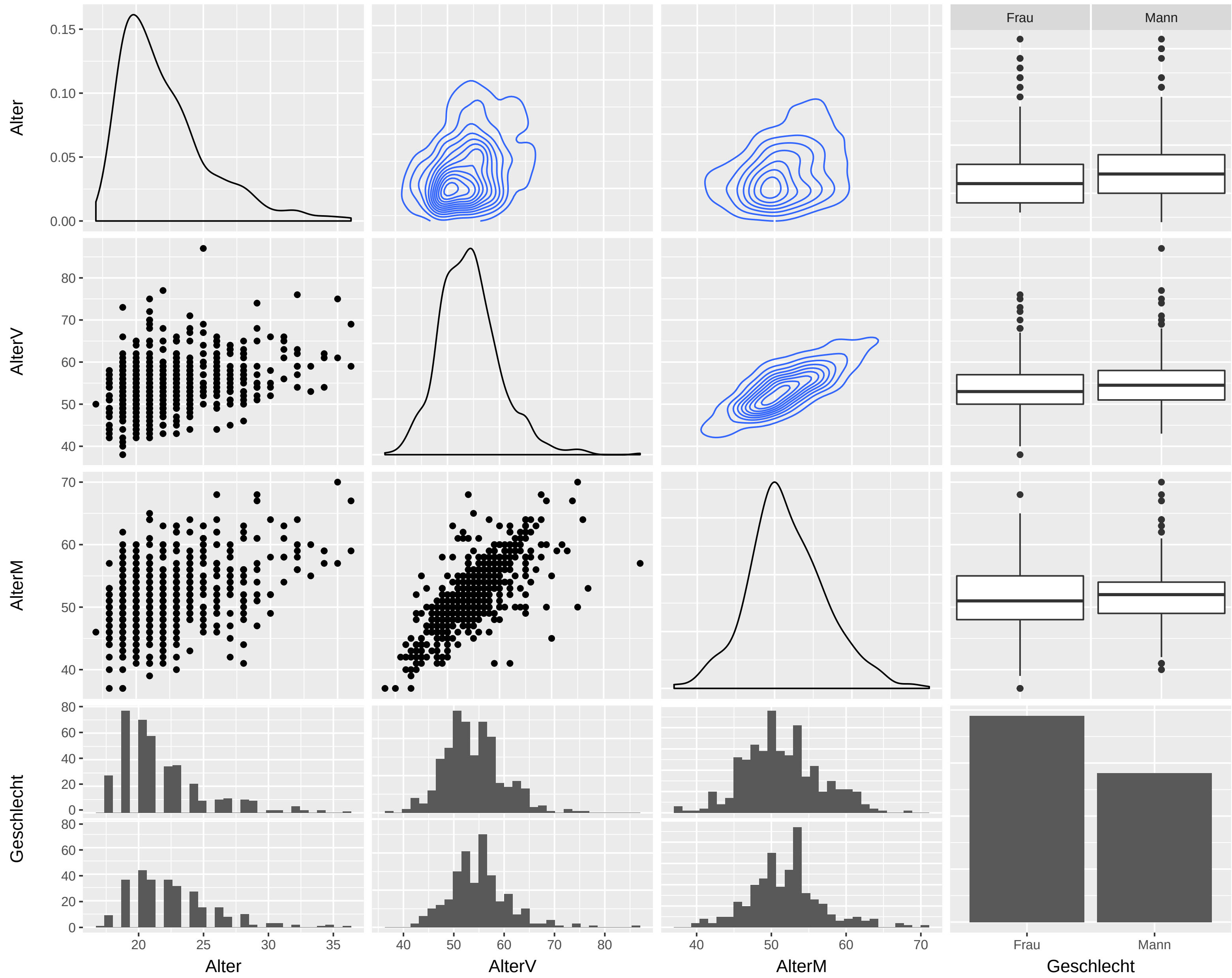


Beispiel Streuungsdiagramm

```
x = cbind("Alter des Vaters"=AlterV, "Alter der Mutter"=AlterM)
require("geneplotter") ## from BioConductor
smoothScatter(x, colramp=colorRampPalette(brewer.pal(9,"YlOrRd")) )
```



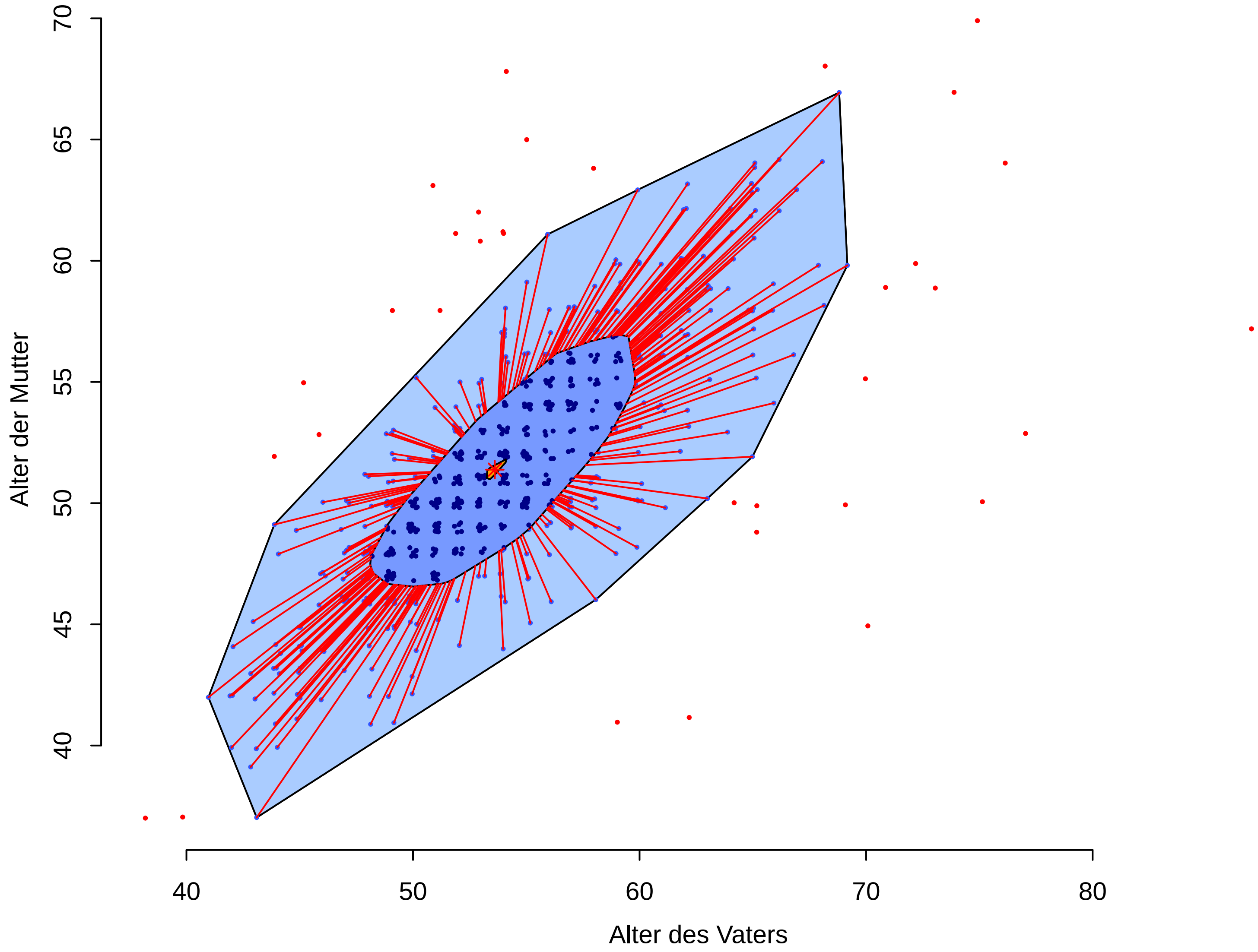
```r
require(GGally)
ggpairs(MyData[, c("Alter", "AlterV", "AlterM", "Geschlecht")],
         upper = list(continuous = "density", combo = "box"),
        color='Geschlecht', alpha=0.5)
```



Bagplot: Boxplot in 2 Dimensionen

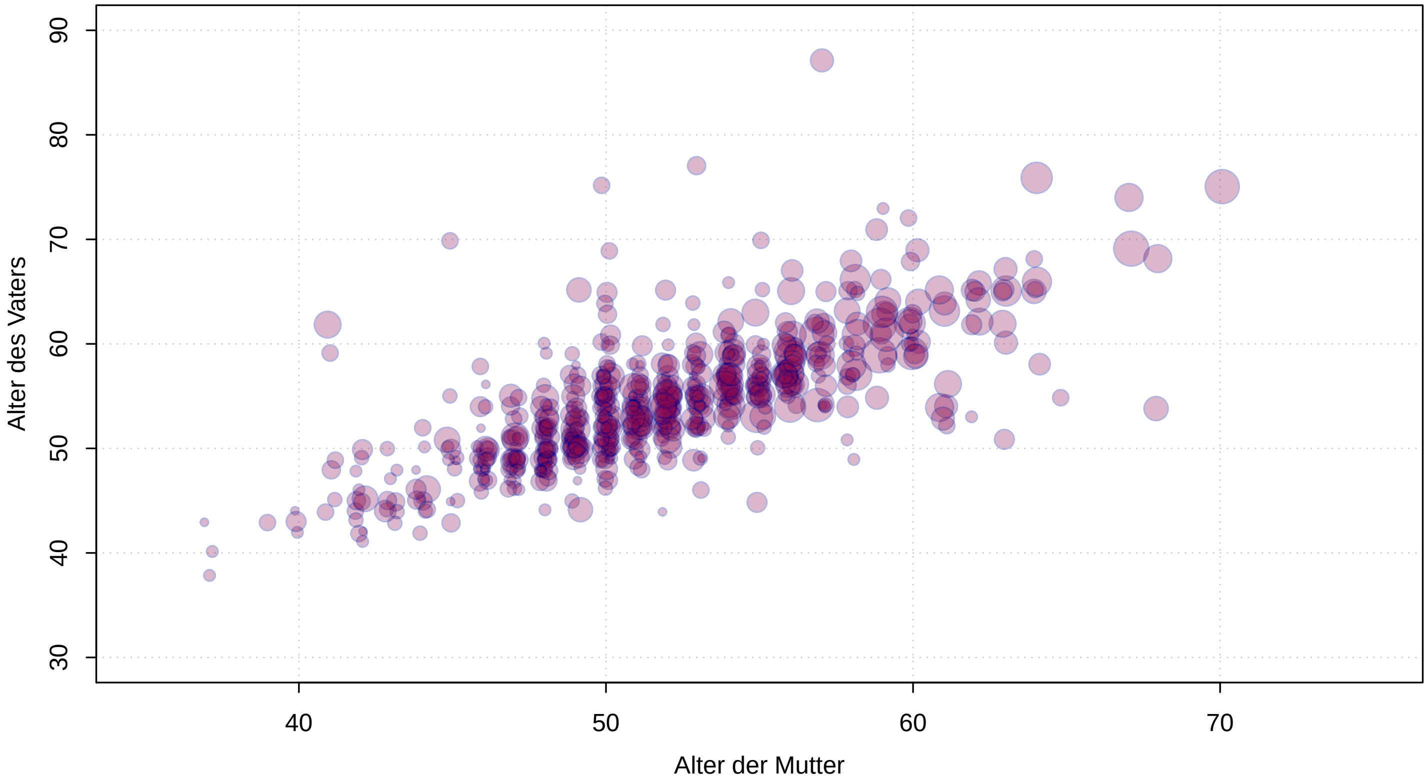
```
require(aplpack)
bagplot(jitter(AlterV), jitter(AlterM), xlab="Alter des Vaters", ylab="Alter der Mutter")

## [1] "Warning: NA elements have been exchanged by median values!!"
```



Bubbleplot: 3 metrische Variablen

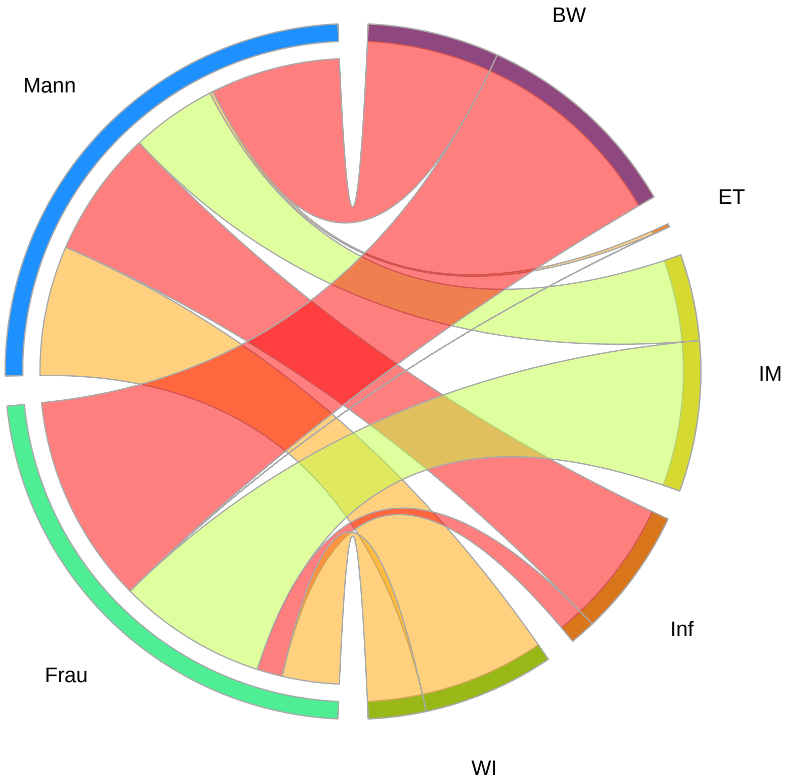

```
require(DescTools)
My.ohne.NA = na.exclude(MyData[,c("AlterM", "AlterV", "Alter")])
with(My.ohne.NA, {
  Alter.skaliert = (Alter-min(Alter))/(max(Alter)-min(Alter))
  PlotBubble(jitter(AlterM), jitter(AlterV), Alter.skaliert,
             col=SetAlpha("deeppink4",0.3),
             border=SetAlpha("darkblue",0.3),
             xlab="Alter der Mutter", ylab="Alter des Vaters",
             panel.first=grid(),
             main="")
})
```



Größe der Blasen: Alter zwischen 0 (Jüngster) und 1 (Ältester)

Circular Plots: Assoziationen


```r
require(DescTools)
with(MyData, {
PlotCirc(table(Studiengang, Geschlecht),
acol=c("dodgerblue","seagreen2","limegreen","olivedrab2","goldenrod2","tomato2"),
rcol=SetAlpha(c("red","orange","olivedrab1"), 0.5)
)})
```



Gute Idee: Noch Experimentell

Korrelationsrechnung

- Frage: Wie stark ist der Zusammenhang zwischen X und Y?
- Dazu: Korrelationskoeffizienten
- Verschiedene Varianten: Wahl abhängig vom Skalenniveau von X und Y:

	Skalierung von Y		
Skalierung von X	kardinal	ordinal	nominal
kardinal	Bravais-Pearson-Korrelations-koeffizient		
ordinal		Rangkorrelations-koeffizient von Spearman	
nominal			Kontingenz-koeffizient

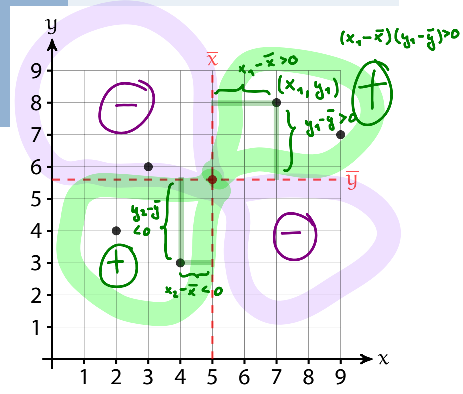
- Frage: Wie stark ist der Zusammenhang zwischen X und Y?
- Dazu: Korrelationskoeffizienten
- Verschiedene Varianten: Wahl abhängig vom Skalenniveau von X und Y:

	Skalierung von Y		
Skalierung von X	kardinal	ordinal	nominal
kardinal	Bravais-Pearson-Korrelations-koeffizient		
ordinal		Rangkorrelations-koeffizient von Spearman	
nominal			Kontingenz-koeffizient

Korrelationsrechnung

- Frage: Wie stark ist der Zusammenhang zwischen X und Y?
- Dazu: Korrelationskoeffizienten
- Verschiedene Varianten: Wahl abhängig vom Skalenniveau von X und Y:

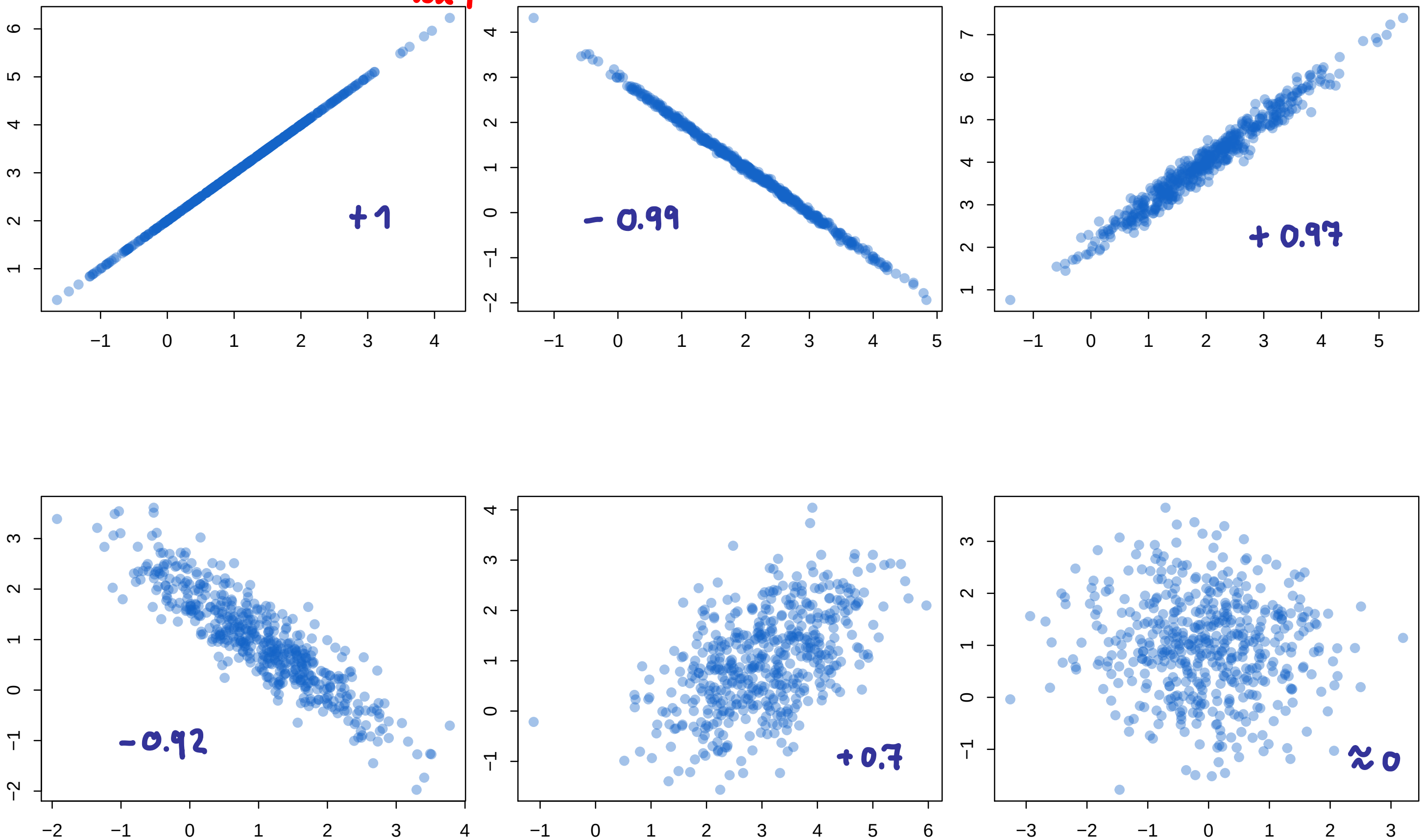
	Skalierung von Y		
Skalierung von X	kardinal	ordinal	nominal
kardinal	Bravais-Pearson-Korrelationskoeffizient		
ordinal		Rangkorrelationskoeffizient von Spearman	
nominal			Kontingenzkoeffizient



Bravais-Pearson-Korrelationskoeffizient

Voraussetzung: X, Y kardinalskaliert

$$r = \frac{\overbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}^{\text{Kovarianz von } X,Y}}{\sqrt{\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}_{\text{Standardabweichung von } X}\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}_{\text{Std. abw. von } Y}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\bar{x}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2 - n\bar{y}^2}} \in [-1;+1]$$



Beispiel:

x	y
1	0
-1	0
5	100
2	12

ges: Bravais-Pearson-Korrel. Koeffizient r

mit TR

- Mode → STAT → A+Bx
- Daten eingeben
- AC
- Shift → STAT → REG → r (0.9048)

---

x: Inhalt des Geldbeutels

Y: Das ist für mich: sehr wenig A; eher wenig B; mittel C; ehe viel D; sehr viel E

Rang(x) (= R_x)	x	Y	Rang(Y)	R_Y
1	0	A	1	1,5
6	60.29	C	5	5.5
5	56.81	D	7	7.5
4	23.19	B	3	3.5
7	62.99	C	6	5.5
8	70.62	D	8	7.5
3	11.98	B	4	3.5
2	5.00	A	2	1,5

Rangkorr. von Spearman entspricht Bravais-Pearson-korr. Koeff. von R_x, R_y

Mittelwerte der mehrfach belegten Ränge

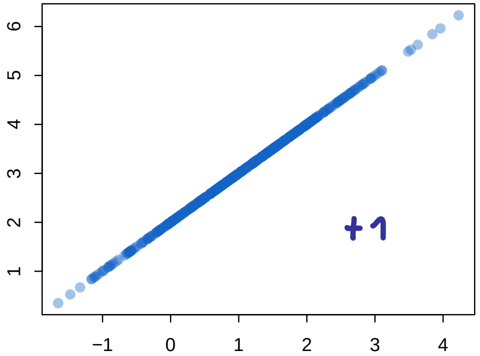
$r_{sp} = 0.8783101$

Korrelationskoeffizient von Bravais und Pearson

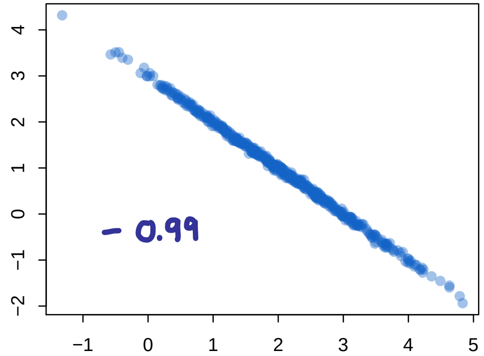
Bravais-Pearson-Korrelationskoeffizient

Voraussetzung: X, Y kardinalskaliert

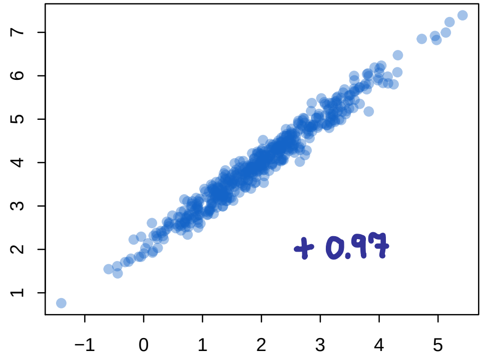
$$r = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2}} \in [-1;+1]$$



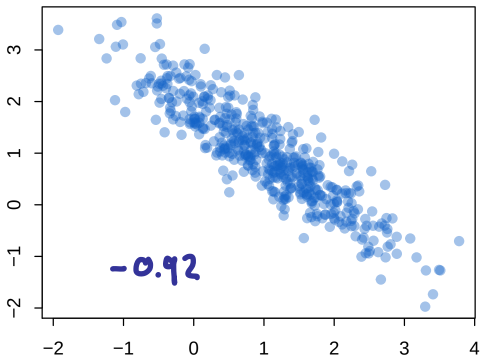
$r = 1$



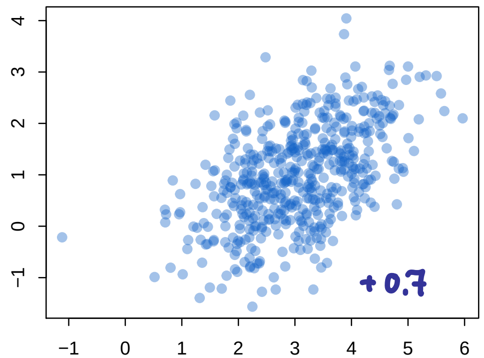
$r = -0{,}999$



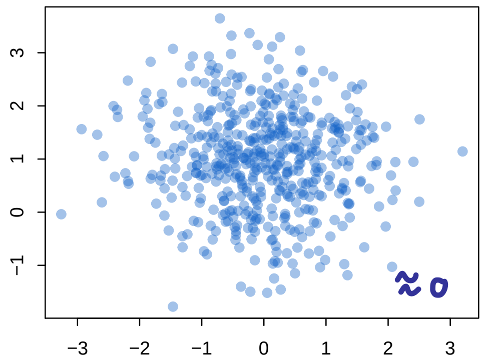
$r = 0{,}982$



$r = -0{,}897$



$r = 0{,}514$



$r = -0{,}083$

Bravais-Pearson-Korrelationskoeffizient

Im Beispiel:

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	2	4	4	16	8
2	4	3	16	9	12
3	3	6	9	36	18
4	9	7	81	49	63
5	7	8	49	64	56
$\sum$	25	28	159	174	157

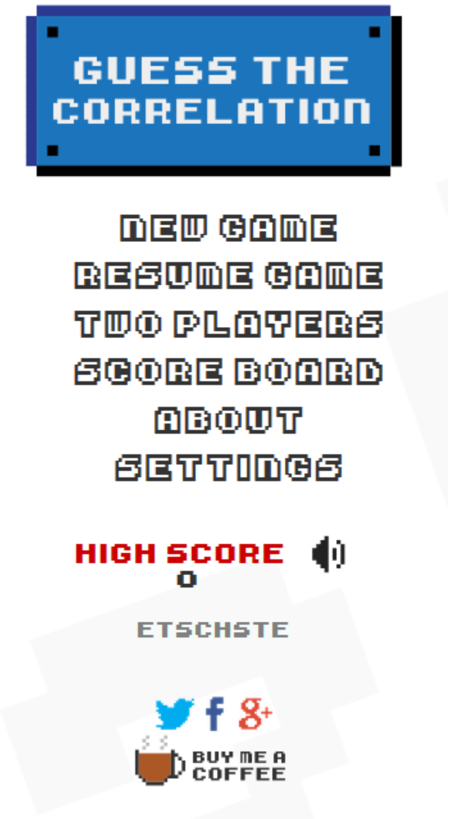
$$\Rightarrow \quad \bar{x} = 25/5 = 5 \qquad \bar{y} = 28/5 = 5{,}6$$

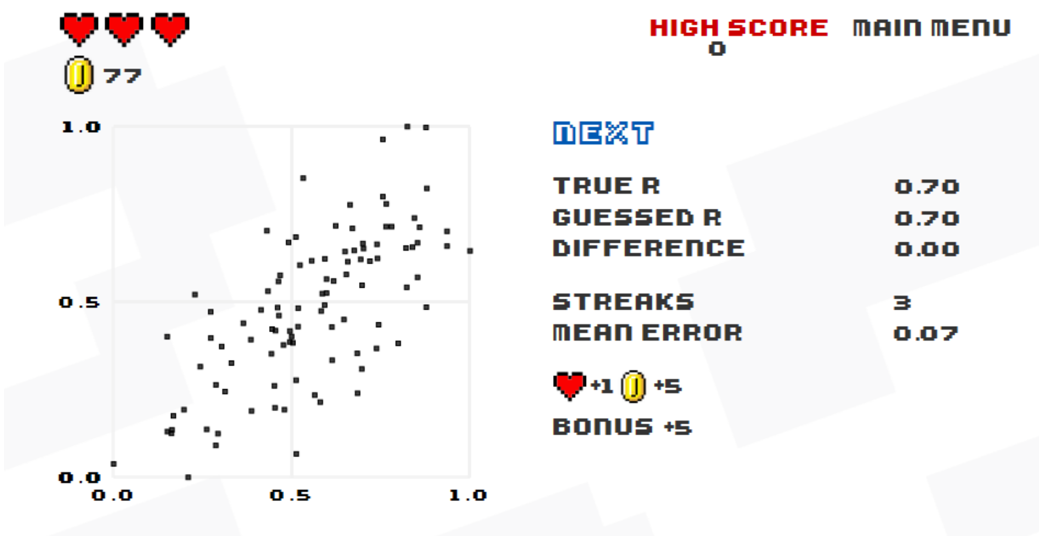
$$r = \frac{157 - 5 \cdot 5 \cdot 5{,}6}{\sqrt{159 - 5 \cdot 5^2}\sqrt{174 - 5 \cdot 5{,}6^2}} = 0{,}703$$

(deutliche positive Korrelation)

Guess The Correlation

guessthecorrelation.com





Go for the Highscore!

Rangkorrelationskoeffizient von Spearman

- Voraussetzungen: X, Y (mindestens) ordinalskaliert, Ränge eindeutig (keine Doppelbelegung von Rängen)
- Vorgehensweise:
  1. Rangnummern R_i (X) bzw. R'_i (Y) mit $R_i^{(\prime)} = 1$ bei größtem Wert usw.
  2. Berechne

$$r_{SP} = 1 - \frac{6 \sum\limits_{i=1}^{n} (R_i - R'_i)^2}{(n-1)\,n\,(n+1)} \in [-1; +1]$$

- Hinweise:
  - $r_{SP} = +1$ wird erreicht bei $R_i = R'_i \quad \forall i = 1, \ldots, n$
  - $r_{SP} = -1$ wird erreicht bei $R_i = n + 1 - R'_i \quad \forall i = 1, \ldots, n$
- Falls Ränge nicht eindeutig: Bindungen, dann Berechnung von r_{SP} über Ränge und Formel des Korr.-Koeff. von Bravais-Pearson

Rangkorrelationskoeffizient von Spearman

Im Beispiel:

x_i	R_i	y_i	R'_i
2	5	4	4
4	3	3	5
3	4	6	3
9	1	7	2
7	2	8	1

$$r_{SP} = 1 - \frac{6 \cdot [(5-4)^2 + (3-5)^2 + (4-3)^2 + (1-2)^2 + (2-1)^2]}{(5-1) \cdot 5 \cdot (5+1)} = 0{,}6$$

Kontingenzkoeffizient

- Gegeben: Kontingenztabelle mit k Zeilen und l Spalten (vgl. hier)
- Vorgehensweise:
  1. Ergänze Randhäufigkeiten

$$h_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{l} h_{ij} \qquad \text{und} \qquad h_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{k} h_{ij}$$

  2. Berechne theoretische Häufigkeiten

$$\tilde{h}_{ij} = \frac{h_{i\cdot} \cdot h_{\cdot j}}{n}$$

  3. Berechne

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{(h_{ij} - \tilde{h}_{ij})^2}{\tilde{h}_{ij}}$$

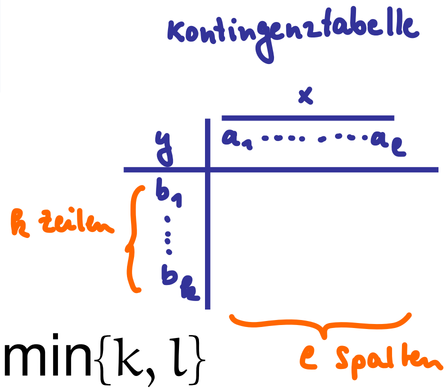
χ^2 hängt von n ab! $(h_{ij} \mapsto 2 \cdot h_{ij} \Rightarrow \chi^2 \mapsto 2 \cdot \chi^2)$

④ Kontingenzkoeffizient:

$$K = \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}} \quad \in [0; K_{max}]$$

wobei

$$K_{max} = \sqrt{\frac{M-1}{M}} \quad \text{mit} \quad M = \min\{k, l\}$$



⑤ Normierter Kontingenzkoeffizient:

$$K_* = \frac{K}{K_{max}} \quad \in [0; 1]$$

$K_* = +1 \iff$
bei Kenntnis von x_i kann y_i erschlossen werden u.u.

Beispiel

X : Staatsangehörigkeit (d,a)
Y : Geschlecht (m,w)

h_{ij}	m	w	$h_{i\cdot}$
d	30	30	60
a	10	30	40
$h_{\cdot j}$	40	60	100

$\Rightarrow$

$\tilde{h}_{ij}$	m	w
d	24	36
a	16	24

wobei $\tilde{h}_{11} = \frac{60 \cdot 40}{100} = 24$ usw.

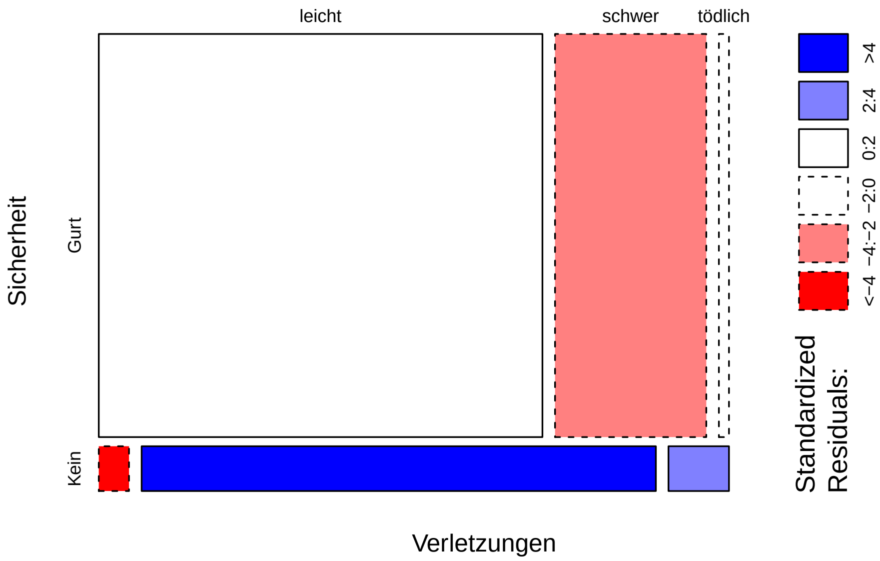
$$\chi^2 = \frac{(30-24)^2}{24} + \frac{(30-36)^2}{36} + \frac{(10-16)^2}{16} + \frac{(30-24)^2}{24} = 6{,}25$$

$$K = \sqrt{\frac{6{,}25}{100+6{,}25}} = 0{,}2425; \qquad M = \min\{2{,}2\} = 2; \qquad K_{\max} = \sqrt{\frac{2-1}{2}} = 0{,}7071$$

$$K_* = \frac{0{,}2425}{0{,}7071} = 0{,}3430$$

Beispiel Autounfälle

	Verletzung			
	leicht	schwer	tödlich	
angegurtet	264	90	6	360
nicht angegurtet	2	34	4	40
	266	124	10	400



Mosaikplot Autounfälle

	Verletzung			
	leicht	schwer	tödlich	
angegurtet	264 239.4	90 111.6	6 9	360
nicht angegurtet	2 26.6	34 12.4	4 1	40
	266	124	10	400

„chi"- Quadrat

$$\chi^2 = \frac{(264-239.4)^2}{239.4} + \frac{(90-111.6)^2}{111.6} + \frac{(6-9)^2}{9}$$

$$+ \frac{(2-26.6)^2}{26.6} + \frac{(34-12.4)^2}{12.4} + \frac{(4-1)^2}{1}$$

$$K = \sqrt{\frac{\chi^2}{n+\chi^2}}$$

hier: 400

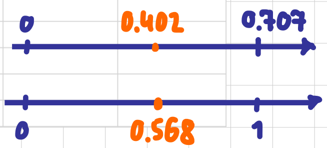
$$K_{max} = \sqrt{\frac{M-1}{M}} \quad \text{mit } M = \min\{\underbrace{\text{Anz. Zeilen}}_{\text{hier } k=2}^{k} ; \underbrace{\text{Anz. Spalten}}_{\ell=3}^{\ell}\}$$

$= 2$

(Gurt ; kein Gurt)

$$\Rightarrow K_{max} = \sqrt{\frac{2-1}{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \approx 0.71$$

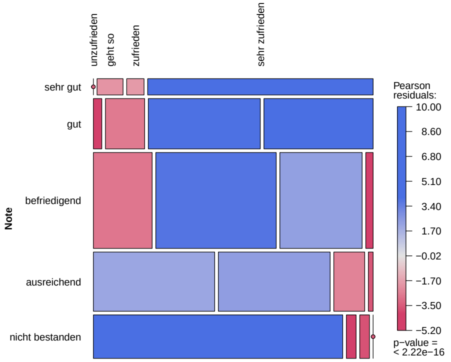
	Verletzung			
	leicht	schwer	tot	
Gurt	264	90	6	360
kein Gurt	2	34	4	40
	266	124	10	400
	239,4	111,6	9	
	26,6	12,4	1	
	2,528	4,181	1,000	
	22,750	37,626	9,000	
chi-Quadrat	77,085			
K	0,402			
Kmax	0,707			
K*	0,568			



Beispiel in Excel

Klick

```
Data.complete = na.omit(MyData[,c("MatheZufr", "NoteMathe")])
Noten.complete =
  ordered(cut(Data.complete$NoteMathe, breaks=c(0,1.5,2.5,3.5,4.1,5.0)),
          labels=c("sehr gut", "gut", "befriedigend", "ausreichend", "nicht bestanden"))
tab = table("Note"=Noten.complete, "Zufrieden mit Leistung"=Data.complete$MatheZufr)
require(vcd)
mosaic(tab, shade = TRUE, gp_args = list(interpolate = function(x) pmin(x/4, 1)), labeling_args =
   list(rot_labels = c(90,0,0,0), just_labels = c("left", "left", "right", "right"),
        offset_varnames = c(left = 5, top=5.5), offset_labels = c(right = 3)),
 margins = c(right = 1, bottom = 3, left=6, top=5))
```



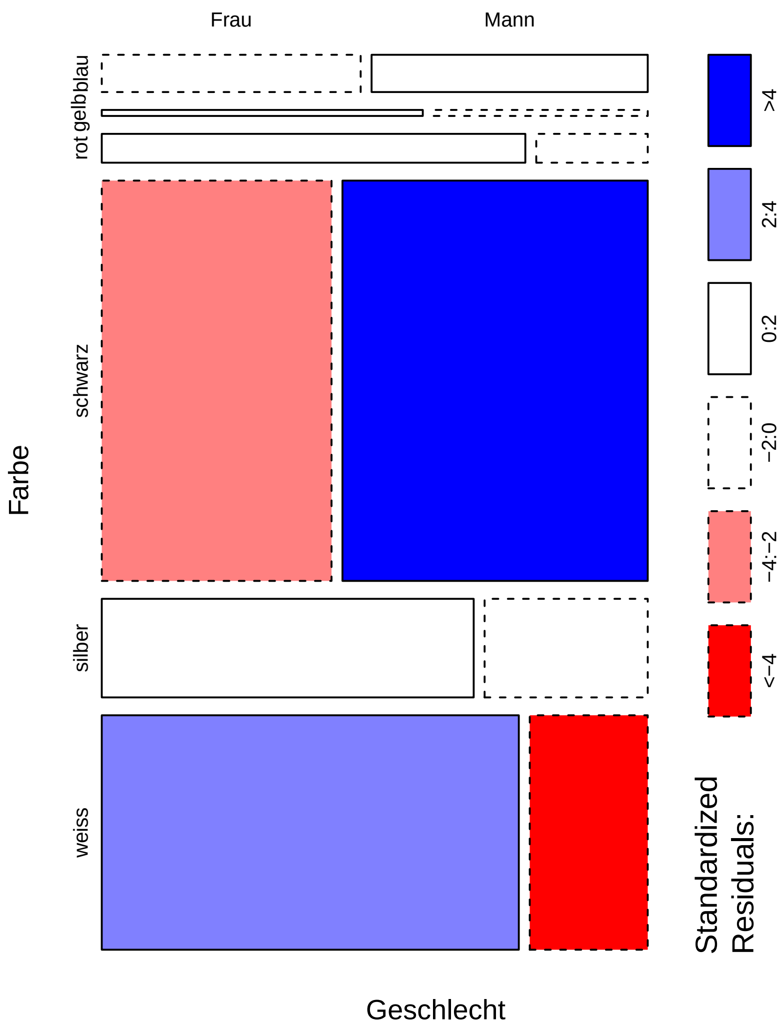
„Note in Matheklausur“ gegen „Zufrieden mit Leistung“

Mosaicplot Geschlecht, Wunschfarbe für Smartphone

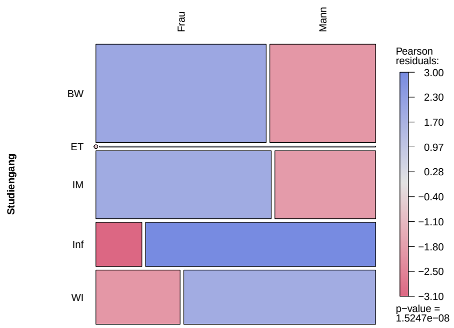
```
tab = table(Farbe, Geschlecht)
tab

##            Geschlecht
## Farbe       Frau Mann
##   blau        15   16
##   gelb         3    2
##   rot         19    5
##   schwarz    143  190
##   silber      57   25
##   weiss      152   43
```

```
mosaicplot(t(tab), shade = TRUE,
           sort=2:1, main="")
```



```
require(vcd)
Data.complete = na.omit(MyData[,c("Geschlecht", "Studiengang")])
with(Data.complete, {
  tab = table("Studiengang"=Studiengang, "Geschlecht"=Geschlecht)
mosaic(tab, shade = TRUE, gp_args = list(interpolate = function(x) pmin(x/4, 1)), labeling_args =
   list(rot_labels = c(90,0,0,0), just_labels = c("left", "left", "right", "right"),
         offset_varnames = c(left = 5, top=5.5), offset_labels = c(right = 3)),
 margins = c(right = 1, bottom = 3, left=6, top=5))
})
```



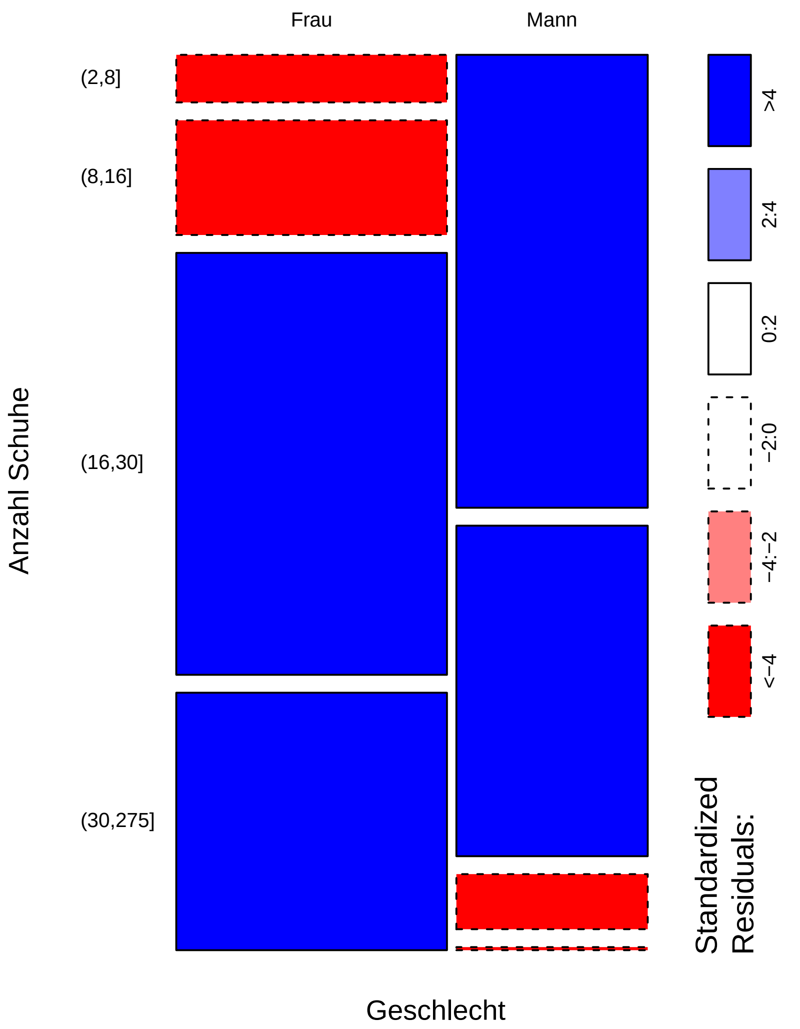
„Note in Matheklausur“ gegen „Zufrieden mit Leistung“

Mosaicplot Geschlecht, Anzahl Schuhe

```
tab = table(
  "Anzahl Schuhe" =
  cut(AnzSchuhe,
      breaks =
        quantile(
          AnzSchuhe,
          probs = (0:4)/4
        )
  ),
  Geschlecht)
tab

##               Geschlecht
## Anzahl Schuhe Frau Mann
##       (2,8]     22  148
##       (8,16]    53  108
##       (16,30]  195   18
##       (30,275] 119    1
```

```
mosaicplot(t(tab), shade = TRUE,
           main="", las=1)
```



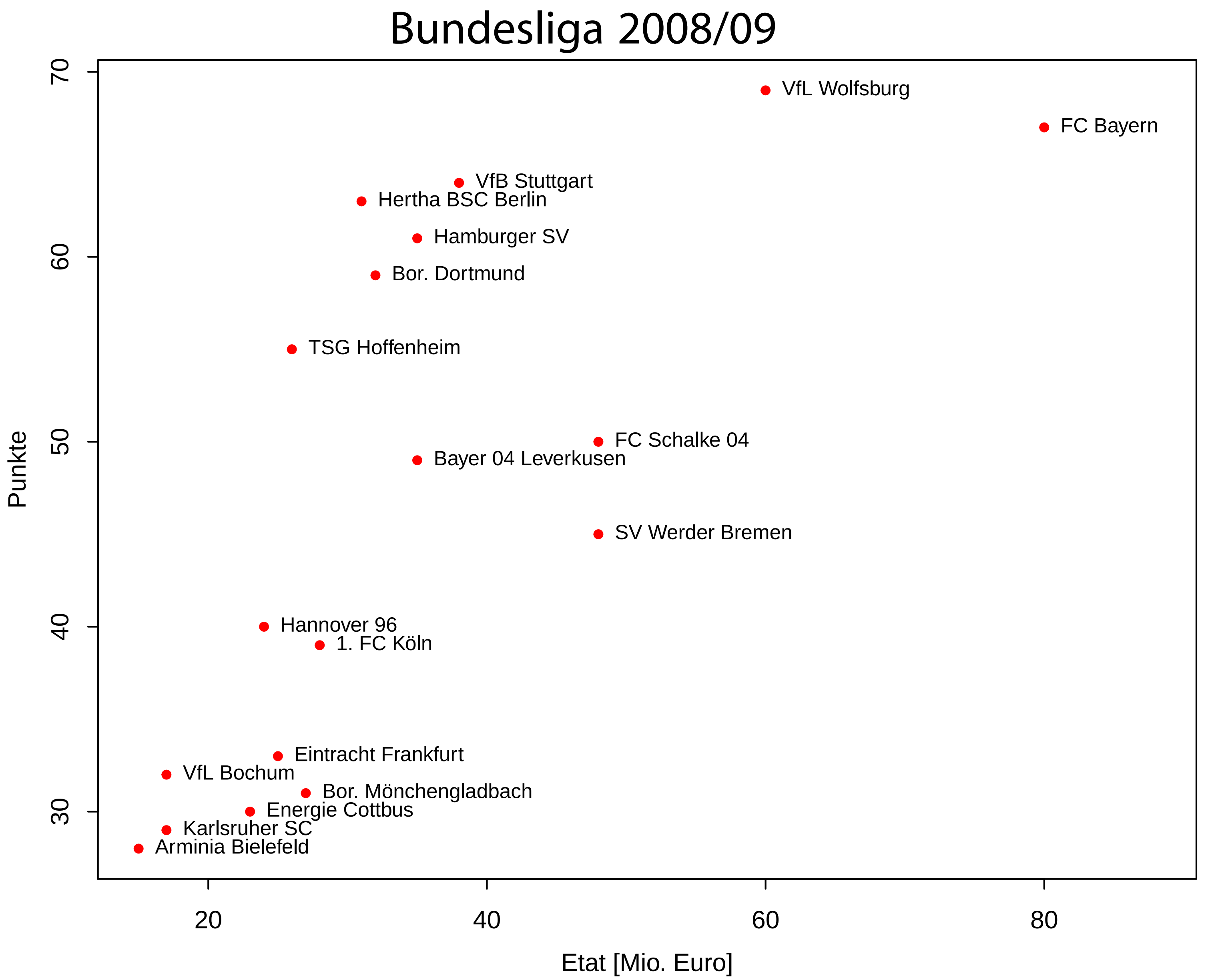
Bundesliga 2008/2009

- Gegeben: Daten zu den 18 Vereinen der ersten Bundesliga in der Saison 2008/09
- Merkmale: **Vereinssetat** für Saison (nur direkte Gehälter und Spielergehälter)
- und **Ergebnispunkte** in Tabelle am Ende der Saison

	Etat	Punkte
FC Bayern	80	67
VfL Wolfsburg	60	69
SV Werder Bremen	48	45
FC Schalke 04	48	50
VfB Stuttgart	38	64
Hamburger SV	35	61
Bayer 04 Leverkusen	35	49
Bor. Dortmund	32	59
Hertha BSC Berlin	31	63
1. FC Köln	28	39
Bor. Mönchengladbach	27	31
TSG Hoffenheim	26	55
Eintracht Frankfurt	25	33
Hannover 96	24	40
Energie Cottbus	23	30
VfL Bochum	17	32
Karlsruher SC	17	29
Arminia Bielefeld	15	28

(Quelle: Welt)

Darstellung der Daten in Streuplot



Trend als lineares Modell

- Kann man die **Tabellenpunkte** näherungsweise über einfache Funktion **in Abhängigkeit des Vereinsetats** darstellen?
- Allgemein: Darstellung einer Variablen Y als Funktion von X:

$$y = f(x)$$

- Dabei:
  - X heißt Regressor bzw. unabhängige Variable
  - Y heißt Regressand bzw. abhängige Variable
- Wichtiger (und einfachster) Spezialfall: f beschreibt einen linearen Trend:

$$y = a + b\,x$$

- Dabei anhand der Daten zu schätzen: a (Achsenabschnitt) und b (Steigung)
- Schätzung von a und b: Lineare Regression