Wirtschaftsmathematik

Einführung in einige Teilbereiche der Wirtschaftsmathematik

Wintersemester 2016

HSA Wing Sessionlist WS 2016				
			52	
Datum	N.	Zeit	UE	Themen
Dienstag, 20. September 2016	1	18.00-21.15	4	Einführung, Zinsen, Renten
Dienstag, 27. September 2016	2	18.00-21.15	4	Tilgung, Festverz. Wertpapiere
Dienstag, 4. Oktober 2016	3	18.00-21.15	4	Lineare Optimierung: Einführung, Lösungsmethoden
Samstag, 8. Oktober 2016	4	08.00-11.45	4	Lineare Optimierung: Standardmaximumproblem, Simplex
Dienstag, 11. Oktober 2016	5	18.00-21.15	4	Gewöhnliche Differentialgleichungen
Samstag, 15. Oktober 2016	6	08.00-11.45	4	Analytische Lösung linearer DGLs
Dienstag, 18. Oktober 2016	7	18.00-21.15	4	Einführung, univ. Statistik, Konzentration
Samstag, 22. Oktober 2016	8	11.45-15.00	4	Korrelation, Regression, Preisindizes
Dienstag, 25. Oktober 2016	9	18.00-21.15	4	Kombinatorik, Wahrscheinlichkeiten; Binomial, Hypergeo, Poisson
Samstag, 29. Oktober 2016	10	08.00-11.15	4	Zufallsvariablen, Lage- und Streuung, Stetige ZV, Gleich-vtlg.
Dienstag, 15. November 2016	11	18.00-21.15	4	Normalvtlg., Schätzen und Eigenschaften von Punktschätzern
Samstag, 26. November 2016	12	08.00-11.15	4	Konfidenzintervalle, t-Test
Dienstag, 29. November 2016	13	18.00-21.15	4	Puffer, Wiederholung Besprechung Probeklausur
Samstag, 3. Dezember 2016		09.30-11.00		Klausur (regulärer Termin 90 Min., mit Aufsicht)

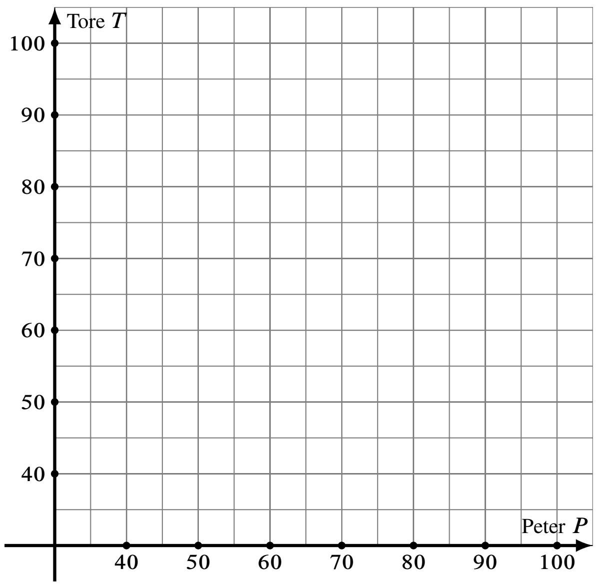
Prof. Dr. Stefan Etschberger
HSA

Aufgabe 4 **17 Punkte**

Boris interessiert sich eigentlich nicht für Fußball. Er hat aber neulich Barbara kennengelernt, die leidenschaftlich gerne Fußball kuckt. Um bei Ihr nicht als total ahnungslos dazustehen, möchte Boris das Wissen seines WG-Kumpels Peter nutzen, der sich als Fachmann bezeichnet. Peter hatte schon in der Vergangenheit immer Tipps über die Anzahl der Tore abgegeben, die ein bestimmter Verein in der kommenden Saison insgesamt erzielen wird.

Boris findet eine Tabelle zur vergangenen Saison mit Peters damaligen Prognosen und den dann tatsächlich gefallenen Toren von 10 Vereinen. Er liest:

Verein	Peters Prognose	tatsächliche Tore
1	40	81
2	76	55
3	94	36
4	46	82
5	33	87
6	78	48
7	65	63
8	86	55
9	97	39
10	33	99



a) Tragen Sie die beiden Merkmale Peters Prognose P und die tatsächlich gefallenen Tore T als Streuplot in das nebenstehende Koordinatensystem ein.

b) Berechnen Sie einen geeigneten Korrelationskoeffizienten der beiden Variablen.

c) Die Prognosen von Peter scheinen ziemlich schlecht zu sein. Warum kann man basierend auf diesen Daten trotzdem Peters Prognosen vermutlich als Ausgangspunkt einer neuen, eigenen Prognose nutzen?

d) Boris möchte das „Wissen“ von Peter ausnutzen und berechnet zu diesem Zweck ein lineares Regressionsmodell der Toranzahl in Abhängigkeit von Peters Prognosewerten. Berechnen Sie auch dieses Modell und geben Sie die Modellgleichung an.

e) Angenommen Peter prognostiziert für einen Verein in der kommenden Saison 45 Tore: Wieviel Tore würde Boris (basierend auf dem Regressionsmodell) schätzen?

Lösungshinweis:

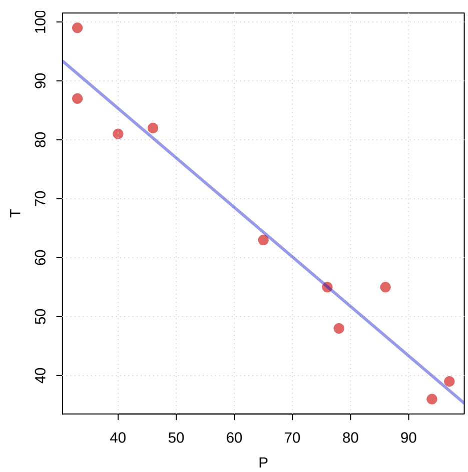
a) Streuplot: siehe rechts

b) Bravais-Pearson: $r = -0{,}9736118$

c) Auch die negative Korrelation kann man ausnutzen, vorausgesetzt, sie setzt sich in der Zukunft so fort...

d) $T(P) = 118{,}945076 - 0{,}8402018 \cdot P$

e) $T(45) = 118{,}945076 - 0{,}8402018 \cdot 45 \approx 81{,}1359955$



Wirtschaftsmathematik: Table of Contents

6 Wahrscheinlichkeitstheorie

- Kombinatorik
- Zufall und Wahrscheinlichkeit
- Zufallsvariablen und Verteilungen
- Verteilungsparameter

Kombinatorik: Anzahl von Kombinationen bei Auswahl

2-mal Würfeln, das heißt Auswahl von $k = 2$ aus $n = 6$ Zahlen.

→

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

- mit WH, mit RF: alle Möglichkeiten, $6^2 = 36$
- ohne WH, mit RF: Diagonale entfällt, $36 - 6 = 30 = 6 \cdot 5 = \dfrac{6!}{(6-2)!}$
- ohne WH, ohne RF: Hälfte des letzten Ergebnisses: $\frac{30}{2} = 15 = \frac{6!}{4!2!} = \binom{6}{2}$
- mit WH, ohne RF: Letztes Ergebnis plus Diagonale, $15 + 6 = 21 = \binom{7}{2}$

Auswahl von k aus n Dingen		
	mit Wiederholung	ohne Wiederholung
mit Reihenfolge	n^k	$\dfrac{n!}{(n-k)!}$
ohne Reihenfolge	$\dbinom{n+k-1}{k}$	$\dbinom{n}{k}$

Kombinatorik

Permutation ≙ Vertauschung von n Objekten

Beispiel: Anzahl Sitzkombinationen von 4 Leuten auf 4 Plätzen:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$$

allgemein: Anzahl Anordnungen von n unterscheidbaren Objekten

$$\boxed{n!}$$

Beispiel: Anzahl Möglichkeiten, die Buchstaben

MIIIISSSSPP aufzuschreiben

$$\frac{11!}{1!\,4!\,4!\,2!} = 34650$$

„M"

Vertauschungen der „I"

„P"

v. d. „S"

allgemein: Anz. Vertauschungen bei n Objekten in $n_1 \dots n_r$ nicht unterscheidbaren Gruppen

$$\boxed{\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!}}$$

(Mississippi-Formel)

Kombinationen: Auswahl von k aus n Elementen

Beispiel: Anzahl PINs mit 4 Ziffern von 0-9

$$\square\ \square\ \square\ \square \; : \; 10^4 = 10000 \text{ Mgl.}$$

10 Mgl. 10 10 10

allgemein:

$$\boxed{n^k}$$

mit Wiederholung
mit Reihenfolge

Beispiel: Auswahl 1., 2., 3. Kurssprecher/-in aus 28 Leuten

$$28 \cdot 27 \cdot 26 = 19656$$

[TR: 28 nPr 3]

allgemein:

$$\boxed{\frac{n!}{(n-k)!}}$$

ohne Wiederholung
mit Reihenfolge

Beispiel: Wahl 3-köpfiges (gleichberechtigtes) Sprecherteam aus 28 Leuten

$$\frac{28 \cdot 27 \cdot 26}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 3276$$

[TR: 28 nCr 3]

allgemein:

Binomial-Koeffizient

$$\boxed{\frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}}$$

ohne Wiederholung
ohne Reihenfolge

Beispiel: Einkauf 10 Getränken aus 3 Sorten (H, W, D)

Anzahl Mgl. für Einkauf:

H H H W W W W D D D	| |
W W W W W W W W W W	| |
H H D D D D D D D D	| |

$$\binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = \binom{12}{10} = 66$$

$n = 3$
$k = 10$

allgemein:

$$\boxed{\binom{n+k-1}{k}}$$

mit Wiederholung
ohne Reihenfolge

Zufallsvorgänge, Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten

- Zufallsvorgang: Geschehen mit ungewissem Ausgang, z.B. Münzwurf
- kleines omega
  Elementarereignis ω: Ein möglicher Ausgang, z.B. „ Kopf “
  Elementarereignisse schließen sich gegenseitig aus („ Kopf “ <u>oder</u> „ Zahl “)!
- Ergebnismenge Ω: Menge aller ω
- **Beispiel:** Werfen zweier Würfel:

$$\Omega : \quad \left\{ \begin{matrix} (1,1) & (1,2) & \cdots & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & \cdots & (2,6) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (6,1) & (6,2) & \cdots & (6,6) \end{matrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \Omega = \{(x_1, x_2) : \; x_1, x_2 \in \{1, \ldots, 6\}\}$$

Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten

- **Ereignis** A: Folgeerscheinung eines Elementarereignisses
- Formal:

$$A \subset \Omega$$

- Ereignisse schließen sich nicht gegenseitig aus!
- **Beispiel:** Werfen zweier Würfel:

Ereignis	verbal	formal
A	Augensumme $= 4$	$\{(1,3),\ (2,2),\ (3,1)\}$
B	Erste Zahl $= 2$	$\{(2,1),\ (2,2),\ \ldots,\ (2,6)\}$

- **Wahrscheinlichkeit** $P(A)$: Chance für das Eintreten von A
- **Laplace-Wahrscheinlichkeit:**

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Fälle}}{\text{Anzahl aller möglichen Fälle}}$$

Laplace Wahrscheinlichkeit und Urnenmodell

- **Beispiel:** Werfen zweier Würfel:

$$\text{Augensumme} = 4: \quad A = \{(1,3),\ (2,2),\ (3,1)\}$$

$$|\Omega| = 36, \quad |A| = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = 0{,}083$$

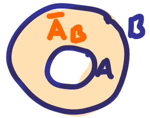
- **Urnenmodell:** Ziehe n Objekte aus einer Menge mit N Objekten
  Anzahl Möglichkeiten:

  mit Zurücklegen: N^n
  ohne Zurücklegen: $N \cdot (N-1) \cdots (N-(n-1)) = \frac{N!}{(N-n)!}$

- **Beispiel:**
  Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem gut gemischten 32-er Kartenblatt bei viermaligem Ziehen vier Asse zu bekommen?
  a) Ziehen mit Zurücklegen,
  b) Ziehen ohne Zurücklegen

$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ „A ohne B“

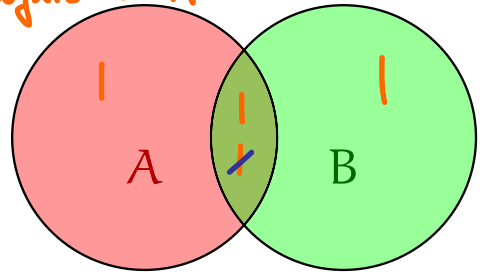
Falls $A \subseteq B$: $\bar{A}_B = B \setminus A$



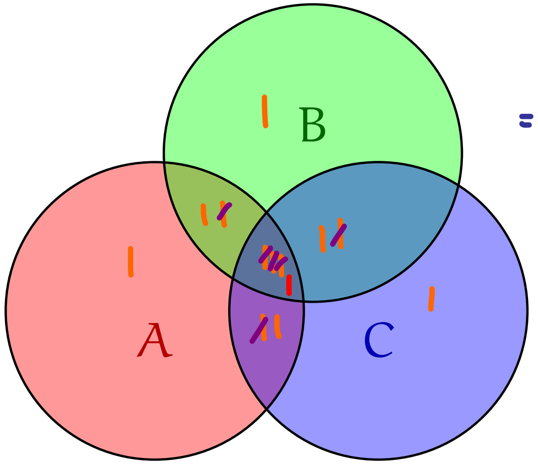
in W-Theorie üblich: $\bar{A}_\Omega = \bar{A}$

$\bar{A}$: Gegenereignis von A

- Wichtige Rechenregeln:



1. $P(A) \leqq 1$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leqq P(B)$
4. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
5. $P(A \cup B) =$
   $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



$P(A \cup B \cup C)$
$= P(A) + P(B) + P(C)$
$- P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C)$
$+ P(A \cap B \cap C)$

- **Beispiel:**

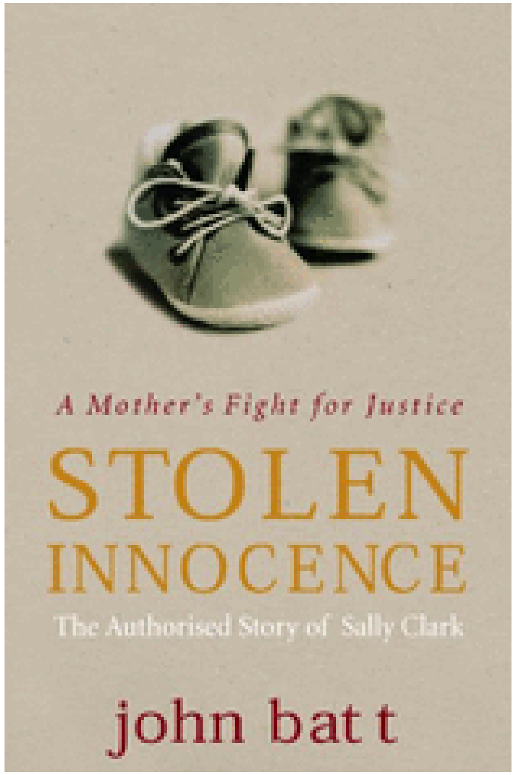
$$P(\text{„Augenzahl} \leqq 5\text{“}) = 1 - P(\text{„Augenzahl} = 6\text{“}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Der Fall Sally Clark

- Sally Clarks Söhne Christopher und Harry sterben 1996 und 1997 beide kurz nach der Geburt an plötzlichem Kindstod.
- Kinderarzt: „Wahrscheinlich Mord, da 2 maliger plötzlicher Kindstod sehr unwahrscheinlich!“ (ohne konkrete Hinweise)
- Gerichtliche Untersuchung
- Hauptargument der Anklage gestützt durch Gerichtsgutachter Sir Roy Meadow (renommierter Facharzt für Kinderheilkunde): Wahrscheinlichkeit für plötzlichen Kindstod ist 1:8500, d.h. Wahrscheinlichkeit für 2 maliges Auftreten in einer Familie

$$p = \left(\frac{1}{8500}\right)^2 \approx 1 : 72\,000\,000$$

- Urteil: Doppelmord; Strafe: 2 mal lebenslang; Inhaftierung von Sally Clark 1999



Der Fall Sally Clark

Gene find casts doubt on double 'cot death' murders

An expert said there was a one in 73 million chance Sally Clark's babies died naturally – and a jury agreed. Now new genetic research could help to clear her. **John Sweeney** and **Bill Law** investigate

- Problem: Es gibt sehr viele Familien mit 2 Kindern
- Europa: ca. 80 Mio Familien mit Kindern, davon ca. 50% mit mindestens zwei Kindern, also ca. 40 Mio.
- Wahrscheinlichkeit, dass in einer solchen Familie kein zweifacher plötzlicher Kindstod auftritt: $1 - \left(\frac{1}{8500}\right)^2$
  Annahmen:
  - Jede dieser Familien hat genau 2 Kinder; in Wirklichkeit: ca. 20% dieser Familien haben mindestens 3 Kinder
  - Zweiter plötzlicher Kindstod unabhängig von erstem (nicht untersucht)
- Wahrscheinlichkeit, dass in 40 Mio. Familien mindestens ein zweifacher plötzlicher Kindstod auftritt:

$$1 - \left(1 - \left(\frac{1}{8500}\right)^2\right)^{40\,000\,000} \approx 42{,}5\%$$

Der Fall Sally Clark

- Problem: Es gibt sehr viele Familien mit 2 Kindern
- Europa: ca. 80 Mio Familien mit Kindern, davon ca. 50% mit mindestens zwei Kindern, also ca. 40 Mio.

Gene find casts doubt on double 'cot death' murders

An expert said there was a one in 73 million chance Sally Clark's babies died naturally – and a jury agreed. Now new genetic research could help to clear her. **John Sweeney** and **Bill Law** investigate

- Wahrscheinlichkeit, dass in einer solchen Familie kein zweifacher plötzlicher Kindstod auftritt: $1 - \left(\frac{1}{8500}\right)^2$
  Annahmen:
  - Jede dieser Familien hat genau 2 Kinder; in Wirklichkeit: ca. 20% dieser Familien haben mindestens 3 Kinder
  - Zweiter plötzlicher Kindstod unabhängig von erstem (nicht untersucht)
- Wahrscheinlichkeit, dass in 40 Mio. Familien mindestens ein zweifacher plötzlicher Kindstod auftritt:

$$1 - \left(1 - \left(\frac{1}{8500}\right)^2\right)^{40\ 000\ 000} \approx 42{,}5\%$$

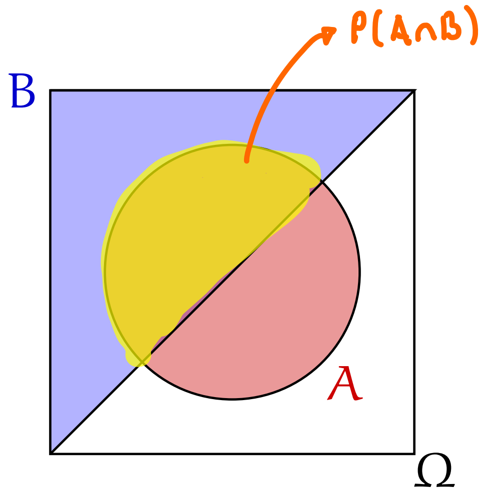
- 2001: Royal Statistical Society interveniert
- 2003: Sally Clark wird nach Revision freigesprochen
- 2007 findet man sie tot in ihrer Wohnung auf - gestorben an einer akuten Alkoholvergiftung. Sie habe sich, so ihre Familie, von dem Justizirrtum nie erholt.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

- Wahrscheinlichkeit von A hängt von anderem Ereignis B ab.
  (B kann zeitlich vor A liegen, muss aber nicht!)
- **Beispiel:** Wahrscheinlichkeit für Statistiknote hängt von Mathenote ab.
- Formal:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Im Venndiagramm:



Unabhängigkeit von Ereignissen

- A, B unabhängig: Eintreten von A liefert keine Information über $P(B)$.
- Formal:

$$P(A \mid B) = P(A)$$

- Bei Unabhängigkeit ist äquivalent dazu:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Nur!

- Dann gilt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

- **Beispiel:** Werfen zweier Würfel:

$$\left.\begin{array}{ll} A: & \text{"`erster Würfel gleich 6"'} \\ B: & \text{"`zweiter Würfel gleich 6"'} \end{array}\right\} \Rightarrow P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6} = P(A)$$

Beispiel: A: Hat 50 €-Schein im Geldbeutel
B: " 20 €- "

W. für „hat 50 € wenn sicher 20 € dabei sind"

P(A∩B) P(B)

	A	$\bar{A}$	
B	5/22	5/22	10/22
$\bar{B}$	2/22	10/22	12/22
	7/22	15/22	

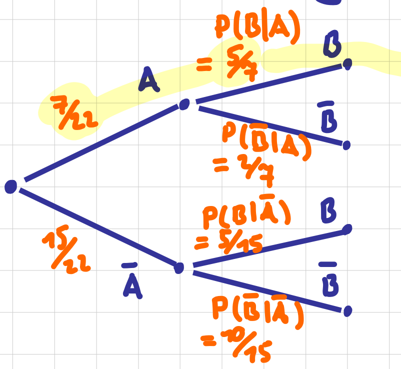
P(A)

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{5/22}{10/22} = 1/2 = 0.5$$

$$P(A) = 7/22 < 0.5 = P(A|B)$$

$\Rightarrow$ A und B sind nicht unabhängig

alternative Darstellung: Baum



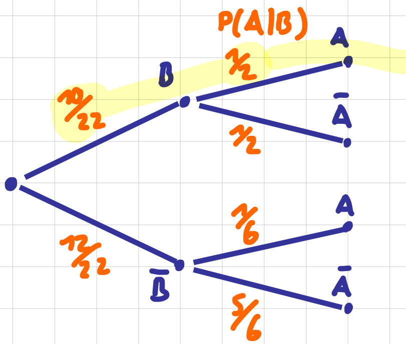
$P(A\cap B) = 5/22$

$P(A\cap\bar{B}) = 2/22$

$P(\bar{A}\cap B) = 5/22$

$P(\bar{A}\cap\bar{B}) = 10/22$

$$P(A)\cdot P(B|A) = P(B)\cdot P(A|B)$$



$P(A\cap B) = 5/22$

5/22

2/22

10/22

$$\boxed{P(B|A) = P(A|B)\cdot\frac{P(B)}{P(A)}}$$

Formel von Bayes