

Wirtschaftsmathematik

Einführung in einige Teilbereiche der Wirtschaftsmathematik

Wintersemester 2016

HSA Wing Sessionlist WS 2016				
			52	
Datum	N.	Zeit	UE	Themen
Dienstag, 20. September 2016	1	18.00-21.15	4	Einführung, Zinsen, Renten
Dienstag, 27. September 2016	2	18.00-21.15	4	Tilgung, Festverz. Wertpapiere
Dienstag, 4. Oktober 2016	3	18.00-21.15	4	Lineare Optimierung: Einführung, Lösungsmethoden
Samstag, 8. Oktober 2016	4	08.00-11.45	4	Lineare Optimierung: Standardmaximumproblem, Simplex
Dienstag, 11. Oktober 2016	5	18.00-21.15	4	Gewöhnliche Differentialgleichungen
Samstag, 15. Oktober 2016	6	08.00-11.45	4	Analytische Lösung linearer DGLs
Dienstag, 18. Oktober 2016	7	18.00-21.15	4	Einführung, univ. Statistik, Konzentration
Samstag, 22. Oktober 2016	8	11.45-15.00	4	Korrelation, Regression, Preisindizes
Dienstag, 25. Oktober 2016	9	18.00-21.15	4	Kombinatorik, Wahrscheinlichkeiten; Binomial, Hypergeo, Poisson
Samstag, 29. Oktober 2016	10	08.00-11.15	4	Zufallsvariablen, Lage- und Streuung, Stetige ZV, Gleich-vtlg.
Dienstag, 15. November 2016	11	18.00-21.15	4	Normalvtlg., Schätzen und Eigenschaften von Punktschätzern
Samstag, 26. November 2016	12	08.00-11.15	4	Konfidenzintervalle, t-Test
Dienstag, 29. November 2016	13	18.00-21.15	4	Puffer, Wiederholung Besprechung Probeklausur
Samstag, 3. Dezember 2016		09.30-11.00		Klausur (regulärer Termin 90 Min., mit Aufsicht)



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik

Quellen

- ▶ A, B **unabhängig**: Eintreten von A liefert keine Information über P(B).

- ▶ Formal:

$$P(A | B) = P(A)$$

- ▶ Bei **Unabhängigkeit** ist äquivalent dazu:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- ▶ Dann gilt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

- ▶ **Beispiel**: Werfen zweier Würfel:

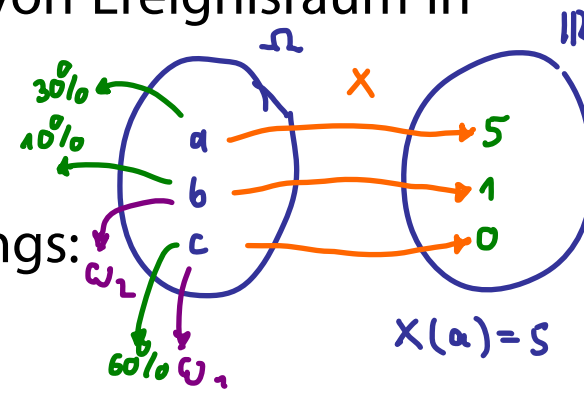
$$\left. \begin{array}{l} A : \text{"erster Würfel gleich 6"} \\ B : \text{"zweiter Würfel gleich 6"} \end{array} \right\} \Rightarrow P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
$$= \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$$
$$= P(A)$$



Zufallsvariablen und Verteilungen

- ▶ Beschreibung von Ereignissen durch reelle Zahlen
- ▶ Formal: **Zufallsvariable** ist Abbildung von Ereignisraum in reelle Zahlen:

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$



- ▶ **Nach** Durchführung des Zufallsvorgangs:

Realisation: $x = X(\omega)$

- ▶ **Vor** Durchführung des Zufallsvorgangs:

Wertebereich: $X(\Omega) = \{x : x = X(\omega), \omega \in \Omega\}$

$P(X(\omega) \leq x)$
 $= P(X \leq x)$
 z.B. $P(X \leq 1) = P(\{b, c\}) = 70\%$
 $F(1)$

- ▶ **Beispiel:** Würfeln, X : Augenzahl, $X(\Omega) = \{1, 2, \dots, 6\}$, $x = 4$ (z.B.)

$$P(X = 4) = \frac{1}{6}, \quad P(X \leq 3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
 - Kombinatorik
 - Zufall und Wahrscheinlichkeit
 - Zufallsvariablen und Verteilungen
 - Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik

Quellen



1. Finanzmathematik

2. Lineare Programme

3. DGLs

4. Einführung

5. Deskriptive Statistik

6. W-Theorie

Kombinatorik

Zufall und Wahrscheinlichkeit

Zufallsvariablen und
Verteilungen

Verteilungsparameter

7. Induktive Statistik

Quellen

▶ Zuweisung von Wahrscheinlichkeiten zu Realisationen

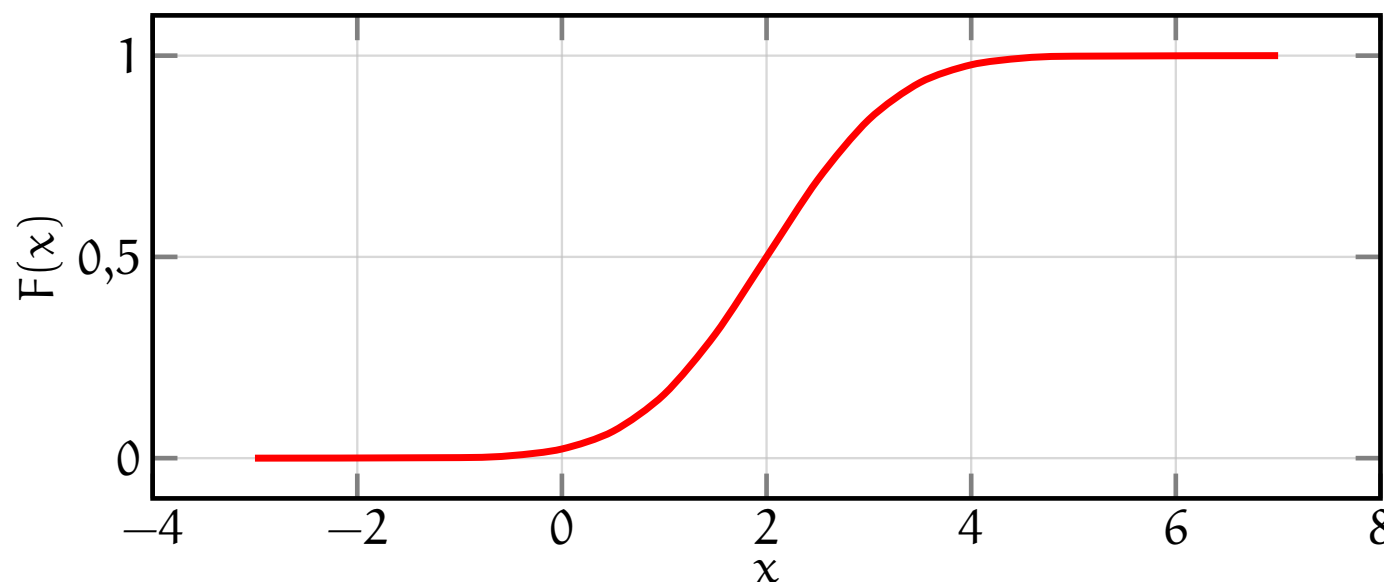
▶ Formal:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

▶ Eigenschaften der **Verteilungsfunktion**:

- $F(x) \in [0; 1]$
- Definitionsbereich: \mathbb{R} mit $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$
- monoton wachsend, d.h. $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
- Es gilt:

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$



Beispiel einer Verteilungsfunktion



- 1. Finanzmathematik
- 2. Lineare Programme
- 3. DGLs
- 4. Einführung
- 5. Deskriptive Statistik
- 6. W-Theorie
 - Kombinatorik
 - Zufall und Wahrscheinlichkeit
 - Zufallsvariablen und Verteilungen
 - Verteilungsparameter
- 7. Induktive Statistik
- Quellen

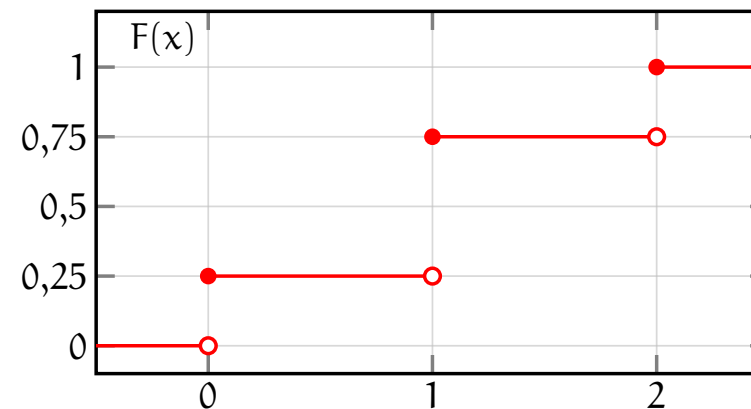
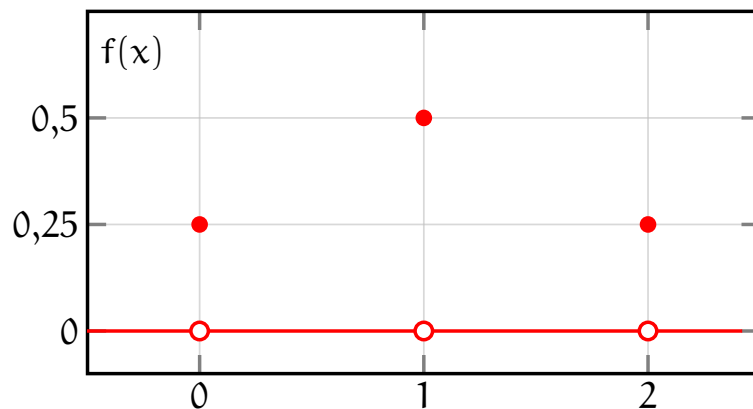
- ▶ X heißt **diskret**, wenn $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots\}$ endlich ist.
- ▶ Wahrscheinlichkeitsfunktion dann:

$$f(x) = P(X = x)$$

Beispiel: Münze 2 mal werfen; X : Anzahl "Kopf"

	(Z, Z)	(Z, K), (K, Z)	(K, K)
x_i	0	1	2
$f(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0 \\ \frac{1}{4}, & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4}, & \text{falls } 1 \leq x < 2 \\ 1, & \text{falls } x \geq 2 \end{cases}$$





1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
 - Kombinatorik
 - Zufall und Wahrscheinlichkeit
 - Zufallsvariablen und Verteilungen
 - Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik

Quellen

- ▶ **Wiederholter** Zufallsvorgang
- ▶ n Durchführungen (jeweils unabhängig)
- ▶ Pro Durchführung: A oder \bar{A} mit $P(A) = p$ ($\hat{=}$ Ziehen mit Zurücklegen)
- ▶ Schreibe:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } A \text{ bei } i\text{-ter Durchführung eintritt} \\ 0, & \text{falls } \bar{A} \text{ bei } i\text{-ter Durchführung eintritt} \end{cases}$$

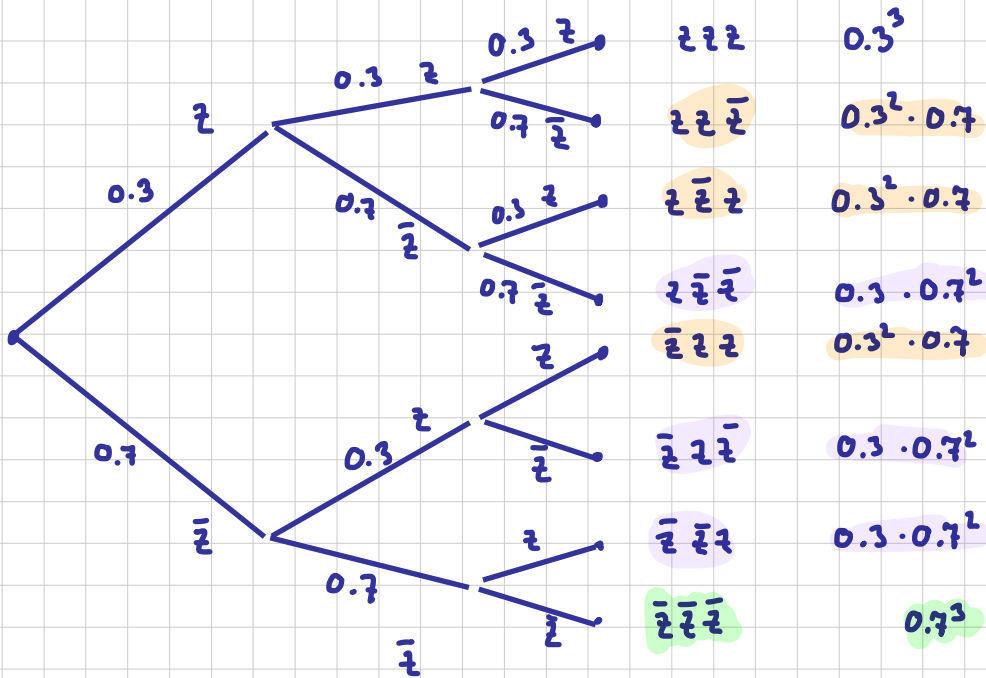
- ▶ Dann gibt

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

an, wie oft A eintritt.

- ▶ Gesucht: Wahrscheinlichkeitsfunktion von X

Binomialverteilung: W. dass Deutsch. zweistellig im Fußball gegen S. Masine gewinnt (Z) 30%



X: Anzahl zweistellig gewonnen bei 3 Länderspielen D vs. S.A.

x	0	1	2	3
P(X=x)	0.343	0.441	0.189	0.027
	0.7^3	$3 \cdot 0.3 \cdot 0.7^2$	$3 \cdot 0.3^2 \cdot 0.7$	0.3^3

Jetzt: 10 Länderspiele

X := Anzahl zweistellige Siege

x	P(X=x)
0	0.7^{10}
1	$10 \cdot 0.3 \cdot 0.7^9$
2	$\binom{10}{2} \cdot 0.3^2 \cdot 0.7^8$
3	$\binom{10}{3} \cdot 0.3^3 \cdot 0.7^7$
...	...
9	$\binom{10}{9} \cdot 0.3^9 \cdot 0.7^1$
10	$\binom{10}{10} \cdot 0.3^{10} \cdot 0.7^0$

Diagram illustrating the binomial coefficient for x=2: $\binom{10}{2}$ corresponds to the number of ways to choose 2 wins out of 10 matches, represented by 10 different sequences of Z and Z-bar.

x	P.X
1	0 0.028248
2	1 0.121061
3	2 0.233474
4	3 0.266828
5	4 0.200121
6	5 0.102919
7	6 0.036757
8	7 0.009002
9	8 0.001447
10	9 0.000138
11	10 0.000006



- 1. Finanzmathematik
- 2. Lineare Programme
- 3. DGLs
- 4. Einführung
- 5. Deskriptive Statistik
- 6. W-Theorie
 - Kombinatorik
 - Zufall und Wahrscheinlichkeit
 - Zufallsvariablen und Verteilungen
 - Verteilungsparameter
- 7. Induktive Statistik
- Quellen

► Herleitung:

1) $P(X_i = 1) = P(A) = p, P(X_i = 0) = P(\bar{A}) = 1 - p$

2) $\sum_{i=1}^n x_i = x$ entspricht "x mal Ereignis A und $n - x$ mal \bar{A} "
Wahrscheinlichkeit (bei Unabhängigkeit): $p^x \cdot (1 - p)^{n-x}$

3) Aber: Reihenfolge irrelevant! Anzahl Anordnungen: $\binom{n}{x}$

⇒ Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung:

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x}, & \text{falls } x \in \{0, 1, \dots, n\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

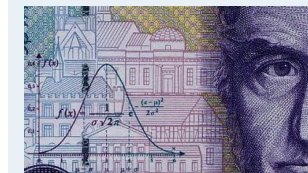
► Kurzschreibweise: $X \sim B(n; p)$

X ist binomialverteilt mit Parametern n und p

► Tabellen zeigen meist $F(x)$

► für $f(x)$ gilt: $f(x) = F(x) - F(x - 1)$

$X \sim B(n, 0.25)$, Tabelle der Binomialverteilung $F(x) = P(X \leq x)$



$x \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0.7500	0.5625	0.4219	0.3164	0.2373	0.1780	0.1335	0.1001	0.0751	0.0563	0.0422	0.0317	0.0238	0.0178	0.0134
1	1.0000	0.9375	0.8438	0.7383	0.6328	0.5339	0.4450	0.3671	0.3003	0.2440	0.1971	0.1584	0.1267	0.1010	0.0802
2		1.0000	0.9844	0.9492	0.8965	0.8306	0.7564	0.6786	0.6007	0.5256	0.4552	0.3907	0.3326	0.2811	0.2361
3			1.0000	0.9961	0.9844	0.9624	0.9295	0.8862	0.8343	0.7759	0.7133	0.6488	0.5843	0.5213	0.4613
4				1.0000	0.9990	0.9954	0.9871	0.9727	0.9511	0.9219	0.8854	0.8424	0.7940	0.7415	0.6865
5					1.0000	0.9998	0.9987	0.9958	0.9900	0.9803	0.9657	0.9456	0.9198	0.8883	0.8516
6						1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9965	0.9924	0.9858	0.9757	0.9617	0.9434
7							1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9988	0.9972	0.9944	0.9897	0.9827
8								1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9990	0.9979	0.9958
9									1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992
10										1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
11											1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$x \setminus n$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0	0.0100	0.0075	0.0056	0.0042	0.0032	0.0024	0.0018	0.0013	0.0010	0.0008	0.0006	0.0004	0.0003	0.0002	0.0002
1	0.0635	0.0501	0.0395	0.0310	0.0243	0.0190	0.0149	0.0116	0.0090	0.0070	0.0055	0.0042	0.0033	0.0025	0.0020
2	0.1971	0.1637	0.1353	0.1114	0.0913	0.0745	0.0607	0.0492	0.0398	0.0321	0.0258	0.0208	0.0166	0.0133	0.0106
3	0.4050	0.3530	0.3057	0.2631	0.2252	0.1917	0.1624	0.1370	0.1150	0.0962	0.0802	0.0666	0.0551	0.0455	0.0375
4	0.6302	0.5739	0.5187	0.4654	0.4149	0.3674	0.3235	0.2832	0.2467	0.2138	0.1844	0.1583	0.1354	0.1153	0.0979
5	0.8104	0.7653	0.7175	0.6678	0.6172	0.5666	0.5168	0.4685	0.4222	0.3783	0.3372	0.2990	0.2638	0.2317	0.2026
6	0.9205	0.8929	0.8610	0.8251	0.7858	0.7436	0.6994	0.6537	0.6074	0.5611	0.5154	0.4708	0.4279	0.3869	0.3481
7	0.9729	0.9598	0.9431	0.9226	0.8982	0.8701	0.8385	0.8037	0.7662	0.7265	0.6852	0.6427	0.5998	0.5568	0.5143
8	0.9925	0.9876	0.9807	0.9713	0.9591	0.9439	0.9254	0.9037	0.8787	0.8506	0.8196	0.7860	0.7502	0.7126	0.6736
9	0.9984	0.9969	0.9946	0.9911	0.9861	0.9794	0.9705	0.9592	0.9453	0.9287	0.9092	0.8868	0.8616	0.8337	0.8034
10	0.9997	0.9994	0.9988	0.9977	0.9961	0.9936	0.9900	0.9852	0.9787	0.9703	0.9599	0.9472	0.9321	0.9145	0.8943
11	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9991	0.9983	0.9971	0.9954	0.9928	0.9893	0.9845	0.9784	0.9706	0.9610	0.9494
12	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9988	0.9979	0.9966	0.9948	0.9922	0.9888	0.9842	0.9784
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9995	0.9991	0.9985	0.9976	0.9962	0.9944	0.9918
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9989	0.9982	0.9973
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9992
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998
17		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18			1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

1. Finanzmathematik
 2. Lineare Programme
 3. DGLs
 4. Einführung
 5. Deskriptive Statistik
 6. W-Theorie
 - Kombinatorik
 - Zufall und Wahrscheinlichkeit
 - Zufallsvariablen und Verteilungen
 - Verteilungsparameter
 7. Induktive Statistik
- Quellen

Verteilungsfunktion $F(x)$ der Binomialverteilung mit $n=5$ $p=0.25$

$n=5$

x	$p \rightarrow$	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5
0		0,9510	0,9039	0,8587	0,8154	0,7738	0,7339	0,6957	0,6591	0,6240	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,0778	0,0313
1		0,9990	0,9962	0,9915	0,9852	0,9774	0,9681	0,9575	0,9456	0,9326	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,3370	0,1875
2		1,0000	0,9999	0,9997	0,9994	0,9988	0,9980	0,9969	0,9955	0,9937	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,6826	0,5000
3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998	0,9997	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9130	0,8125
4		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9898	0,9688

gesucht: $P(X=3) = \binom{5}{3} 0.25^3 \cdot 0.75^2 \approx 0.0879$

über Tabelle: $P(X=3) = P(X \leq 3) - P(X \leq 2)$
 $= F(3) - F(2)$
 $= 0.9844 - 0.8965 = 0.0879$



Beispiel

Aus einem 32-er Kartenblatt wird **3-mal eine Karte mit Zurücklegen** gezogen.

Wie wahrscheinlich ist es, **2-mal Herz** zu ziehen?

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } i\text{-te Karte Herz} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow X_i \sim B\left(1; \frac{8}{32}\right)$$

$$X = \sum_{i=1}^n X_i = X_1 + X_2 + X_3 \Rightarrow X \sim B\left(3; \frac{1}{4}\right)$$

Mithilfe der **Wahrscheinlichkeitsfunktion**:

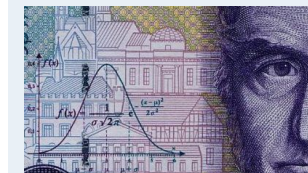
$$P(X = 2) = f(2) = \binom{3}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^1 = 0,1406$$

Mithilfe der **Tabelle** ($n = 3$):

$$P(X = 2) = F(2) - F(1) = 0,9844 - 0,8438 = 0,1406$$

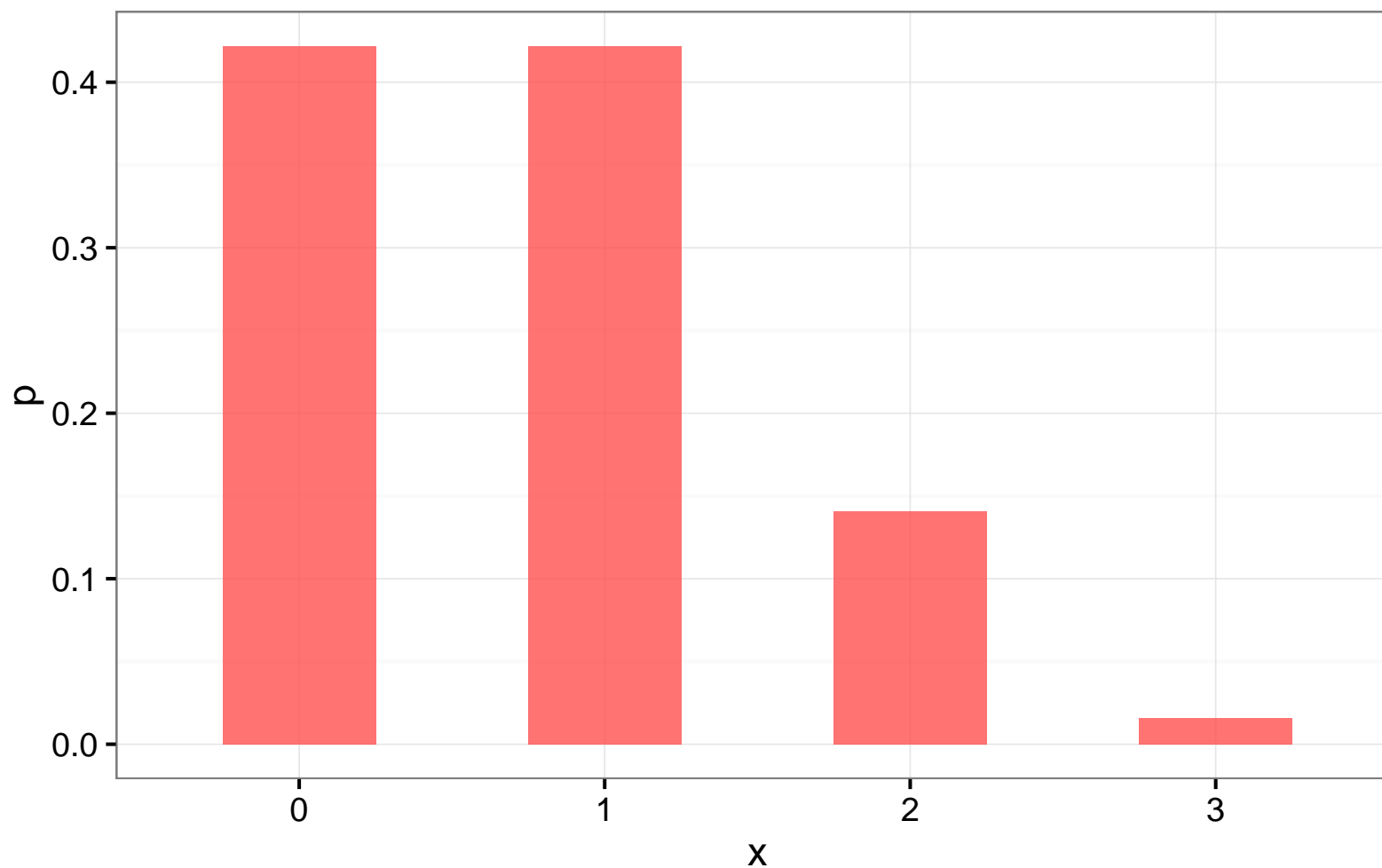
1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
 - Kombinatorik
 - Zufall und Wahrscheinlichkeit
 - Zufallsvariablen und Verteilungen
 - Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik

Quellen



► $X \sim B(3, \frac{1}{4})$

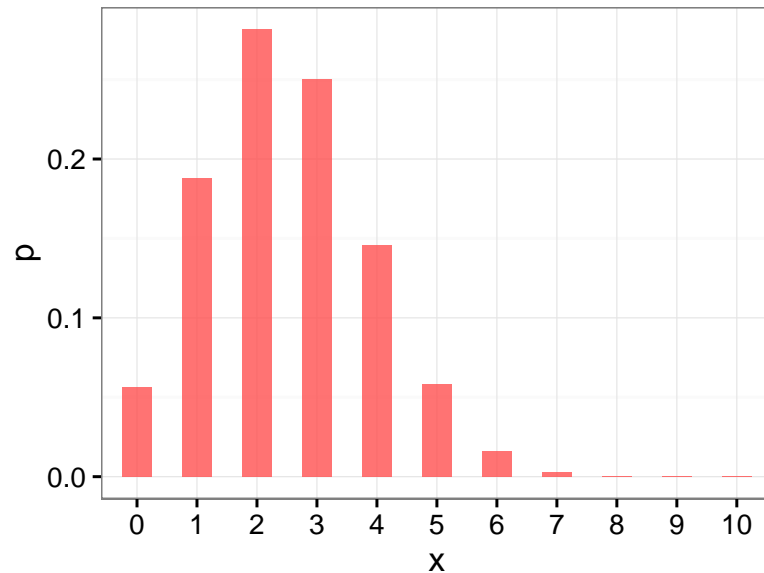
Binomial-Vtlg. mit $n=3$ $p=0.25$



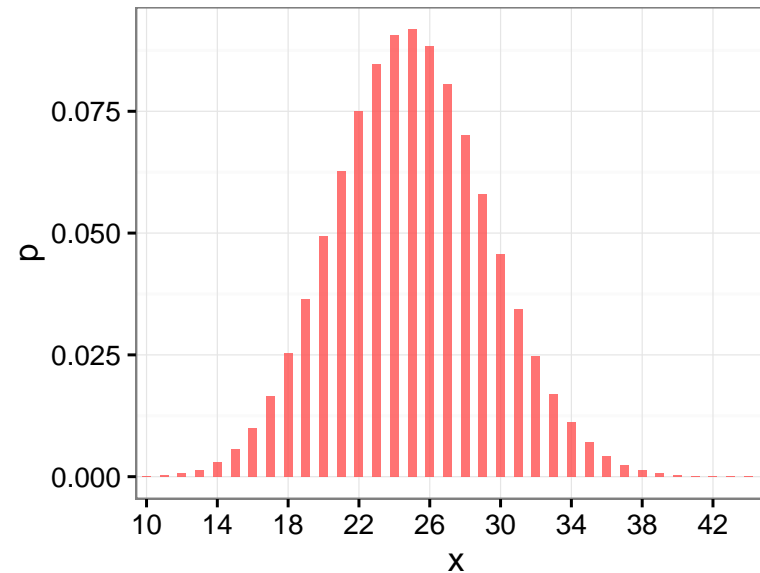
- 1. Finanzmathematik
- 2. Lineare Programme
- 3. DGLs
- 4. Einführung
- 5. Deskriptive Statistik
- 6. W-Theorie
 - Kombinatorik
 - Zufall und Wahrscheinlichkeit
 - Zufallsvariablen und Verteilungen
 - Verteilungsparameter
- 7. Induktive Statistik
- Quellen



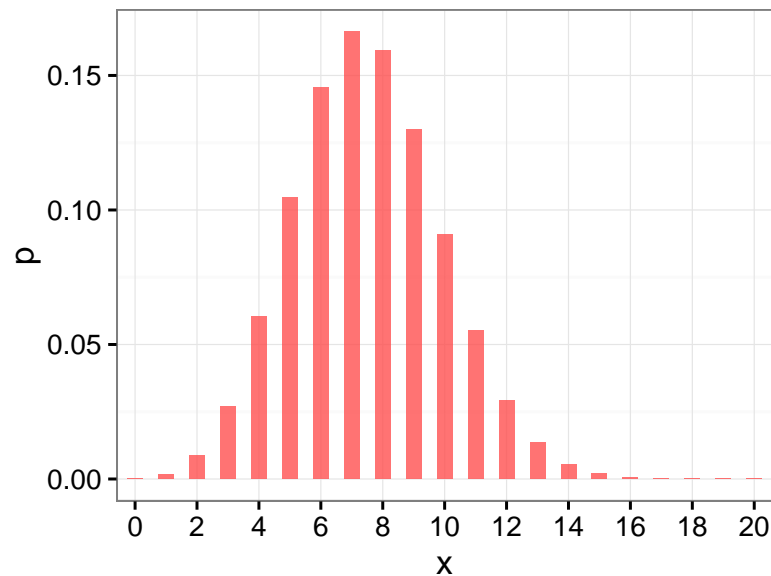
Binomial-Vtlg. mit $n=10$ $p=0.25$



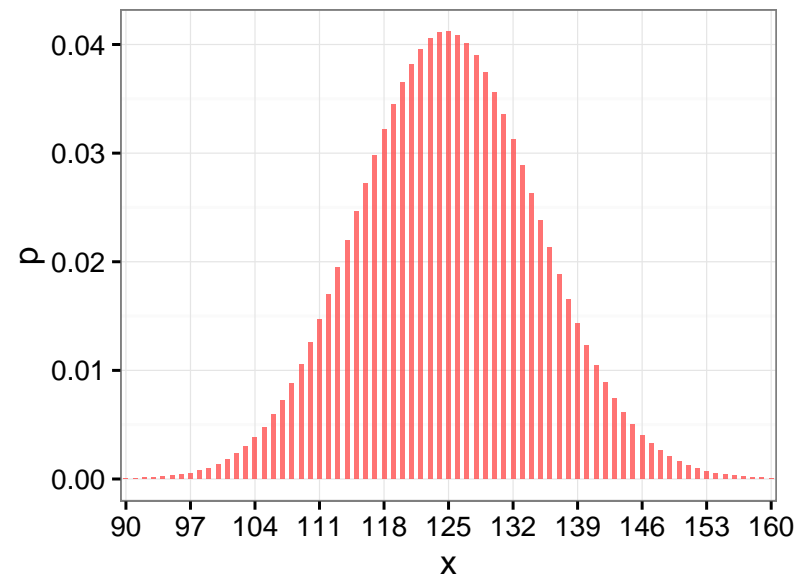
Binomial-Vtlg. mit $n=100$ $p=0.25$



Binomial-Vtlg. mit $n=30$ $p=0.25$



Binomial-Vtlg. mit $n=500$ $p=0.25$



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik

6. W-Theorie

Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit

Zufallsvariablen und
Verteilungen

Verteilungsparameter

7. Induktive Statistik

Quellen



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
 - Kombinatorik
 - Zufall und Wahrscheinlichkeit
 - Zufallsvariablen und Verteilungen
 - Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik

Quellen

- ▶ n -faches Ziehen **ohne** Zurücklegen aus N Objekten, davon M markiert.

X = Anzahl gezogener Objekte mit Markierung

heißt **hypergeometrisch verteilt** mit den Parametern N , M , n .

- ▶ Kurzschreibweise: $X \sim \text{Hyp}(N; M; n)$
- ▶ Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, & \text{falls } x \text{ möglich} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- ▶ Ist $n \leq \frac{N}{20}$, so gilt: $\text{Hyp}(N; M; n) \approx B(n; \frac{M}{N})$



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
 - Kombinatorik
 - Zufall und Wahrscheinlichkeit
 - Zufallsvariablen und Verteilungen
 - Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik

Quellen

- ▶ Aus einem 32-Kartenblatt wird 3-mal eine Karte ohne Zurücklegen gezogen.
- ▶ Wie wahrscheinlich ist es, 2-mal "Herz" zu ziehen?
- ▶ D.h.: $N = 32$, $M = 8$, $n = 3$, $x = 2$.

$$\begin{aligned} P(X = 2) = f(2) &= \frac{\binom{8}{2} \binom{32-8}{3-2}}{\binom{32}{3}} = \frac{\binom{8}{2} \binom{24}{1}}{\binom{32}{3}} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} \cdot 24 \\ &= \frac{29! \cdot 8! \cdot 3! \cdot 24}{32! \cdot 6! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 24}{32 \cdot 31 \cdot 30} = \frac{4032}{29760} = \frac{21}{155} \\ &= 0,1355 \end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet:

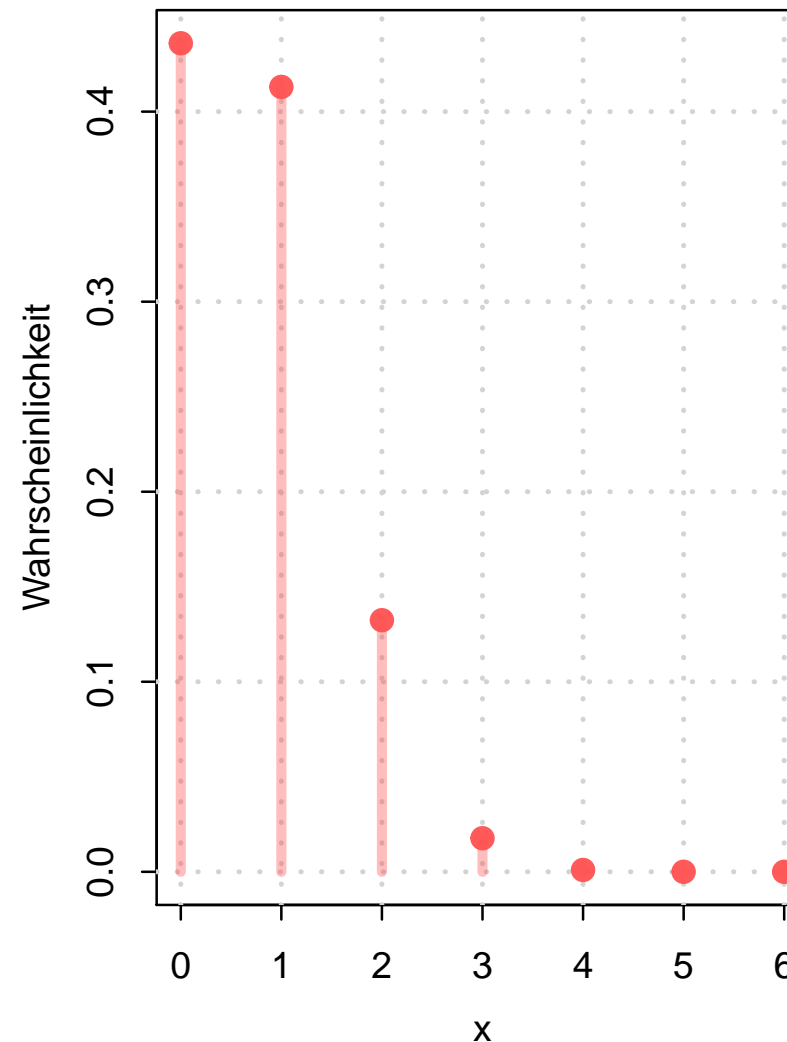
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{und} \quad \binom{n}{1} = n.$$



Beispiel: x Treffer im Lotto 6 aus 49

► $X \sim \text{Hyp}(49, 6, 6)$

x	$P(X = x)$ (in %)
0	43.596498
1	41.301945
2	13.237803
3	1.765040
4	0.096862
5	0.001845
6	0.000007



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
 - Kombinatorik
 - Zufall und Wahrscheinlichkeit
 - Zufallsvariablen und Verteilungen
 - Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik

Quellen



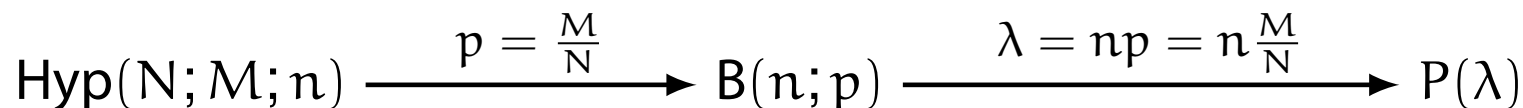
1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik

Quellen

- ▶ Approximation für $B(n; p)$ und $Hyp(N; M; n)$
- ▶ Geeignet, wenn p klein ($\leq 0,1$), n groß (≥ 50) und $np \leq 10$.
- ▶ „Verteilung der seltenen Ereignisse“ (z.B. Anzahl 6-er pro Lottoauspielung)
- ▶ X ist **poissonverteilt mit Parameter λ** : $X \sim P(\lambda)$
- ▶ Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}, & \text{falls } x = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- ▶ $F(x)$ in Tabelle
- ▶ Überblick: Approximation



Poissonverteilung: $X \sim P(\lambda)$, Tabelle der Verteilungsfunktionen



$x \setminus \lambda$	1.6	1.7	1.8	1.9	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3
0	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496	0.1353	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550	0.0498
1	0.5249	0.4933	0.4628	0.4338	0.4060	0.3796	0.3546	0.3309	0.3085	0.2873	0.2674	0.2487	0.2311	0.2146	0.1992
2	0.7834	0.7572	0.7306	0.7037	0.6767	0.6496	0.6227	0.5960	0.5697	0.5438	0.5184	0.4936	0.4695	0.4460	0.4232
3	0.9212	0.9068	0.8913	0.8747	0.8571	0.8387	0.8194	0.7994	0.7787	0.7576	0.7360	0.7141	0.6919	0.6696	0.6472
4	0.9763	0.9704	0.9636	0.9559	0.9474	0.9379	0.9275	0.9163	0.9041	0.8912	0.8774	0.8629	0.8477	0.8318	0.8153
5	0.9940	0.9920	0.9896	0.9868	0.9834	0.9796	0.9751	0.9700	0.9643	0.9580	0.9510	0.9433	0.9349	0.9258	0.9161
6	0.9987	0.9981	0.9974	0.9966	0.9955	0.9941	0.9925	0.9906	0.9884	0.9858	0.9828	0.9794	0.9756	0.9713	0.9665
7	0.9997	0.9996	0.9994	0.9992	0.9989	0.9985	0.9980	0.9974	0.9967	0.9958	0.9947	0.9934	0.9919	0.9901	0.9881
8	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9995	0.9994	0.9991	0.9989	0.9985	0.9981	0.9976	0.9970	0.9962
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9992	0.9989
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$x \setminus \lambda$	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5
0	0.0451	0.0408	0.0369	0.0334	0.0302	0.0273	0.0247	0.0224	0.0203	0.0183	0.0166	0.0150	0.0136	0.0123	0.0111
1	0.1847	0.1712	0.1586	0.1469	0.1359	0.1257	0.1162	0.1074	0.0992	0.0916	0.0845	0.0780	0.0719	0.0663	0.0611
2	0.4012	0.3799	0.3594	0.3397	0.3209	0.3028	0.2854	0.2689	0.2531	0.2381	0.2238	0.2102	0.1974	0.1852	0.1736
3	0.6248	0.6025	0.5803	0.5584	0.5366	0.5152	0.4942	0.4735	0.4533	0.4335	0.4142	0.3954	0.3772	0.3595	0.3423
4	0.7982	0.7806	0.7626	0.7442	0.7255	0.7064	0.6872	0.6679	0.6484	0.6288	0.6093	0.5898	0.5704	0.5512	0.5321
5	0.9057	0.8946	0.8829	0.8706	0.8576	0.8441	0.8301	0.8156	0.8006	0.7851	0.7693	0.7532	0.7367	0.7199	0.7029
6	0.9612	0.9554	0.9490	0.9422	0.9347	0.9267	0.9182	0.9091	0.8995	0.8893	0.8787	0.8675	0.8558	0.8437	0.8311
7	0.9858	0.9832	0.9802	0.9769	0.9733	0.9692	0.9648	0.9599	0.9546	0.9489	0.9427	0.9361	0.9290	0.9214	0.9134
8	0.9953	0.9943	0.9931	0.9917	0.9901	0.9883	0.9863	0.9840	0.9815	0.9786	0.9755	0.9721	0.9683	0.9642	0.9598
9	0.9986	0.9982	0.9978	0.9973	0.9967	0.9960	0.9952	0.9942	0.9931	0.9919	0.9905	0.9889	0.9871	0.9851	0.9829
10	0.9996	0.9995	0.9994	0.9992	0.9990	0.9987	0.9984	0.9981	0.9977	0.9972	0.9966	0.9959	0.9952	0.9943	0.9933
11	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9991	0.9989	0.9986	0.9983	0.9980	0.9976
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9992
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie

Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter

7. Induktive Statistik

Quellen



Beispiel

- ▶ $X \sim B(10\,000; 0,0003)$; In Tabelle der Binomialverteilung nicht vertafelt! Approximation:

$$\left. \begin{array}{l} p = 0,0003 < 0,1 \\ n = 10\,000 > 50 \\ np = 3 < 10 \end{array} \right\} \Rightarrow B(10\,000; 0,0003) \approx P(3)$$

- ▶ Mithilfe der Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$P(X = 5) = \frac{3^5}{5!} \cdot e^{-3} = 0,1008188$$

- ▶ Mithilfe der Tabelle der Poissonverteilung:

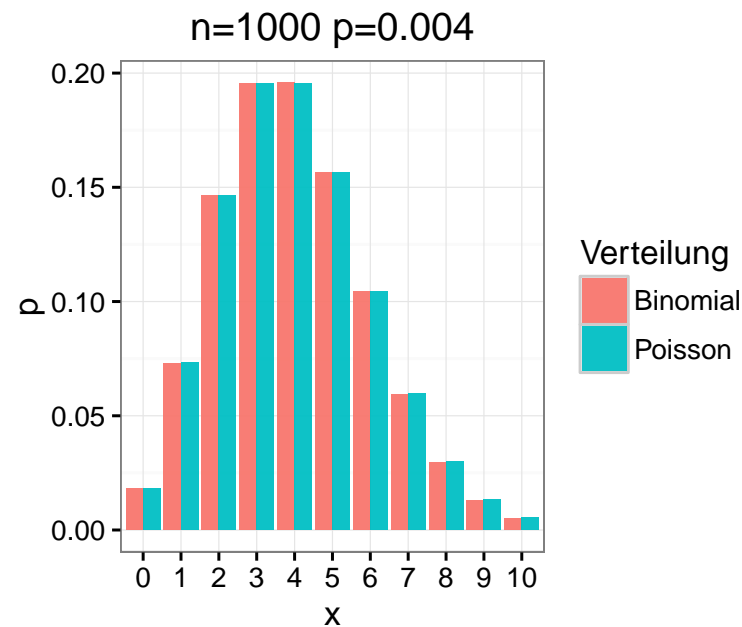
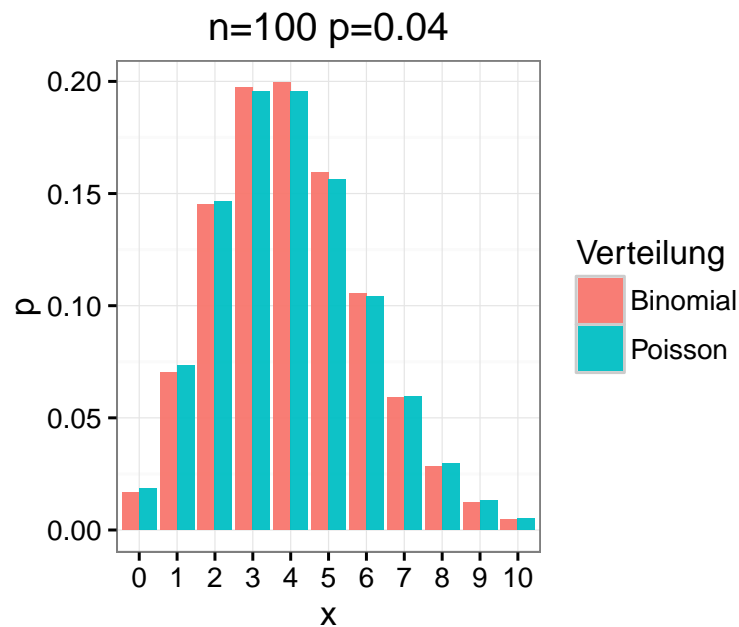
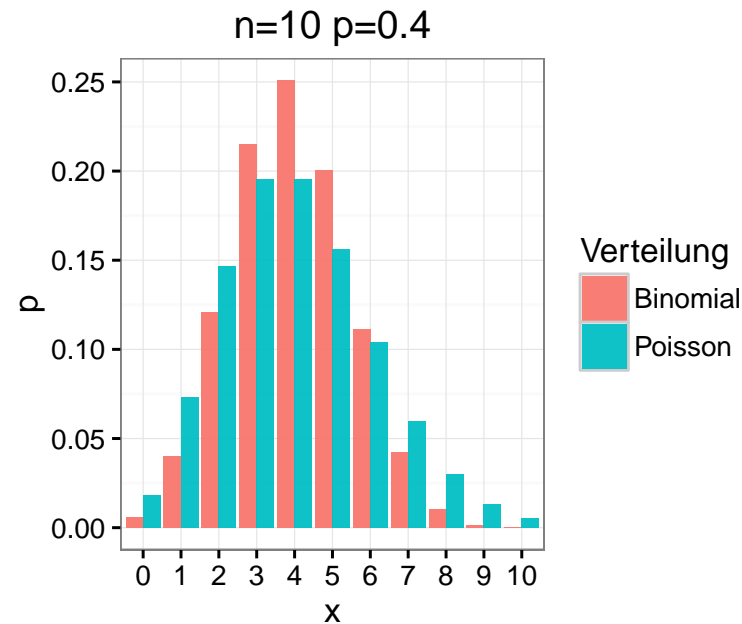
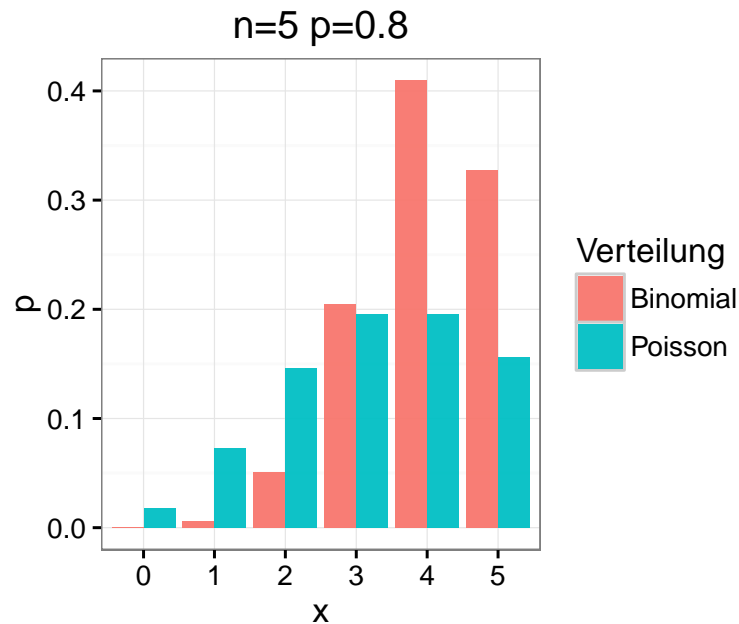
$$P(X = 5) = F(5) - F(4) = 0,9161 - 0,8153 = 0,1008$$

- ▶ Exakter Wert: $P(X = 5) = 0,1008239$

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
 - Kombinatorik
 - Zufall und Wahrscheinlichkeit
 - Zufallsvariablen und Verteilungen
 - Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik

Quellen

Poisson- versus Binomialverteilung: Vergleich



1. Finanzmathematik
 2. Lineare Programme
 3. DGLs
 4. Einführung
 5. Deskriptive Statistik
 6. W-Theorie
 - Kombinatorik
 - Zufall und Wahrscheinlichkeit
 - Zufallsvariablen und Verteilungen
 - Verteilungsparameter
 7. Induktive Statistik
- Quellen



- 1. Finanzmathematik
- 2. Lineare Programme
- 3. DGLs
- 4. Einführung
- 5. Deskriptive Statistik
- 6. W-Theorie
 - Kombinatorik
 - Zufall und Wahrscheinlichkeit
 - Zufallsvariablen und Verteilungen
 - Verteilungsparameter
- 7. Induktive Statistik
- Quellen

► X heißt **stetig**,
wenn $F(x)$ stetig ist.

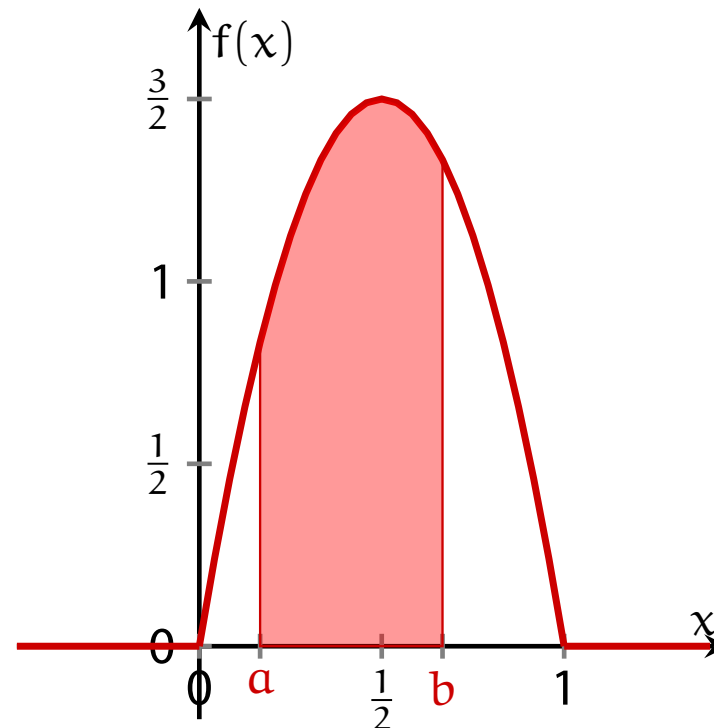
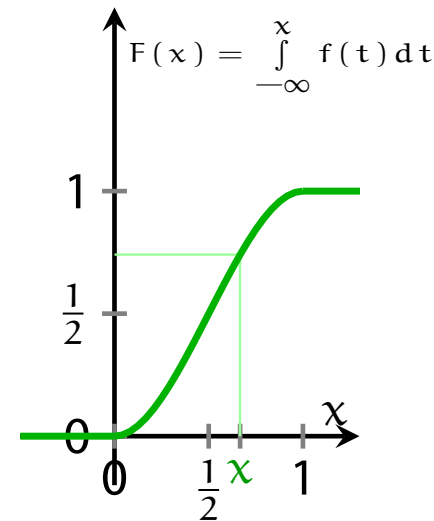
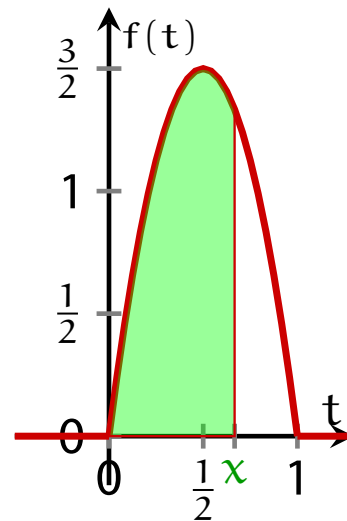
► Dann existiert ein $f(t)$ mit:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$f(x)$ heißt **Dichtefunktion**
von X .

► Dann:

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P(a \leq X < b) \\ &= P(a < X \leq b) \\ &= P(a \leq X \leq b) \\ &= \int_a^b f(x) dx \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$





Eigenschaften der Dichtefunktion

- ▶ $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- ▶ Wegen $F(\infty) = 1$ muss stets gelten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

- ▶ $P(X = x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- ▶ $f(x) > 1$ ist möglich
- ▶ für $x \in \mathbb{R}$ ist $F(x)$ differenzierbar $\Rightarrow F'(x) = f(x)$.
- ▶ Intervallgrenzen spielen keine Rolle:

$$\begin{aligned} P(X \in [a; b]) &= P(X \in (a; b)) \\ &= P(X \in [a; b)) \\ &= P(X \in (a; b]) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
 - Kombinatorik
 - Zufall und Wahrscheinlichkeit
 - Zufallsvariablen und Verteilungen
 - Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik

Quellen



Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0 \\ \frac{1}{10}, & \text{falls } 0 \leq x \leq 10 \\ 0, & \text{falls } x > 10 \end{cases}$$

Verteilungsfunktion:

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{1}{10} dt = \left[\frac{t}{10} \right]_0^x = \frac{x}{10} \Rightarrow$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0 \\ \frac{x}{10}, & \text{falls } 0 \leq x \leq 10 \\ 1, & \text{falls } x > 10 \end{cases}$$

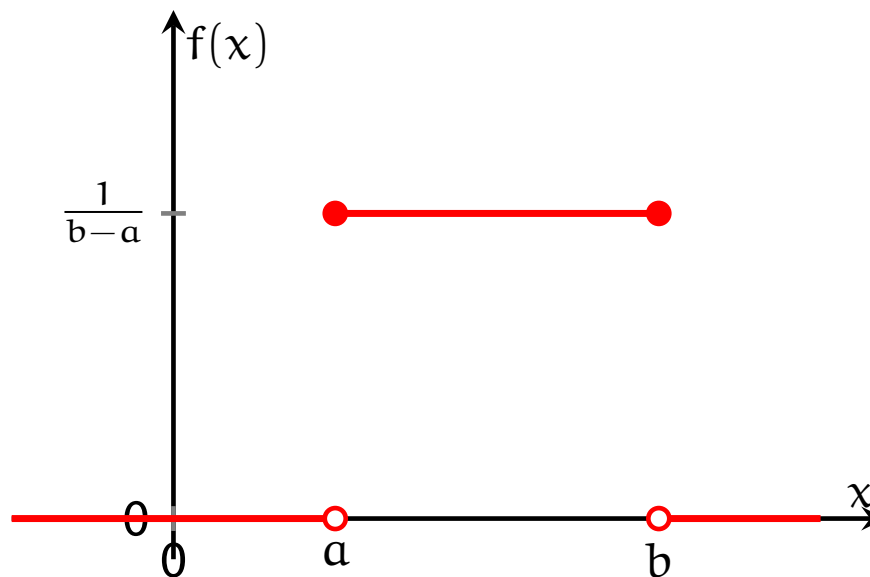
1. Finanzmathematik
 2. Lineare Programme
 3. DGLs
 4. Einführung
 5. Deskriptive Statistik
 6. W-Theorie
 - Kombinatorik
 - Zufall und Wahrscheinlichkeit
 - Zufallsvariablen und Verteilungen
 - Verteilungsparameter
 7. Induktive Statistik
- Quellen



Eine Zufallsvariable X mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{falls } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt **gleichverteilt** im Intervall $[a; b]$.



- 1. Finanzmathematik
- 2. Lineare Programme
- 3. DGLs
- 4. Einführung
- 5. Deskriptive Statistik
- 6. W-Theorie
 - Kombinatorik
 - Zufall und Wahrscheinlichkeit
 - Zufallsvariablen und Verteilungen
 - Verteilungsparameter
- 7. Induktive Statistik
- Quellen



- 1. Finanzmathematik
- 2. Lineare Programme
- 3. DGLs
- 4. Einführung
- 5. Deskriptive Statistik
- 6. W-Theorie
 - Kombinatorik
 - Zufall und Wahrscheinlichkeit
 - Zufallsvariablen und Verteilungen
 - Verteilungsparameter
- 7. Induktive Statistik

Quellen

► Verteilungsfunktion der Gleichverteilung:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{falls } a \leq x \leq b \\ 1, & \text{falls } x > b \end{cases}$$

► Beispiel: X gleichverteilt in [1;20]

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 12) &= F(12) - F(2) = \frac{12-1}{20-1} - \frac{2-1}{20-1} \\ &= \frac{12-2}{20-1} = \frac{10}{19} \\ &= 0,5263 \end{aligned}$$

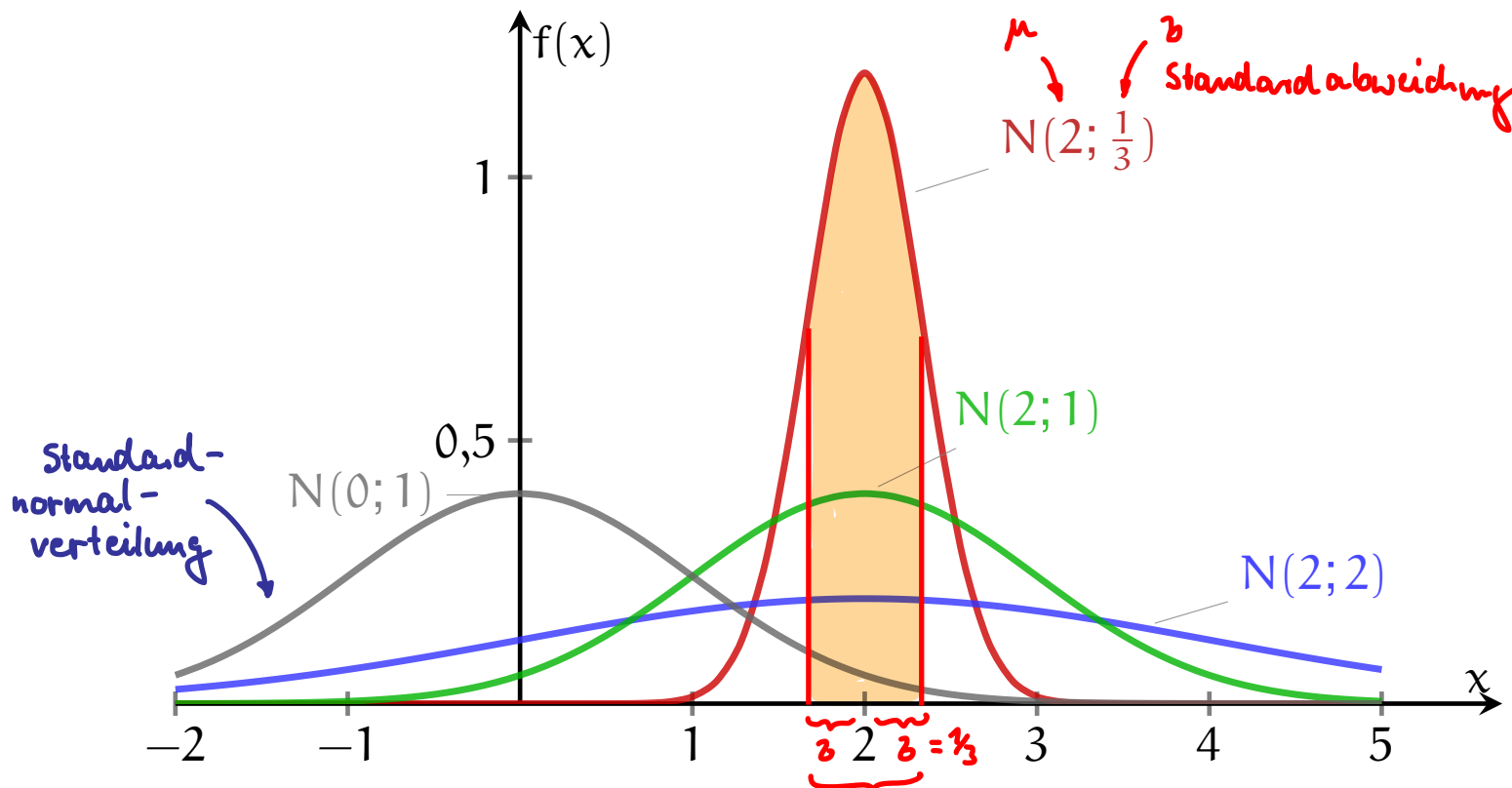


Eine Zufallsvariable X mit einer Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

e^{-x^2}

und $\sigma > 0$ heißt **normalverteilt**.



Kurzschreibweise: $X \sim N(\mu; \sigma)$

$(1,67; 2,33)$: 1-Sigma-Bereich
 $P(X : \mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68\%$

1. Finanzmathematik
 2. Lineare Programme
 3. DGLs
 4. Einführung
 5. Deskriptive Statistik
 6. W-Theorie
 - Kombinatorik
 - Zufall und Wahrscheinlichkeit
 - Zufallsvariablen und Verteilungen
 - Verteilungsparameter
 7. Induktive Statistik
- Quellen

2-Sigma-Bereich
 $P(|X - \mu| \leq 2\sigma) \approx 0.95$
 $P(|X - \mu| \leq 3\sigma) \approx 0.998$



Normalverteilung

C.F. Gauß



1. Finanzmathematik
 2. Lineare Programme
 3. DGLs
 4. Einführung
 5. Deskriptive Statistik
 6. W-Theorie
 - Kombinatorik
 - Zufall und Wahrscheinlichkeit
 - Zufallsvariablen und Verteilungen
 - Verteilungsparameter
 7. Induktive Statistik
- Quellen

Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung

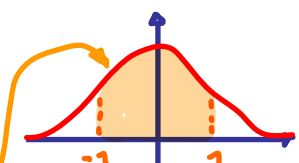
$$N(\mu=0; \sigma=1)$$

Dabei bedeutet $\Phi(x)$ zum Beispiel: $\Phi(2,13) = \Phi(2,1 + 0,03) = 0,9834$. Diesen Wert findet man in der Zeile mit $x_1 = 2,1$ und der Spalte mit $x_2 = 0,03$.

$x_1 \setminus x_2$	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5754
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6737	0.6773	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7020	0.7054	0.7089	0.7123	0.7157	0.7191	0.7224
0.6	0.7258	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7518	0.7549
0.7	0.7580	0.7612	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7882	0.7910	0.7939	0.7967	0.7996	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8290	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8414	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8532	0.8554	0.8577	0.8599	0.8622
1.1	0.8643	0.8665	0.8687	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9083	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9193	0.9207	0.9222	0.9237	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9358	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9430	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9485	0.9495	0.9505	0.9516	0.9526	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9600	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9679	0.9686	0.9693	0.9700	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0.9767
2	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9914	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9933	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9975	0.9975	0.9976	0.9977	0.9978	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9983	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995

$$P(x \leq 1.53) = 0.9370$$

$$P(-1 \leq x \leq 1)$$

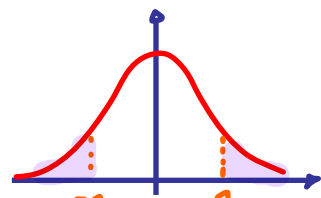


$$= F(1) - F(-1)$$

$$= 0.8414 - (1 - F(1))$$

$$= 0.8414 - 1 + 0.8414$$

$$= 0.6828$$



$$F(-1) = 1 - F(1)$$

Beispiel: $x \hat{=}$ Intelligenzquotient
 $x \sim N(\mu=100; \sigma=15)$

$$P(X \geq 127) = 1 - P(X \leq 127)$$

$$= 1 - F(127)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{127 - 100}{15}\right) \approx 1 - \Phi(1.80)$$

$$= 1 - 0.9641 \approx 0.0359$$

geg.: $x =$ Punktzahl in WiMa-Klausur
 x ist normalverteilt (μ, σ)

$$P(X \geq 80) = 0.05$$

$$P(X \leq 30) = 0.20$$

ges.: μ, σ

$$P(X \geq 80) = 1 - F(80) = 0.05$$

$$\Leftrightarrow 1 - \Phi\left(\frac{80 - \mu}{\sigma}\right) = 0.05$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{80 - \mu}{\sigma}\right) = 0.95 \quad \textcircled{1}$$

$$P(X \leq 30) = F(30) = \Phi\left(\frac{30 - \mu}{\sigma}\right) = 0.20$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{\mu - 30}{\sigma}\right) = 0.80 \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}: \frac{80 - \mu}{\sigma} \approx 1.645$$

$$\textcircled{2}: \frac{\mu - 30}{\sigma} \approx 0.84$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2}: \frac{50}{\sigma} \approx 2.485 \Rightarrow \sigma \approx 20.12$$

$$\text{in } \textcircled{2} \quad \mu = 0.84 \cdot \sigma + 30 \Rightarrow \mu \approx 46.90$$



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
 - Kombinatorik
 - Zufall und Wahrscheinlichkeit
 - Zufallsvariablen und Verteilungen
 - Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik

Quellen

- ▶ Dichte ist symmetrisch zu μ :

$$f(\mu - x) = f(\mu + x)$$

- ▶ μ ist Lage-, σ ist Streuungsparameter

- ▶ **Standardnormalverteilung:**

$N(0; 1)$ mit Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ (\rightarrow Tabelle 3)

- ▶ Kenntnis von $\Phi(x)$, μ und σ genügt, denn:

$$X \sim N(\mu; \sigma) \iff \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0; 1) \implies$$

beliebige
Normalverteilung

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

- ▶ Tabelle enthält nur positive x : Deswegen

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$



Beispiel:

Projektdauer $X \sim N(39; 2)$.

Wahrscheinlichkeit für Projektdauer zwischen 37 und 41 Wochen?

Lösung:

$$\begin{aligned} P(37 \leq X \leq 41) &= F(41) - F(37) \\ &= \Phi\left(\frac{41-39}{2}\right) - \Phi\left(\frac{37-39}{2}\right) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-1) \\ &= \Phi(1) - [1 - \Phi(1)] \\ &= 2 \cdot \Phi(1) - 1 \\ &= 2 \cdot 0,8413 - 1 \\ &= 0,6826 \end{aligned}$$

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
 - Kombinatorik
 - Zufall und Wahrscheinlichkeit
 - Zufallsvariablen und Verteilungen
 - Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik

Quellen



a) **Modus** x_{Mod} : $f(x_{\text{Mod}}) \geq f(x)$ für alle x
(i.A. nicht eindeutig, z.B. Gleichverteilung)

Beispiele:

- Normalverteilung: $x_{\text{Mod}} = \mu$
- Diskrete Verteilung mit:

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

 $\left. \vphantom{\begin{array}{c} x \\ f(x) \end{array}} \right\} \Rightarrow x_{\text{Mod}} = 1$

b) **Median** x_{Med} : $F(x_{\text{Med}}) = \frac{1}{2}$ bzw. kleinstes x mit $F(x) > \frac{1}{2}$

Beispiele:

- Normalverteilung: $x_{\text{Med}} = \mu$
- Diskrete Verteilung
oben: $F(0) = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, $F(1) = \frac{3}{4} > \frac{1}{2} \Rightarrow x_{\text{Med}} = 1$

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
 - Kombinatorik
 - Zufall und Wahrscheinlichkeit
 - Zufallsvariablen und Verteilungen
 - Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik

Quellen



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
 - Kombinatorik
 - Zufall und Wahrscheinlichkeit
 - Zufallsvariablen und Verteilungen
7. Induktive Statistik

Verteilungsparameter

Quellen

c) **α -Fraktile** x_α : $F(x_\alpha) = \alpha$ (für stetige Verteilungen)

Beispiel: $X \sim N(0; 1)$, $Y \sim N(3; 2)$

$$\begin{aligned}x_{0,975} &= 1,96 && \text{(Tab. 3)} \\x_{0,025} &= -x_{0,975} = -1,96 \\y_{0,025} &= 2 \cdot x_{0,025} + 3 = -0,92\end{aligned}$$

Hinweise:

- $x_{\text{Med}} = x_{0,5}$
- Wenn x_α nicht vertafelt \rightarrow **Interpolation:**

$$x_\alpha \approx x_a + (x_b - x_a) \cdot \frac{\alpha - a}{b - a}$$

mit a : größte vertafelte Zahl $< \alpha$
 b : kleinste vertafelte Zahl $> \alpha$

Beispiel: $X \sim N(0; 1)$; $x_{0,6} \approx$
 $0,25 + (0,26 - 0,25) \cdot \frac{0,6 - 0,5987}{0,6026 - 0,5987} = 0,2533$



d) Erwartungswert $E(X)$ bzw. μ :

$$E(X) = \begin{cases} \sum_i x_i f(x_i), & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

Beispiel: Diskrete Verteilung mit

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow E(X) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

Beispiel: Für eine **exponentialverteilte** Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{folgt}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \lambda \int_0^{\infty} x \cdot e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x} - \int_0^{\infty} 1 \cdot \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right) dx \right] \\ &= -x e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = -0 - \left(-0 - \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

- 1. Finanzmathematik
- 2. Lineare Programme
- 3. DGLs
- 4. Einführung
- 5. Deskriptive Statistik
- 6. W-Theorie
 - Kombinatorik
 - Zufall und Wahrscheinlichkeit
 - Zufallsvariablen und Verteilungen
 - Verteilungsparameter
- 7. Induktive Statistik
- Quellen



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
 - Kombinatorik
 - Zufall und Wahrscheinlichkeit
 - Zufallsvariablen und Verteilungen
 - Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik

Quellen

- ▶ Ist f **symmetrisch** bzgl. a , so gilt $E(X) = a$
Beispiel: f der Gleichverteilung symmetrisch bzgl. $\frac{a+b}{2} \Rightarrow E(X) = \frac{a+b}{2}$

- ▶ Lineare Transformation:

$$E(a + bX) = a + b \cdot E(X)$$

- ▶ Summenbildung:

$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

Beispiel: X gleichverteilt in $[0; 10]$, $Y \sim N(1; 1)$; $Z = X + 5Y$

$$E(Z) = E(X + 5Y) = E(X) + E(5Y) = E(X) + 5 \cdot E(Y) = \frac{10+0}{2} + 5 \cdot 1 = 10$$

- ▶ Unabhängigkeit:

$$X, Y \text{ unabhängig} \Rightarrow E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$



- 1. Finanzmathematik
- 2. Lineare Programme
- 3. DGLs
- 4. Einführung
- 5. Deskriptive Statistik
- 6. W-Theorie
 - Kombinatorik
 - Zufall und Wahrscheinlichkeit
 - Zufallsvariablen und Verteilungen
- 7. Induktive Statistik

Verteilungsparameter

Quellen

► **Varianz** $\text{Var}(X)$ bzw. σ^2 :

$$\text{Var}(X) = E([X - E(X)]^2) = \begin{cases} \sum_i [x_i - E(X)]^2 f(x_i), & \text{wenn } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx, & \text{wenn } X \text{ stetig} \end{cases}$$

► **Standardabweichung** $\text{Sta}(X)$ bzw. σ :

$$\text{Sta}(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Beispiel: Diskrete Verteilung

x	0	1	2	:
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

$$\text{Var}(X) = (0 - 1)^2 \cdot \frac{1}{4} + (1 - 1)^2 \cdot \frac{1}{2} + (2 - 1)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Beispiel: Für eine **exponentialverteilte** Zufallsvariable X (Dichte siehe Erwartungswert) folgt

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx = \lambda \int_0^{\infty} (x - \frac{1}{\lambda})^2 \cdot e^{-\lambda x} dx \\ &= e^{-\lambda x} \left(-x^2 + \frac{2x}{\lambda} - (\frac{1}{\lambda})^2 - \frac{2}{\lambda^2} - \frac{2x}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2} \right) \Big|_0^{\infty} \\ &= 0 - \left(-0^2 - (\frac{1}{\lambda})^2 \right) = \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$



- 1. Finanzmathematik
- 2. Lineare Programme
- 3. DGLs
- 4. Einführung
- 5. Deskriptive Statistik
- 6. W-Theorie
 - Kombinatorik
 - Zufall und Wahrscheinlichkeit
 - Zufallsvariablen und Verteilungen
 - Verteilungsparameter
- 7. Induktive Statistik
- Quellen

► **Verschiebungssatz:**

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Beispiel: Diskrete Verteilung

x	0	1	2	$:$
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2} = \text{Var}(X)$$

► **Lineare Transformation:**

$$\text{Var}(a + bX) = b^2 \text{Var}(X)$$

► **Summenbildung** gilt nur, wenn die X_i unabhängig! Dann:

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)$$



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
 - Kombinatorik
 - Zufall und Wahrscheinlichkeit
 - Zufallsvariablen und Verteilungen
 - Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik

Quellen

Verteilung von X	$E(X)$	$Var(X)$
Binomialverteilung $B(n; p)$	np	$np(1 - p)$
Hypergeometrische Verteilung mit den Parametern N, M, n	$n \frac{M}{N}$	$n \frac{M}{N} \frac{N-M}{N} \frac{N-n}{N-1}$
Poisson-Verteilung $P(\lambda)$	λ	λ
Gleichverteilung in $[a; b]$ mit $a < b$	$\frac{a + b}{2}$	$\frac{(b - a)^2}{12}$
Normalverteilung $N(\mu; \sigma)$	μ	σ^2



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
 - Kombinatorik
 - Zufall und Wahrscheinlichkeit
 - Zufallsvariablen und Verteilungen
 - Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik

Quellen

- ▶ Für beliebige Zufallsvariablen X und $\varepsilon > 0$ gilt die **Ungleichung von Tschebyschow**:

$$P(|X - E[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}[X]}{\varepsilon^2}$$

Beispiele:

- ▶ X ist gleichverteilt mit Parametern a, b und $\varepsilon = \frac{1}{3}(a - b)$, also $E[X] = \frac{1}{2}(a + b)$ und $\text{Var}[X] = \frac{1}{12}(a - b)^2$

$$\Rightarrow P\left(|X - \frac{1}{2}(a + b)| \geq \frac{1}{3}(a - b)\right) \leq \frac{(a - b)^2}{12} \cdot \frac{3^2}{(a - b)^2} = 3/4$$

- ▶ $X \sim B(100; 0,2)$ und $\varepsilon = 10$
damit: $E[X] = 100 \cdot 0,2 = 20$ und $\text{Var}[X] = 100 \cdot 0,2 \cdot (1 - 0,2) = 16$

$$\Rightarrow P(|X - 20| \geq 10) \leq \frac{16}{10^2} = 0,16$$



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
 - Kombinatorik
 - Zufall und Wahrscheinlichkeit
 - Zufallsvariablen und Verteilungen
 - Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik

Quellen

► Kovarianz:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\ &= E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) \\ &\text{(Verschiebungssatz)}\end{aligned}$$

► Korrelationskoeffizient:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}}$$

► Bemerkungen:

- ρ ist r nachgebildet $\Rightarrow \rho \in [-1; 1]$
- $|\rho| = 1 \iff Y = a + bX$ (mit $b \neq 0$)
- $\rho = 0 \iff X, Y$ **unkorreliert**

► Varianz einer Summe zweier ZV:

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)$$