

Wirtschaftsmathematik Aufgabensammlung

Wintersemester 2016

Prof. Dr. Stefan Etschberger – Hochschule Augsburg

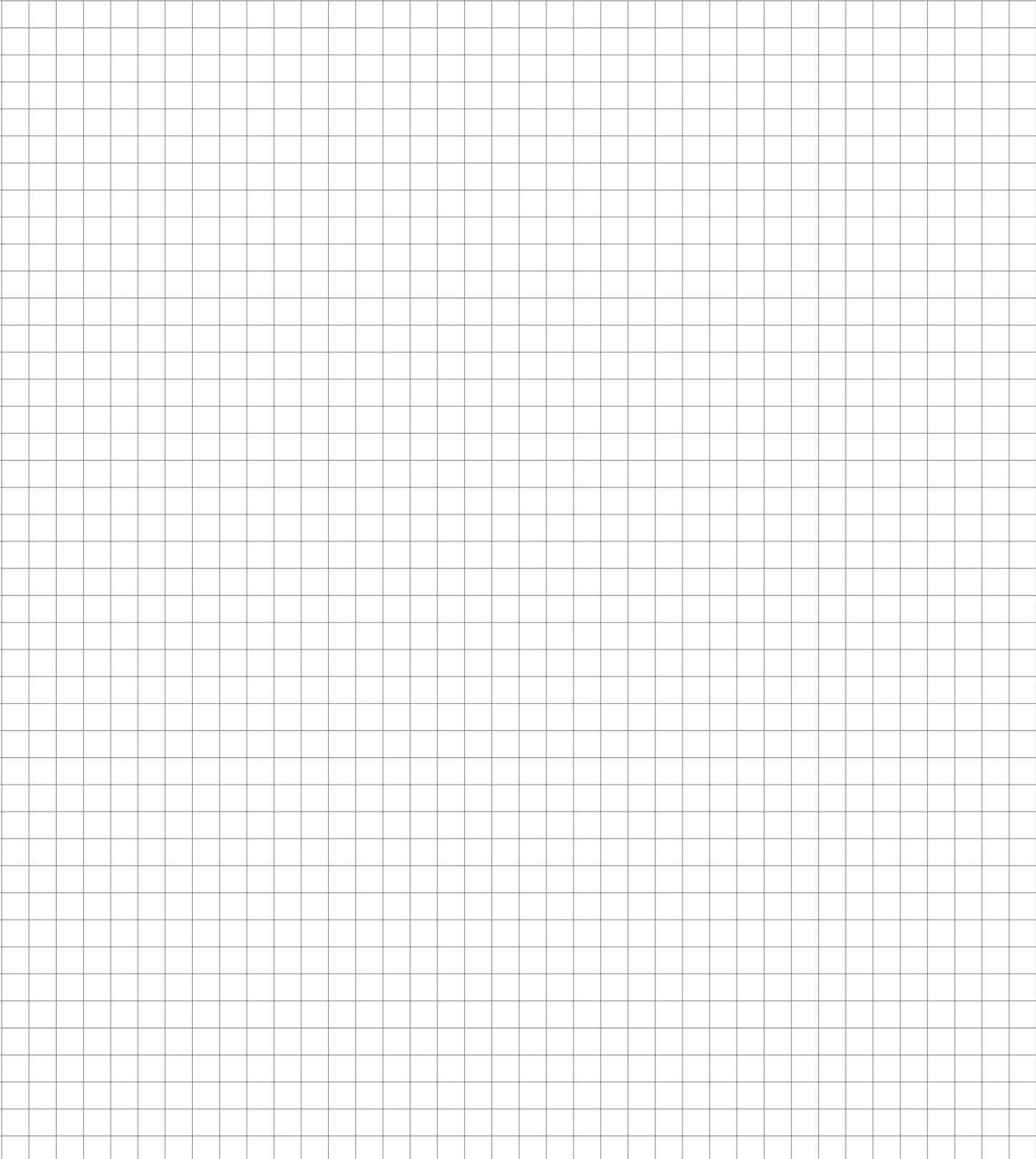
Inhalt

Finanzmathematik	3	Aufgabe 51: Korrelation Regression	53
Aufgabe 1: Verzugszinsen	3	Aufgabe 52: Korrelation Regression	54
Aufgabe 2: Sparkassenformel	4	Aufgabe 53: Regression	55
Aufgabe 3: Gemischte Verzinsung	5	Kombinatorik	56
Aufgabe 4: Unterjährige Verzinsung	6	Aufgabe 54: Kombinationen	56
Aufgabe 5: Zinseszins	7	Aufgabe 55: Kombinationen	57
Aufgabe 6: Doppeltes Kapital	8	Aufgabe 56: Kombinationen	58
Aufgabe 7: Laufzeit	9	Aufgabe 57: Zählprinzip	59
Aufgabe 8: Wald	10	Aufgabe 58: Kombinationen Zählprinzip	60
Aufgabe 9: Effektivzins	11	Aufgabe 59: Zählprinzip	61
Aufgabe 10: Rente	12	Wahrscheinlichkeitstheorie	62
Aufgabe 11: Investitionsvarianten	13	Aufgabe 60: Laplace-Wahrscheinlichkeit	62
Aufgabe 12: Betriebsrente	14	Aufgabe 61: Wahrscheinlichkeiten	63
Aufgabe 13: Bausparen	15	Aufgabe 62: Wahrscheinlichkeit	64
Aufgabe 14: Wer spart schneller?	16	Aufgabe 63: bedingte Wahrscheinlichkeit	65
Aufgabe 15: Altersvorsorge	17	Aufgabe 64: bedingte Wahrscheinlichkeit	66
Aufgabe 16: Hauskauf	18	Aufgabe 65: bedingte Wahrscheinlichkeit	67
Aufgabe 17: Quartalszinsen	19	Aufgabe 66: bedingte Wahrscheinlichkeit	68
Aufgabe 18: Unterjährige Rente	20	Aufgabe 67: bedingte Wahrscheinlichkeit	69
Aufgabe 19: Ratentilgung	21	Aufgabe 68: Verteilungen	70
Aufgabe 20: Tilgung und Effektivzins	22	Aufgabe 69: Verteilungen	71
Aufgabe 21: Ratentilgung	23	Aufgabe 70: Verteilungen	72
Aufgabe 22: Tilgungsplan	24	Aufgabe 71: Verteilungen	73
Aufgabe 23: Annuitätentilgung	25	Aufgabe 72: Verteilungen	74
Aufgabe 24: Wertpapier Tageskurs	26	Aufgabe 73: Verteilungen	75
Aufgabe 25: Inflation	27	Aufgabe 74: Verteilungen	76
Aufgabe 26: Inflationsausgleich	28	Aufgabe 75: Verteilungen	77
Aufgabe 27: Studienfinanzierung	29	Aufgabe 76: Verteilungen	78
Aufgabe 28: Peter Minuit	30	Aufgabe 77: Erwartungswert Varianz	79
Aufgabe 29: Kapitallebensversicherung	31	Aufgabe 78: Erwartungswert Varianz	80
Aufgabe 30: Sven Sonnehr	32	Aufgabe 79: Erwartungswert Varianz	81
Lineare Programme	33	Aufgabe 80: Erwartungswert Varianz	82
Aufgabe 31: Telefone	33	Aufgabe 81: Erwartungswert Varianz	83
Aufgabe 32: Produktionsfaktoren	34	Aufgabe 82: Kovarianz	84
Aufgabe 33: Alternativen eliminieren	35	Aufgabe 83: Kovarianz	85
Aufgabe 34: Variable Koeffizienten	36	Induktive Statistik	86
Aufgabe 35: Schweinefutter	37	Aufgabe 84: Punktschätzer	86
Aufgabe 36: Simplex	38	Aufgabe 85: Punktschätzer	87
Aufgabe 37: Minimieren	39	Aufgabe 86: Intervallschätzer	88
Differentialgleichungen	40	Aufgabe 87: Intervallschätzer	89
Aufgabe 38: Differentialgleichungen	40	Aufgabe 88: Intervallschätzer	90
Aufgabe 39: Anfangswertprobleme	41	Aufgabe 89: Tests Fehler 1. Art	91
Deskriptive Statistik	42	Aufgabe 90: Tests Erwartungswert	92
Aufgabe 40: Häufigkeit	42	Aufgabe 91: Tests Erwartungswert	93
Aufgabe 41: Lageparameter	43	Aufgabe 92: Intervallschätzer	94
Aufgabe 42: Lage Streuung Vtgl.fkt.	44	Aufgabe 93: Intervallschätzer	95
Aufgabe 43: Lageparameter Konzentration	45	Aufgabe 94: Intervallschätzer Tests	96
Aufgabe 44: Konzentration	46	Aufgabe 95: Intervallschätzer	97
Aufgabe 45: Konzentration	47	Aufgabe 96: Tests Anteil	98
Aufgabe 46: Lage Konzentration	48	Aufgabe 97: Tests Fehler	99
Aufgabe 47: Korrelation	49		
Aufgabe 48: Rangkorrelation	50		
Aufgabe 49: Lage Korrelation	51		
Aufgabe 50: Kontingenzkoeffizient	52		

Finanzmathematik

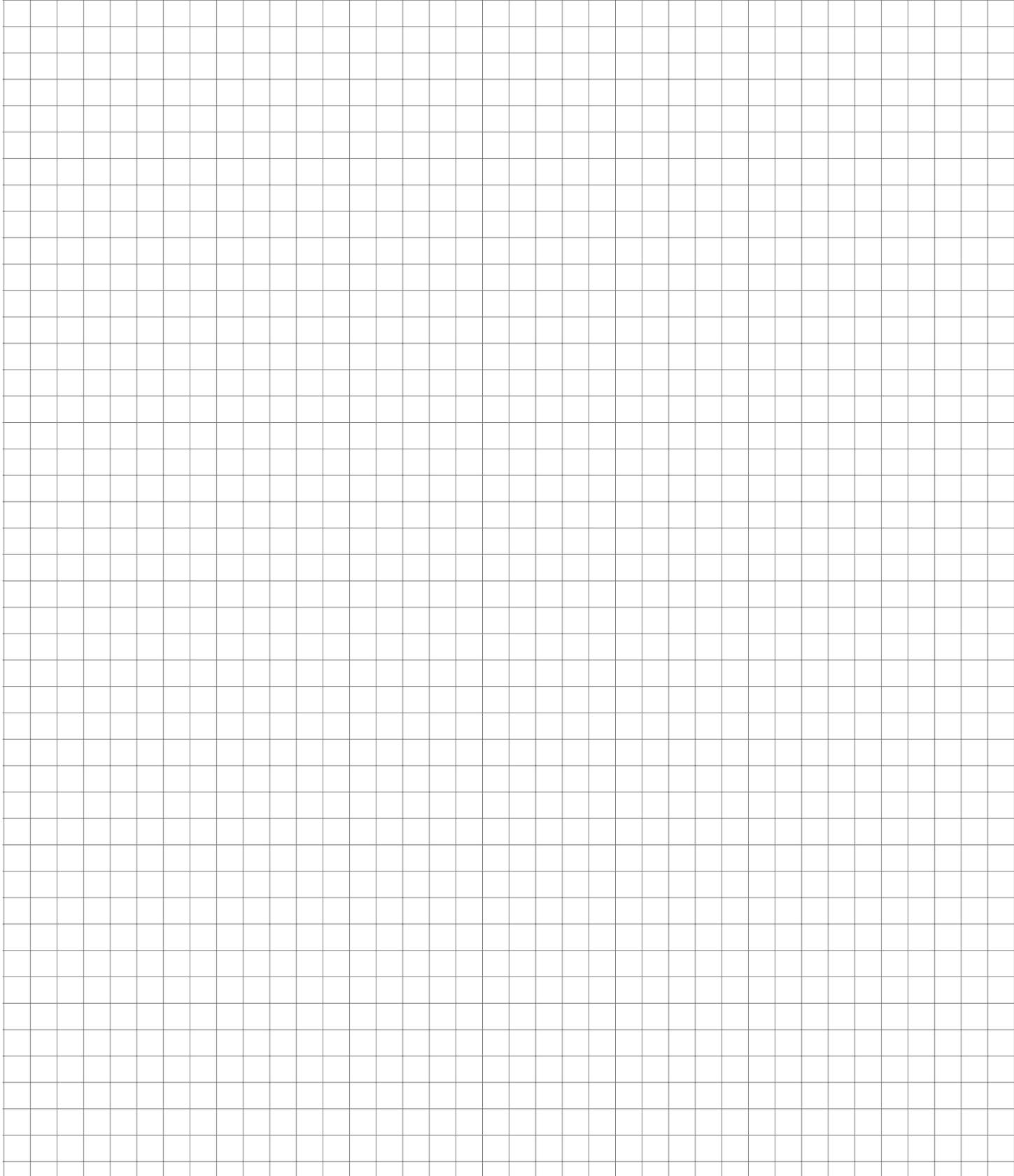
Aufgabe 1

Eine Rechnung über 3.250 € wird nicht sofort bezahlt. Daher sind Verzugszinsen in Höhe von 144,45 € zu bezahlen. Für welche Zeitspanne wurden Verzugszinsen berechnet falls der Zinsfuß 8% beträgt.



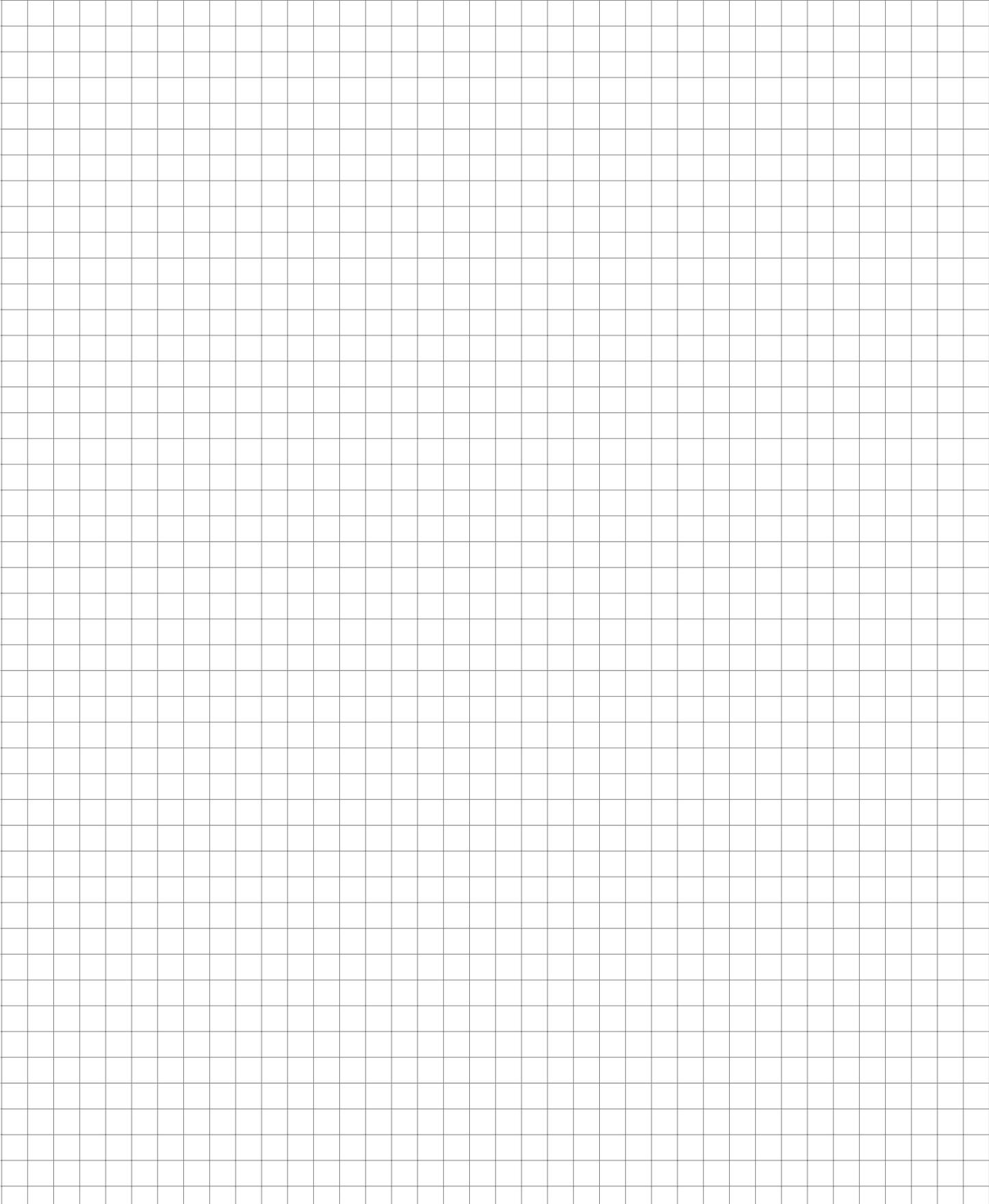
Aufgabe 2

Ein Girokonto weist am Jahresanfang ein Guthaben von 2.400 € auf. Am 6. März werden auf das Konto 10.000 € überwiesen; am 21. Januar und am 16. Februar werden jeweils 4.000 € abgebucht. Die Bank berechnet 12% Sollzins und 0,5% Habenzins. Stellen Sie die Zinsabrechnung zum 1. April auf.



Aufgabe 3

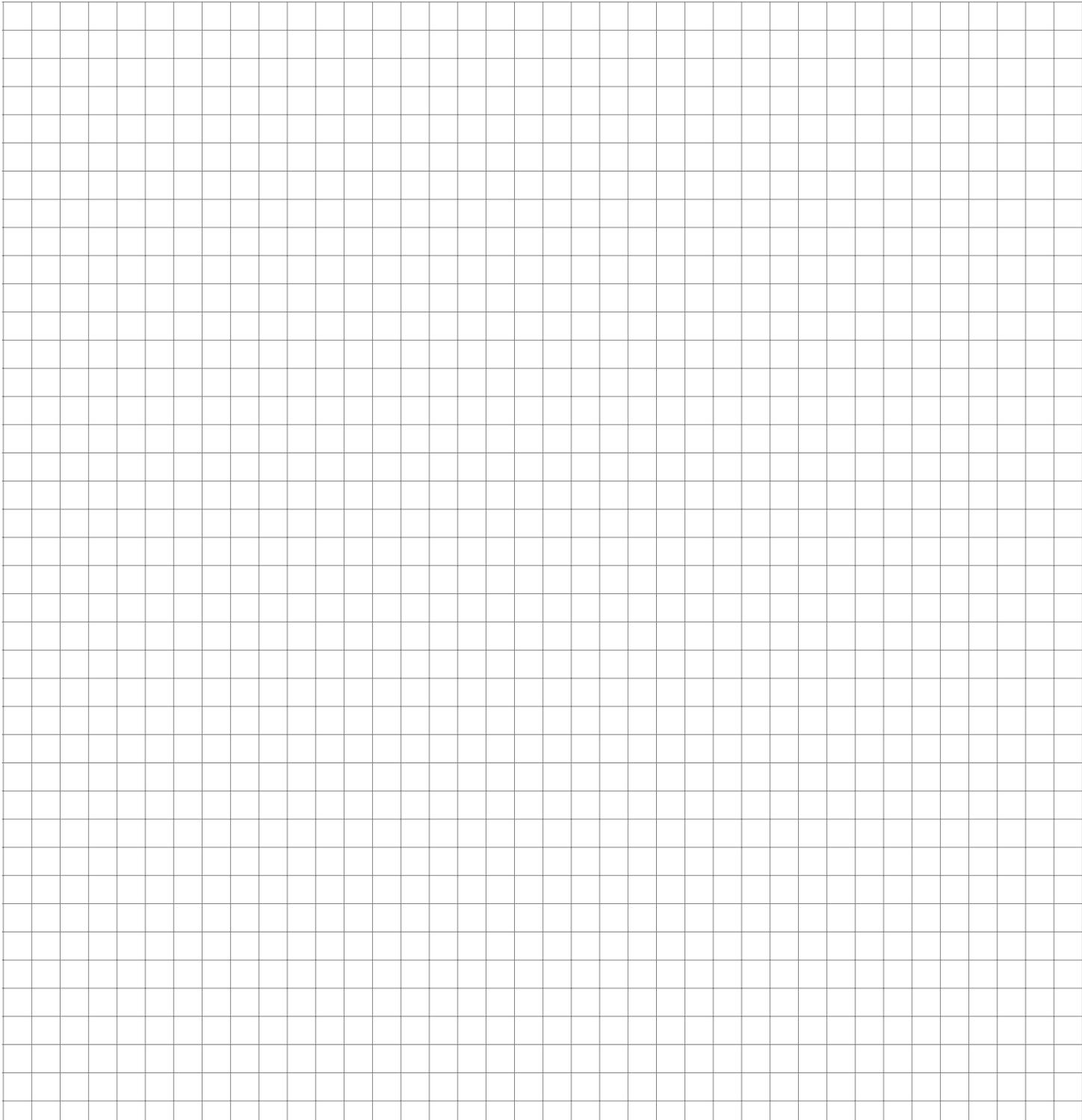
Jemand zahlt am 2. Juli 1999 auf sein Sparkonto 1000 € ein. Wie hoch ist der Kontostand am 2. April 2008 bei 3% Zins, falls das Konto zu diesem Zeitpunkt abgerechnet wird.



Aufgabe 4

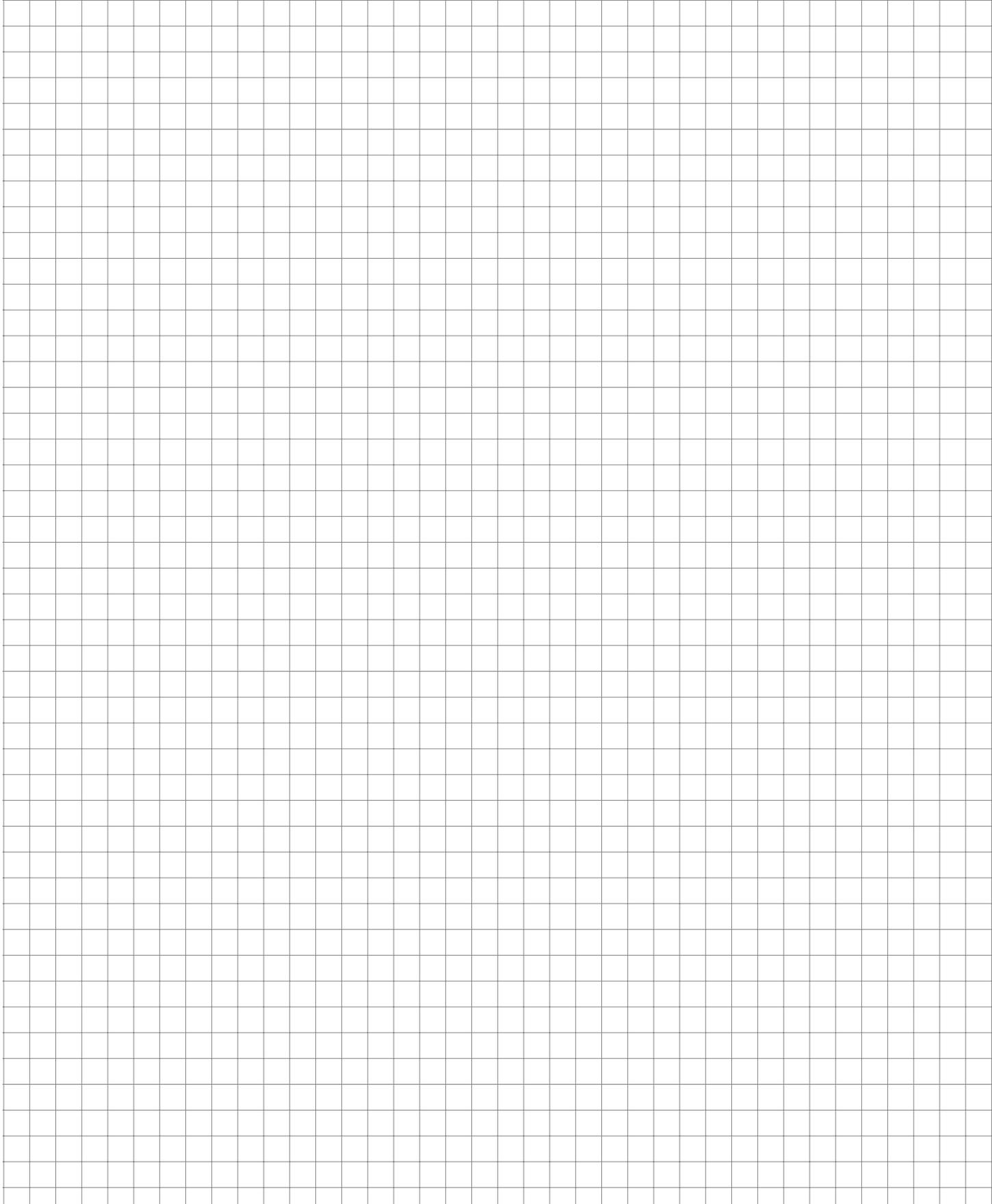
Jemand legt 20.000 € zu 6% zinseszinslich an. Auf welche Summe wächst das Kapital in 5 Jahren an bei

- a) jährlicher,
- b) halbjährlicher,
- c) monatlicher,
- d) täglicher oder
- e) stetiger Verzinsung?



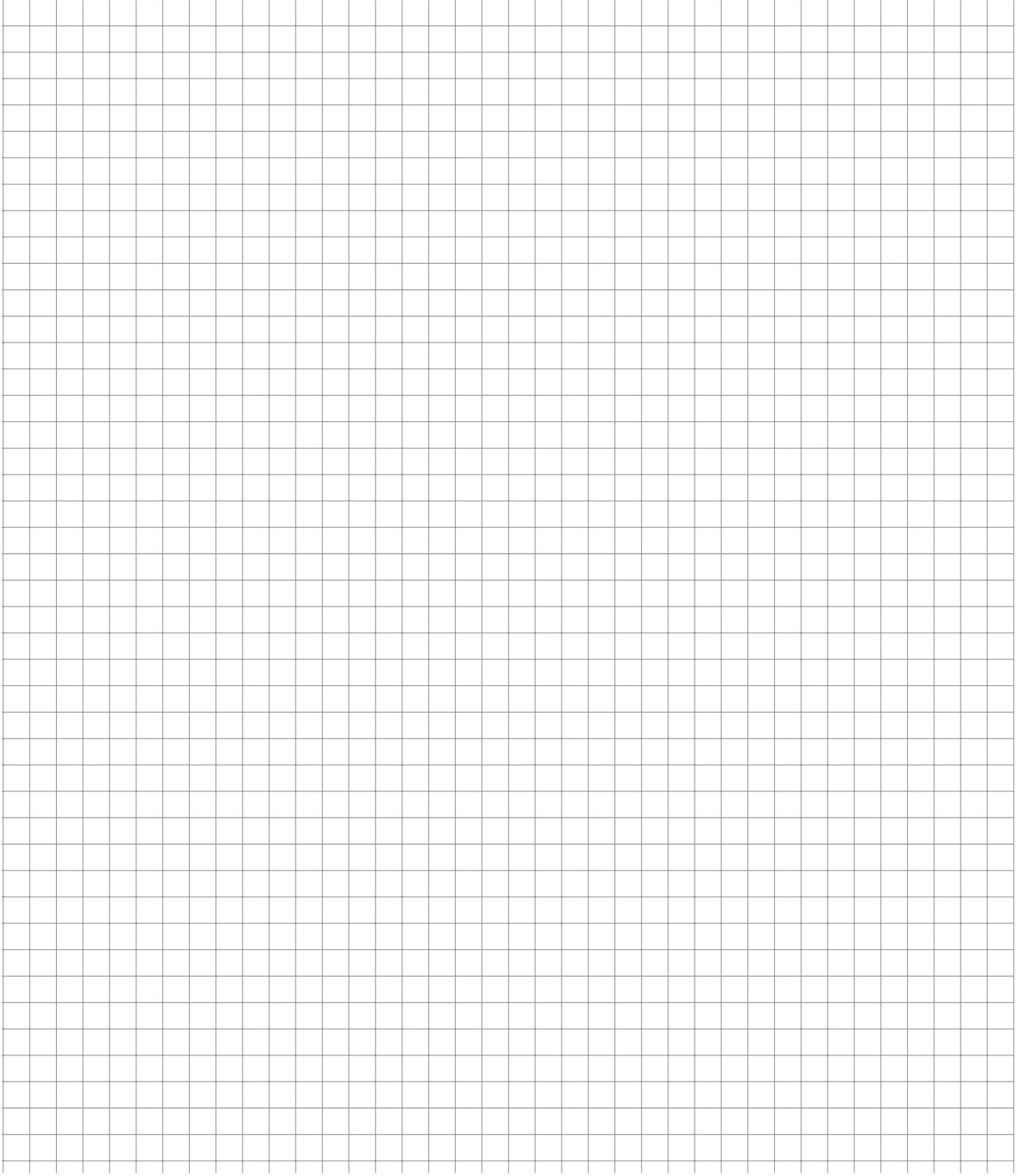
Aufgabe 5

Eine Kapitalanlage hat sich in 10 Jahren verdoppelt. In der ersten Hälfte der Laufzeit betrug der Zinssatz 4%. Wie hoch war er in der zweiten Hälfte?



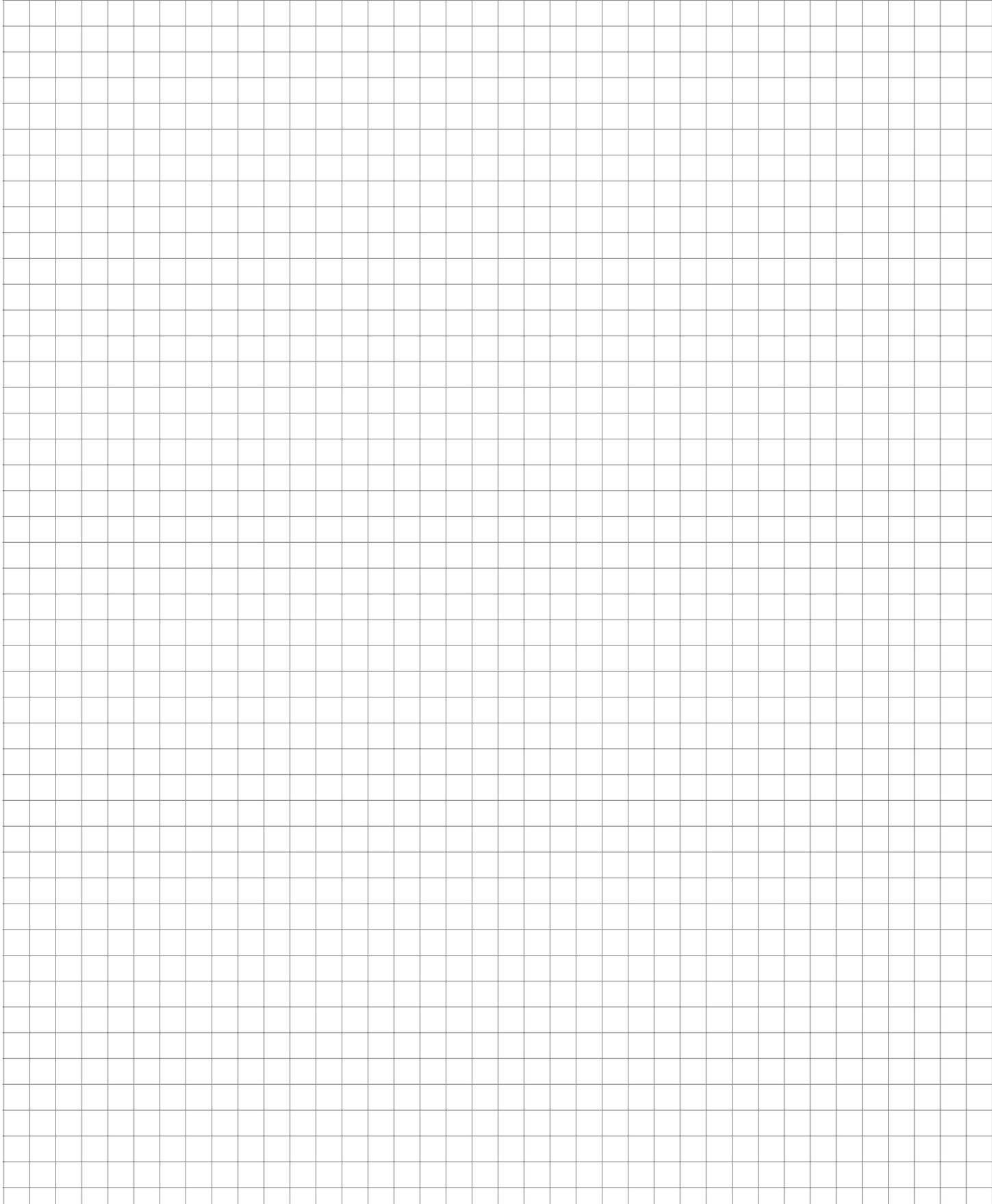
Aufgabe 6

- a) In welcher Zeit verdoppelt sich bei Zinseszinsrechnung jedes beliebige Anfangskapital K bei einem jährlichen Zinssatz von $p = 5\%$?
- b) Wie muss der jährliche Zinssatz bei Zinseszinsrechnung aussehen, wenn sich das Anfangskapital in 10 Jahren verdoppeln soll?



Aufgabe 7

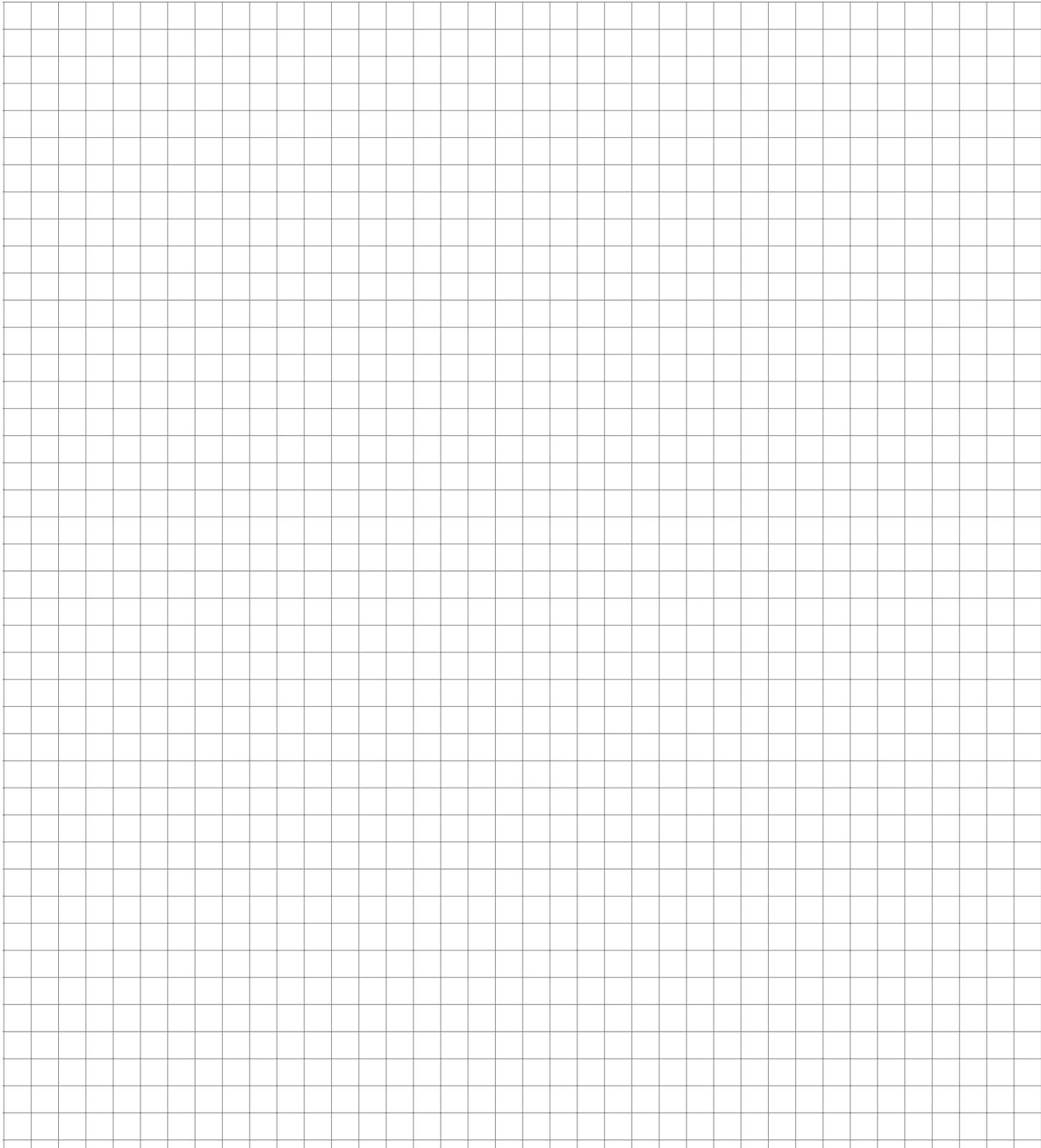
Wie lange müssen 10.000 € angelegt werden, damit sie bei einer jährlichen Verzinsung von 7% ein Endkapital von 25.000 € erbringen?



Aufgabe 8

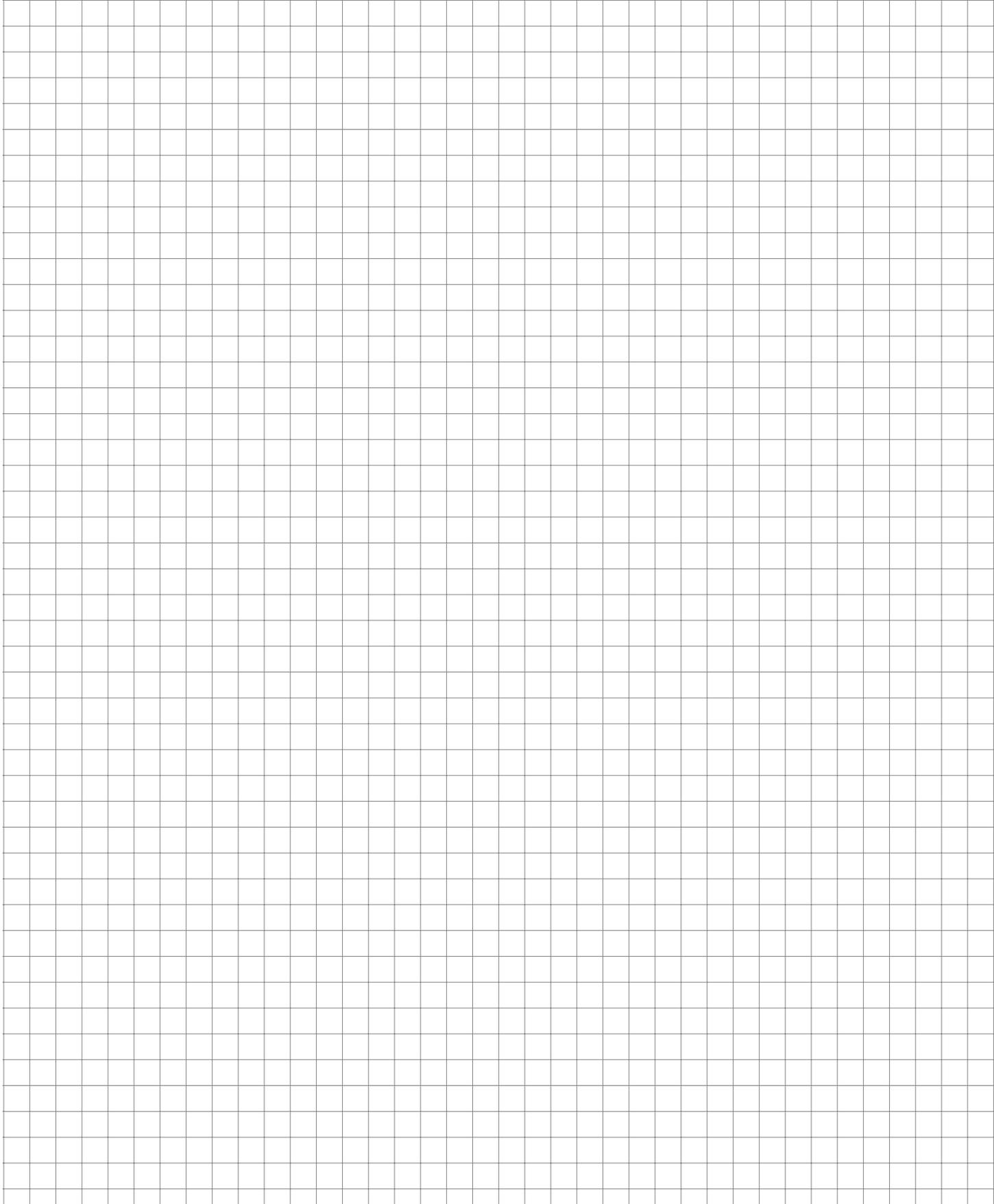
Ein Waldbestand hat einen Tageswert von 1 Mio. €. Aufgrund von Abholzung und Umweltschäden, nimmt der mengenmäßige Bestand jährlich um 10% stetig ab; der Preis des Holzes steigt halbjährlich um 4%.

- Welchen Tageswert hat der Wald in 10 Jahren?
- Nach wie viel Jahren hat sich der Wert des Waldes halbiert?



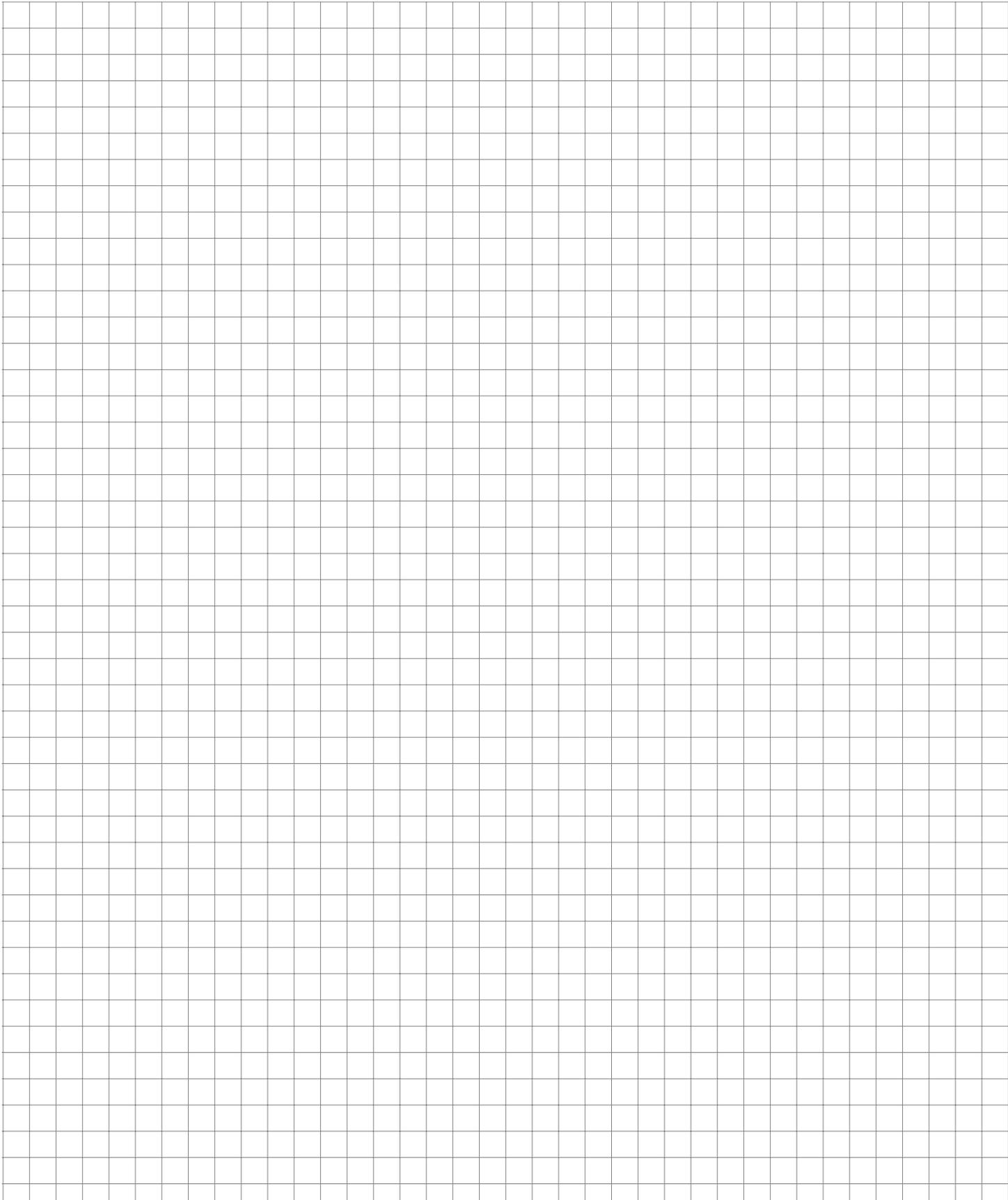
Aufgabe 9

Die Effektivverzinsung einer Anlage, die vierteljährlich verzinst wird, ist 6,14%. Wie hoch ist der (nominale) Jahreszinsfuß?



Aufgabe 10

Jemand zahlt am Ende eines jeden Jahres 1000 € auf sein Sparkonto ein, welches zu 3% verzinst wird. Wie hoch ist der gesparte Betrag einschließlich Zinseszins am Ende des 10. Jahres?

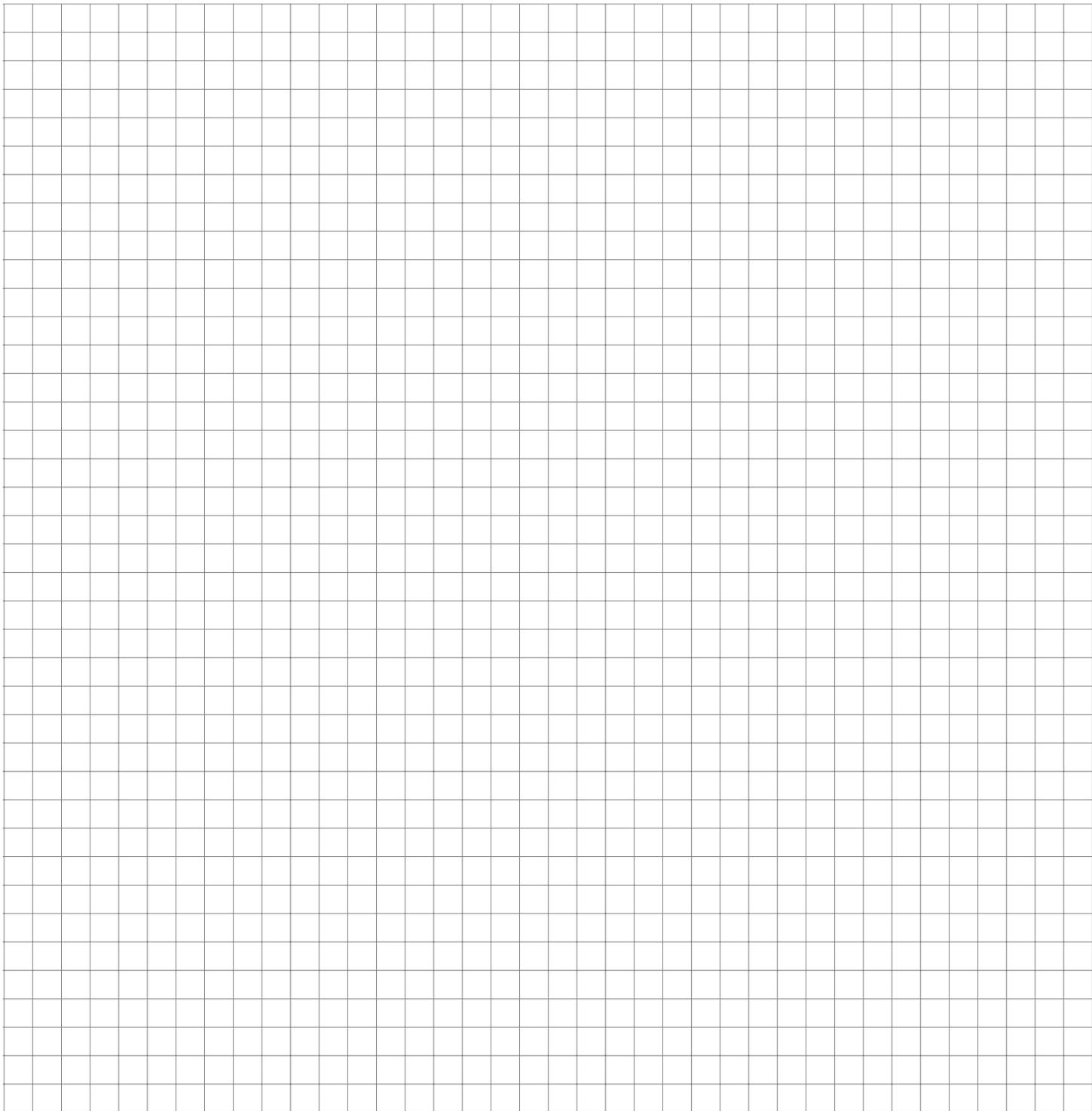


Aufgabe 11

Für den Kauf einer Maschine stehen folgende Zahlungsalternativen zur Auswahl:

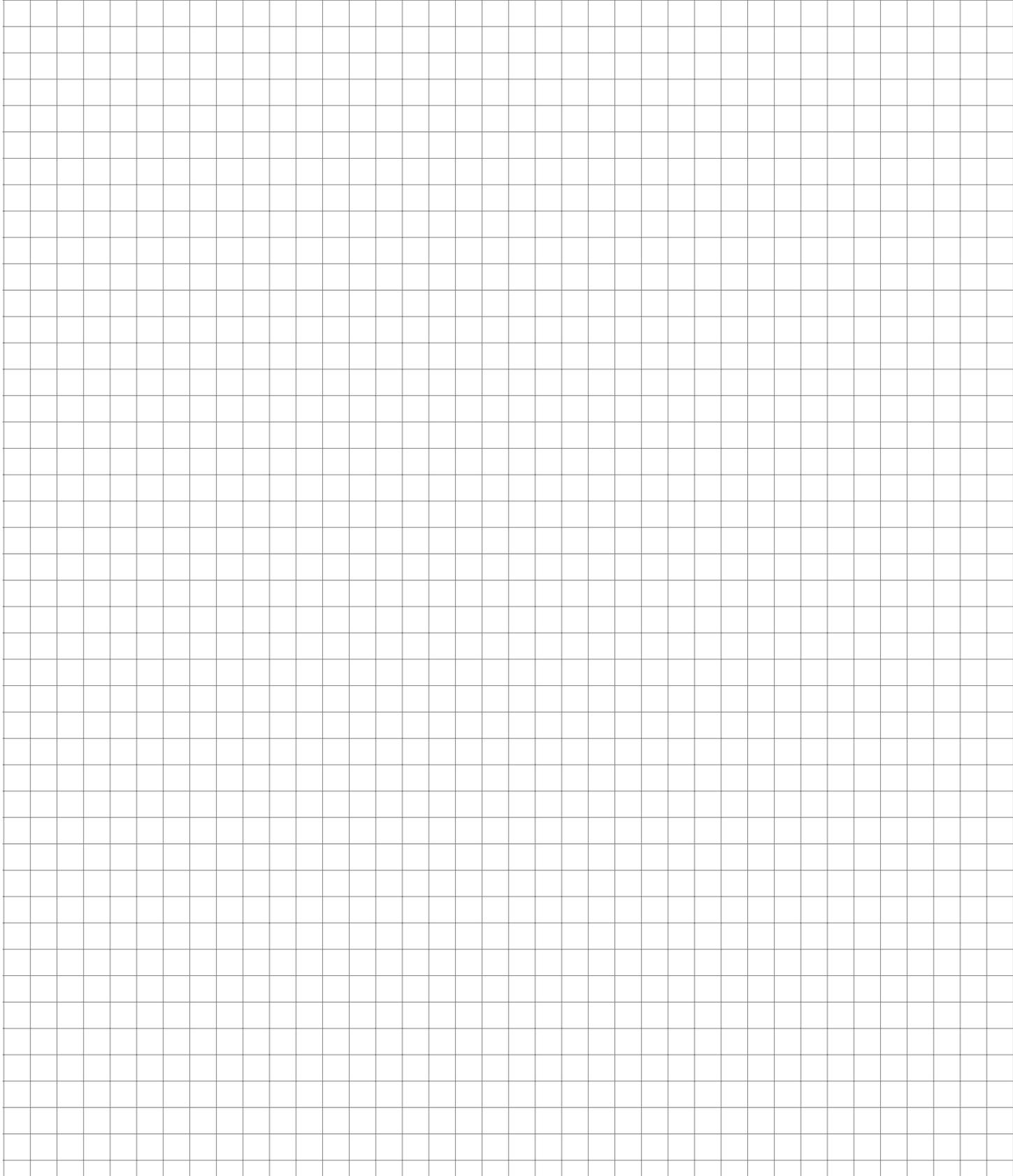
- a) 8.000 € sofort, 4 jährliche Raten zu je 2.000 €, zahlbar am Ende eines jeden Jahres
- b) vier jährliche Raten zu je 4.000 €, zahlbar am Ende eines jeden Jahres
- c) 5.000 € sofort, je 3.000 € am Ende des 2. und 3. Jahres und 5.000 € am Ende des 4. Jahres.

Für welche Zahlungsalternative (Barwertvergleich) soll man sich bei einem Zinssatz von 10% entscheiden?



Aufgabe 12

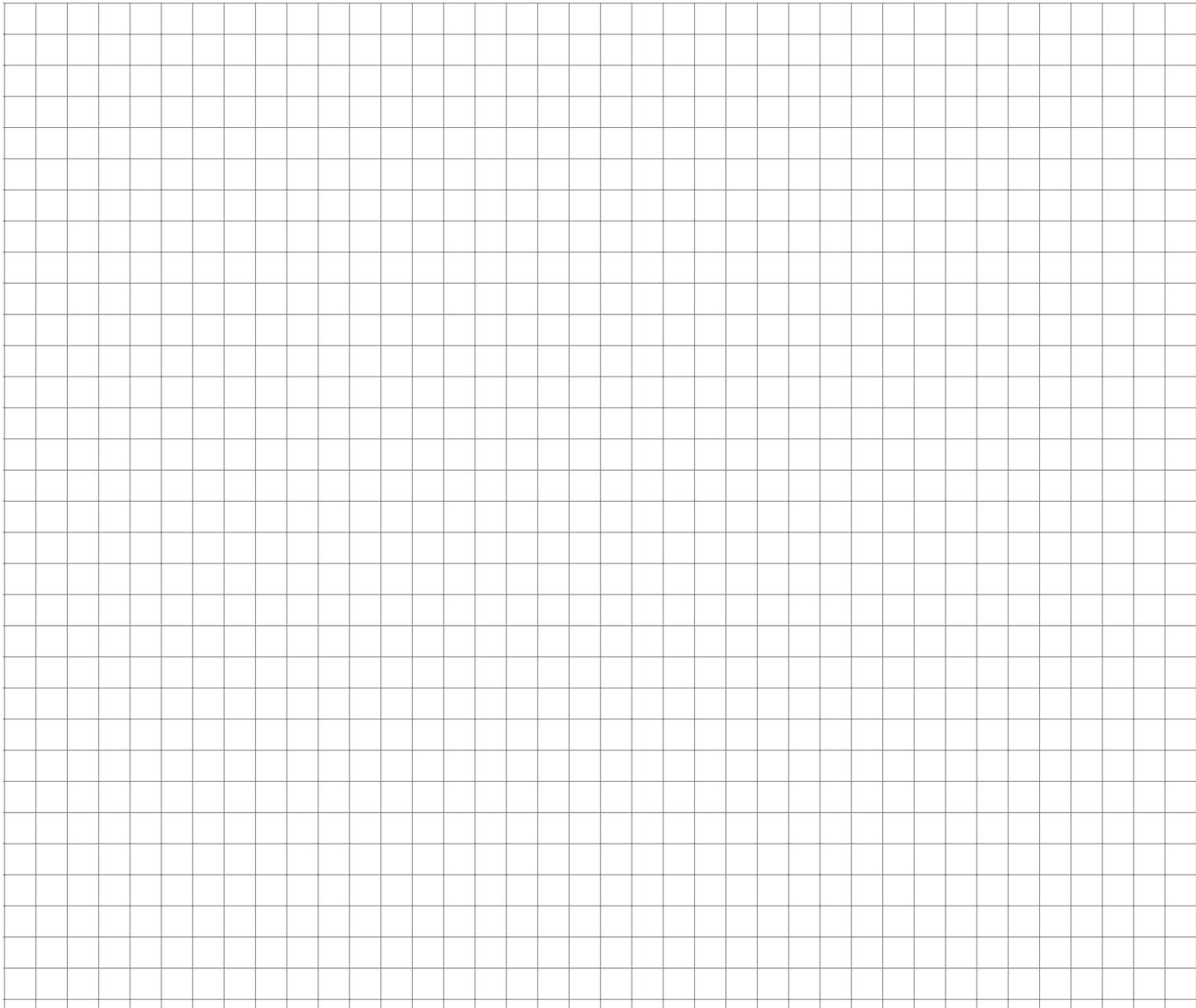
Ein heute 55-jähriger Arbeitnehmer hat in 10 Jahren einen Anspruch auf eine monatliche Betriebsrente von 500 €, die vorschüssig bezahlt wird. Durch welche Gegenleistung kann sie heute bei einem Zinssatz von 6% abgelöst werden, wenn die Lebenserwartung von 77 Jahren angenommen wird.



Aufgabe 13

Ein Bausparer hat einen Bausparvertrag über 50.000 € Bausparsumme abgeschlossen. Der Habenzins beträgt 3%. Der Bausparvertrag ist zuteilungsreif, wenn 40% der Bausparsumme eingezahlt sind.

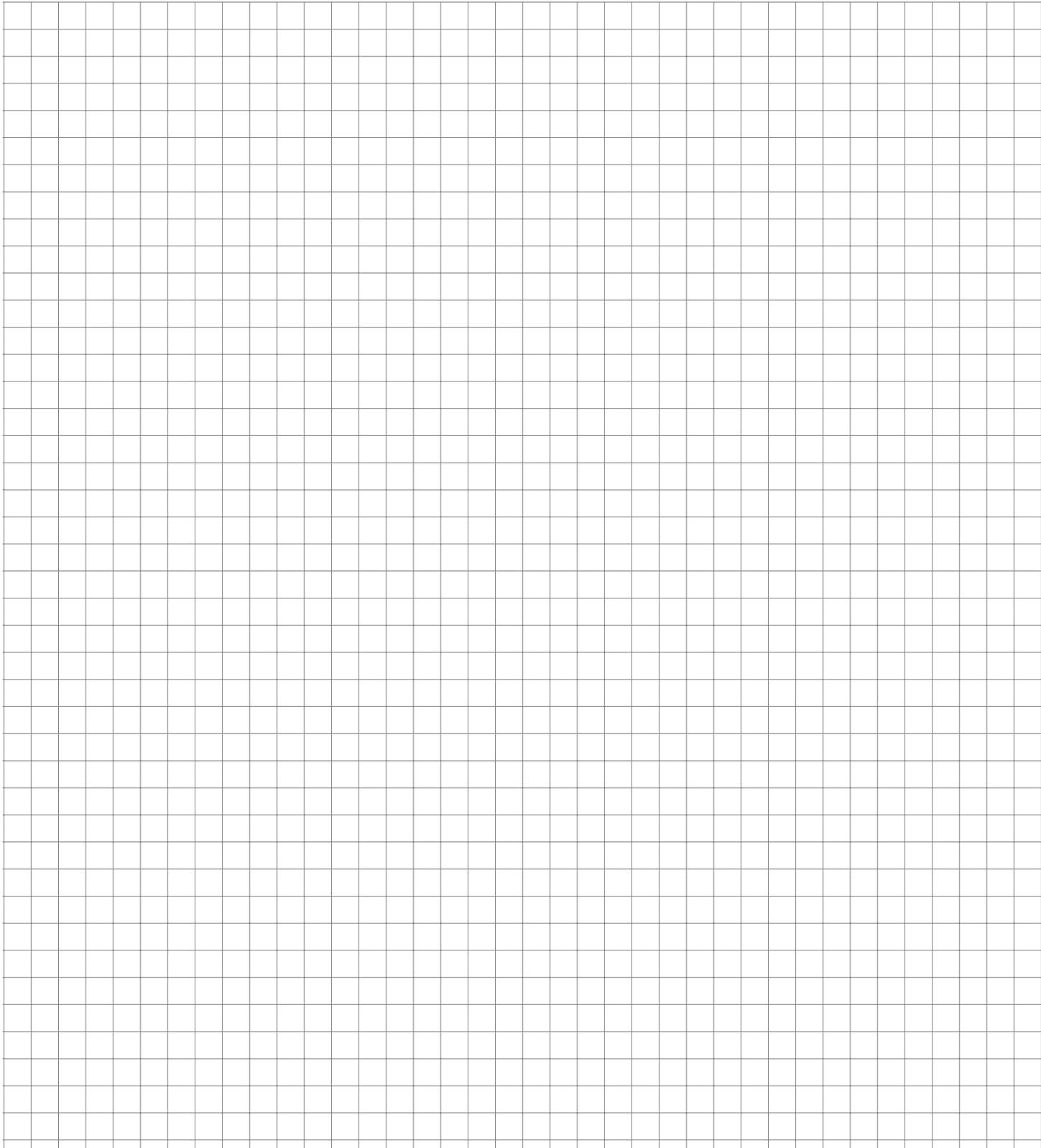
- a) Nach wieviel Jahren ist der Bausparvertrag zuteilungsreif, wenn
- ▶ 3.000 € jährlich nachschüssig
 - ▶ 3.000 € jährlich vorschüssig
 - ▶ 300 € monatlich nachschüssig einbezahlt werden?
- b) Welche Sparrate muß der Bausparer
- ▶ jährlich nachschüssig
 - ▶ jährlich vorschüssig
 - ▶ monatlich nachschüssig
- leisten, damit der Vertrag in vier Jahren zuteilungsreif ist?



Aufgabe 14

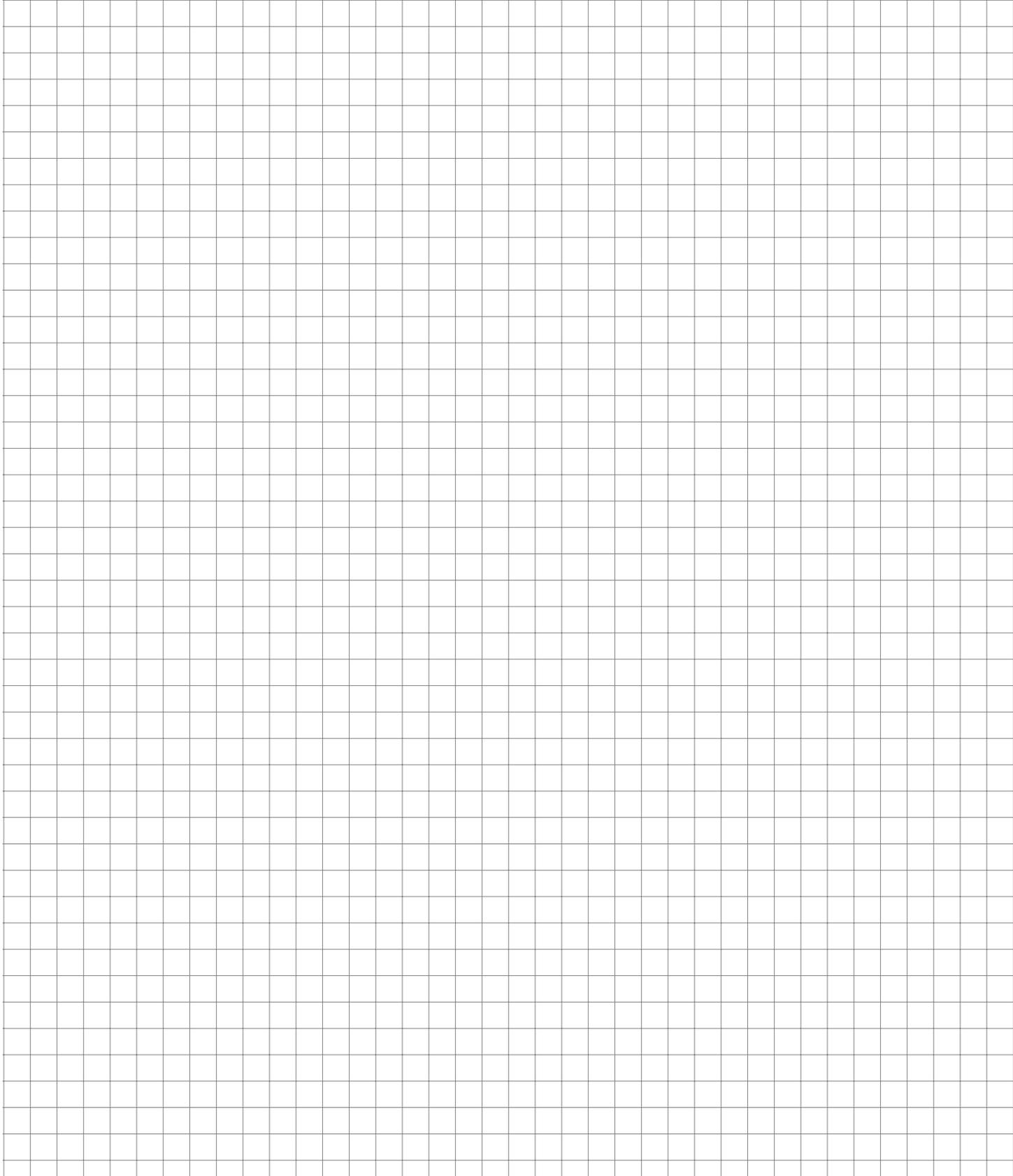
Das Vermögen von A ist mit 100.000 € doppelt so hoch wie das Vermögen von B. A spart jährlich 4.000 € nachschüssig, während B 8.000 € spart. Die jährliche Verzinsung ist 6%.

- Nach wie vielen Jahren sind die Vermögen von A und B gleich hoch?
- Wie hoch muss die jährliche Sparleistung von B sein, damit er in 10 Jahren das gleiche Vermögen wie A hat?



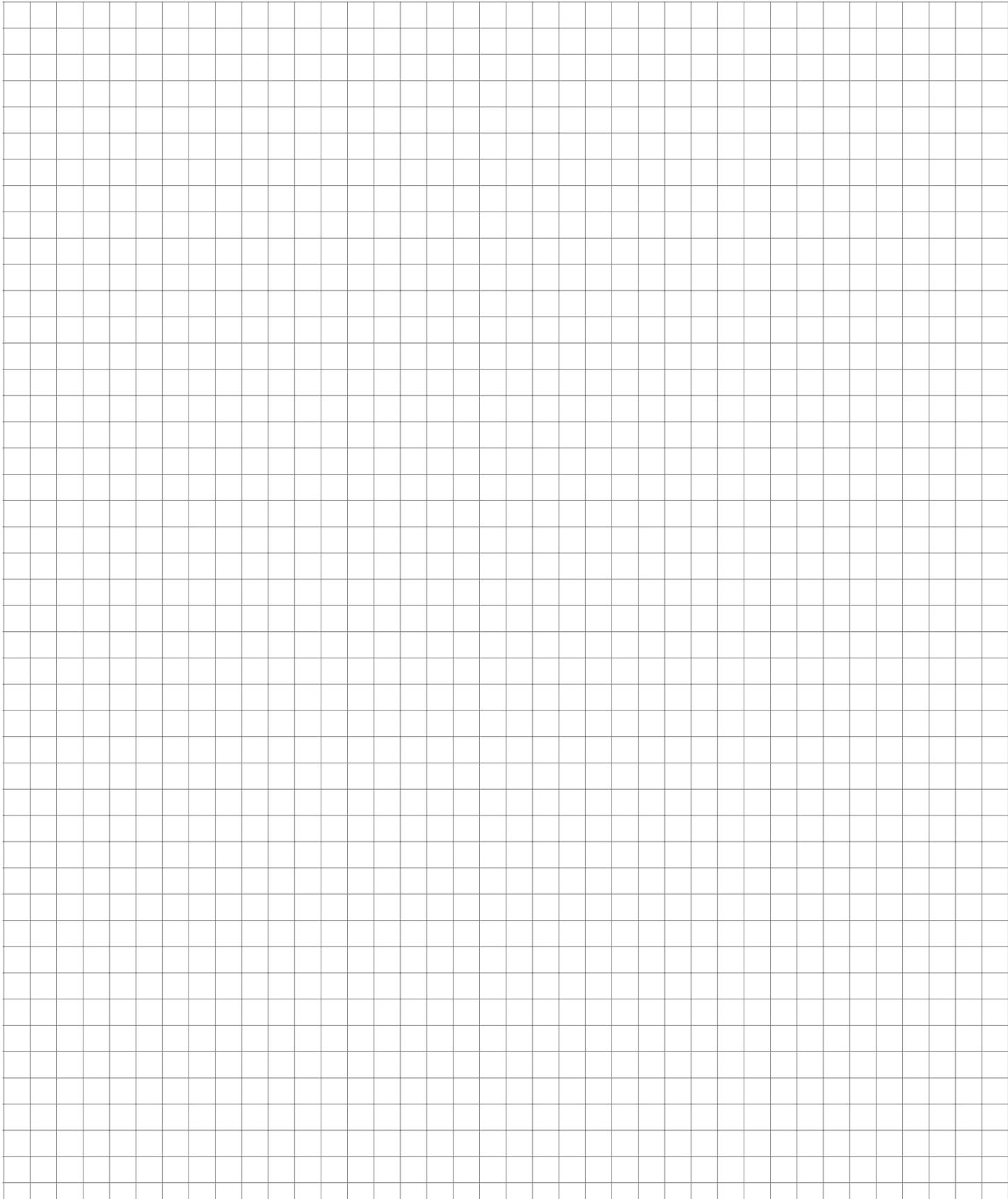
Aufgabe 15

Jemand möchte von seinem 63. Geburtstag an 20 Jahre lang eine jährliche nachschüssige Rente in Höhe von 20.000 € ausbezahlt bekommen. Welchen Betrag muß er dafür 30 Jahre lang bis zu seinem 63. Geburtstag monatlich vorschüssig einbezahlen? Der Zinsfuß betrage 5,5% jährlich.



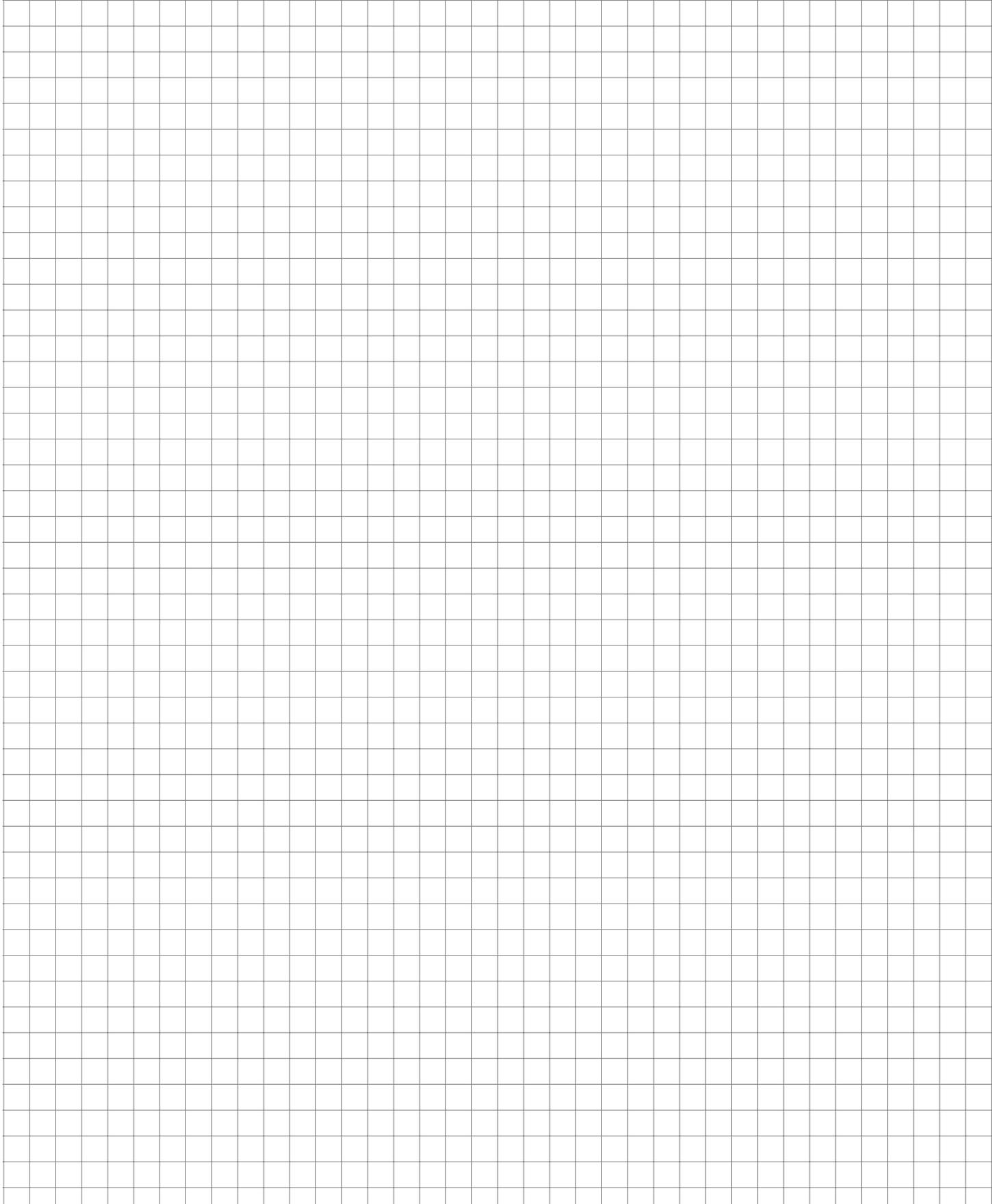
Aufgabe 16

Als Kaufpreis für ein Haus hat der Erwerber 5 Raten von je 100.000 € zu leisten. Die erste Rate muss sofort bezahlt werden, die übrigen in jährlichen Abständen. Mit welchem Betrag könnte bei 5% Zins die ganze Schuld sofort beglichen werden?



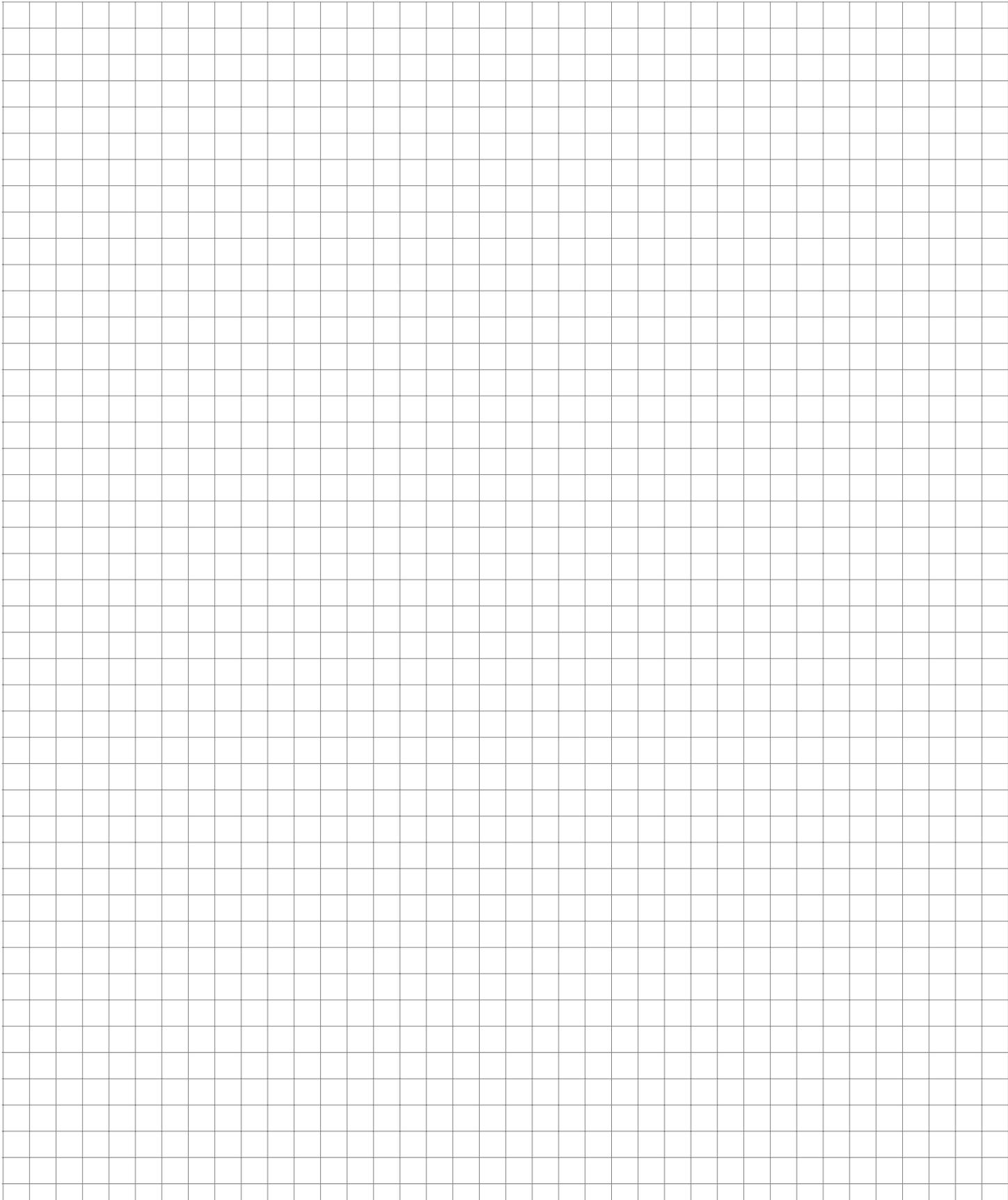
Aufgabe 17

Welches Kapital benötigt man heute, wenn daraus 5 Jahre lang zu jedem Quartalsbeginn eine Spende von 1000 € überwiesen werden soll? Die vierteljährliche Verzinsung ist 1%.



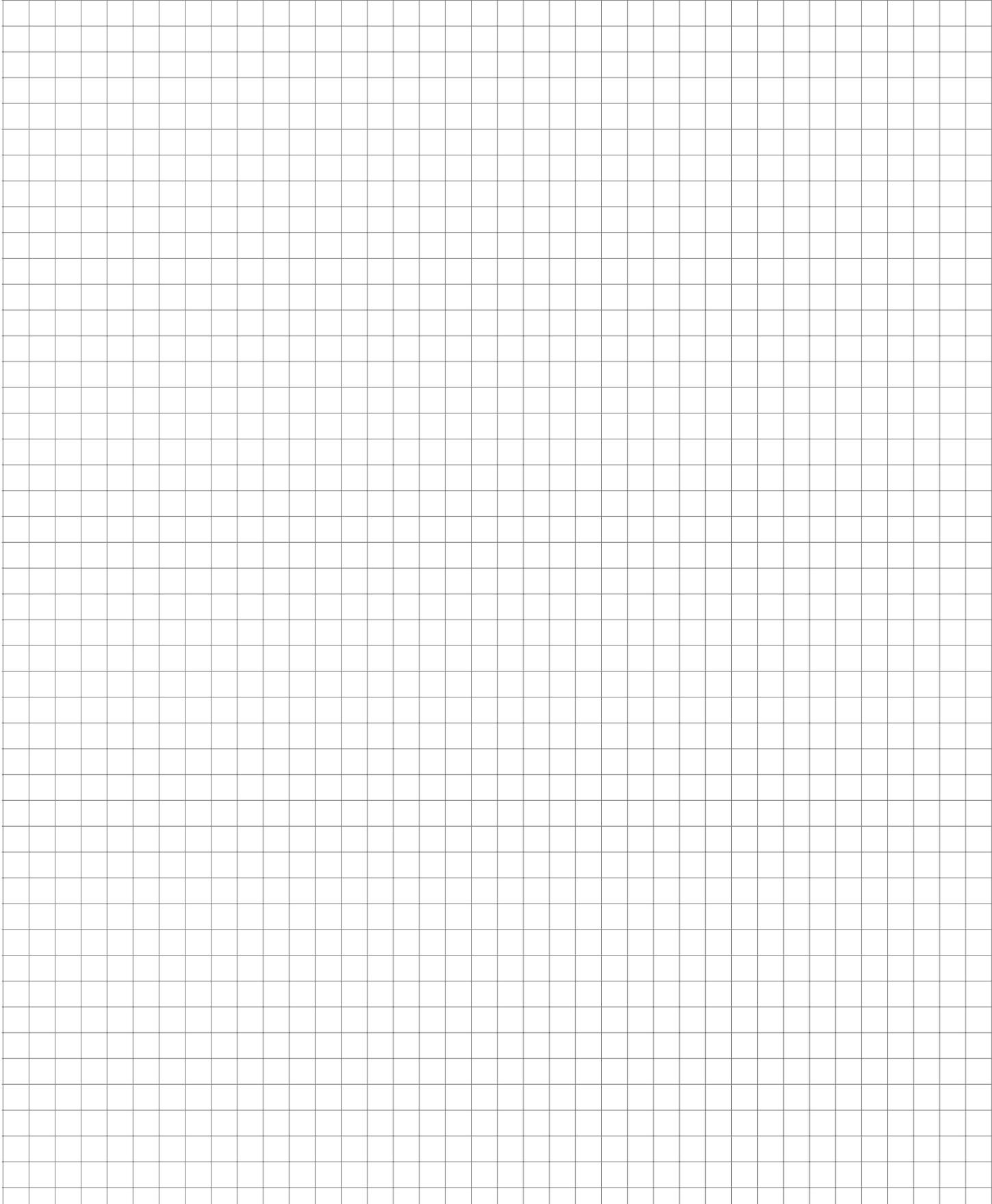
Aufgabe 18

In einer Pensionszusage wird eine Rente über 5000 € zu Beginn eines Quartals 10 Jahre lang bezahlt. Welchen Betrag muss die Firma bei einem Jahreszinssatz von 5% am Anfang der Rentenzahlungen für die Pensionsrückstellung (Barwert) einsetzen?



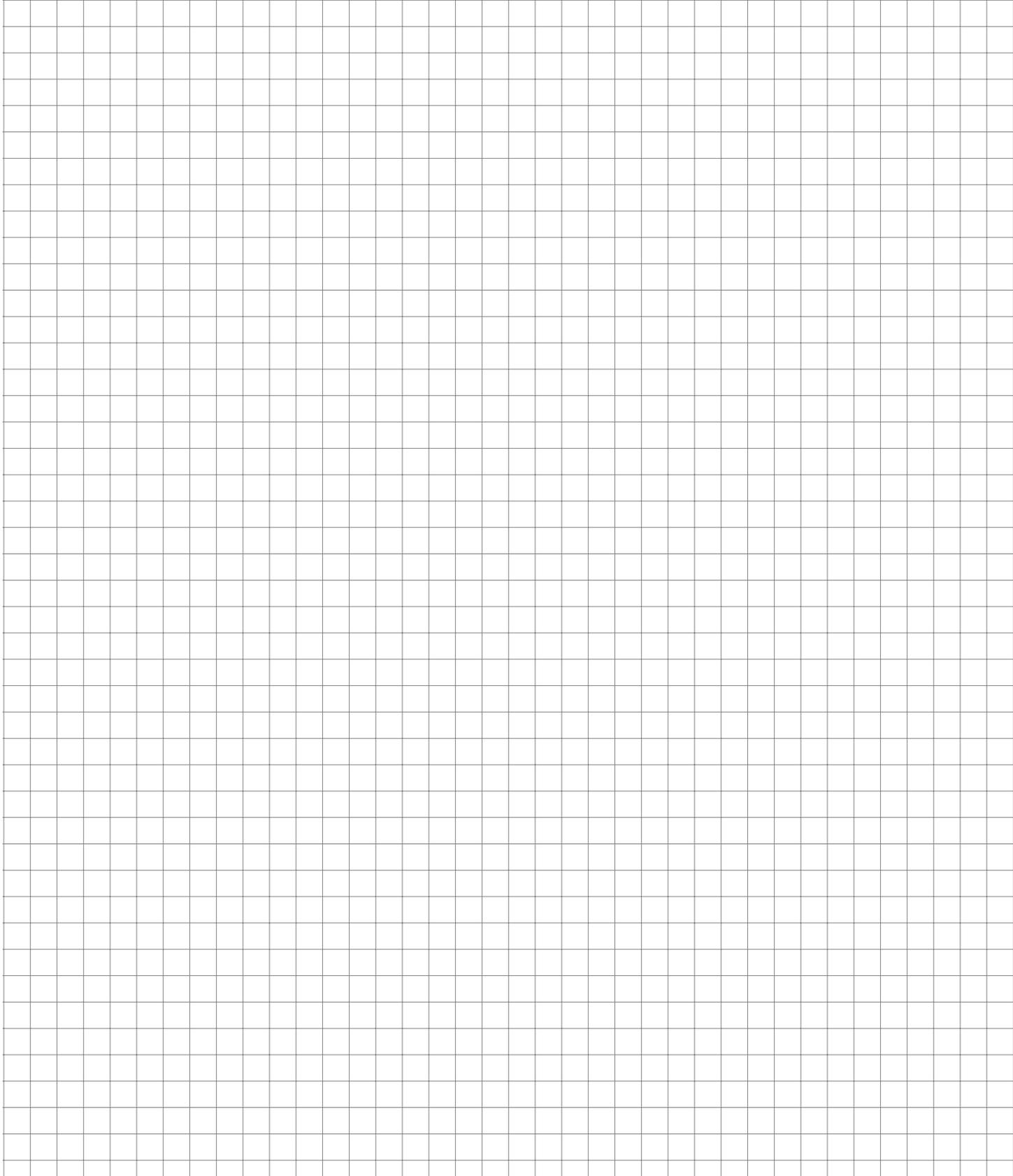
Aufgabe 19

Ein Unternehmen nimmt einen Kredit über 500.000 € zu 7% Zins auf. Der Kredit ist in fünf Jahren mit gleichbleibenden Tilgungsraten zu tilgen. Erstellen Sie den Tilgungsplan.



Aufgabe 20

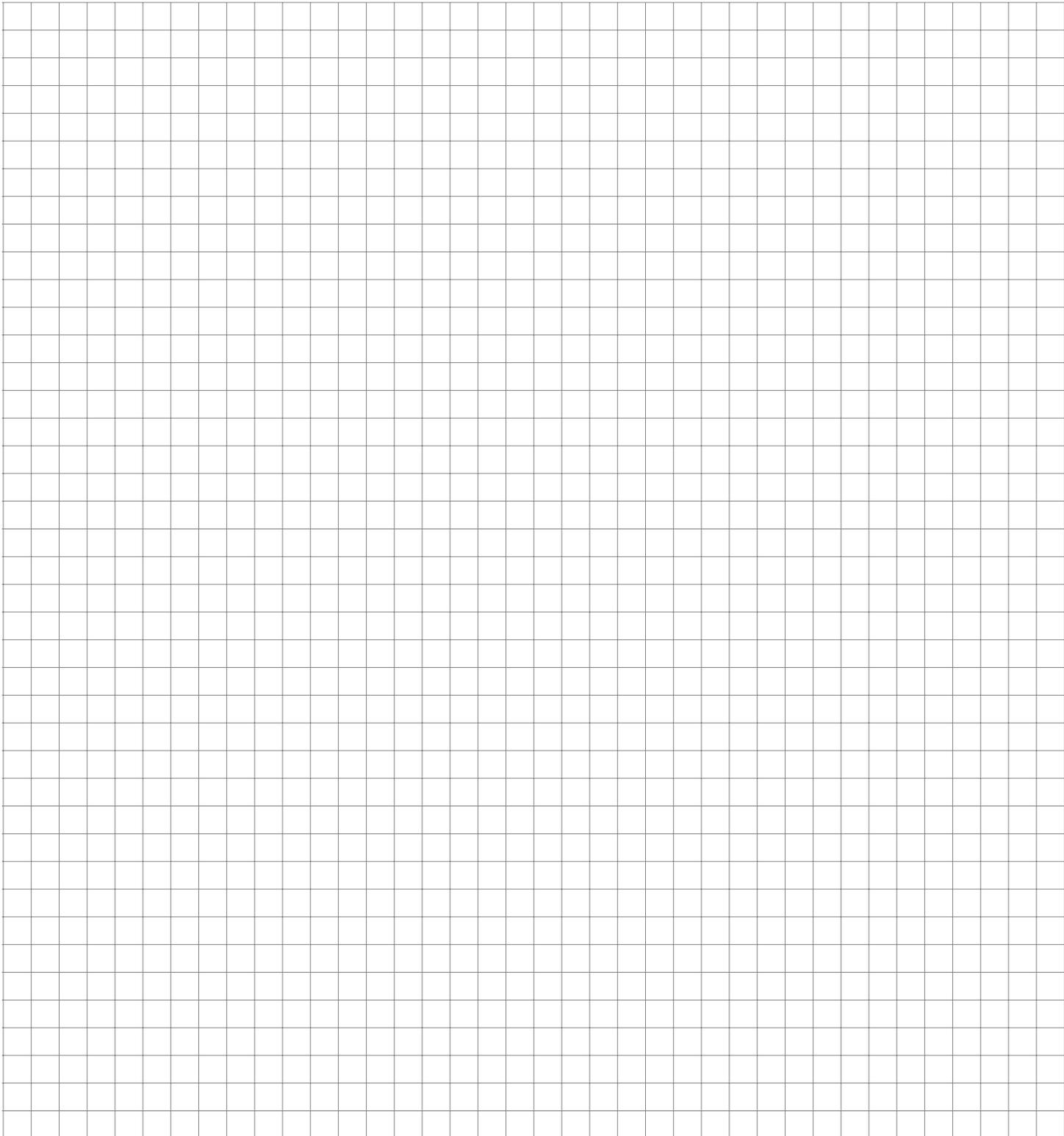
Ein Auto, das 57.000 € kostet, soll durch einen Kredit finanziert werden. Die Hausbank bietet einen Kredit, der in zwei gleich hohen jährlichen Tilgungsraten zurückzuzahlen ist, mit folgenden Konditionen an: Zins p.a. 8%, Auszahlung 90%. Wie hoch ist der Effektivzinsfuß für den Kredit?



Aufgabe 21

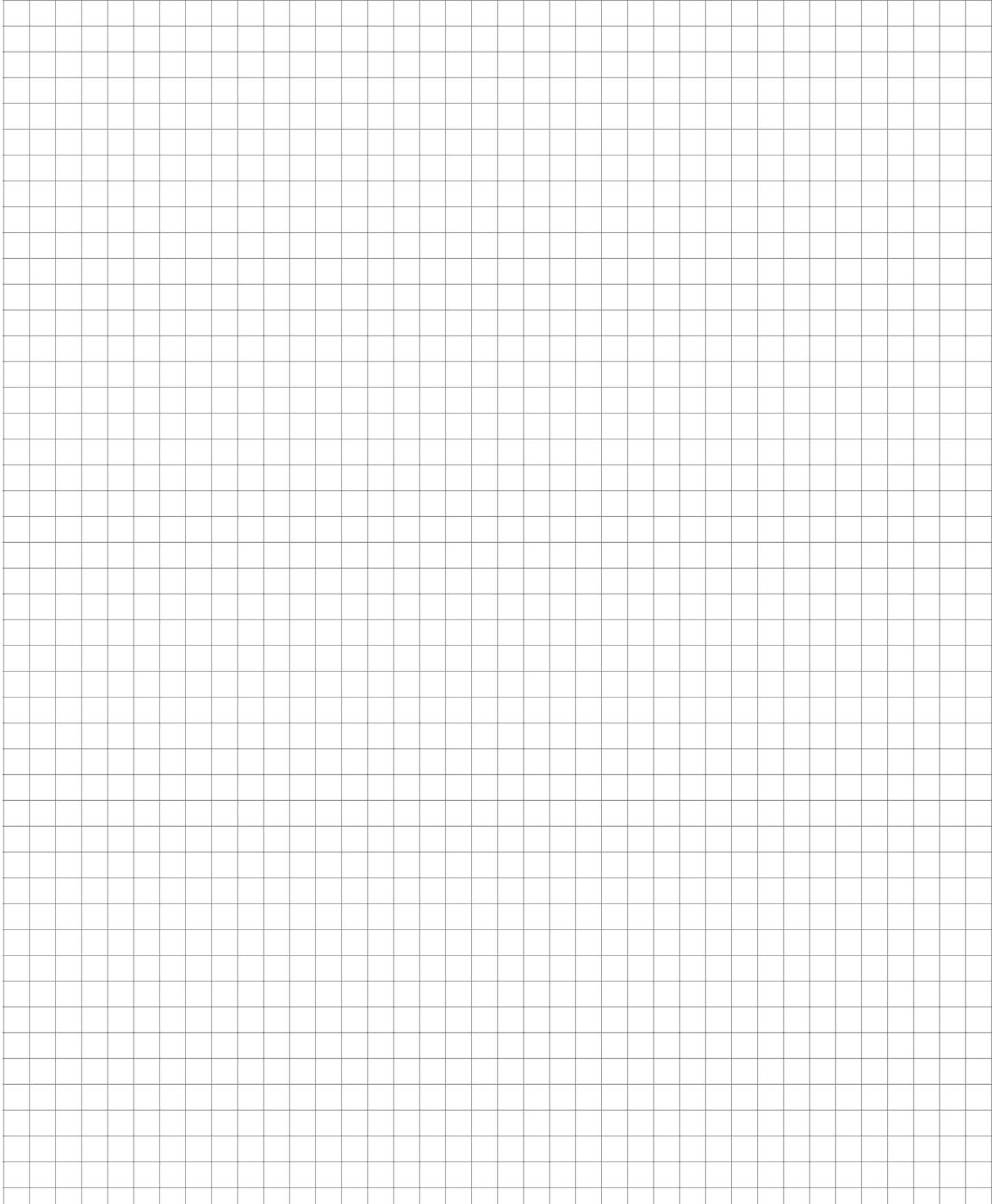
Eine GmbH nimmt einen Kredit über 2.000.000 € zu 10% Zins auf, der mit gleichbleibenden Tilgungsraten in 20 Jahren zu tilgen ist. Berechnen Sie

- a) die Restschuld am Anfang des 10. Jahres,
- b) die Restschuld nach 15 Jahren,
- c) den Zinsbetrag im 12. Jahr und
- d) die Aufwendungen im 18. Jahr.



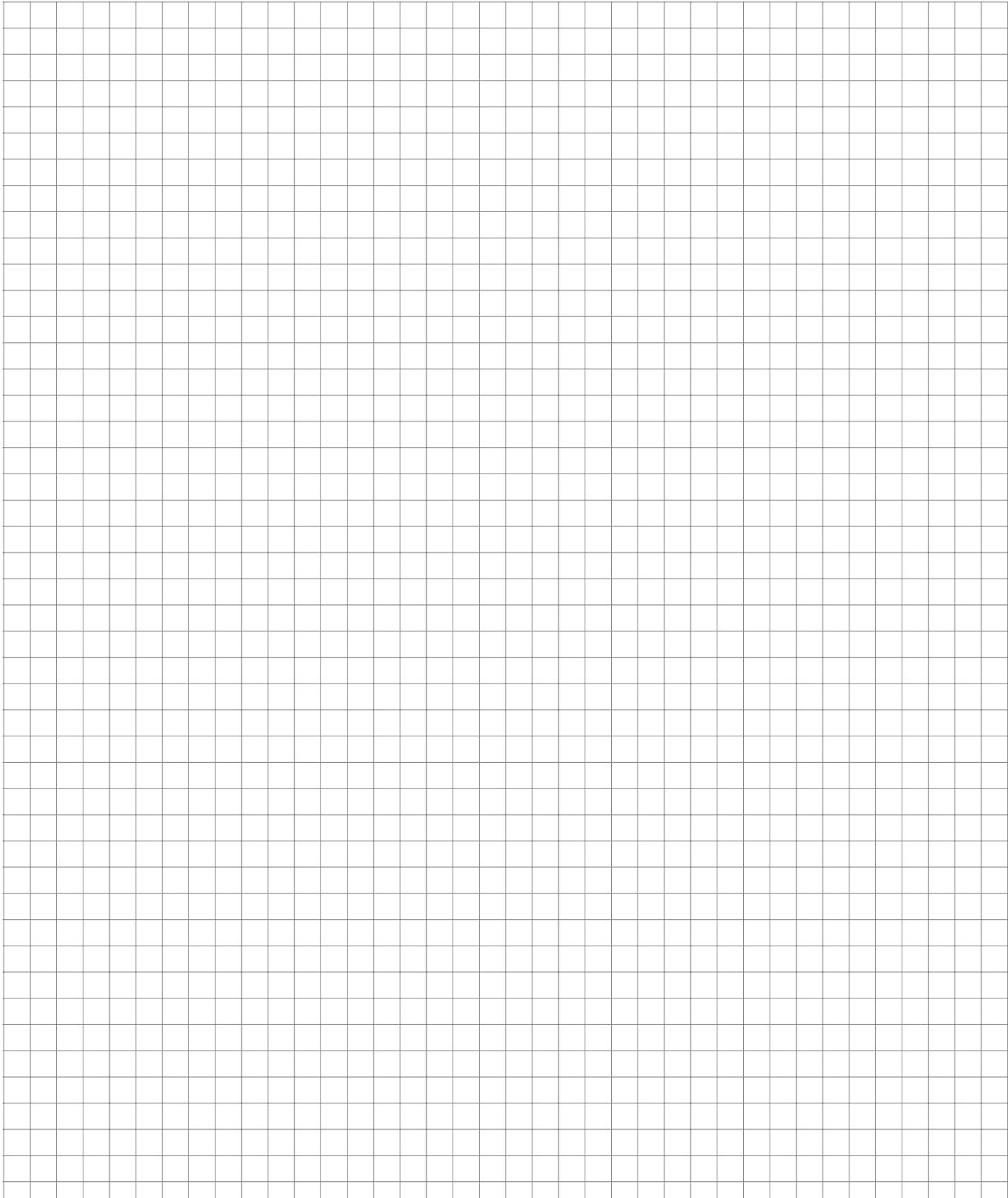
Aufgabe 22

Eine Anleihe von 1.000.000 € soll mittels gleichbleibender Annuität zu 7% verzinst und innerhalb der nächsten 5 Jahre getilgt werden. Wie gestaltet sich der Tilgungsplan?



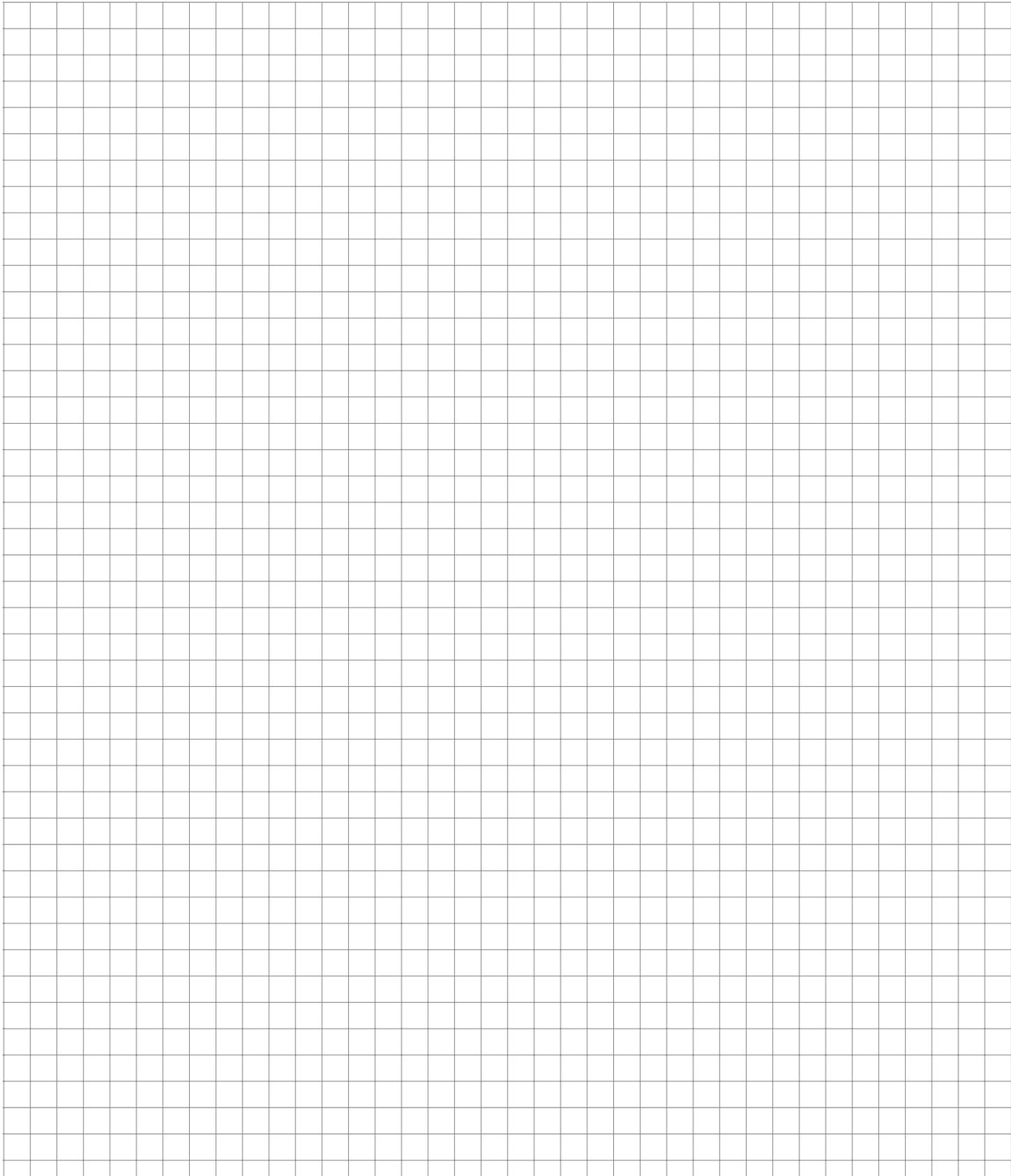
Aufgabe 23

Nach 20 Jahren beträgt die Restschuld eines Annuitätenkredits, der zu 8% verzinst wird, eine Gesamtlaufzeit von 25 Jahren hat und mit gleich hohen Annuitäten getilgt wird, noch 37.403,27 €. Erstellen Sie den Tilgungsplan der letzten 5 Jahre.



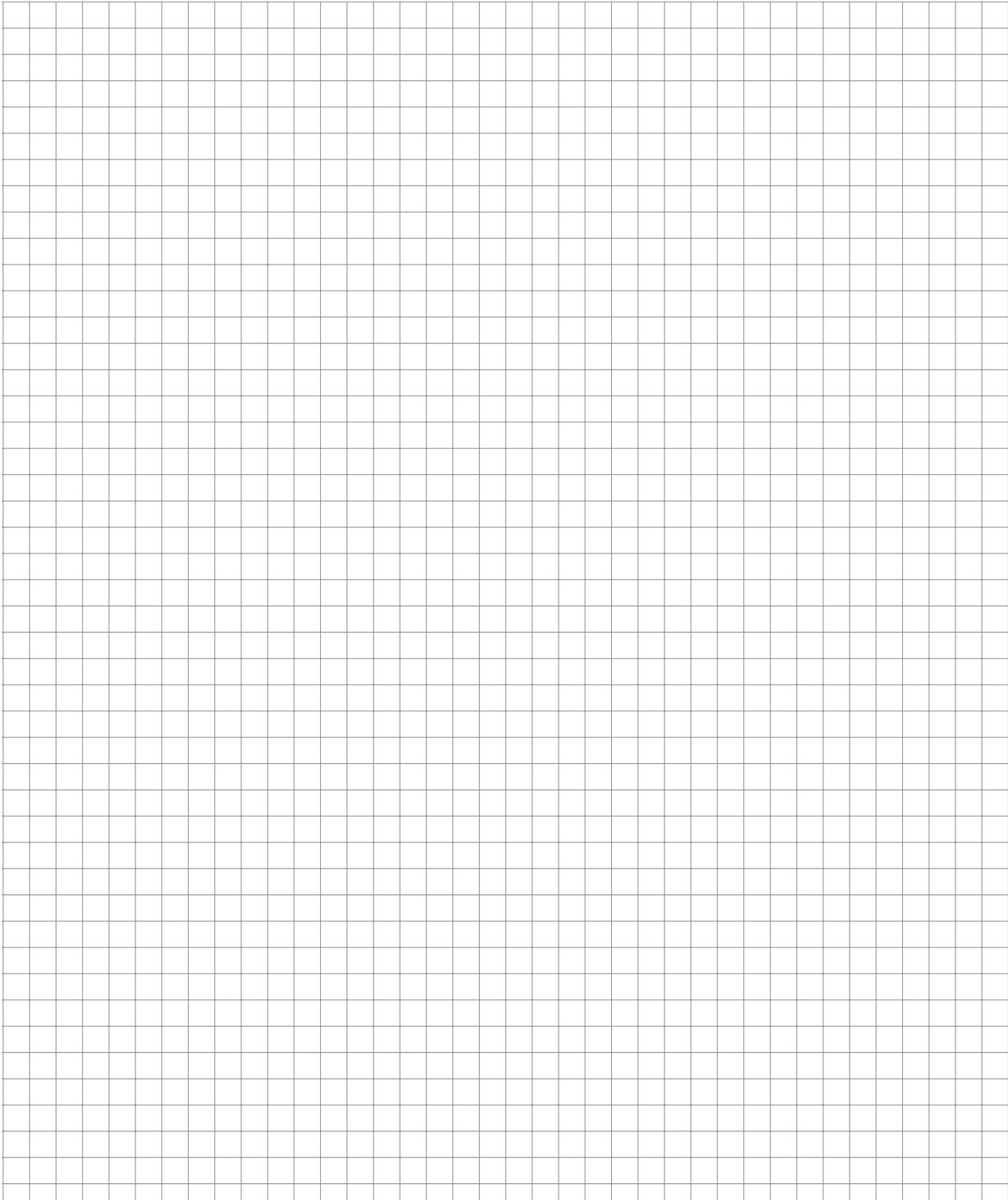
Aufgabe 24

Ein festverzinsliches Wertpapier ist mit einem Kupon von 8 % p.a. und einem Rücknahmekurs von 103 % nach 15 Jahren ausgestattet. Welches ist der Preis (Kurs) des Wertpapiers bei einer Restlaufzeit von 7 Jahren unmittelbar nach der 8. Zinszahlung, wenn dem Erwerber eine dem dann herrschenden Marktzinsniveau entsprechende Umlaufrendite von 9 % garantiert wird?



Aufgabe 25

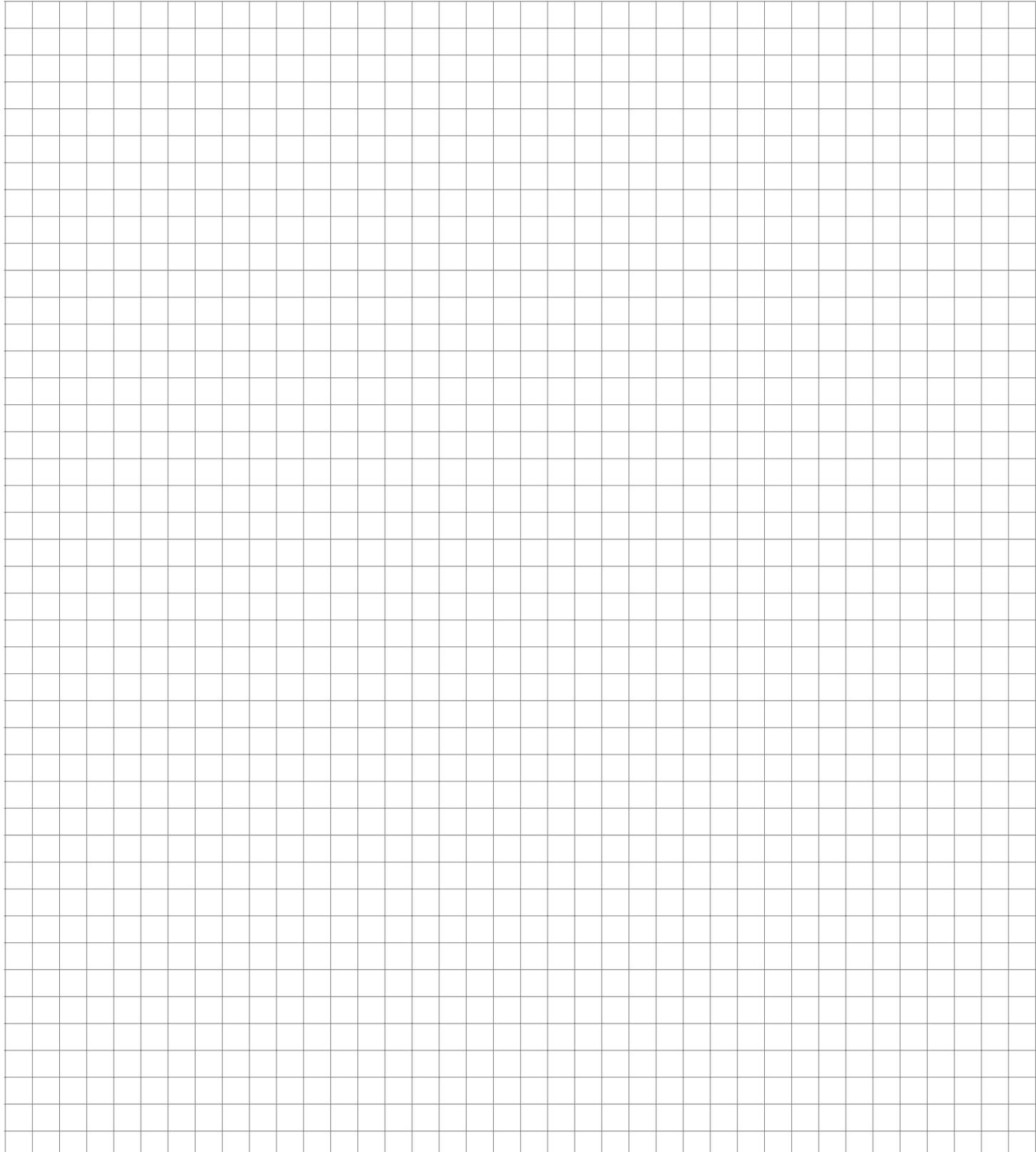
Von welcher durchschnittlichen jährlichen Inflationsrate können Sie ausgehen, wenn ein Kapital, das in zehn Jahren nominell 1000 € beträgt, dann einen Realwert von 900 € hat?
(Es wird angenommen, dass der Betrag zuhause im Kleiderschrank lag.)



Aufgabe 26

Zu welchem konstanten jährlichen Zins muss ein Betrag K_0 am 1.1.2008 angelegt werden damit am 31.12.2011 die Inflation ausgeglichen wurde? Die jährliche Inflationsraten der betreffenden Jahre seien dabei

Jahr	2008	2009	2010	2011
Inflation in %	3	2	4	5

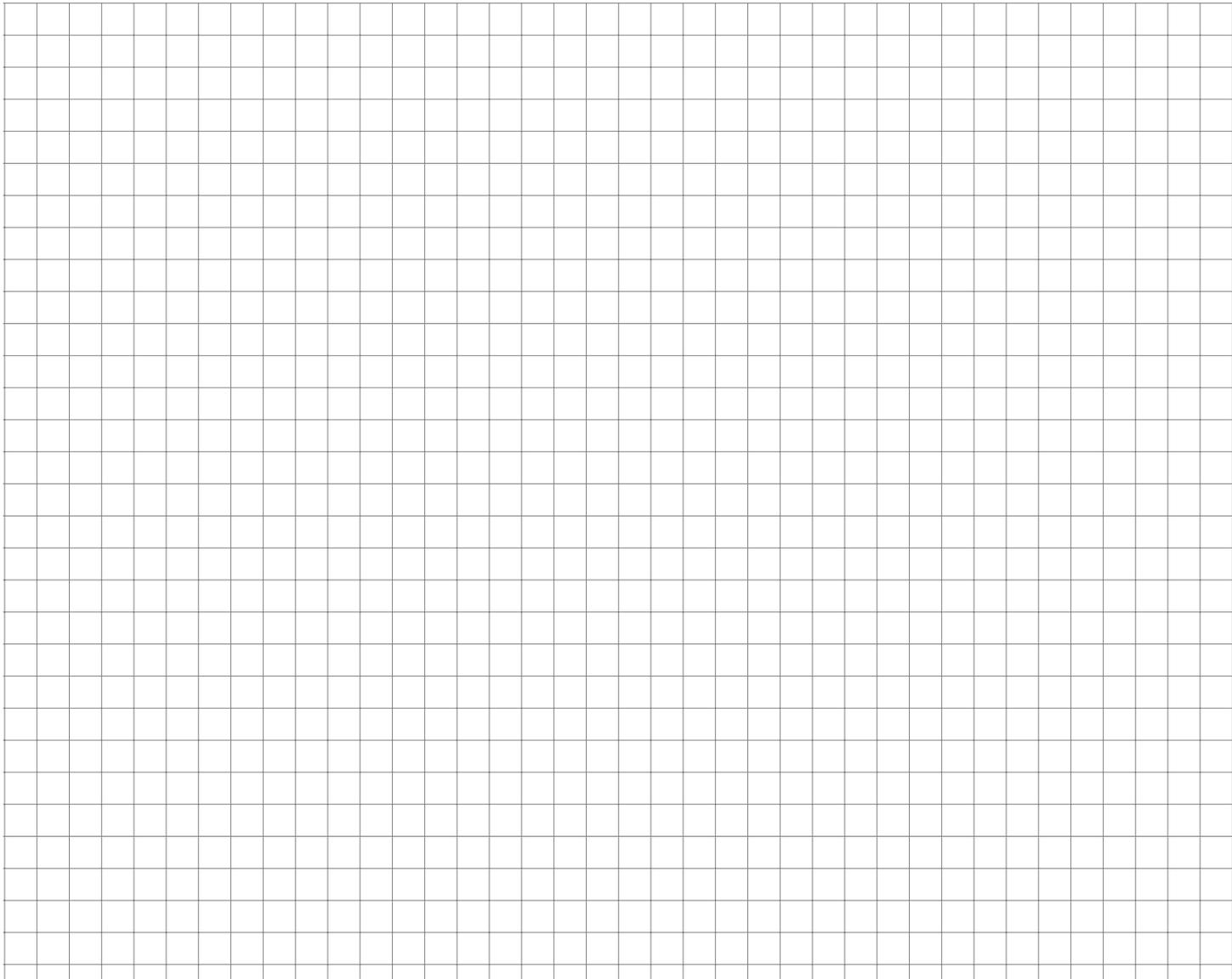


Aufgabe 28

Am 1. Januar des Jahres 1626 hat Peter Minuit, der damalige Gouverneur von Neu-Holland, die Insel Manhattan von indigenen Ureinwohnern gegen Glasperlen, Kleidung und Modeschmuck im Wert von 24 Dollar eingetauscht.

Wie hoch wäre der Wert dieser Summe am 1.1.2014 bei einem angenommenen nominalen jährlichen Zinssatz von 5% bei

- jährlicher (zinseszinslicher),
- monatlich anteilig unterjähriger bzw.
- stetiger Verzinsung?
- Wieviel hätte der durchschnittliche jährliche Zinssatz bei jährlich exponentieller Verzinsung betragen müssen, wenn der Wert von Manhattan heute bei 13 Billionen Dollar (Schätzung von New Yorker Immobilienmaklern für den reinen unbebauten Grundstückswert in 2014) liegen würde ?
- Wie lange hätten die Indianer mit dem Verkauf warten müssen, wenn sich der Wert von Manhattan von den 24 Dollar jährlich (exponentiell) um 15 % bis zu einem Wert von 1 Milliarde Dollar gesteigert hätte?



Lineare Programme

Aufgabe 31

Das junge Start-Up-Unternehmen „Pimp-My-Phone“ hat sich auf das Umgestalten von Mobiltelefonen in die Form von Politikerköpfen spezialisiert. Die von den Kunden am meisten nachgefragten Produkte sind die Pakete *Angela* (A) und *Gerhard* (G). Die Firma beschäftigt bereits 50 Angestellte und unterhält 10 Maschinen. Durch den Verkauf eines Paketes A wird ein Reingewinn von 15 € erzielt, der Verkauf eines Paketes G liefert im Vergleich dazu 20 € Gewinn.

Zur Herstellung eines Paketes A werden 20 Arbeitsstunden, 5 Maschinenstunden und 6 Einheiten Kunststoffformteile verwendet. Um ein Paket G herzustellen, werden 10 Arbeitsstunden, 5 Maschinenstunden und 10 Einheiten Kunststoff benötigt. Insgesamt stehen pro Monat 160 Arbeitsstunden pro Mitarbeiter (Nebenbedingung N_1), 200 Maschinenstunden pro Maschine (N_2) und 3000 Einheiten Kunststoff (N_3) maximal zur Verfügung.

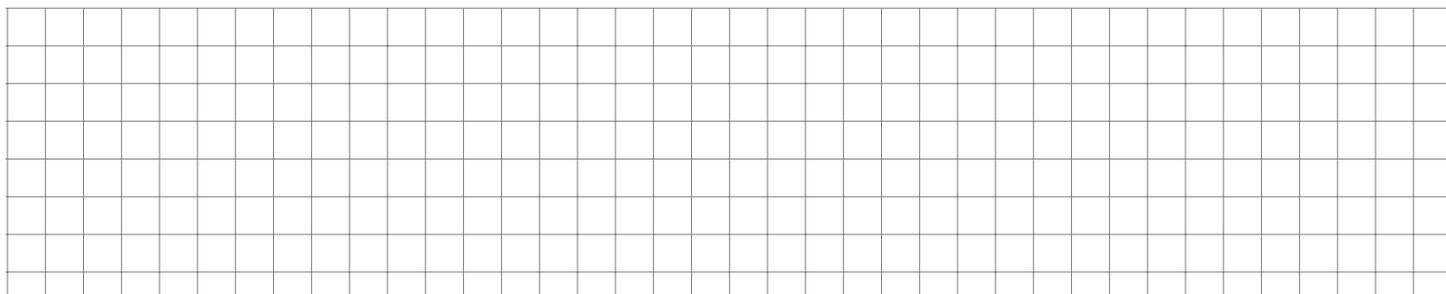
Die Geschäftsleitung möchte die Anzahl der hergestellten Pakete *Angela* (x_1) beziehungsweise *Gerhard* (x_2) hinsichtlich einer Gewinnmaximierung festlegen. Dabei kann davon ausgegangen werden, dass alle hergestellten Pakete auch verkauft werden.

- a) Formulieren Sie das Problem als lineares Programm mit Nebenbedingungen und Zielfunktion.
- b) Lösen Sie das Problem graphisch (Berechnung der relevanten Geradenschnittpunkte ist erforderlich).
- c) Löst man das Problem mit dem Simplexalgorithmus kann man zu folgendem Zwischentableau gelangen:

(ZF)	-3	0	0	0	2	6000
(N_1)	14	0	1	0	-1	5000
(N_2)	2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	500
(N_3)	$\frac{3}{5}$	1	0	0	$\frac{1}{10}$	300

Bestimmen Sie rechnerisch auf Basis dieses Tableaus mit Hilfe des Simplexalgorithmus eine optimale Lösung. Wie hoch ist der maximal erzielbare Gewinn pro Monat?

- d) Bei welcher Ressource hat die Firma in der Optimallösung noch nicht ausgeschöpfte Kapazitäten?
- e) Aufgrund von Popularitätsschwankungen ändert sich der Gewinn eines Paketes *Angela* auf Werte $c_1 = 15 + \gamma$ mit $\gamma \in \mathbb{R}$. In welchem Intervall kann c_1 liegen, so dass die Basis erhalten bleibt, also weder die Produktion von *Angela* noch die von *Gerhard* zur Erreichung des Optimalpunktes komplett eingestellt werden muss.

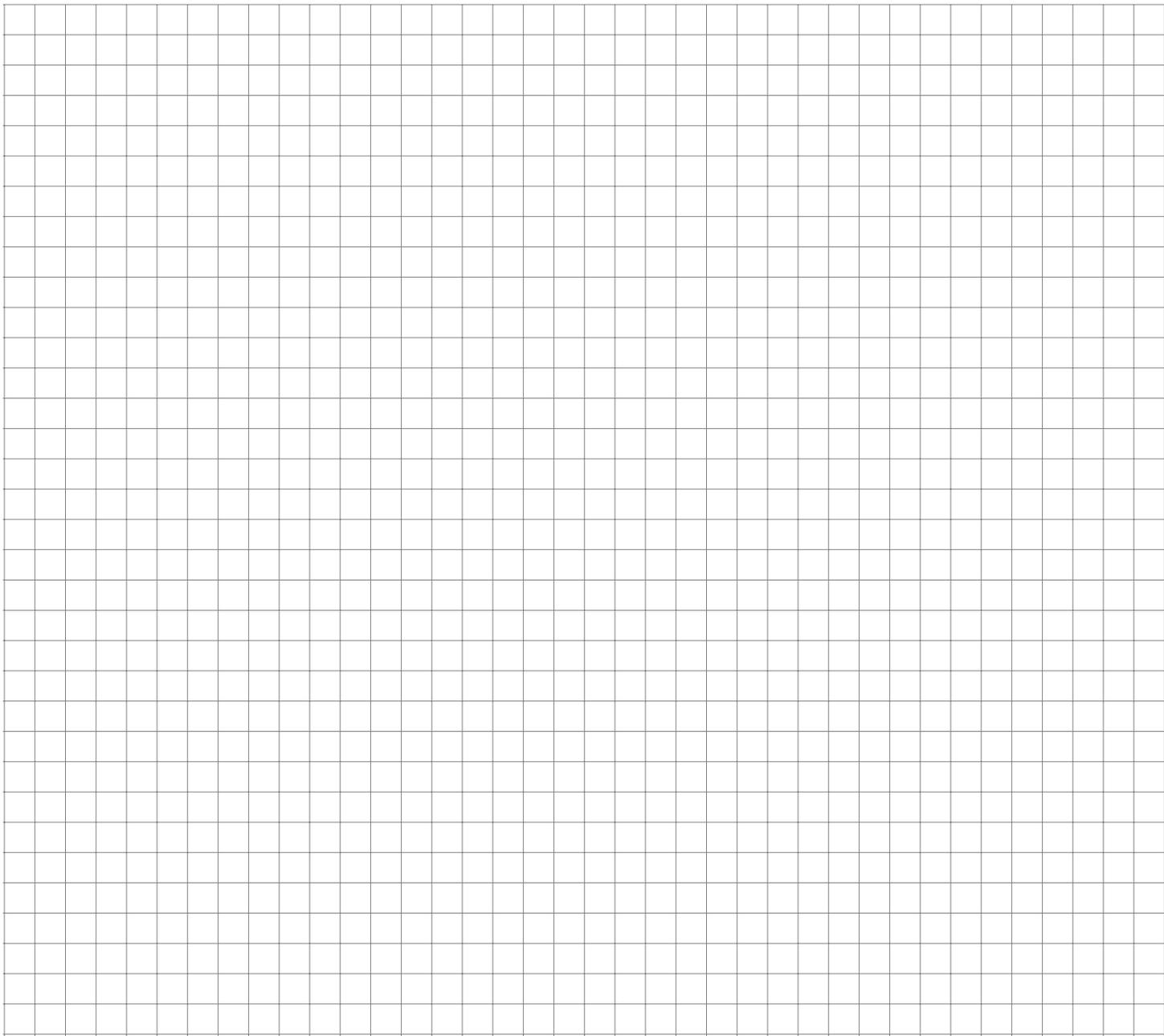


Aufgabe 32

Mit Hilfe der Produktionsfaktoren F_1, F_2, F_3 sollen zwei Produkte P_1, P_2 hergestellt werden. Dazu sind folgende Daten bekannt:

Produkt	Menge	Verkaufspreis	Produktionsfaktorverbrauch je Produkteinheit		
			F_1	F_2	F_3
P_1	x_1	4	1	1	3
P_2	x_2	4	1	2	2
Kapazität der Produktionsfaktoren			60	60	120

- Mit der Zielsetzung „Umsatzmaximierung“ formuliere man das entsprechende lineare Optimierungsproblem und löse dieses Problem graphisch.
- Wie ist die Kapazität von F_2 zu verändern, wenn ein Umsatzmaximum von 200 erreicht werden soll?



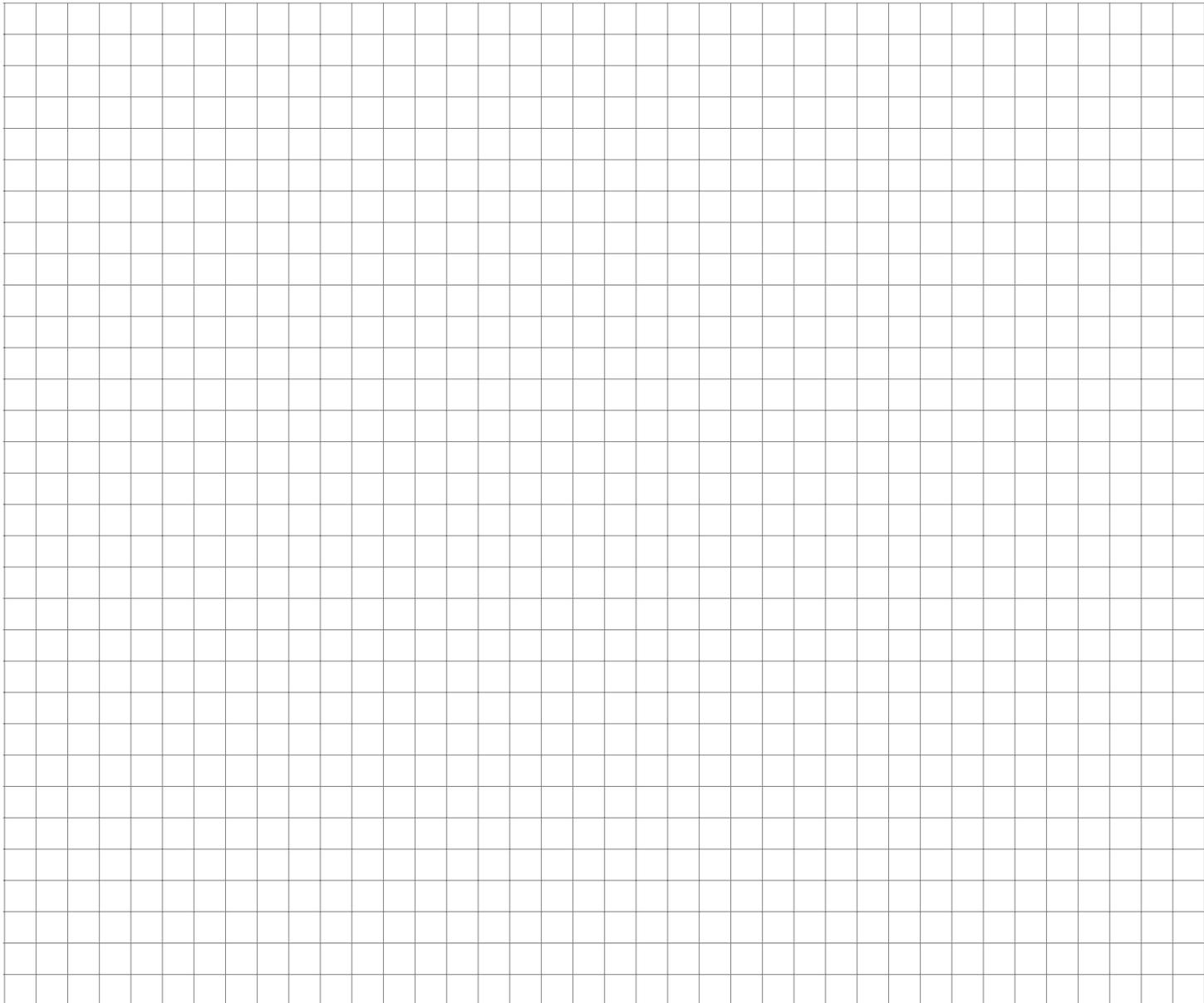
Aufgabe 33

Gegeben ist das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \text{ZF:} & \quad x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ \text{NB I:} & \quad 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ \text{NB II:} & \quad x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ \text{NB III:} & \quad 3x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- a) Zeigen Sie graphisch, dass dieses Problem unlösbar ist.
- b) Eliminieren Sie *alternativ* die Nebenbedingung
 - α) NB I,
 - β) NB II,
 - γ) NB III

und diskutieren Sie für jeden dieser Fälle die Lösbarkeit des Problems. Ermitteln Sie gegebenenfalls Optimallösungen und Zielfunktionswert.



Aufgabe 34

Gegeben sei das folgende lineare Optimierungsproblem:

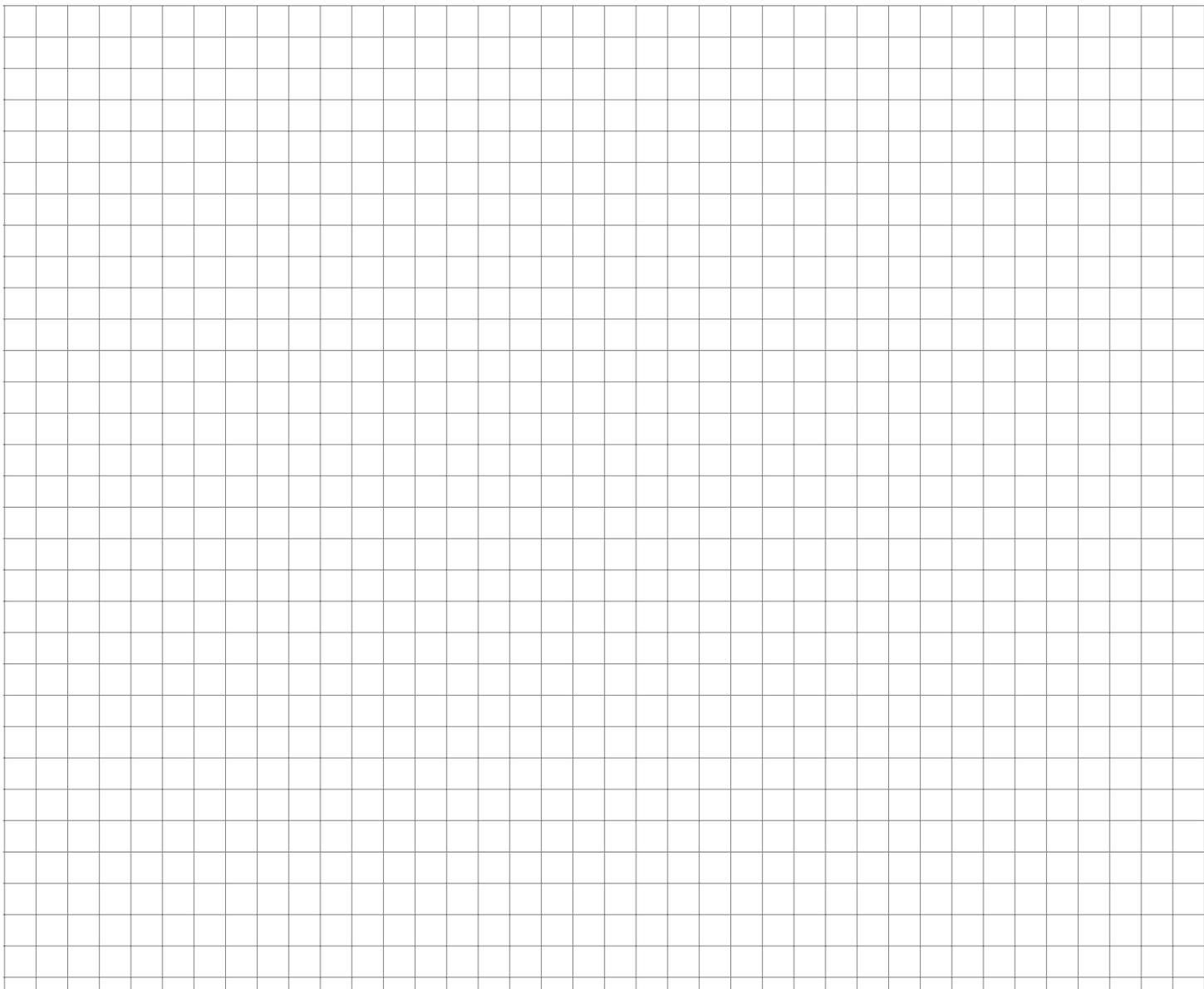
$$c_1 x_1 + 4x_2 + 10 \rightarrow \max$$

$$3x_1 + 6x_2 \leq b_1$$

$$3x_1 + x_2 \leq 9$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Lösen Sie das Problem für $c_1 = 3$ und $b_1 = 18$ graphisch und geben Sie die Optimallösung sowie den optimalen Zielfunktionswert an.
- Untersuchen Sie anhand der Graphik aus a), in welchem Bereich der Wert für c_1 variieren darf, so dass die ermittelte Optimallösung erhalten bleibt. Berechnen Sie diesen Bereich.
- Interpretieren Sie b_1 betriebswirtschaftlich. In welchem Intervall kann man b_1 verändern, so dass beide Produktionsfaktoren für die Produktion verwendet werden? In welchem Intervall kann man b_1 verändern, so dass zur Erreichung der Optimallösung beide Produktionsfaktoren ausgeschöpft werden?

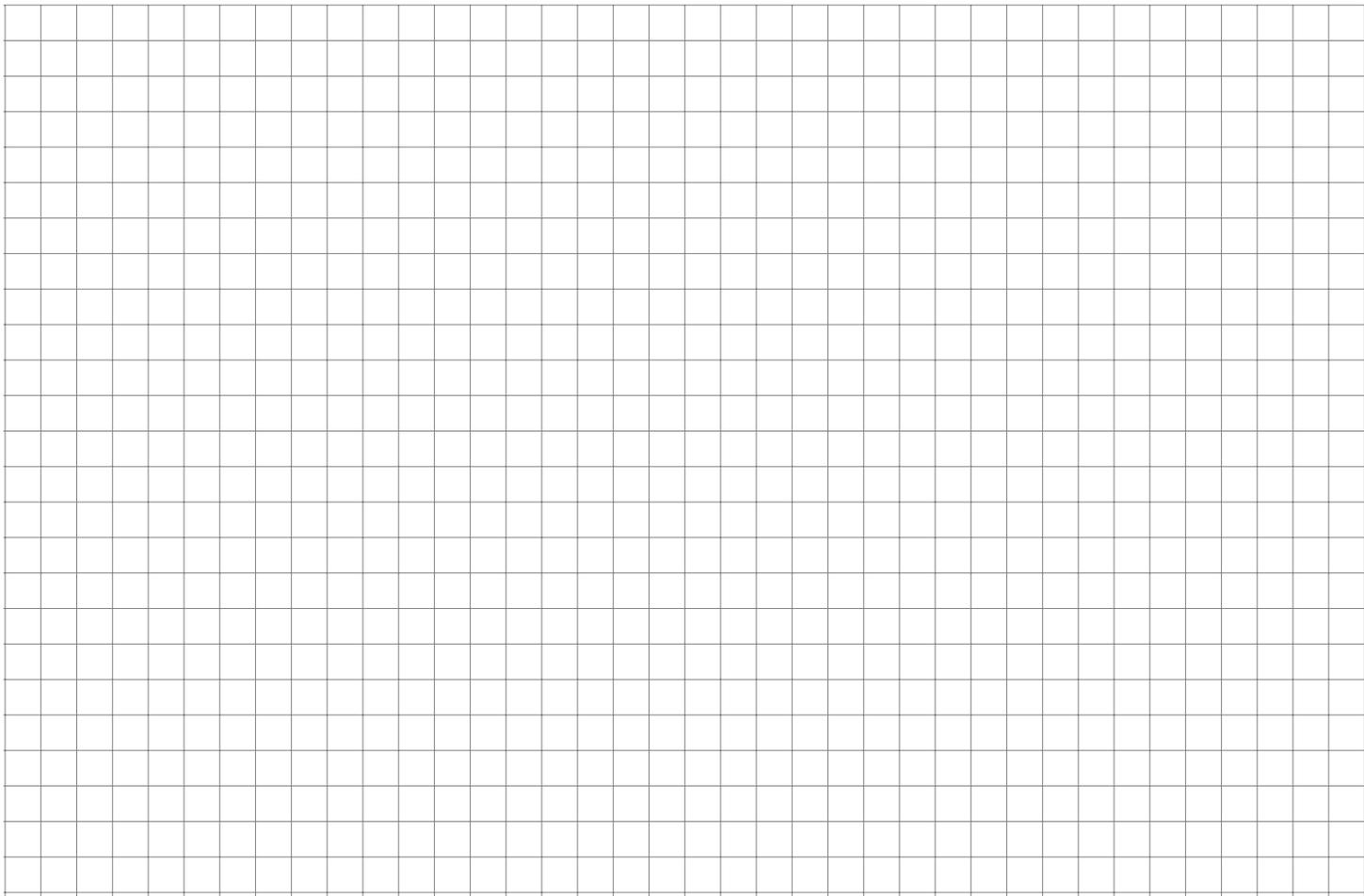


Aufgabe 35

Bauer Paul Profitlich überdenkt die Rationierung des Futters seiner Schweine. Bis dato hatte er zwei Bestandteile im Verhältnis 1:1 gemischt. Sein Hof-Veterinär hat die Menge notwendiger Vitamine in dieser Futtermischung gemessen und grob geschätzt, dass 4 kg Futter pro Schwein und Tag nötig sind, damit die Tiere auf keinen Fall an Vitaminmangelerscheinungen leiden.

Bauer Profitlich hat nun in der aktuellen Ausgabe des *Stallanzeigers* gelesen, dass er pro Tag und Schwein mindestens 2 mg von Vitamin 1, mindestens 3 mg von Vitamin 2 und mindestens 4 mg von Vitamin 3 füttern muss. In der Inhaltsangabe seiner Futtermittelkomponenten steht bei Bestandteil 1, dass es pro kg jeweils 1 mg von jedem dieser drei Vitamine enthält. Futtermittelbestandteil 2 enthält pro kg 1/2 mg von Vitamin 1, 1 mg von Vitamin 2 und 2 mg von Vitamin 3. Beide Futtermittelkomponenten kosten 5 Cent je kg. Bauer Profitlich stellt sich nun die Frage, in welchen Anteilen er die Futtermittelkomponenten mischen muss und wieviel er somit von diesen Komponenten pro Tag und Schwein verfüttern muss, dass seine Kosten minimal sind, trotzdem aber die Vitaminversorgung gewährleistet ist.

- Formulieren Sie das Problem als lineares Optimierungsproblem mit den Bezeichnungen x_1 , x_2 für die Menge an Futtermittelbestandteilen vom Typ 1 beziehungsweise vom Typ 2.
- Lösen Sie das Problem graphisch (Berechnung der relevanten Geradenschnittpunkte ist trotzdem erforderlich) und geben Sie die Menge der Optimallösungen an.
- Wieviel muss Bauer Profitlich pro Schwein füttern, wenn alle Nebenbedingungen eingehalten werden sollen und er seine alte Futtermischung weiter verwenden will? Erreicht er so das Kostenoptimum?

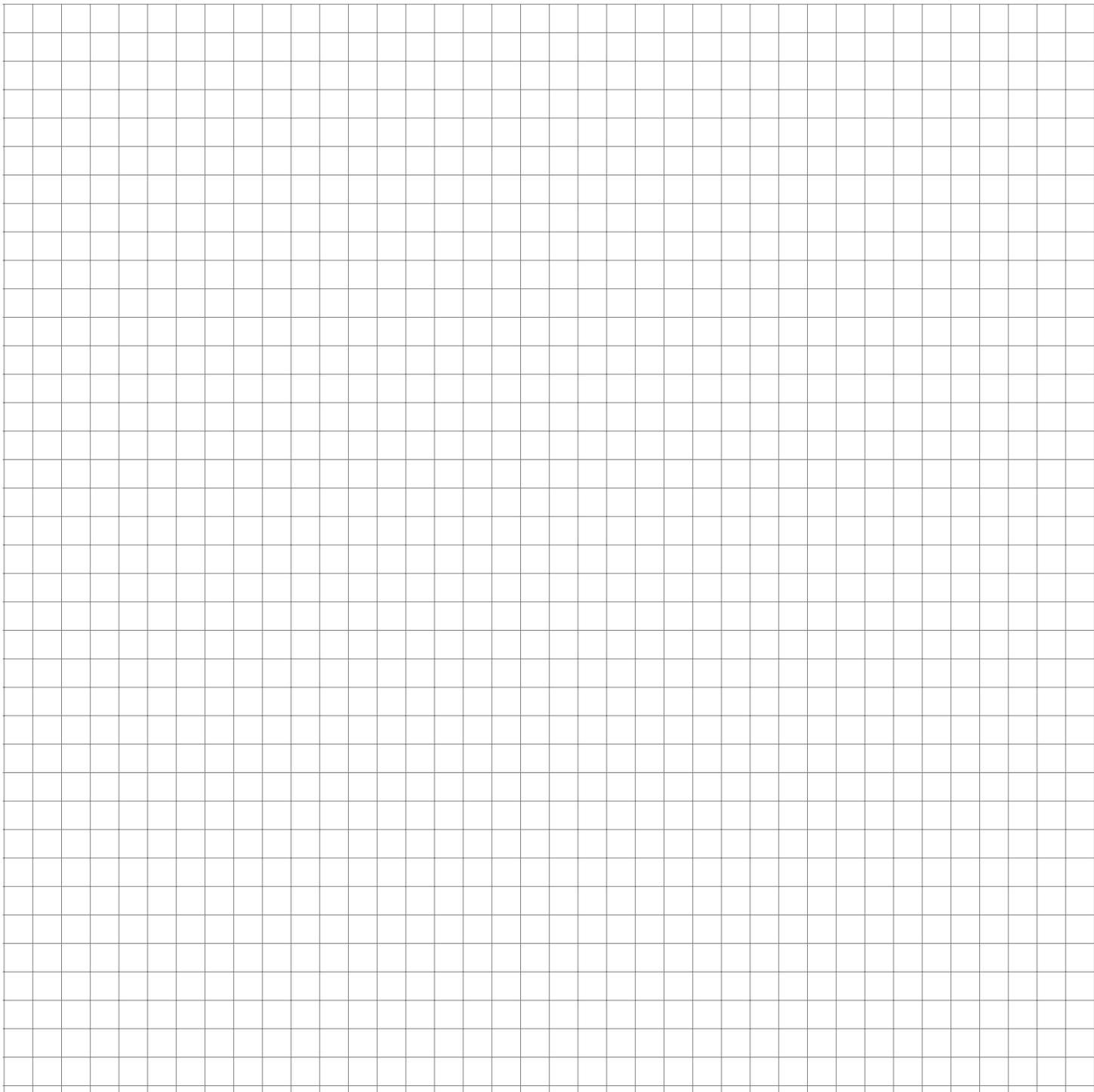


Aufgabe 36

Gegeben ist das folgende lineare Optimierungsproblem mit den Strukturvariablen $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}_+$, der Zielfunktion Z und den Nebenbedingungen N_1, N_2 und N_3 mit

Z	$3x_1 + 2x_2 + 2x_3$	\rightarrow	\max
N_1	$x_1 + x_3$	\leq	8
N_2	$x_1 + x_2$	\leq	7
N_3	$x_1 + 2x_2$	\leq	12

Lösen Sie das Problem rechnerisch mittels Simplex-Algorithmus.



Aufgabe 37

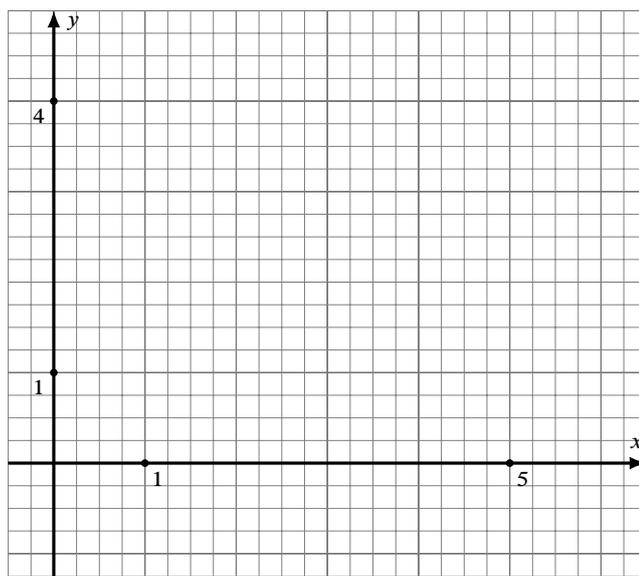
Lineare Programme: Minimieren (2015_01_08)

Gegeben ist das folgende lineare Optimierungsproblem mit den Strukturvariablen $x, y \in \mathbb{R}_+$, einer Konstanten $k \in \mathbb{R}$, der Zielfunktion F und den Nebenbedingungen N_1, N_2, N_3 und N_4 mit

$$\begin{array}{ll} \text{Zielfunktion:} & kx + y \rightarrow \min \quad (F) \\ \text{Nebenbedingungen:} & 3x + 2y \geq 6 \quad (N_1) \\ & 2x - y \leq 1 \quad (N_2) \\ & x + 2y \geq 5 \quad (N_3) \\ & x + y \leq 4 \quad (N_4) \end{array}$$

Für die Teilaufgaben a) bis c) sei der Wert der Konstanten k in der Zielfunktion gleich 1.

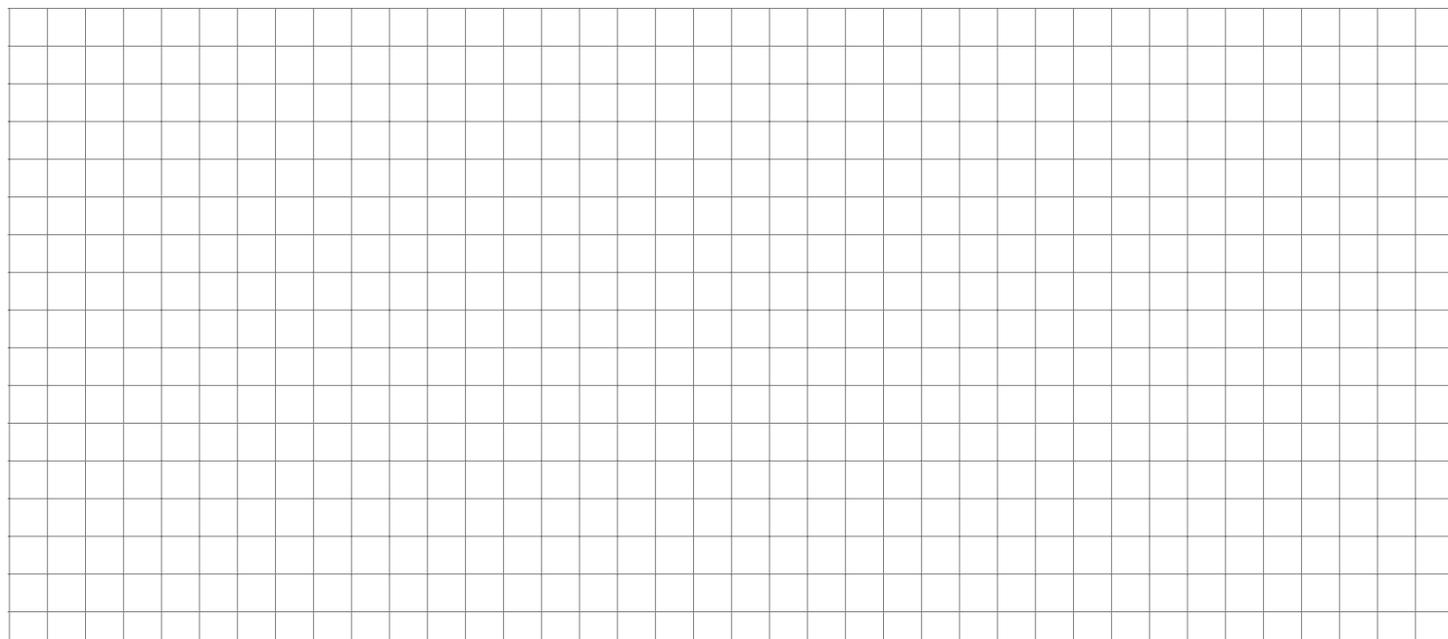
- Skizzieren Sie den Zulässigkeitsbereich Z des Problems. Benutzen Sie dazu das vorgegebene Koordinatensystem rechts.
- Berechnen Sie die relevanten Eckpunkte von Z .
- Benutzen Sie die Ergebnisse aus Teilaufgabe b) und bestimmen Sie damit die Menge der Optimallösungen des Problems.



Kann k so gewählt werden, dass der Schnittpunkt der Randlinien von

- N_3 und N_4 bzw. von
- N_2 und N_4 optimal ist?

Geben Sie k für d) und e) gegebenenfalls an.



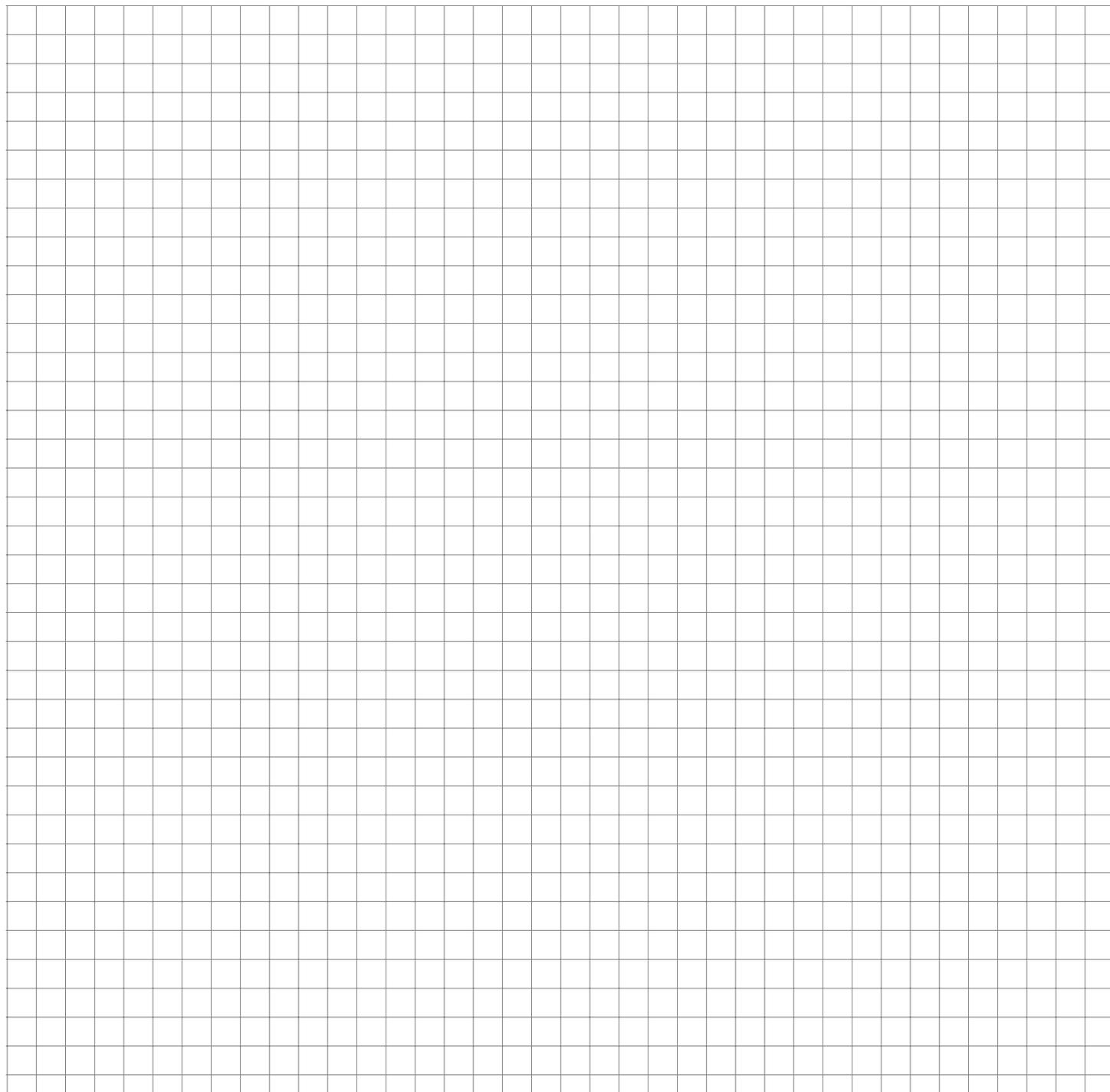
Differentialgleichungen

Aufgabe 38

Differentialgleichungen: Differentialgleichungen (DGL1)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen:

- a) $xy' = 4y + x^5$
- b) $y' = y \cdot \tan x - 2 \cdot \sin x$ für $-\pi/2 < x < \pi/2$
- c) $x^2y' = 1 - y$ für $x < 0$
- d) $xy' = -y + e^x$ für $x > 0$
- e) $y' = -y + xe^{-x} + 1$



Aufgabe 39

Bestimmen Sie die Lösungen der angegebenen Anfangswertprobleme:

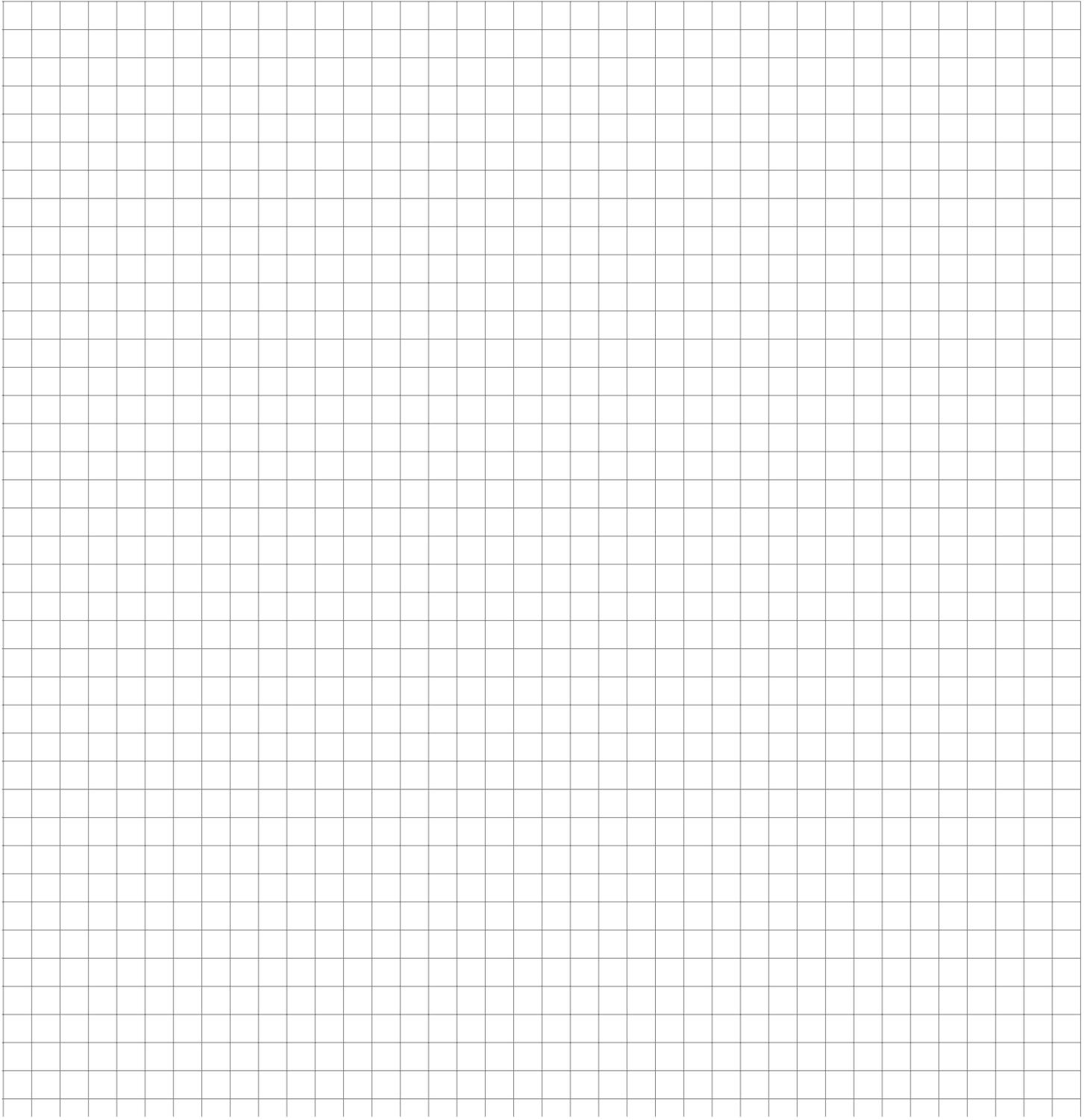
a) $y' = 2xy + x, \quad y(0) = 1$

b) $y' = \frac{1}{1-x}y + x - 1, \quad y(2) = 0$

c) $(x+1)y' = -(x+2)y + 2 \cdot \sin x, \quad y(0) = 2$

d) $y' = \frac{y}{x} + x^2, \quad y(1) = 1$

e) $y' = 2xy + 1, \quad y(0) = 0$



Deskriptive Statistik

Aufgabe 40

deskr. Statistik: Häufigkeit (1)

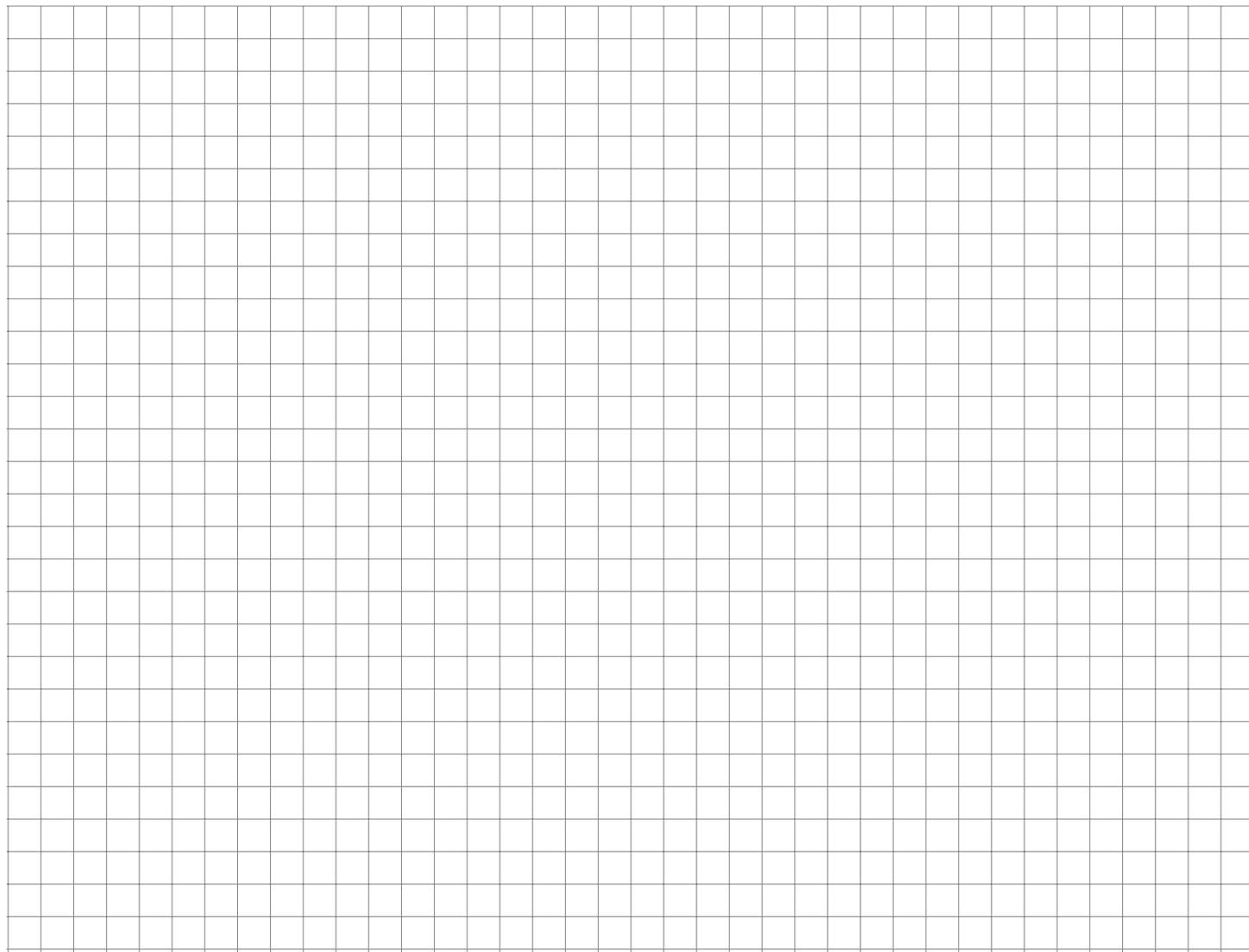
Ein Einzelhändler registriert für einen Exklusivartikel im Verlauf von 30 Verkaufstagen folgende Verkaufszahlen:

Tag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl	5	2	3	0	0	1	3	6	0	2
Tag	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Anzahl	1	0	1	0	2	3	5	1	0	0
Tag	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Anzahl	3	5	3	1	0	0	0	6	3	1

- Berechnen Sie die absoluten und relativen Häufigkeiten der Ausprägungen sowie die absolute kumulierte Häufigkeit für $x = 4$.
- Erstellen Sie das zugehörige Balkendiagramm und das Kreisdiagramm mithilfe der absoluten Häufigkeiten.

R

R

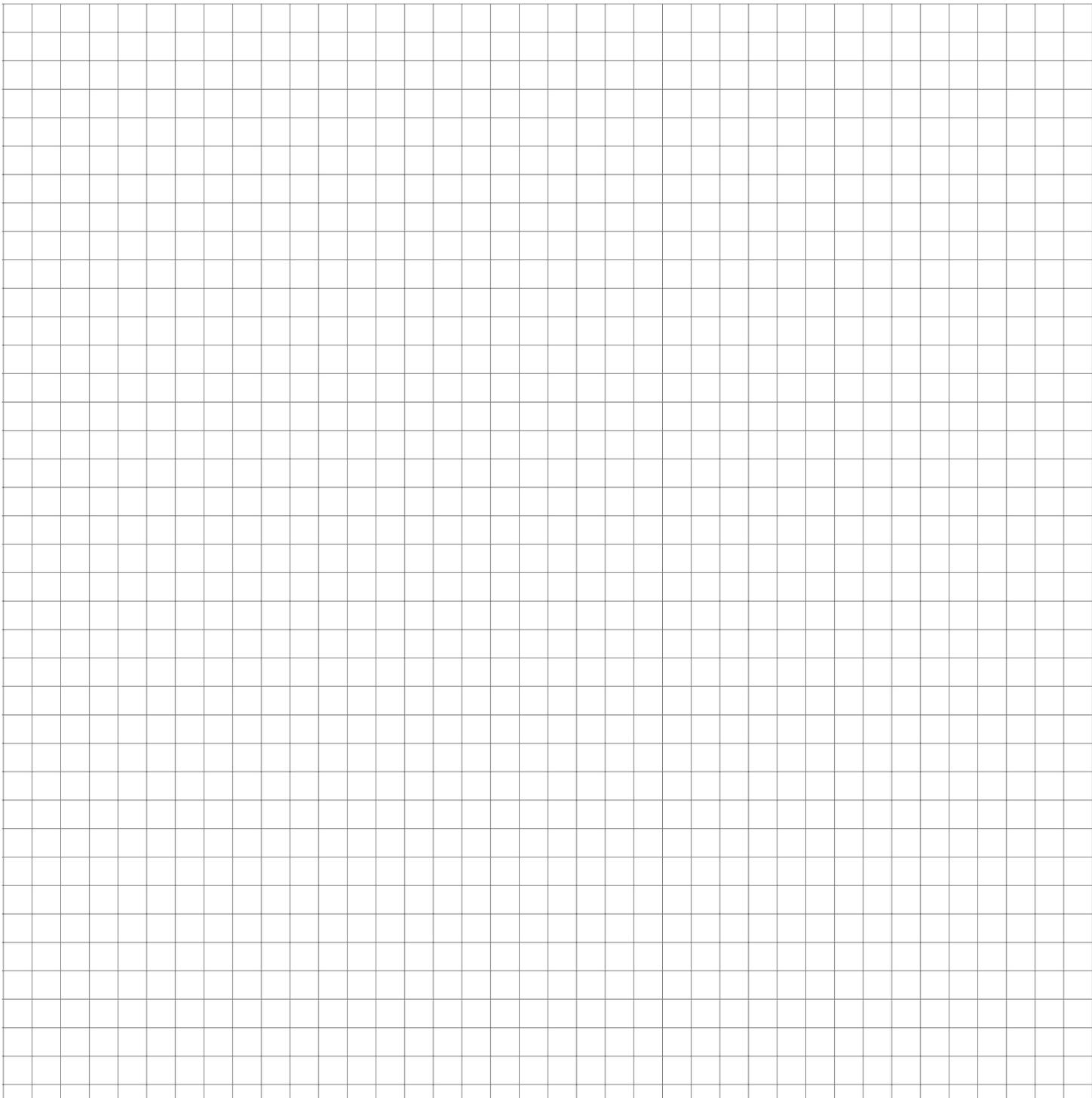


Aufgabe 41

Das Ergebnis der Untersuchung eines kardinalskalierten Merkmals X sei in folgender Tabelle wiedergegeben:

Ausprägung	1	2	3	4	7
Anzahl	4	4	6	4	2

- Bestimmen Sie das arithmetische Mittel, den Modus und den Median.
- Berechnen Sie die mittlere quadratische Abweichung.
- Obige Daten werden nun mittels der Intervalle $[0; 3)$, $[3; 4)$ und $[4; 7]$ klassiert. Bestimmen Sie die Rechteckhöhen des Histogramms.

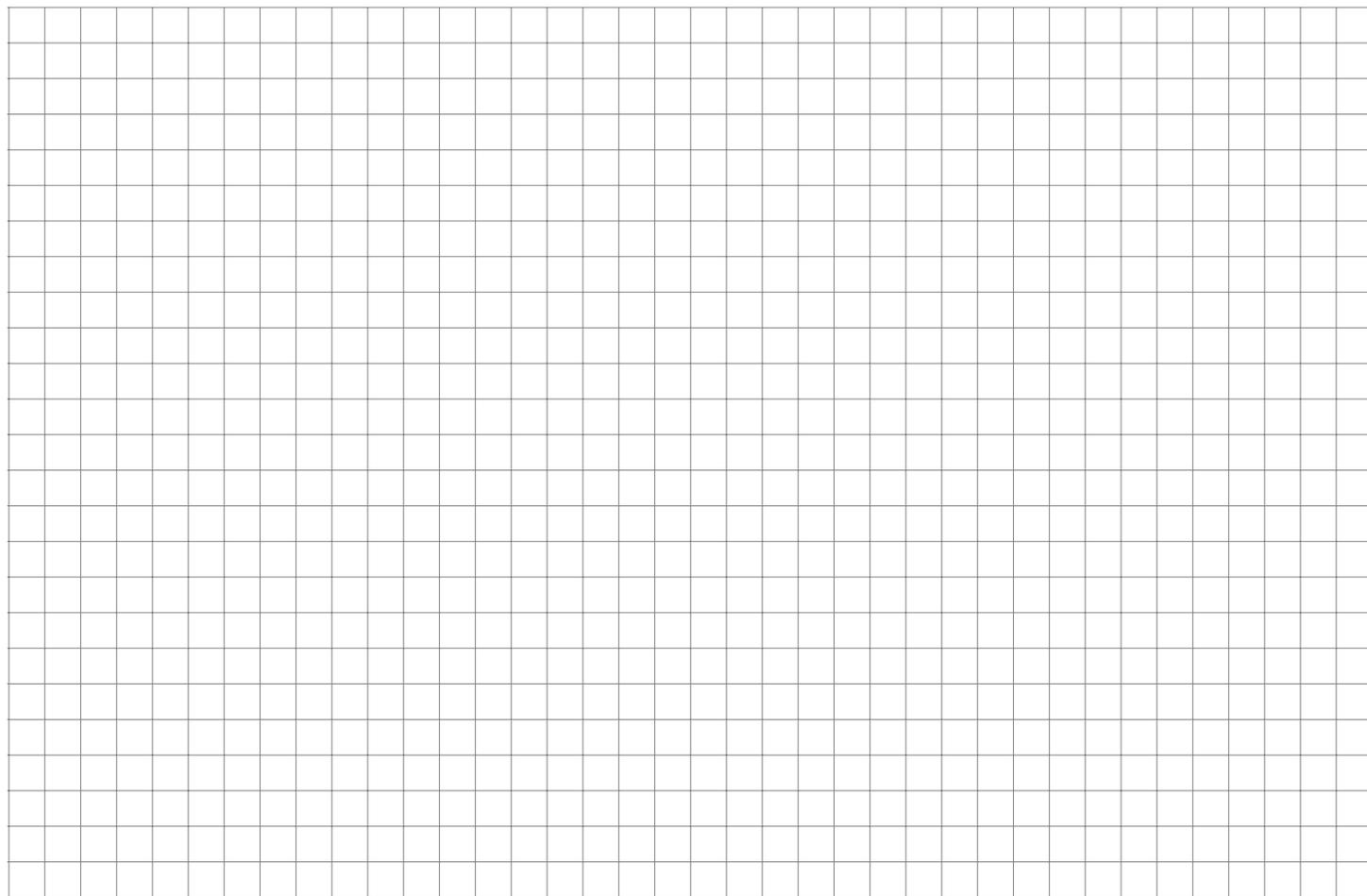
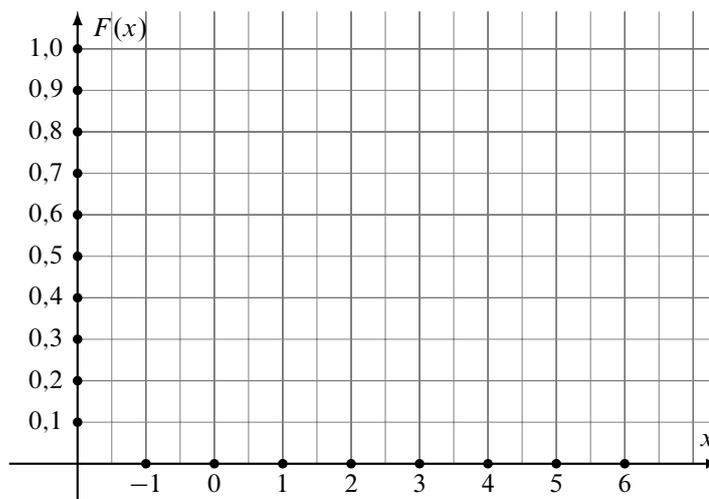


Aufgabe 42

10 Personen werden befragt, wieviel Sie in den Weihnachtsferien zugenommen haben. Für die empirische Verteilungsfunktion des abgefragten Merkmals $X \hat{=} \text{„Gewichtszunahme vom 23. Dezember bis zum darauffolgenden 7. Januar“}$ ergibt sich:

$$F(x) = \begin{cases} 0,0 & \text{für } x < -1,0 \\ 0,1 & \text{für } -1,0 \leq x < 1,0 \\ 0,3 & \text{für } 1,0 \leq x < 1,5 \\ 0,4 & \text{für } 1,5 \leq x < 2,0 \\ 0,9 & \text{für } 2,0 \leq x < 6,0 \\ 1,0 & \text{für } x \geq 6,0 \end{cases}$$

- Zeichnen Sie $F(x)$ in nebenstehendes Koordinatensystem ein.
- Schreiben Sie die ursprünglichen Daten als Urliste von X auf.
- Berechnen Sie das arithmetische Mittel von X .
- Bestimmen Sie den Median von X .
- Berechnen Sie die mittlere quadratische Abweichung sowie die Standardabweichung von X .

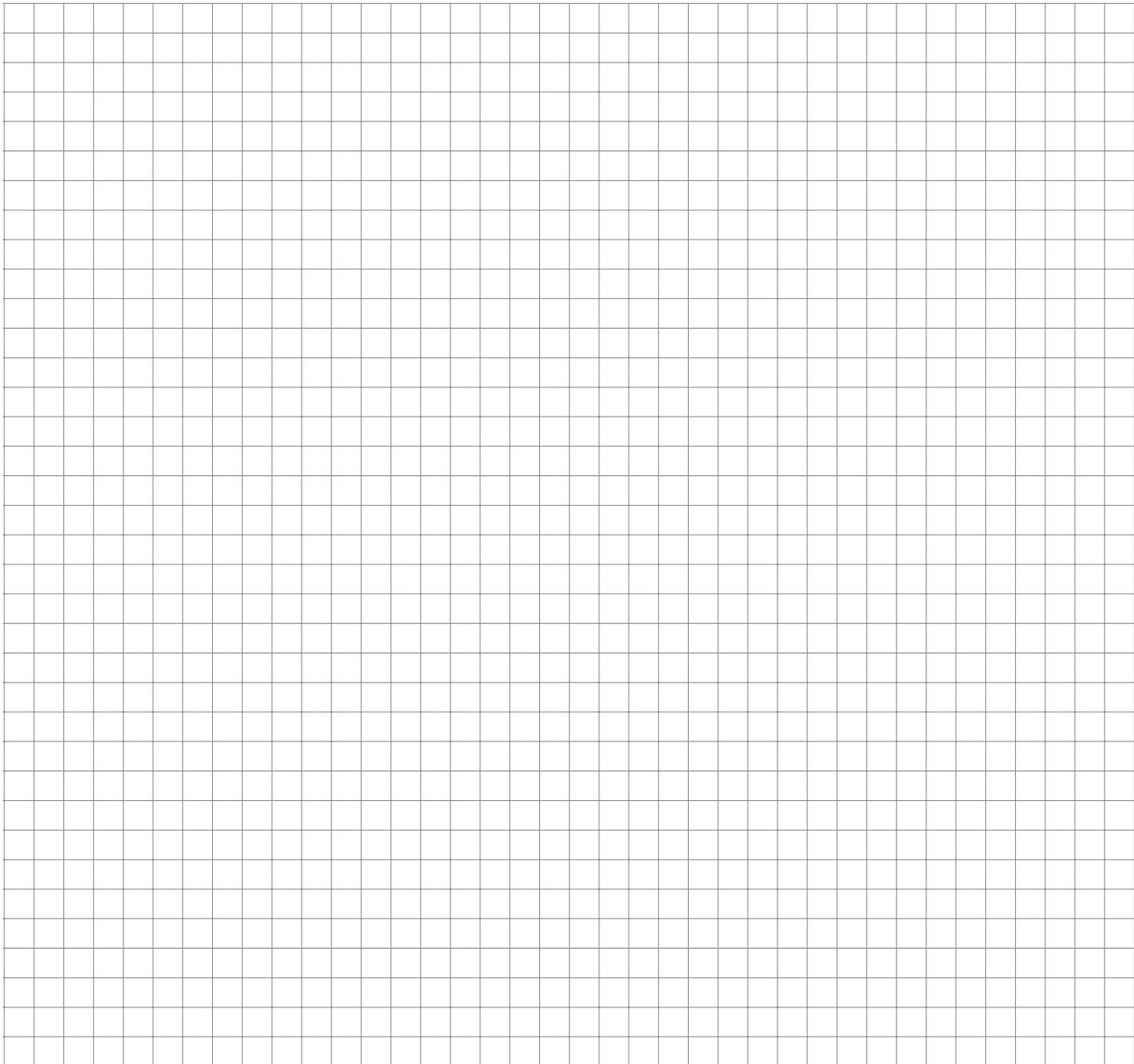


Aufgabe 43

Ein bestimmtes Gut wird von genau 7 Firmen produziert. Folgende Tabelle gibt an, wie viele tausend Stück jede Firma herstellt:

Firma:	A	B	C	D	E	F	G
prod. Stückzahl:	3	2	3	5	6	15	6 (tausend Stück)

- Bestimmen Sie den Medianwert der produzierten Stückzahlen.
- Skizzieren Sie für x -Werte aus dem Intervall $[0;20]$ den Verlauf der Funktion $F(x) =$ Anteil der Firmen, die höchstens $1000 \cdot x$ Stück produzieren.
- Errechnen Sie die Knickpunkte der zugehörigen Lorenzkurve.
- Errechnen Sie den normierten Gini-Koeffizienten.
- Bestimmen Sie den Konzentrationskoeffizienten CR_2 .

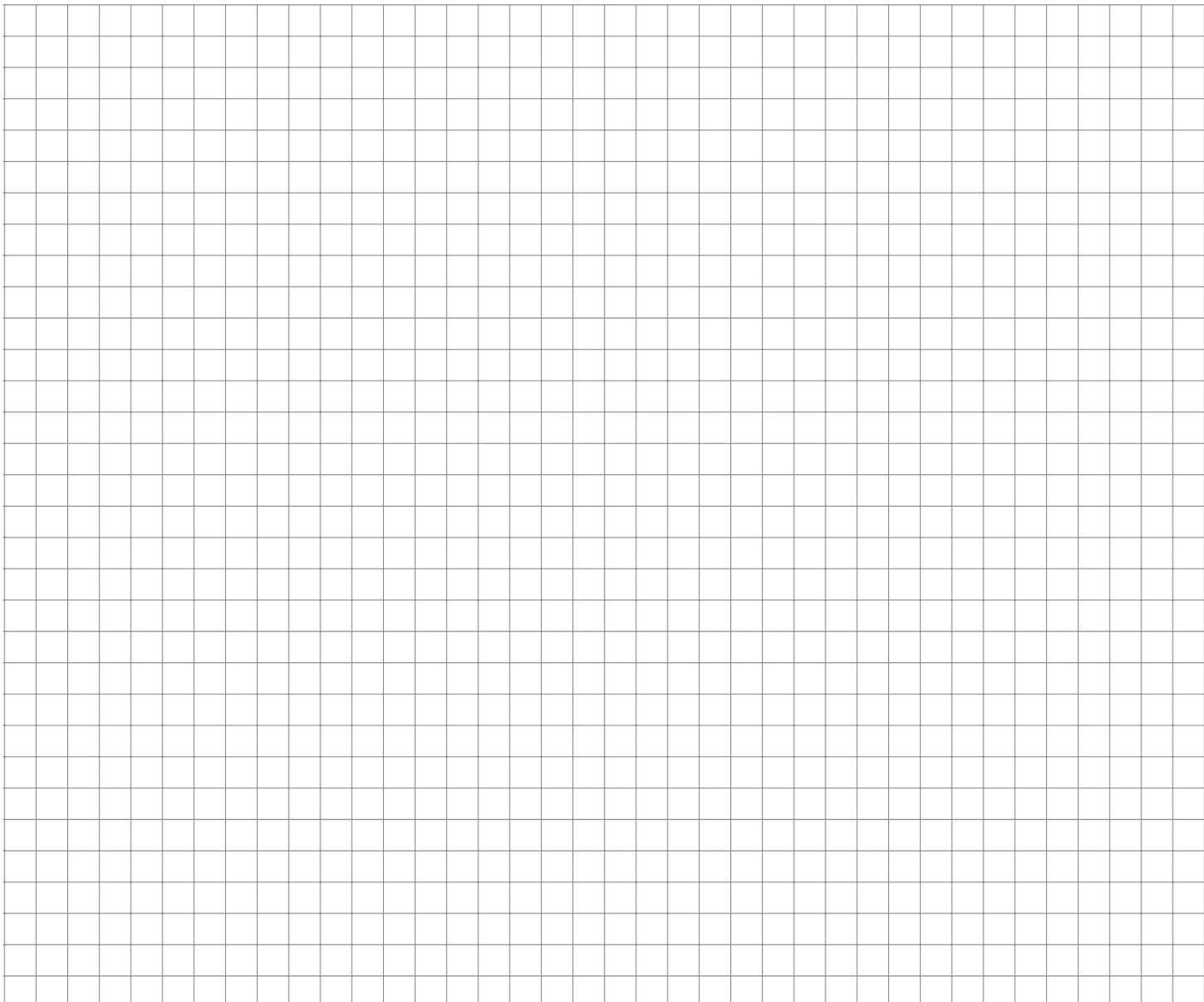


Aufgabe 44

Die Firma CelebWedCake liefert zu einem Festpreis von 200.000 € eine exklusive Premium-Hochzeitstorte an Prominente. In den letzten 5 Jahren wurden insgesamt 20 von diesen Torten verkauft. Pro Kunde ist die Anzahl der verkauften Torten in dieser Zeitspanne mittels der verschiedenen Ausprägungen a_i und den zugehörigen absoluten Häufigkeiten h_i erfasst:

i	1	2	3	4
a_i	1	2	4	5
h_i	5	3	1	h_4

- Bestimmen Sie h_4 .
- Zeichnen Sie die Lorenzkurve,
- berechnen Sie den normierten Gini-Koeffizienten sowie
- den Herfindahl- und
- den Exponentialindex der Anzahl der verkauften Torten pro Kunde.

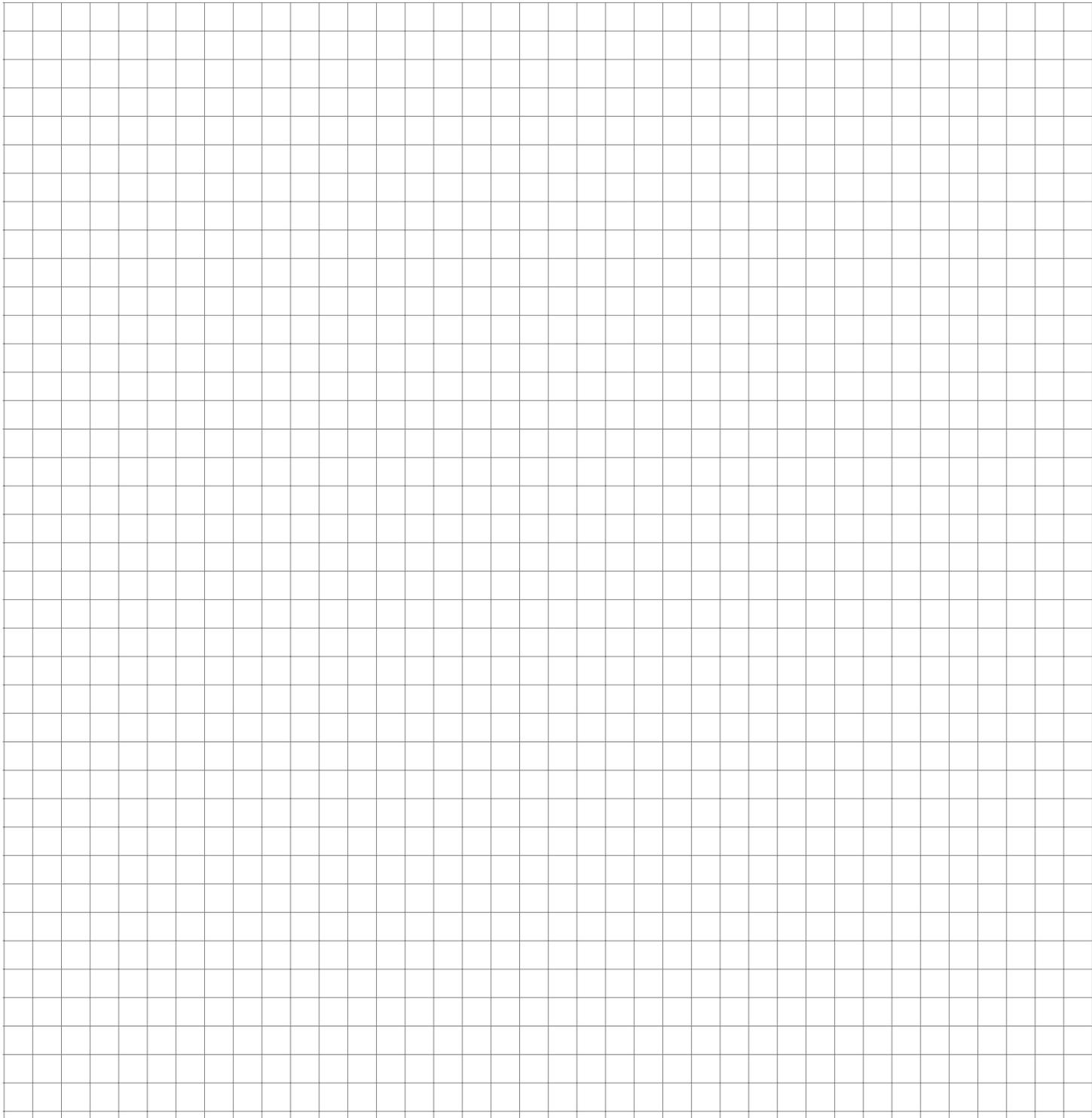


Aufgabe 45

Die folgende Tabelle gibt jeweils den jährlichen Umsatz der weltweit 10 umsatzstärksten Softwareunternehmen an:

Nr. des Unternehmens:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Umsatz [in Mrd. US-Dollar]:	4	49	4	22	5	18	12	6	7	6

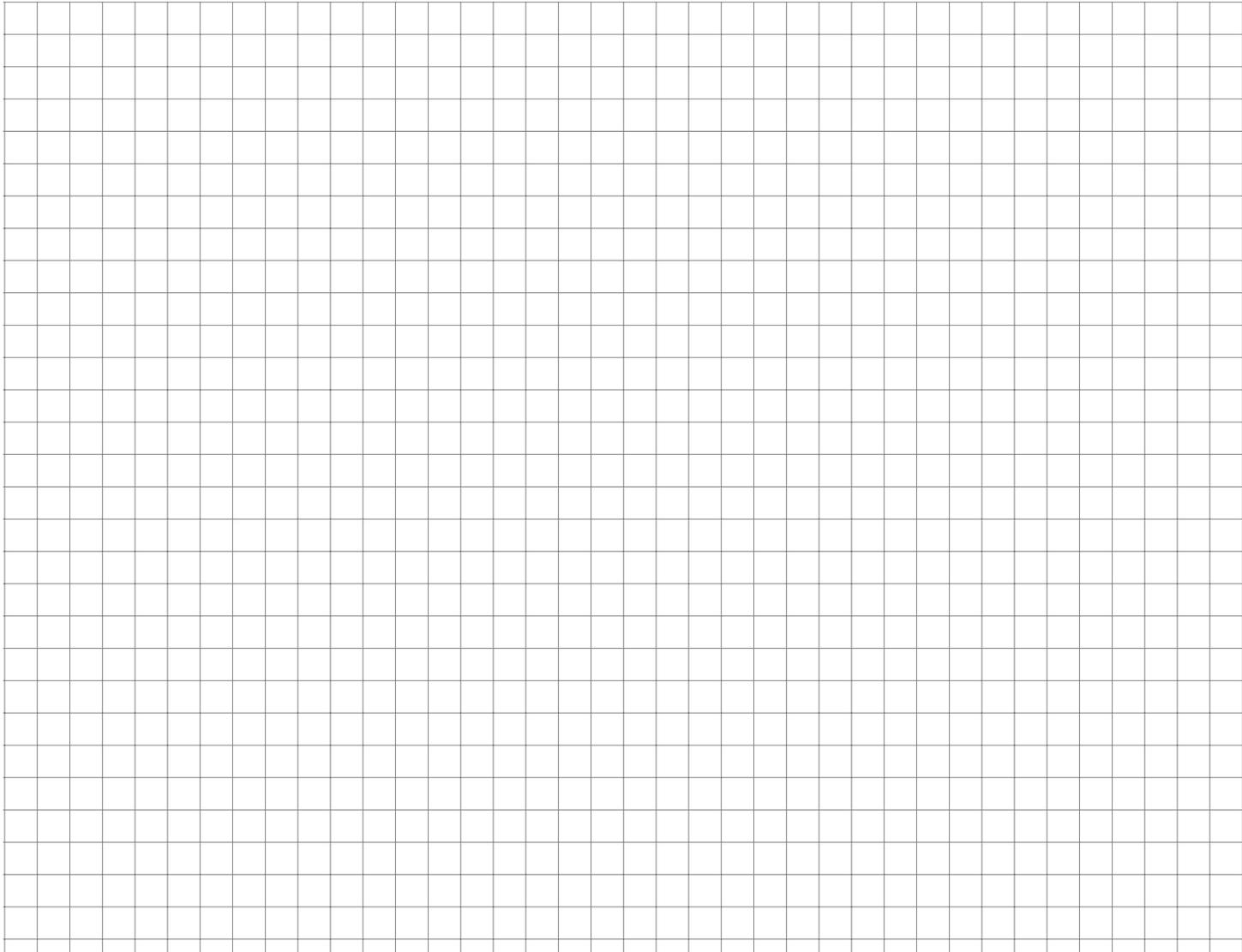
- Zeichnen Sie die Lorenzkurve des Umsatzes.
- Berechnen Sie den Gini-Koeffizienten und den normierten Gini-Koeffizienten.
- Berechnen Sie den Herfindahl- sowie den Exponentialindex.



Aufgabe 46

Pia lädt 11 Freundinnen zu einem Damenabend ein. Es gibt 8 Flaschen Prosecco. Pro Flasche kann Sie 5 Gläser ausschenken.

- ▶ 3 Freundinnen müssen fahren und trinken nichts vom Prosecco,
 - ▶ 3 Freundinnen trinken jeweils 3 Gläser,
 - ▶ 4 Freundinnen trinken jeweils 5 Gläser,
 - ▶ 1 Freundin trinkt 8 Gläser und
 - ▶ Pia übernimmt den Rest.
- a) Welchen Anteil am Prosecco muss Pia trinken?
- b) Geben Sie die Häufigkeitsverteilung der Gläser pro Dame an.
- c) Bestimmen Sie den Median, das arithmetische Mittel und die Standardabweichung der Gläser pro Dame.
- d) Welche Werte nimmt die zur Anzahl der Gläser x pro Dame gebildete empirische Verteilungsfunktion $F(x)$ bei $x = 2$ und bei $x = 5$ an?
- e) Zeichnen Sie die Lorenzkurve und
- f) berechnen Sie den normierten Gini-Koeffizienten der Gläseranzahl pro Dame.

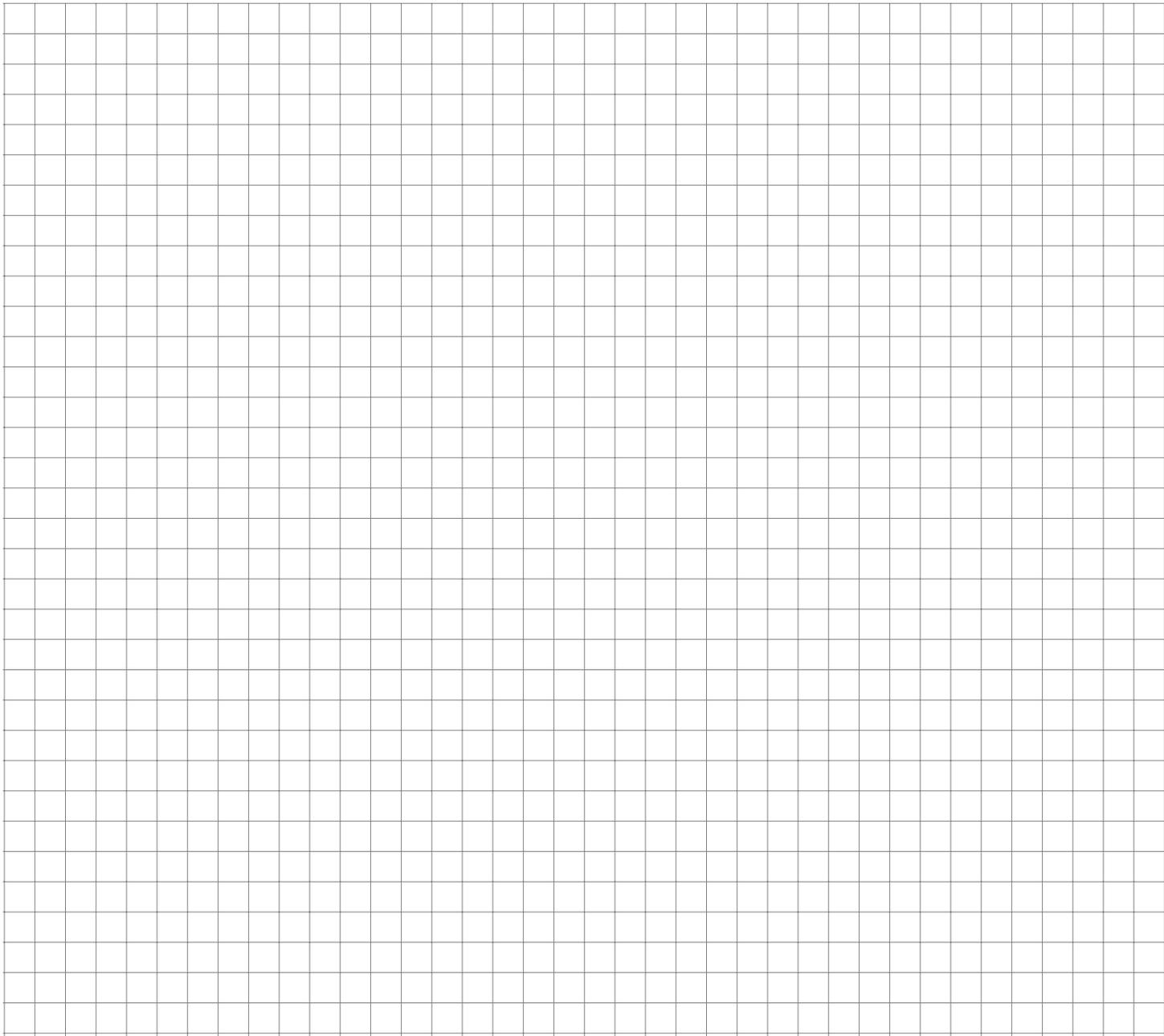


Aufgabe 47

Für den Aktienkurs und den Optionspreis einer deutschen Aktie ergaben sich folgende Daten:

Kurs	Optionspreis	Kurs	Optionspreis
240,3	16,00	226	11,20
252,5	15,40	202	10,50
238	17,40	208	13,10
228	12,60	177	14,50
223	11,80	190	14,80
238	11,00	180,5	13,70

Zeichnen Sie für diesen Datensatz das Streudiagramm und berechnen Sie den Bravais-Pearson-Korrelationskoeffizienten.



Aufgabe 48

Zwei Personen sollen fünf verschiedene Produkte A bis E durch Angabe einer Reihenfolge beurteilen. Die Befragung ergab folgende Ergebnisse:

Produkt	Person I	Person II
A	5	3
B	2	1
C	3	4
D	4	2
E	1	5

Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten von Spearman.

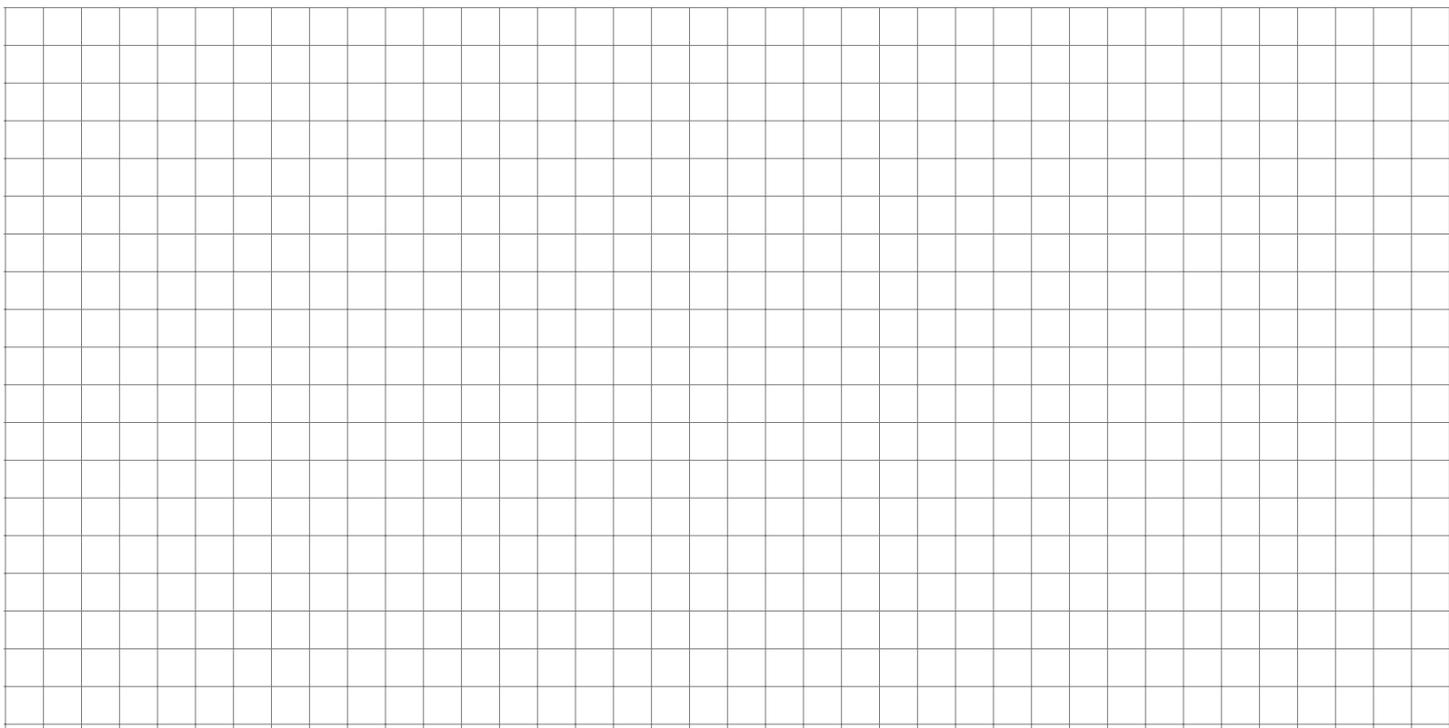


Aufgabe 49

Ein Betrieb hat im Kalenderjahr 2004 zwölf neue Mitarbeiter eingestellt. Von diesen sind unter anderem folgende Daten bekannt:

Mitarbeiter Nr.	Geschlecht	Ausbildungsdauer (in Jahren)	Abschlussnote
1	männlich	9	4
2	weiblich	10	2
3	weiblich	10	4
4	männlich	11	4
5	weiblich	12	2
6	weiblich	13	2
7	weiblich	14	1
8	männlich	15	3
9	männlich	16	2
10	männlich	17	3
11	weiblich	19	3
12	männlich	22	2

- a) Geben Sie die Skalierung der drei Merkmale Geschlecht, Ausbildungsdauer und Abschlussnote an.
- b) Ermitteln Sie für jedes der drei Merkmale die folgenden Größen, soweit diese aufgrund des jeweiligen Skalenniveaus sinnvollerweise berechnet werden können:
- (1) Modus
 - (2) Median
 - (3) Arithmetisches Mittel
 - (4) Mittlere quadratische Abweichung
 - (5) Variationskoeffizient
- c) Geben Sie für jedes der zwei Merkmalspaare
- (1) Geschlecht – Abschlussnote
 - (2) Ausbildungsdauer – Abschlussnote
- einen statistisch sinnvollen Korrelationskoeffizienten an.
(Die Korrelationskoeffizienten müssen nicht berechnet werden.)



Aufgabe 50

An einer Hochschule sollen die Studierenden ihre Mensa bezüglich der Qualität des Essens beurteilen. In einer Voruntersuchung haben 50 Studenten aus vier Studienjahren befragt ein bestimmtes Gericht bezüglich des Geschmacks als schlecht, mittel bzw. gut bewertet. Folgende Häufigkeitstabelle fasst die Ergebnisse zusammen:

Bewertung	Studienjahr			
	1	2	3	4
schlecht	0	6	3	1
mittel	5	9	1	0
gut	5	5	6	9

Berechnen Sie den normierten Kontingenzkoeffizient zwischen der Zugehörigkeit zum Studienjahr und der vergebenen Bewertung.



Aufgabe 51

In einem Unternehmen fragt man sich, ob zwischen Umsatz und Marketingkosten ein Zusammenhang besteht. Folgende betrieblichen Daten (in 1000 €) liegen vor:

Marketingkosten/Kunde	Umsatz/Kunde
1,4	210
1,8	220
1,9	240
2,4	241
2,8	320
3,2	400
3,6	410
4,0	480

- Erstellen Sie ein Streuungsdiagramm ($y = \text{Umsatz}$, $x = \text{Marketingkosten}$) und berechnen Sie den Bravais-Pearson- und den Rangkorrelationskoeffizienten.
- Stellen Sie die Regressionsgerade $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ auf und berechnen Sie den Determinationskoeffizienten.

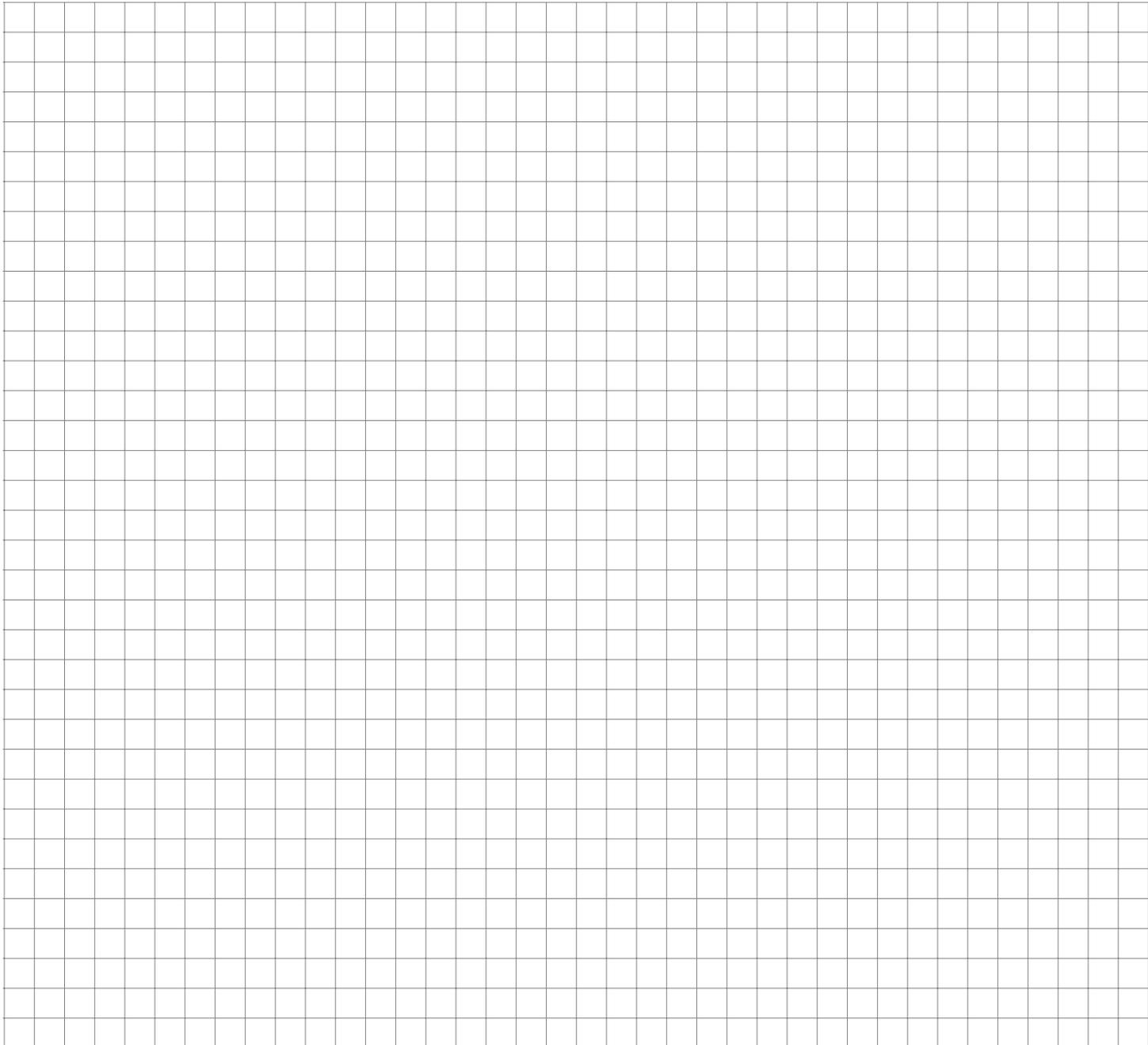


Aufgabe 52

Von einer Firma sind über mehrere Jahre hinweg die Umsätze und die Beschäftigtenzahlen bekannt:

Jahr t :	1	2	3	4	5	6
Umsatz x_t (in Millionen €):	60	55	57	61	65	62
Anzahl y_t der Beschäftigten:	1000	1100	960	840	800	700

- Berechnen Sie den Variationskoeffizienten des Umsatzes.
- Berechnen Sie den Rangkorrelationskoeffizienten von Spearman zwischen den beiden Merkmalen Umsatz und Beschäftigtenzahl.
- Berechnen Sie die Regressionsgerade $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}t$ der Beschäftigtenzahl in Abhängigkeit von der Zeit. Mit welcher Anzahl der Beschäftigten ist im Jahr 8 zu rechnen?

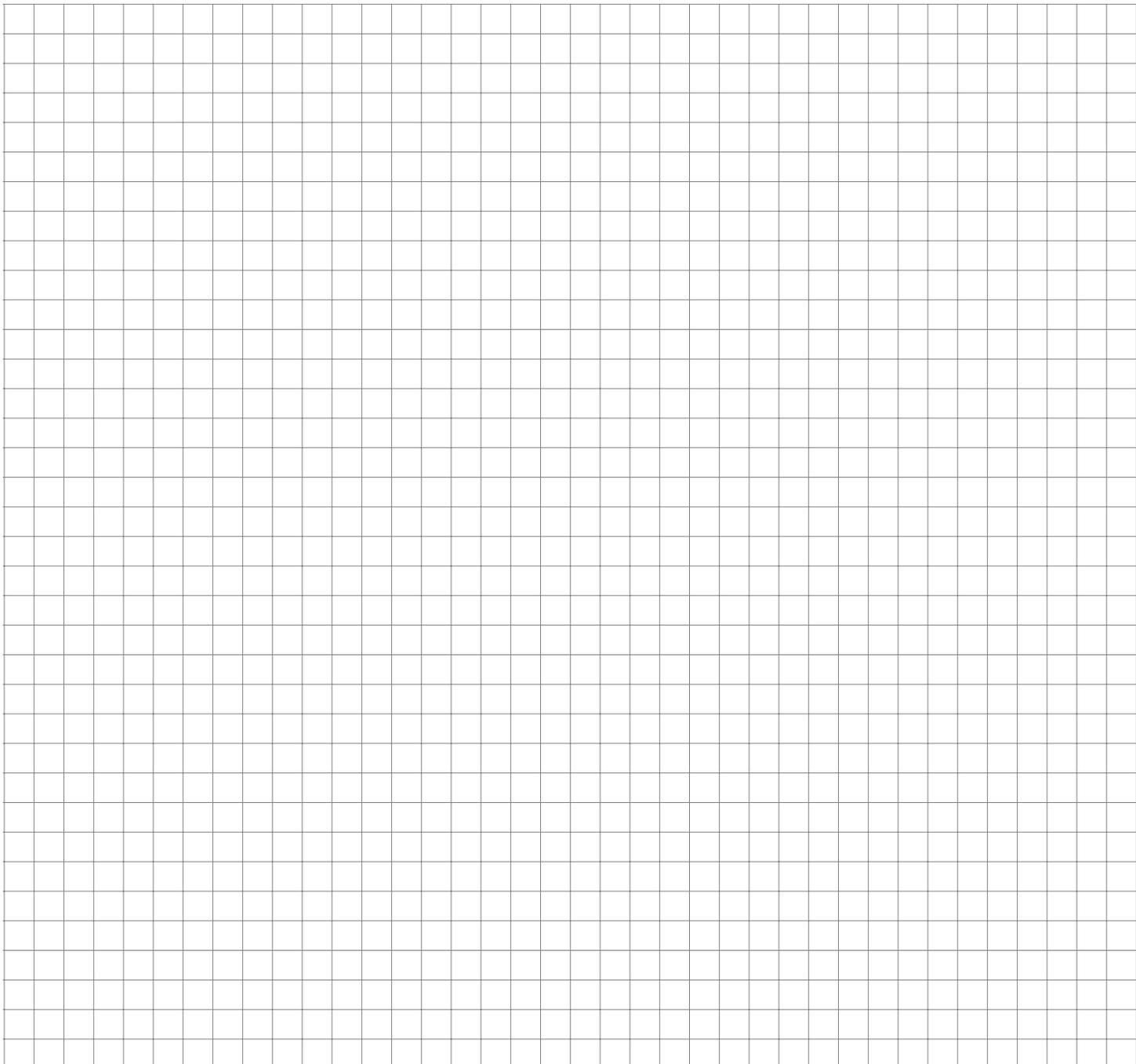


Aufgabe 53

Das Jahreseinkommen einiger Fußballnationalspieler ist zusammen mit der Anzahl der Tore, die sie in Länderspielen für Deutschland erzielen konnten in folgender Tabelle dargestellt:

Spieler Nummer	Jahreseinkommen [in Mio. €]	Anzahl Tore
1	1,1	0
2	0,8	1
3	2,3	3
4	4,2	3
5	1,7	1
6	0,9	0
7	3,7	4
8	0,7	1
9	2,8	2

- Stellen Sie ein lineares Regressionmodell der Toranzahl in Abhängigkeit vom Spielereinkommen auf.
- Geben Sie den Determinationskoeffizienten an und interpretieren Sie ihn.
- Wieviele Tore würden Sie nach diesem Modell bei einem Einkommen von 10 Mio. erwarten?
- Wieviele Tore müsste nach diesem Modell ein Spieler mehr schießen, wenn er 1 Mio. € mehr verdient?

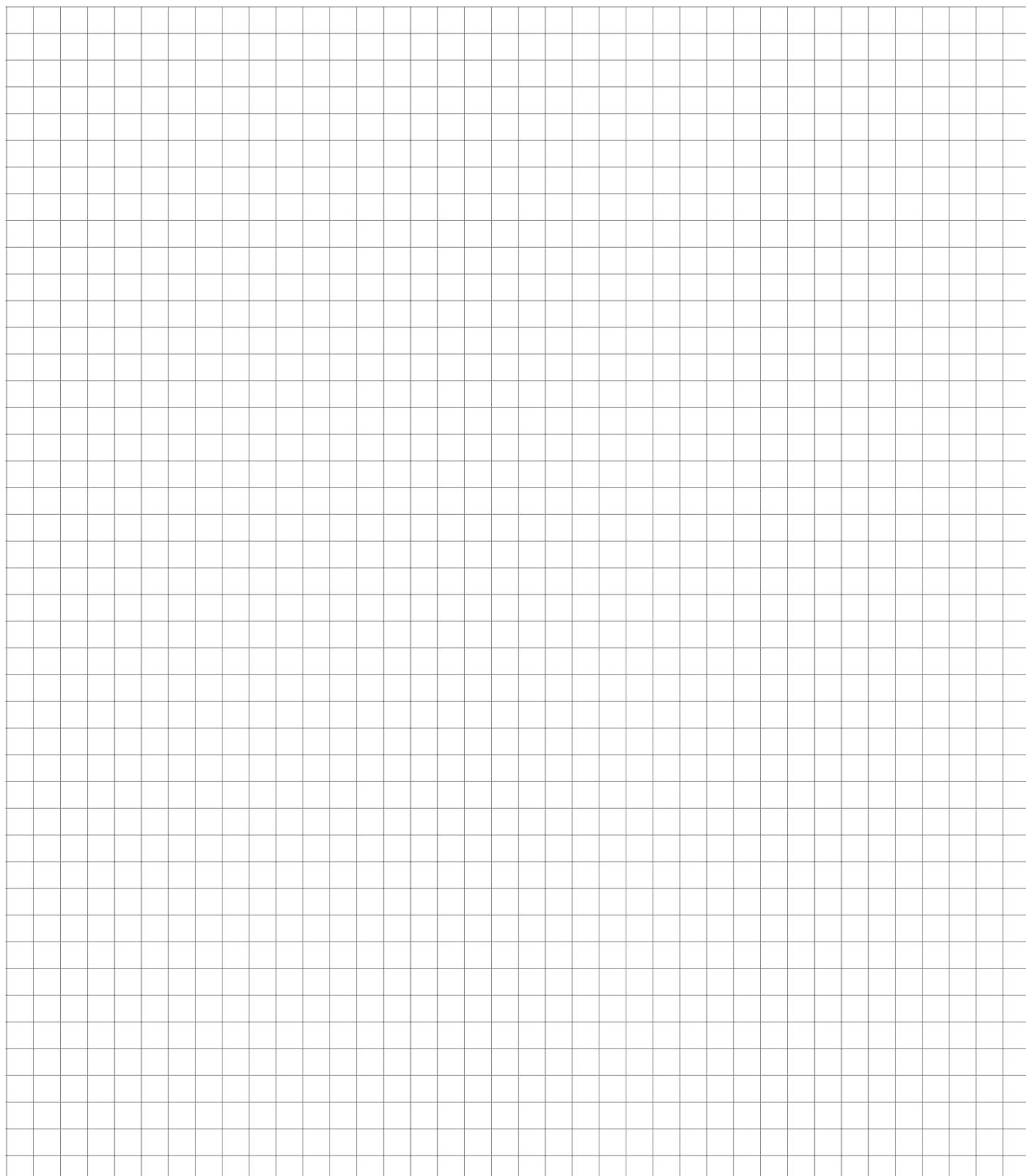


Kombinatorik

Aufgabe 54

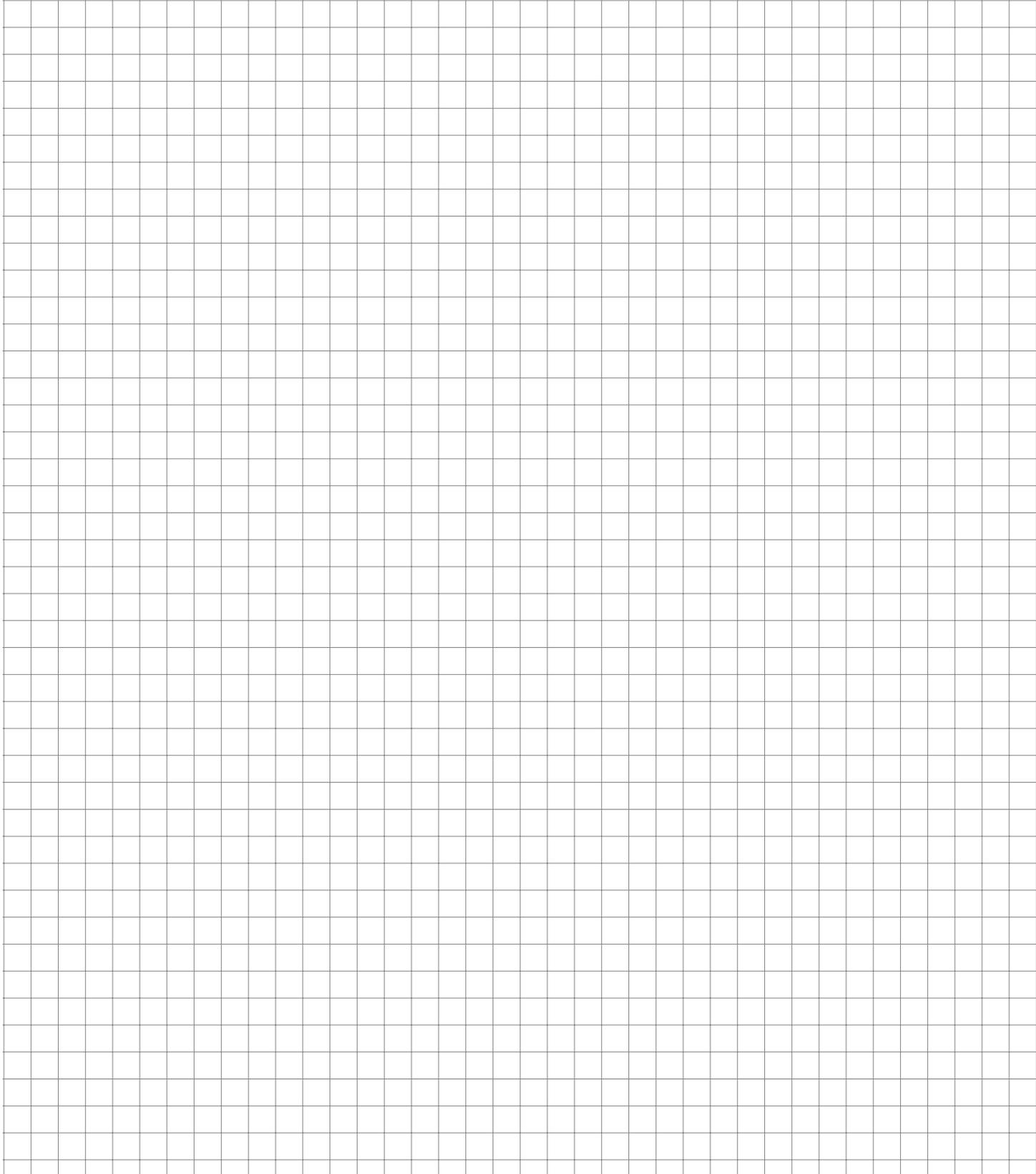
Kombinatorik: Kombinationen (1)

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, 5 Buchstaben aus den 26 Buchstaben des Alphabets nebeneinander zu legen, wenn Wiederholungen zulässig bzw. nicht zulässig sind?



Aufgabe 55

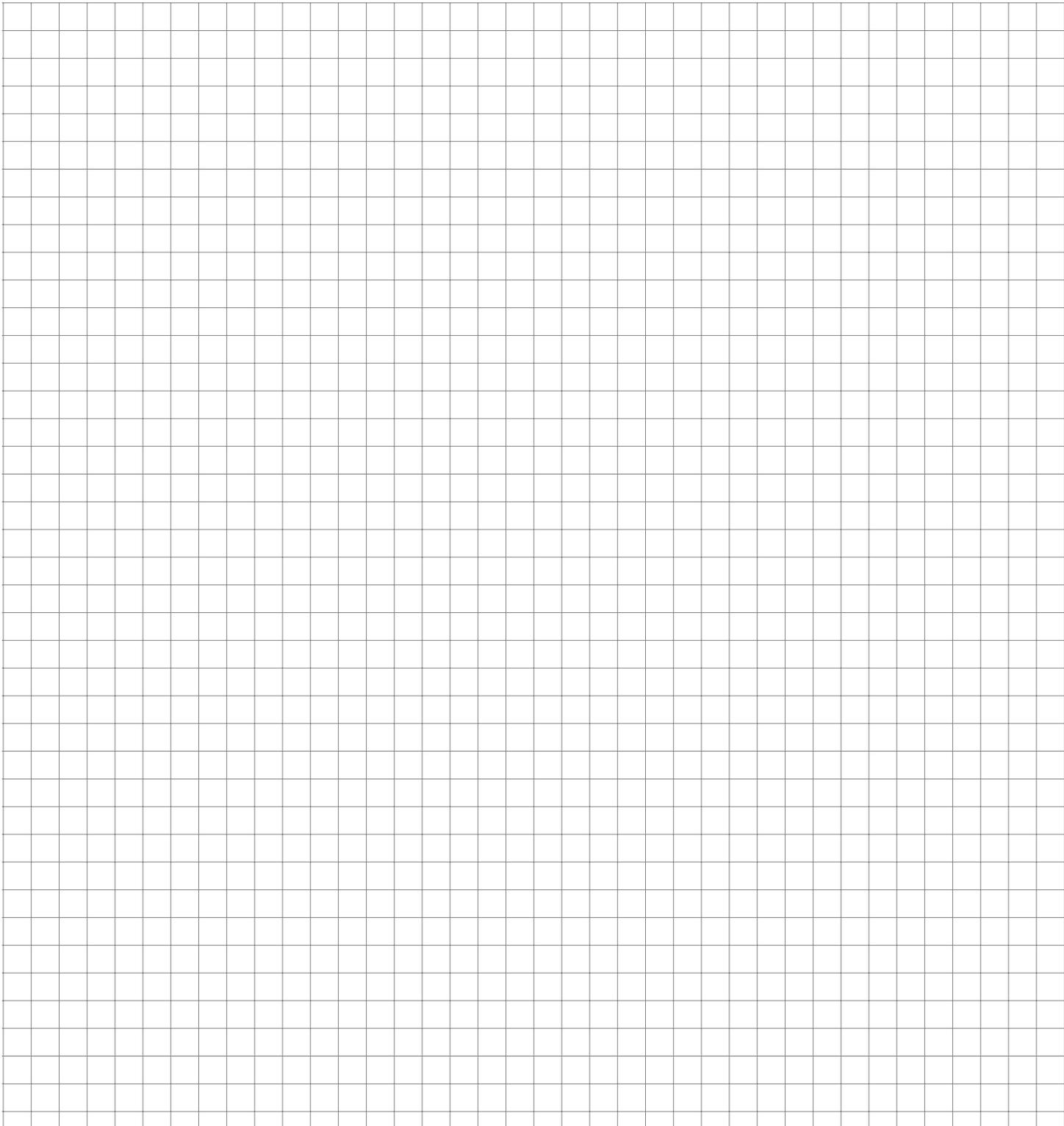
Bei der Beurteilung der Klangqualität von 10 Lautsprecher-Boxen ist in der Weise zu verfahren, dass die Tester jeweils zwei Boxen durch aufeinander folgendes Anhören miteinander vergleichen. Um die Objektivität der Tester zu überprüfen, soll auch jede Box mit sich selbst in der angegebenen Weise verglichen werden. Wie viele Hörvergleiche sind durchzuführen, wenn es auf die Reihenfolge, in der zwei Boxen angehört werden, nicht ankommt?



Aufgabe 56

Ein Kartenspiel mit 32 verschiedenen Karten soll so unter 4 Spieler aufgeteilt werden, dass jeder genau 8 Karten erhält.

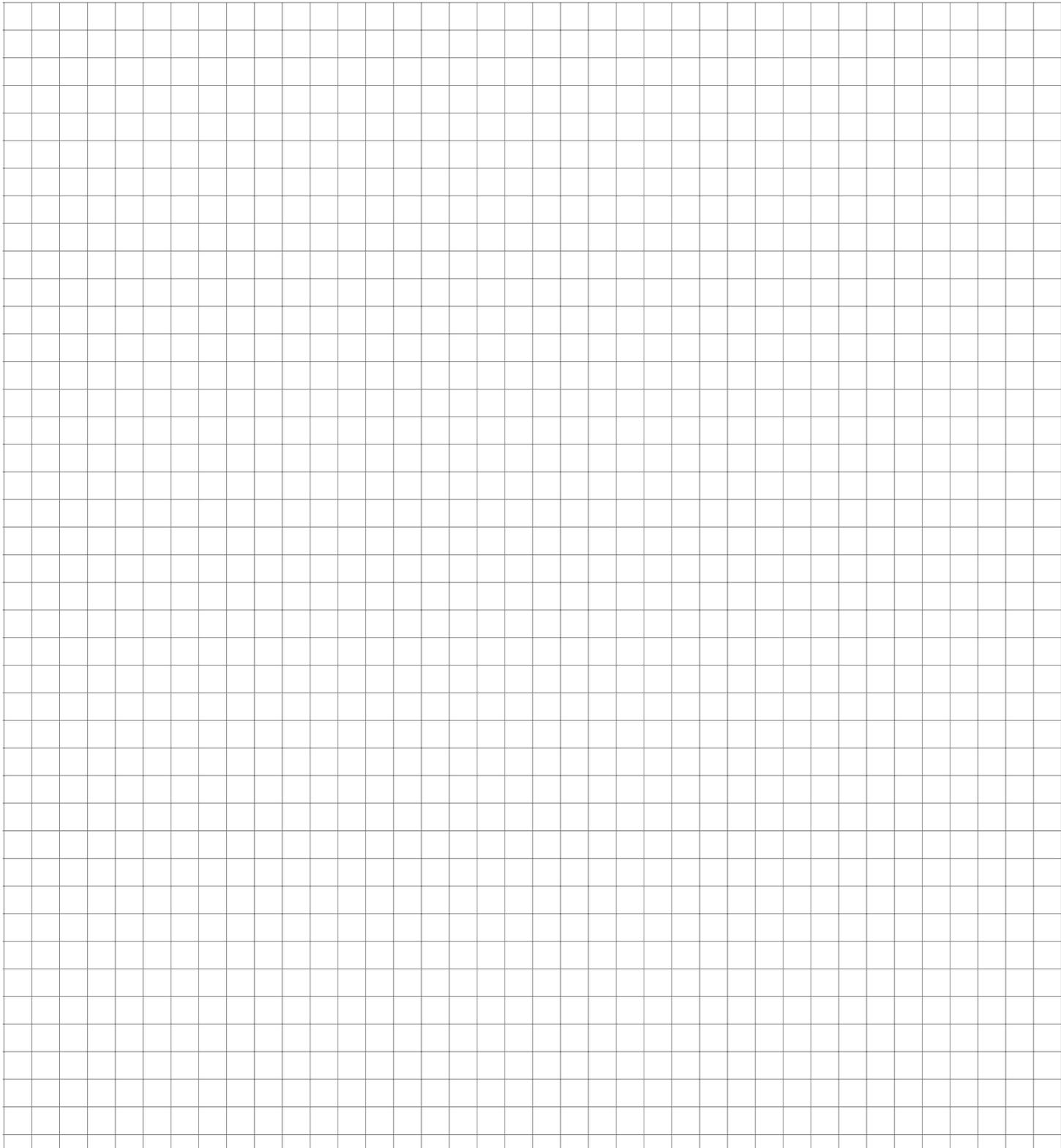
- Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es?
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, dass ein bestimmter Spieler alle vier Asse erhält?
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, dass einer der Spieler alle vier Asse erhält?
- Bilden Sie den Quotienten des Ergebnisses von c) und a) und interpretieren Sie den erhaltenen Wert.



Aufgabe 57

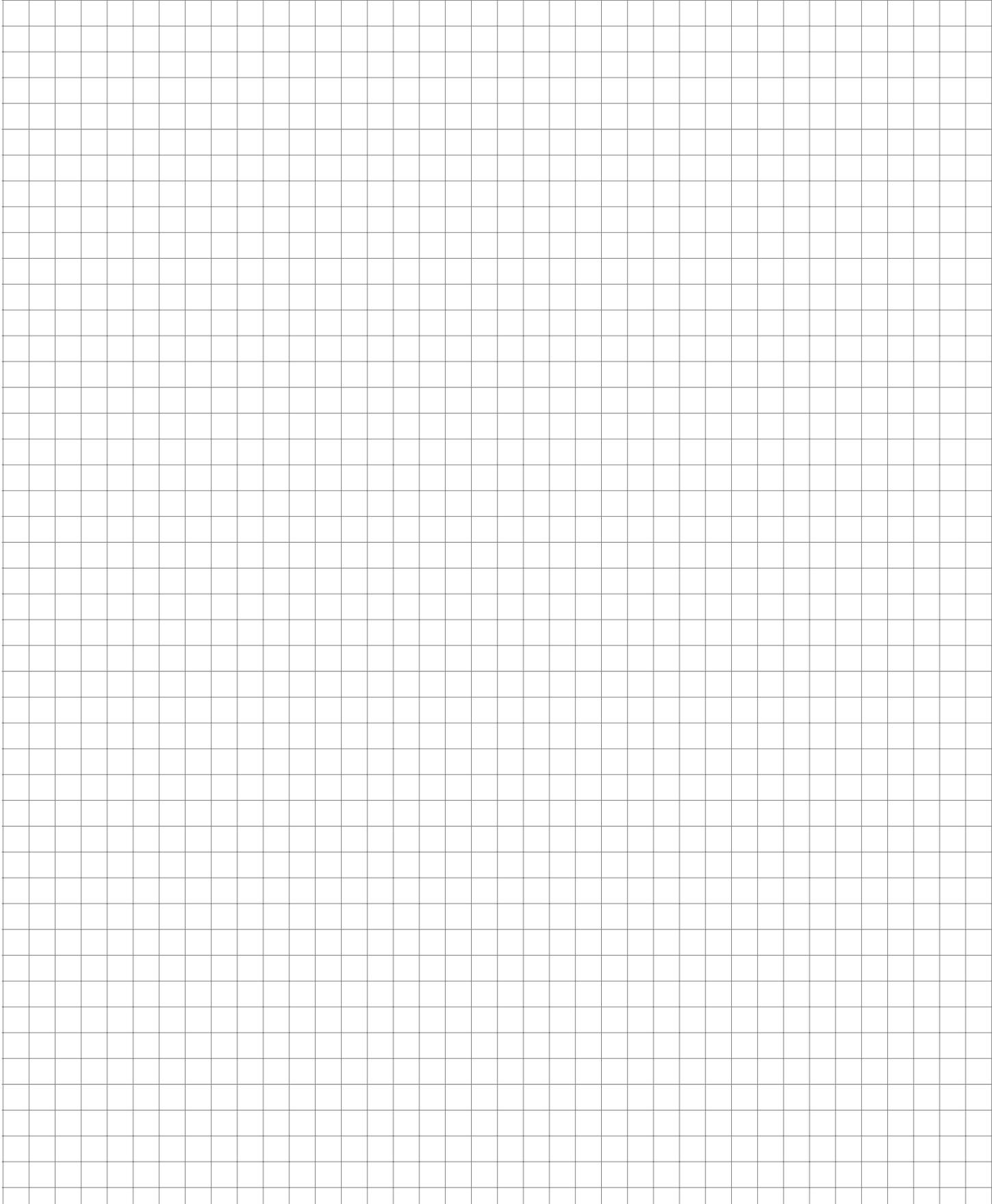
Gegeben seien die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

- a) Wie viele dreistellige Zahlen können daraus gebildet werden, wenn jede Ziffer höchstens einmal vorkommen darf?
- b) Wie viele der so gebildeten Zahlen sind gerade, wie viele ungerade?
- c) Wie viele dieser Zahlen sind durch 5 teilbar?
- d) Wie viele dieser Zahlen sind kleiner als 200 bzw. größer als 500?



Aufgabe 58

Wie viele Möglichkeiten gibt es, im Zahlenlotto „6 aus 49“ genau 3, 4, 5, beziehungsweise 6 richtige Zahlen anzukreuzen?



Aufgabe 59

Eine Statistik-Klausur bestehe aus insgesamt 10 Aufgaben mit den (absteigend sortierten) Punktzahlen

22, 20, 16, 12, 12, 10, 8, 8, 8, 6.

Die Bearbeitung der einzelnen Aufgaben sei in beliebiger Reihenfolge zulässig.

- Wie viele unterschiedliche Anordnungen (unterschiedliche Bearbeitungsreihenfolgen) gibt es, wenn alle Aufgaben bearbeitet werden?
- Wie viele unterschiedliche Anordnungen (unterschiedliche Auswahlen der Aufgaben sowie unterschiedliche Bearbeitungsreihenfolgen) gibt es, wenn nur 5 Aufgaben bearbeitet werden?
- Eine Studentin verfolgt die Strategie, die Aufgaben in absteigender Reihenfolge der erreichbaren Punktzahlen zu bearbeiten. Haben mehrere Aufgaben eine übereinstimmende Punktzahl, wählt Sie irgendeine Anordnung dieser Aufgaben. Wie viele unterschiedliche Bearbeitungsreihenfolgen zur Bearbeitung aller Aufgaben bleiben bei dieser Strategie möglich?



Wahrscheinlichkeitstheorie

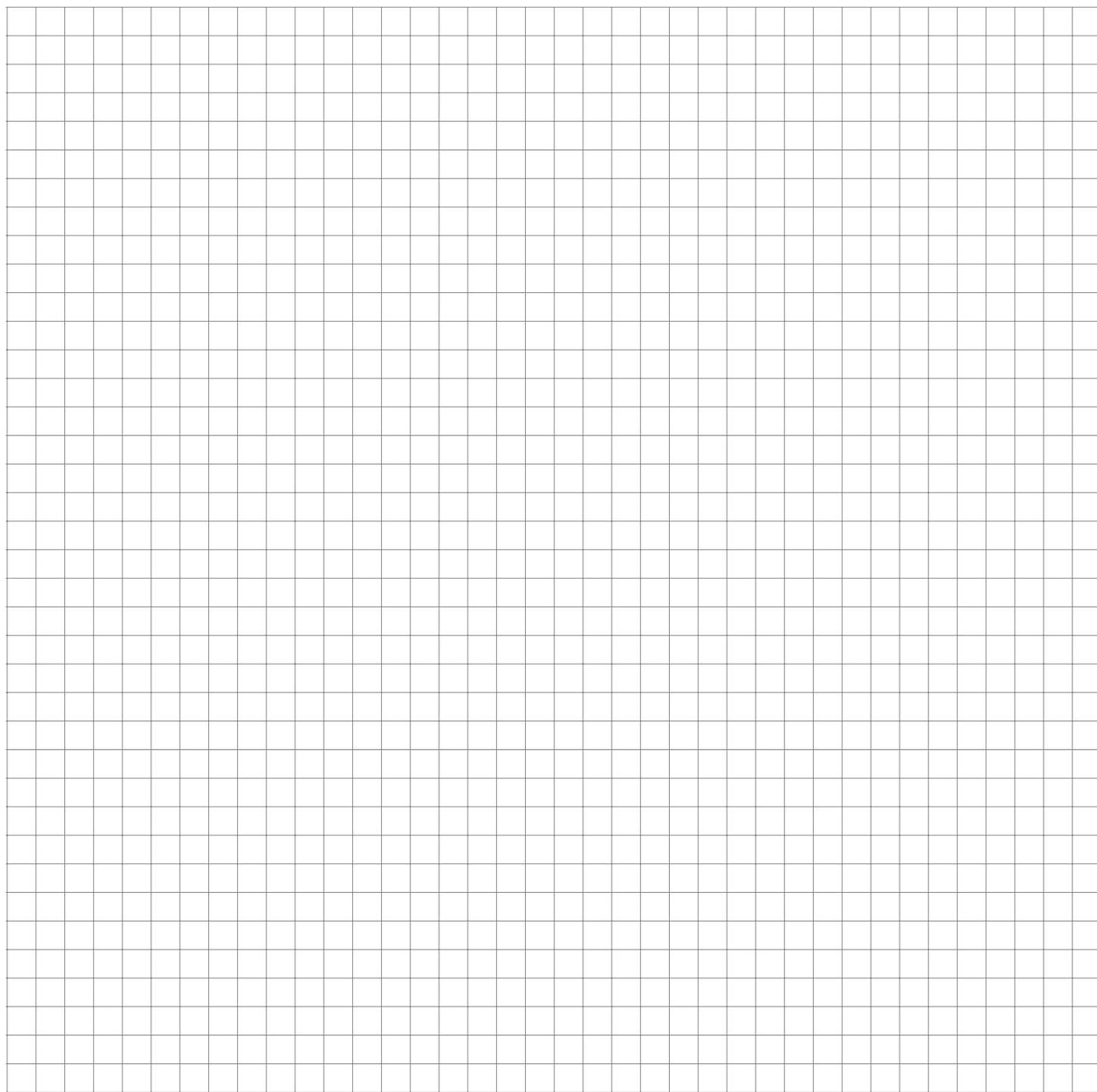
Aufgabe 60

W-Theorie: Laplace-Wahrscheinlichkeit (1)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit viermaligem Werfen eines Würfels

- a) viermal 6
- b) keine 6
- c) mindestens eine 6
- d) der Reihe nach 6,6,6,5
- e) dreimal 6 und einmal 5
- f) genau die Augensumme 7
- g) mindestens zweimal die gleiche Zahl

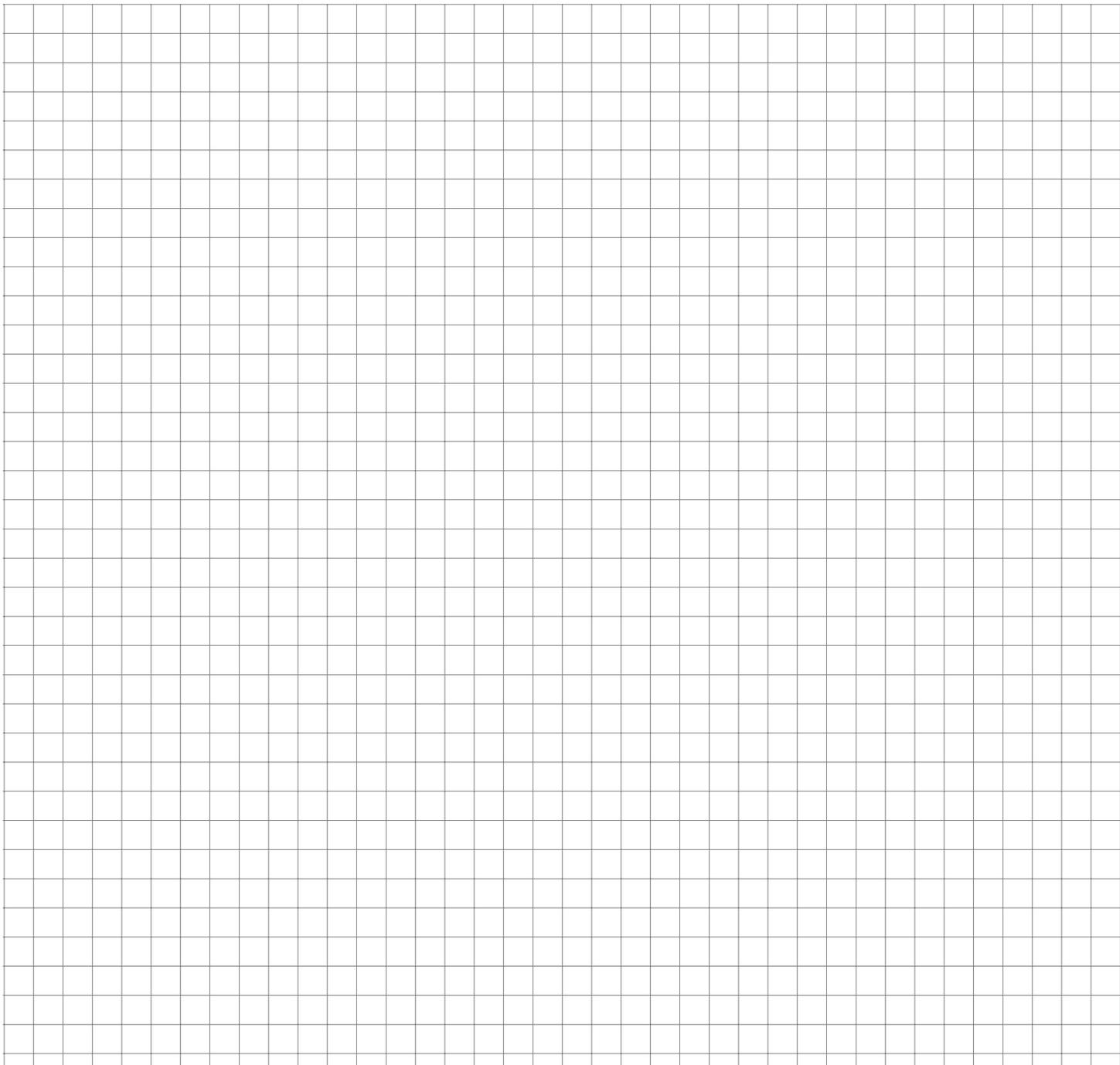
zu erhalten?



Aufgabe 61

In einem Raum befinden sich n Personen, von denen niemand am 29. Februar Geburtstag hat. Nehmen Sie weiterhin an, dass Sie selbst auch nicht am 29. Februar Geburtstag haben.

- Sei $n = 3$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei der drei Personen am gleichen Tag (Tag und Monat) Geburtstag haben?
- Wie viele Leute müssen sich im Raum befinden, so dass die Wahrscheinlichkeit mindestens 50 % beträgt, dass mindestens zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben?
- Sei $n = 100$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens noch eine Person am selben Tag Geburtstag hat wie Sie selbst?
- Wie viele Personen müssen sich im Raum befinden, so dass die Wahrscheinlichkeit mindestens 50 % beträgt, dass mindestens noch eine Personen am gleichen Tag Geburtstag hat wie Sie selbst?

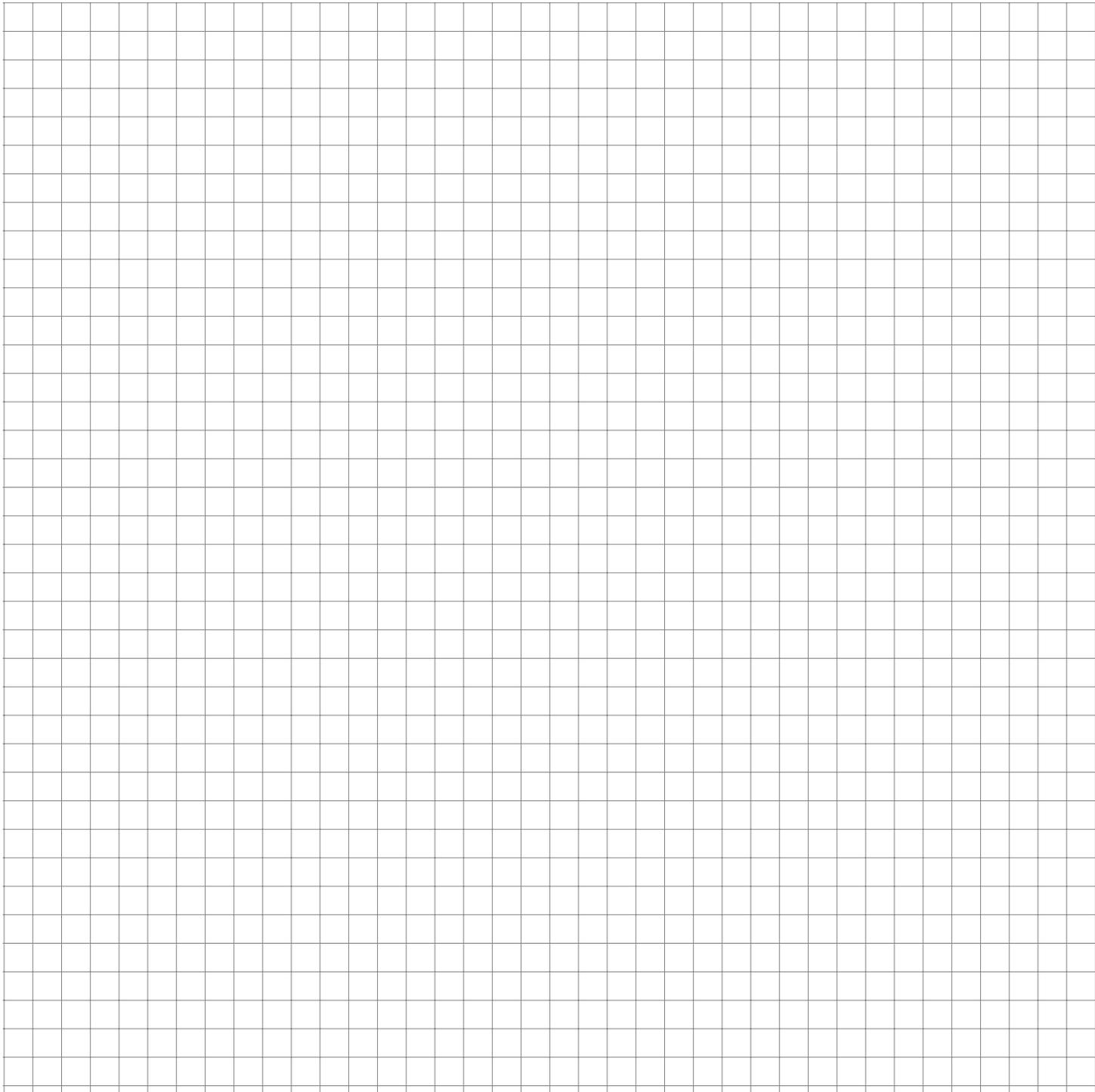


Aufgabe 62

Ein dreimotoriges Flugzeug stürzt ab, wenn der Hauptmotor in der Mitte ausfällt oder beide Seitenmotoren ausfallen. Es wird angenommen, dass jeder der Flugzeugmotoren mit der Wahrscheinlichkeit p auf einem bestimmten Flug ausfällt. Ferner wird angenommen, dass der Ausfall eines Motors unabhängig vom Verhalten der anderen Motoren erfolgt.

A bezeichne das Ereignis, dass ein Flugzeug dieses Typs infolge von Motorversagen abstürzt.

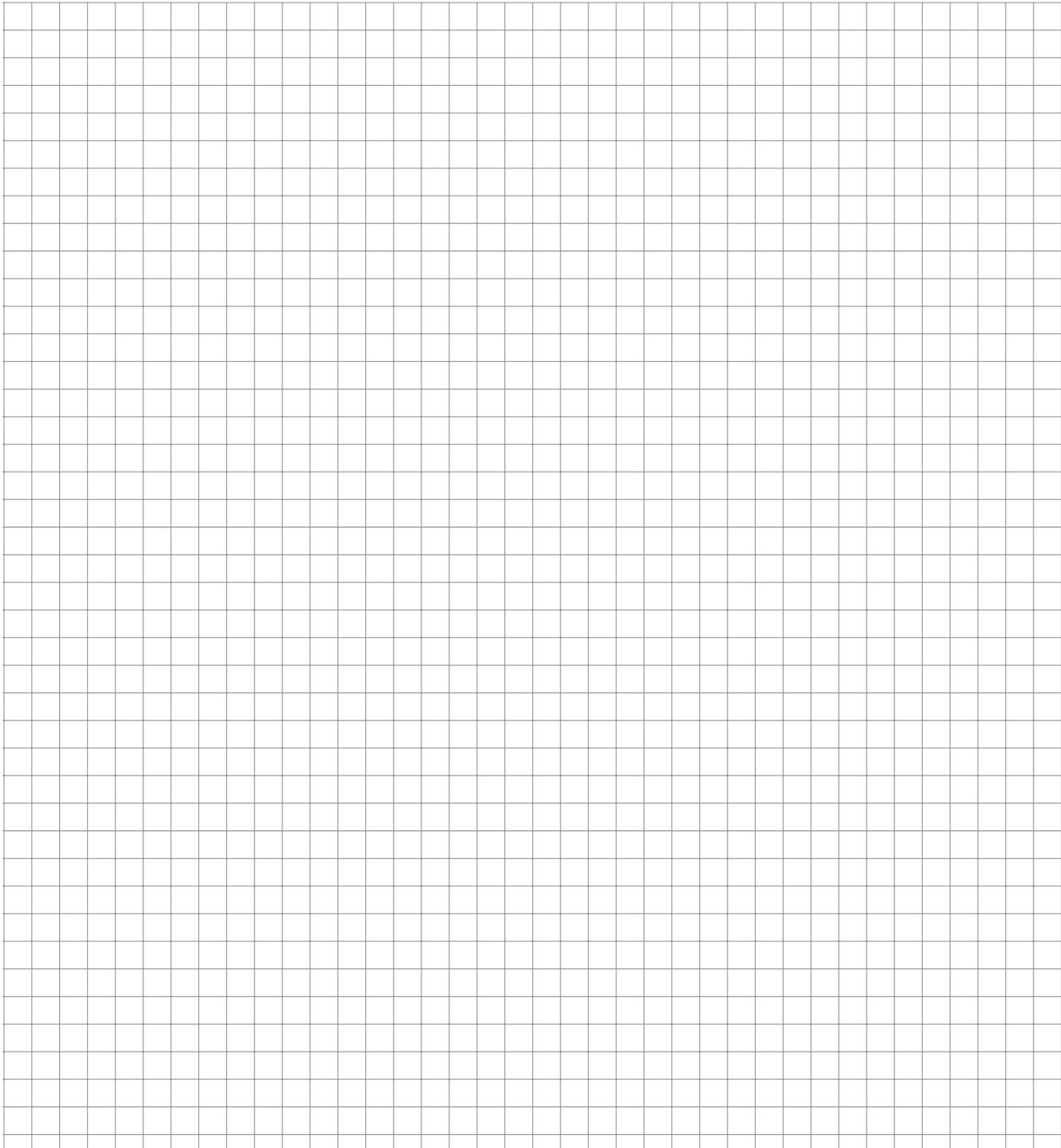
- Ist die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ größer oder kleiner als p ? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.
- Bestimmen Sie $P(A)$ für $p = 0,01$.



Aufgabe 63

Ein Kraftfahrzeughändler weiß aus langjähriger Erfahrung, dass bei den in Zahlung genommenen Wagen 50% Mängel am Motor, 70% an der Karosserie und 30% an Motor und Karosserie aufweisen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein in Zahlung genommener Wagen

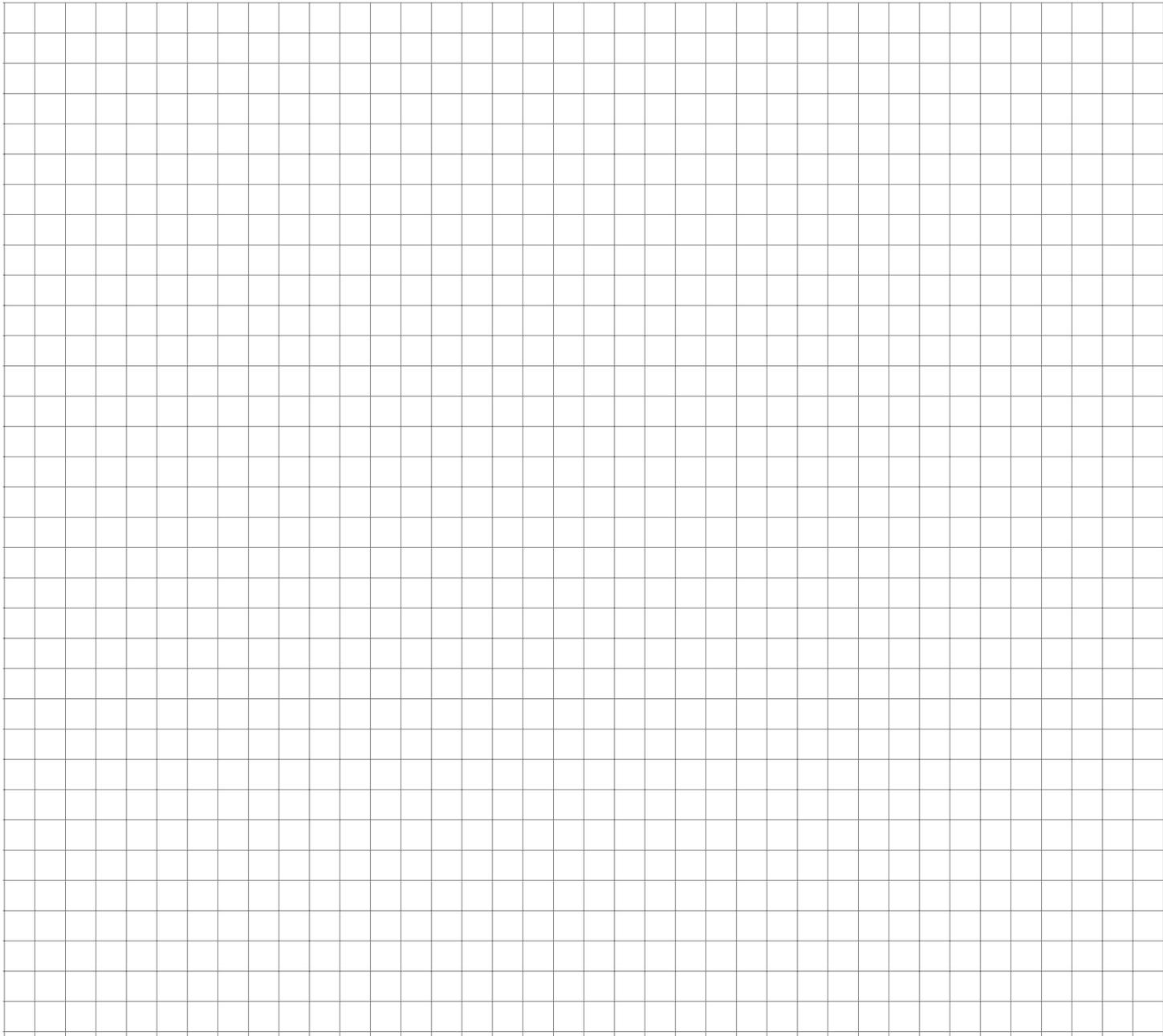
- a) ohne Mängel an Motor und Karosserie ist,
- b) auch einen Mangel am Motor besitzt, wenn bekannt ist, dass die Karosserie schadhaft ist?



Aufgabe 64

Alexandra, Bernhard und Claudio sind als heilige drei Könige verkleidet von Haus zu Haus unterwegs. Bei jedem Haus lassen Sie den Zufall entscheiden, wer von den dreien ein Gedicht aufsagen darf. Dazu würfeln sie jeweils vorher einmal mit einem fairen Würfel. Alexandra sagt das Gedicht, wenn eine 1 fällt, Bernhard bei einer 2 oder 3 und Claudio darf bei 4, 5 oder 6 rezitieren. Alexandra sagt das Gedicht mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % perfekt (mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % ist mindestens ein kleiner Fehler dabei), Bernhard sagt das Gedicht mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % perfekt auf, Claudio mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 %.

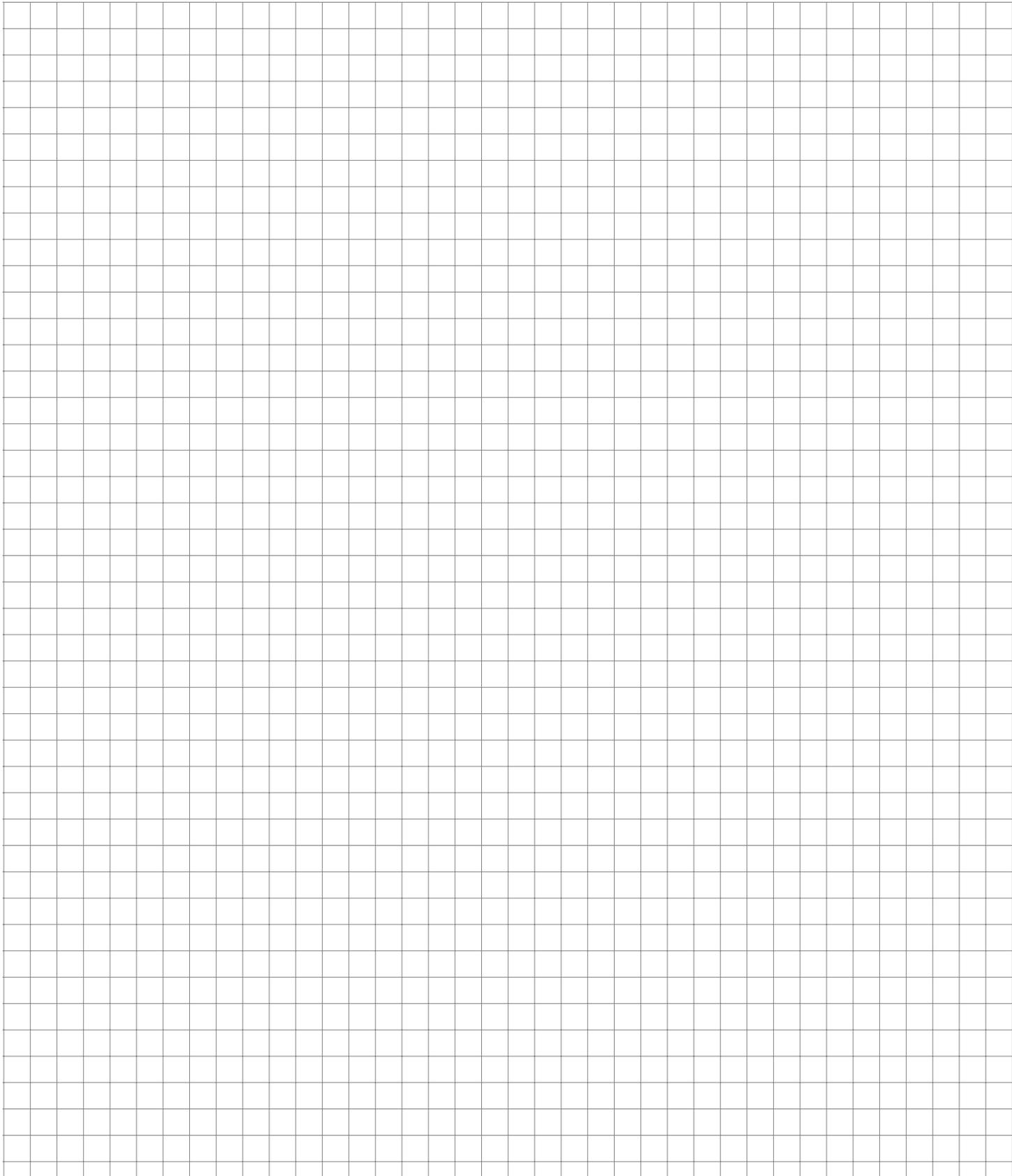
- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird das Gedicht bei einem beliebigen Haus perfekt zum Vortrag gebracht?
- b) Frau Maier erzählt am Tag nach dem Besuch der drei Ihrer Nachbarin, dass sich bei Ihr ein Sternsinger beim Gedicht ganz schön verhaspelt hätte. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Bernhard das Gedicht bei Frau Maier aufgesagt?



Aufgabe 65

W-Theorie: bedingte Wahrscheinlichkeit (5)

In der Stadt D wird im Mittel zu 10 % schwarz gefahren. 70 % der Schwarzfahrer haben keine Fahrkarte, während die anderen 30 % gefälschte oder illegal besorgte Karten besitzen. Von den ehrlichen Fahrgästen haben im Mittel 5 % ihre Fahrkarte vergessen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein kontrollierter Fahrgast, der keine Karte vorzeigen kann, ein Schwarzfahrer?



Aufgabe 66

10.000 Flugreisende, die aus einem südlichen Land nach Deutschland einreisen werden auf eine ansteckende tropische Krankheit getestet. Ein positiver Test deutet auf eine Erkrankung hin, allerdings nicht sicher. 9 Leute, bei denen der Test positiv ausgefallen ist sind tatsächlich krank. 9899 Leute mit negativem Testergebnissen sind nicht krank. Insgesamt war der Test bei 9900 Untersuchten negativ. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer beliebig unter diesen 10.000 Flugreisenden ausgewählten Person

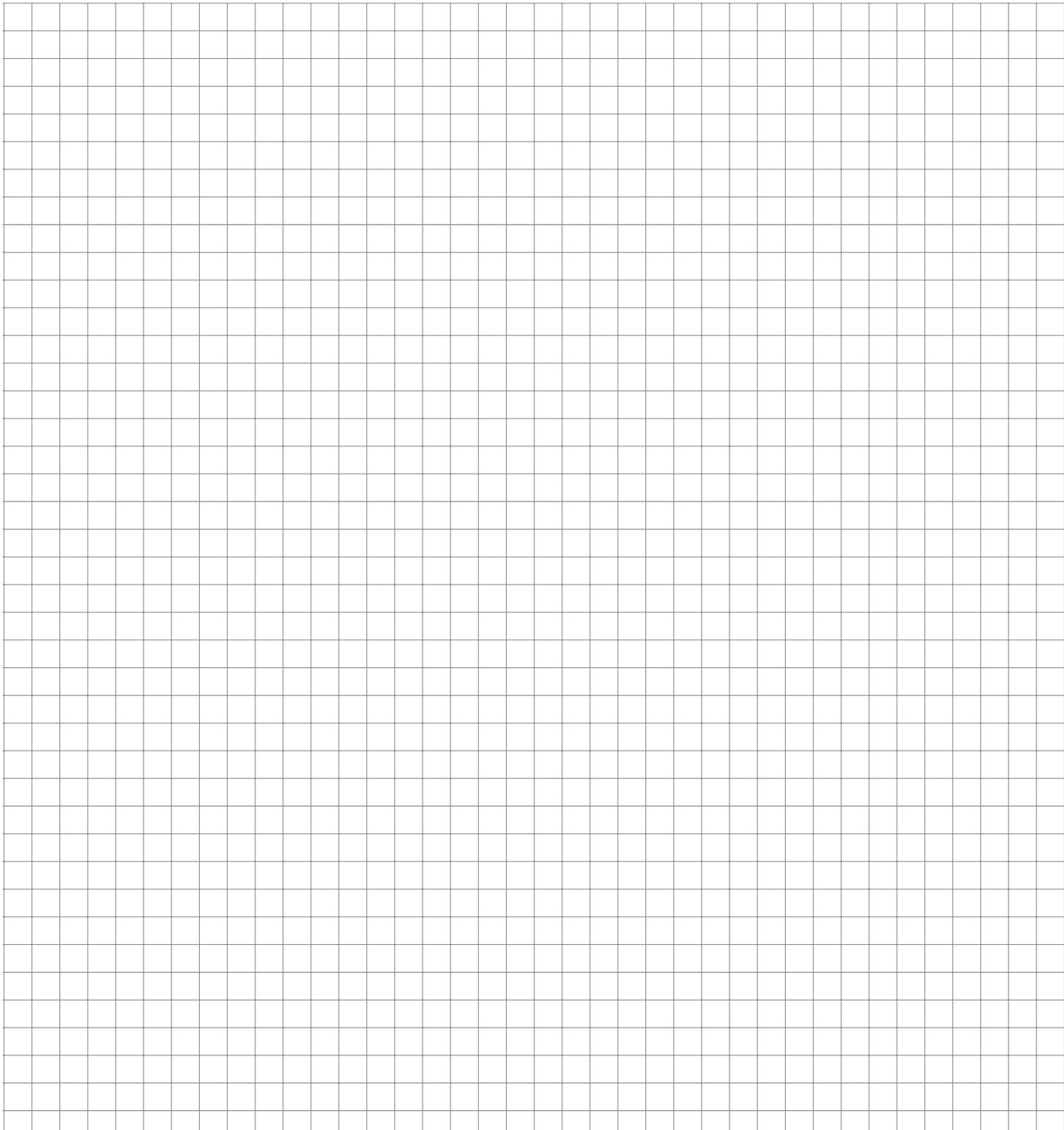
- a) Der Test positiv ausfällt,
- b) die Person krank ist,
- c) die Person gesund ist, obwohl der Test positiv ausgefallen ist,
- d) der Test positiv ausfällt, wenn bekannt ist, dass die Person gesund ist.



Aufgabe 67

Geben Sie zu den Ereignissen A, B die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ an, wenn

- a) $A \subset B$,
- b) $B \subset A$,
- c) $A = \Omega$,
- d) $B = \Omega$,
- e) $A \cap B = \{\}$.



Aufgabe 68

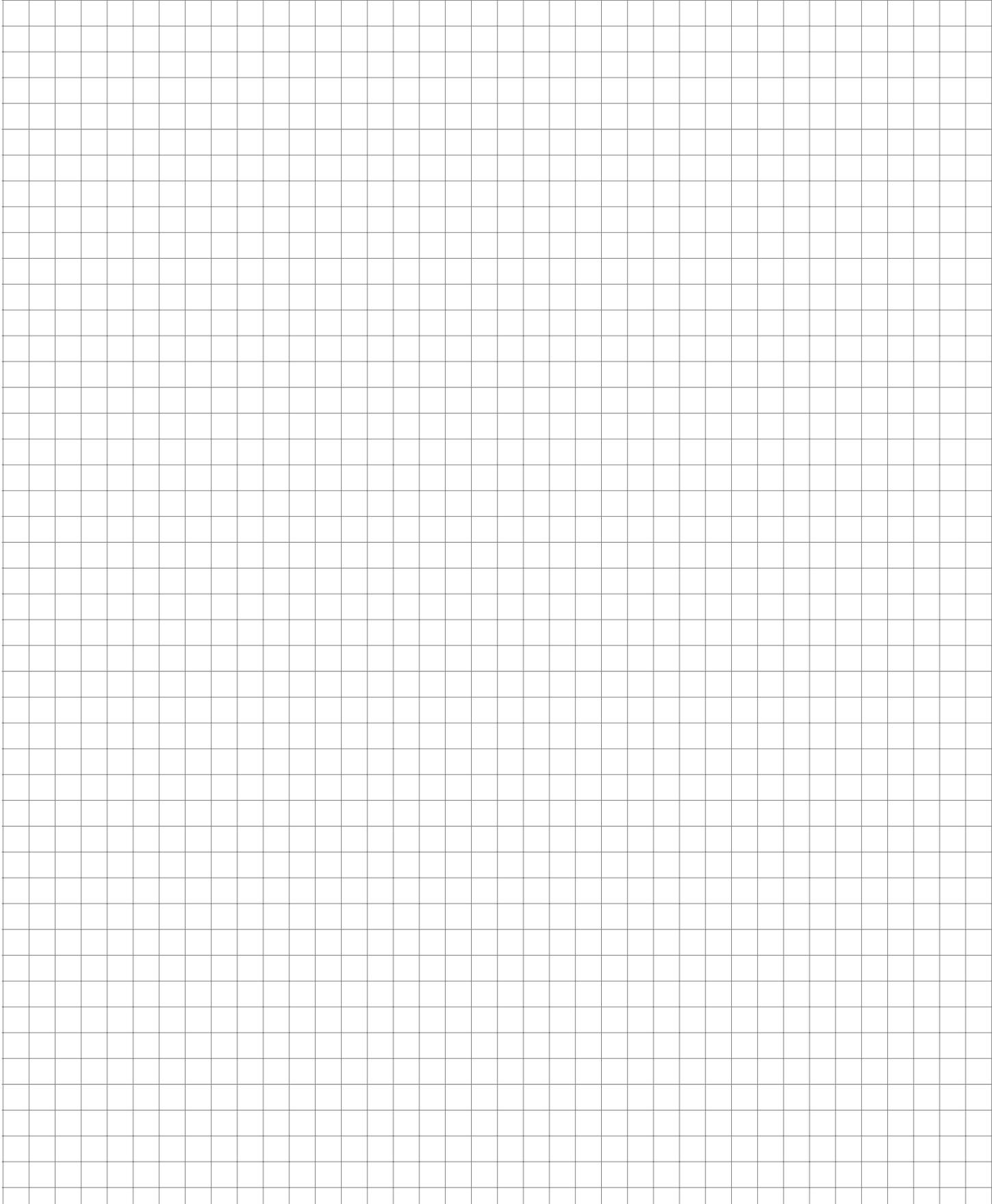
Ein Schießbudenbesitzer hat festgestellt, dass die Trefferwahrscheinlichkeit in den späten Abendstunden 0,1 pro Schuss beträgt.

- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, bei 5 Schüssen mindestens 2 Treffer zu erzielen?
- Wie viele Schüsse sind notwendig, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,9 mindestens einen Treffer zu erzielen?

R

Aufgabe 69

Eine binomialverteilte Zufallsvariable X habe einen Erwartungswert von 2 und eine Varianz von $4/3$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für $x=2$?



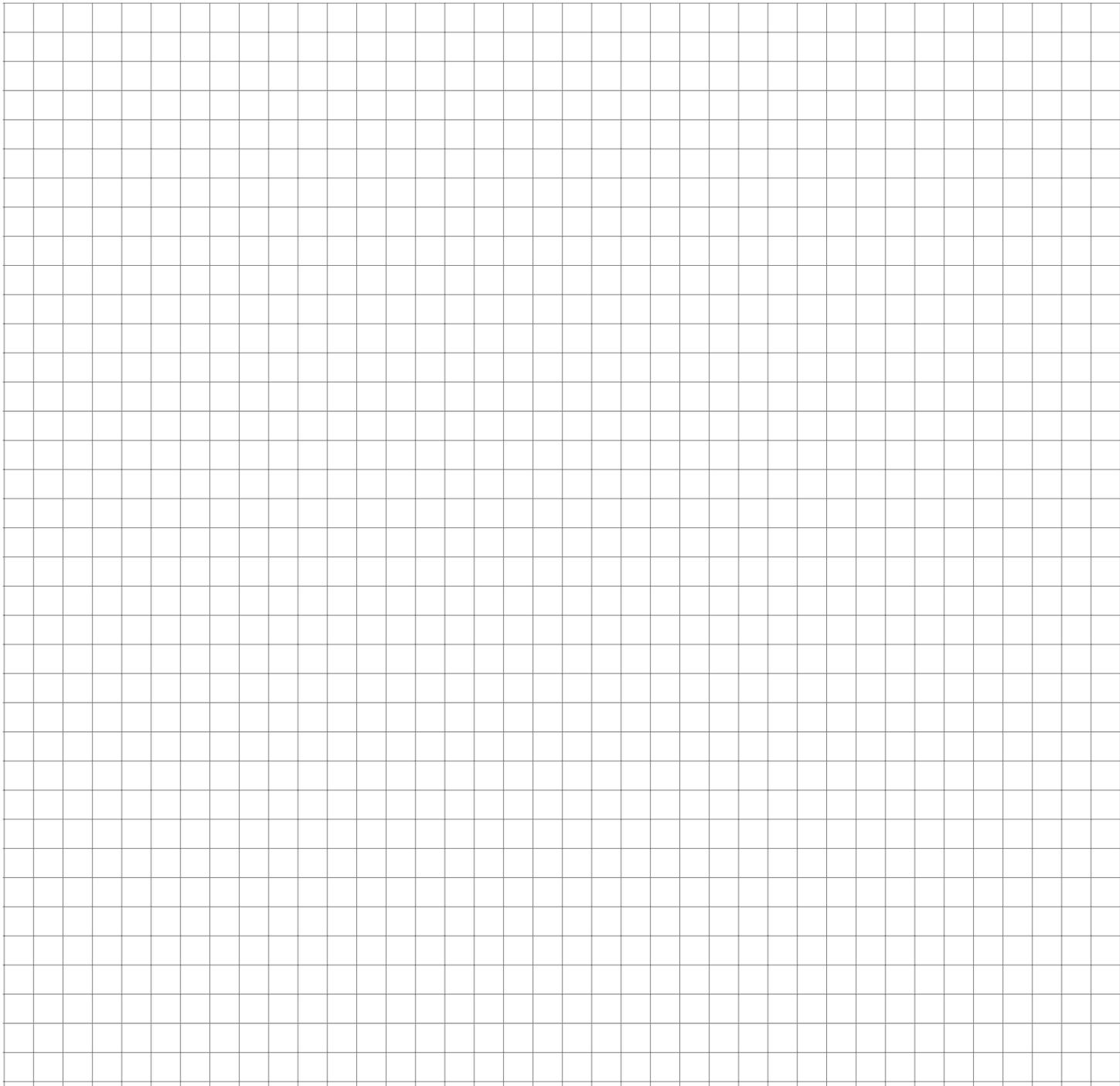
Aufgabe 70

Im Laufe eines Jahres werden von 52 aufeinanderfolgenden Ausgaben einer wöchentlich erscheinenden Zeitschrift 11 beliebige Ausgaben mit einer bestimmten Annonce versehen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Leser von 20 beliebigen (aber verschiedenen) Ausgaben

R

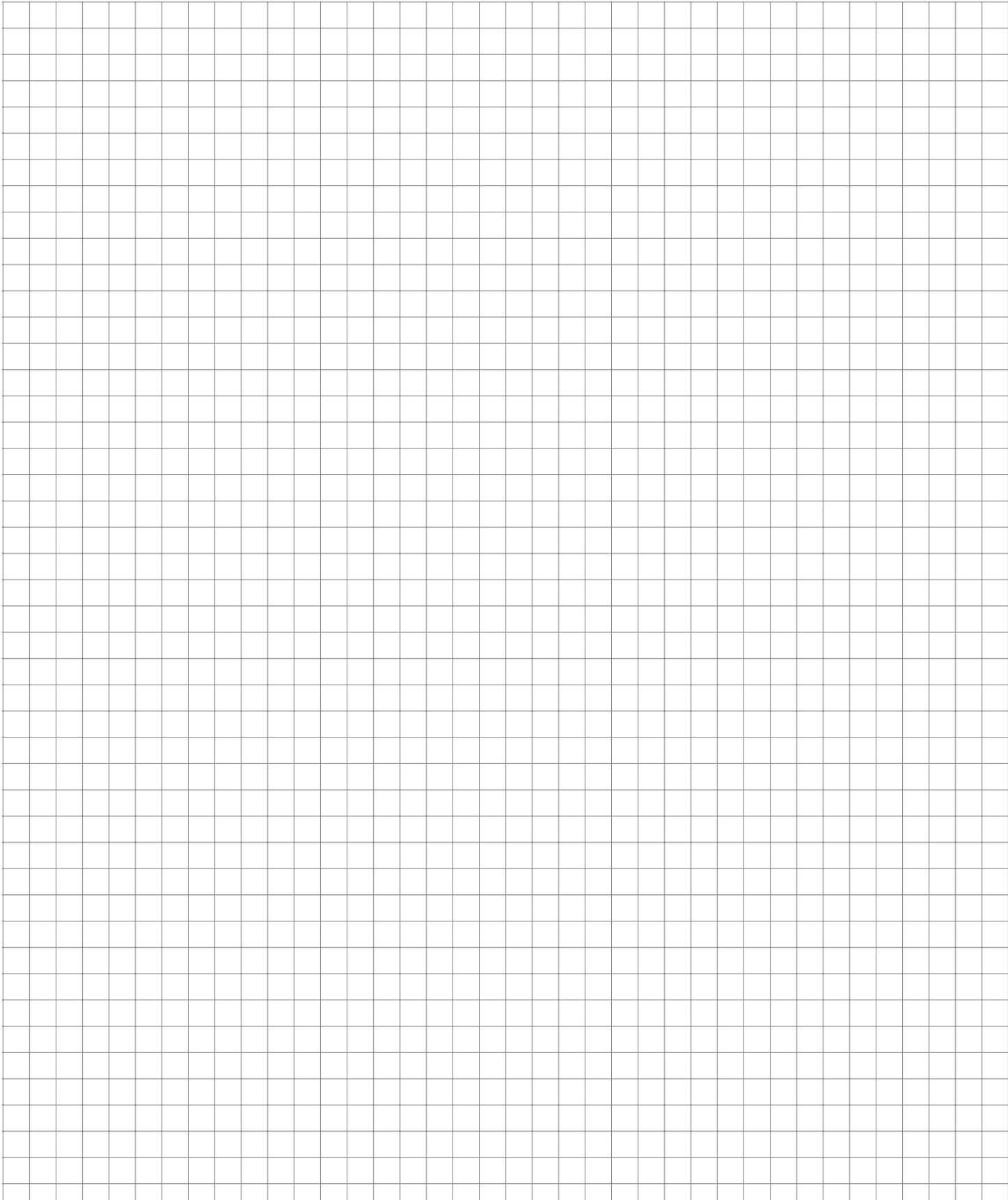
- a) zwei Ausgaben
- b) keine Ausgabe
- c) 20 Ausgaben
- d) sämtliche 11 Ausgaben
- e) mindestens eine Ausgabe

mit einer Annonce erhält?



Aufgabe 71

Unter den 20 Passagieren eines Charterfluges befinden sich zwei Bewaffnete, die das Flugzeug entführen wollen. Zehn Passagiere werden zufällig ausgewählt und genau untersucht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden Bewaffneten unentdeckt bleiben?



Aufgabe 72

Das Rechenzentrum der Hochschule habe festgestellt, dass während einer Betriebszeit von einem Tag mit der Wahrscheinlichkeit 0,905 kein Ausfall des Systems zu verzeichnen ist. Die Anzahl der Systemausfälle sei Poisson-verteilt.

- Bestimmen Sie den Parameter λ der Poisson-Verteilung.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Tag genau zwei Systemausfälle zu verzeichnen sind?
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es bei 5 gleichartigen Systemen, die unabhängig voneinander laufen, zu mindestens einem Ausfall am Tage kommt.

R

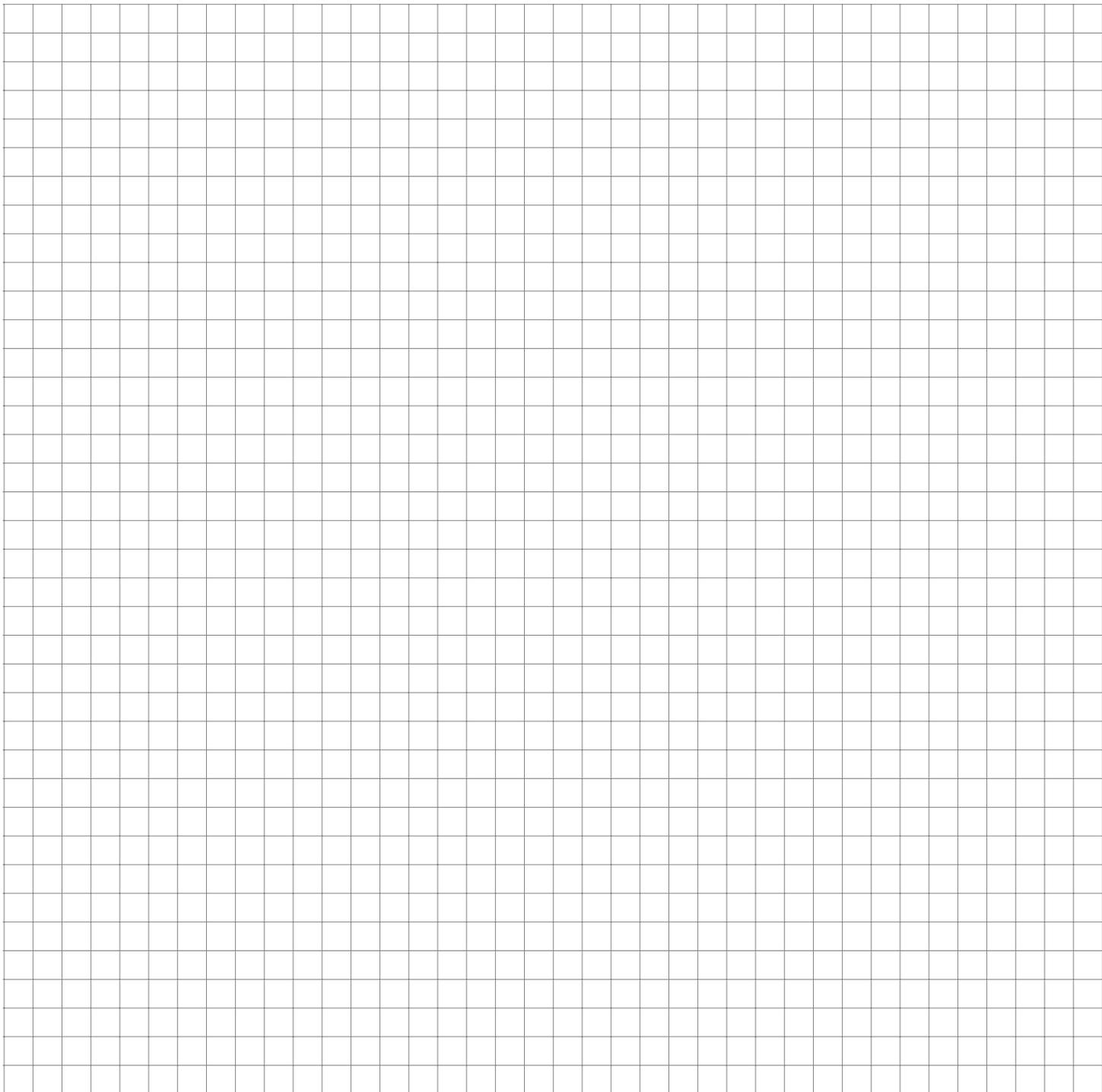
Aufgabe 73

In einer Online-Redaktion weiß man, dass ein Webredakteur gemessen am output sehr wenige sprachliche Fehler produziert. Im Durchschnitt werden drei Fehler pro Monat festgestellt. Die Anzahl der Fehler pro Monat kann als Poisson-verteilt angenommen werden und ist jeweils unabhängig von den anderen Monaten.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

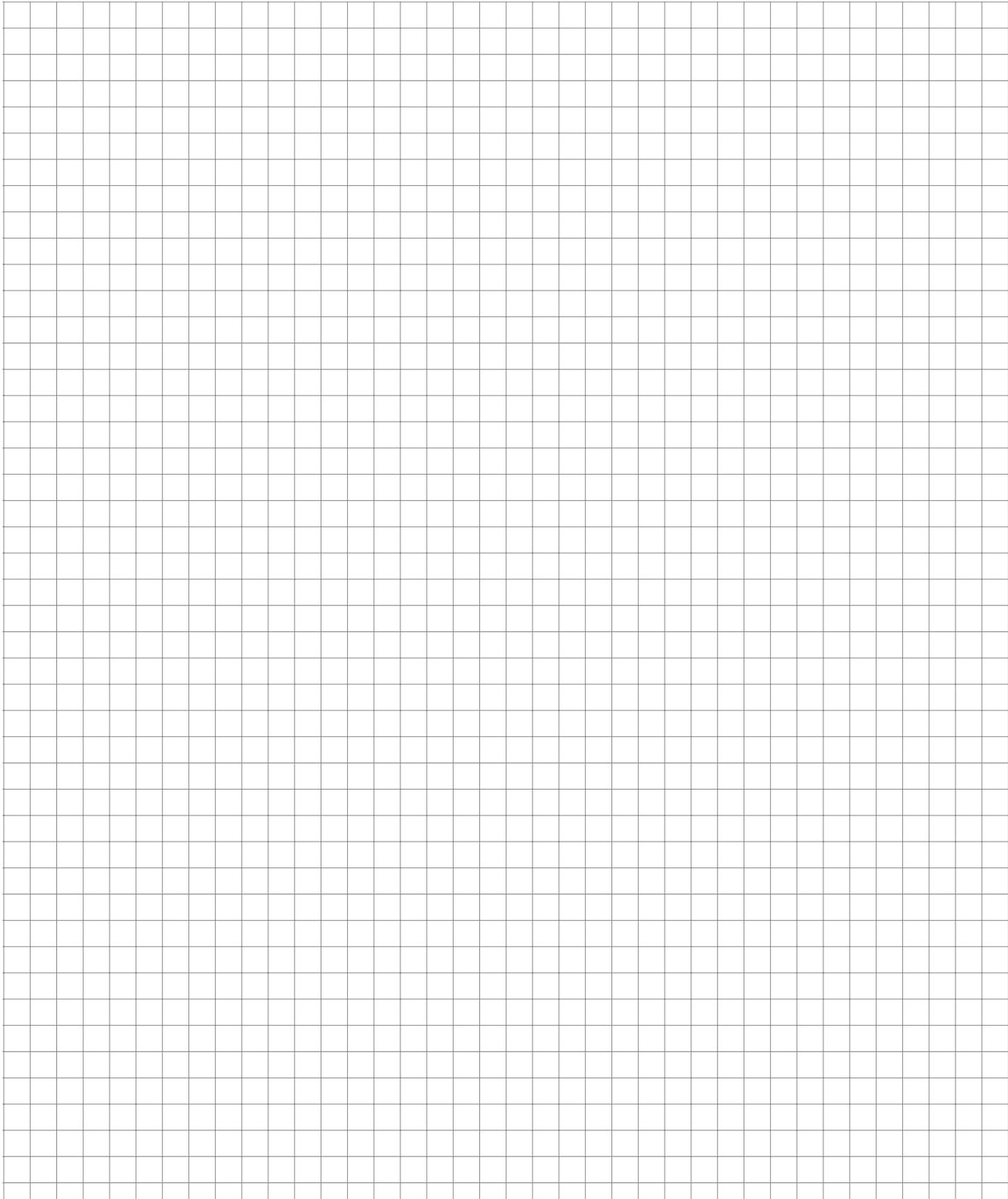
- a) dass der Redakteur mehr als 9 Fehler pro Monat begeht,
- b) für mehr als 3 Fehler, wenn man weiß, dass er schon 2 Fehler gemacht hat,
- c) dass er während eines Jahres in mindestens 3 Monaten keinen Fehler produziert?

R



Aufgabe 74

Die Gesamtdauer X eines Projektes wird als normalverteilt mit dem Parameter $\mu = 10$ (Wochen) angenommen. Ferner wird für die Wahrscheinlichkeit $P(8 \leq X \leq 12)$ der Wert 0,8 geschätzt. Man bestimme den Parameter σ .



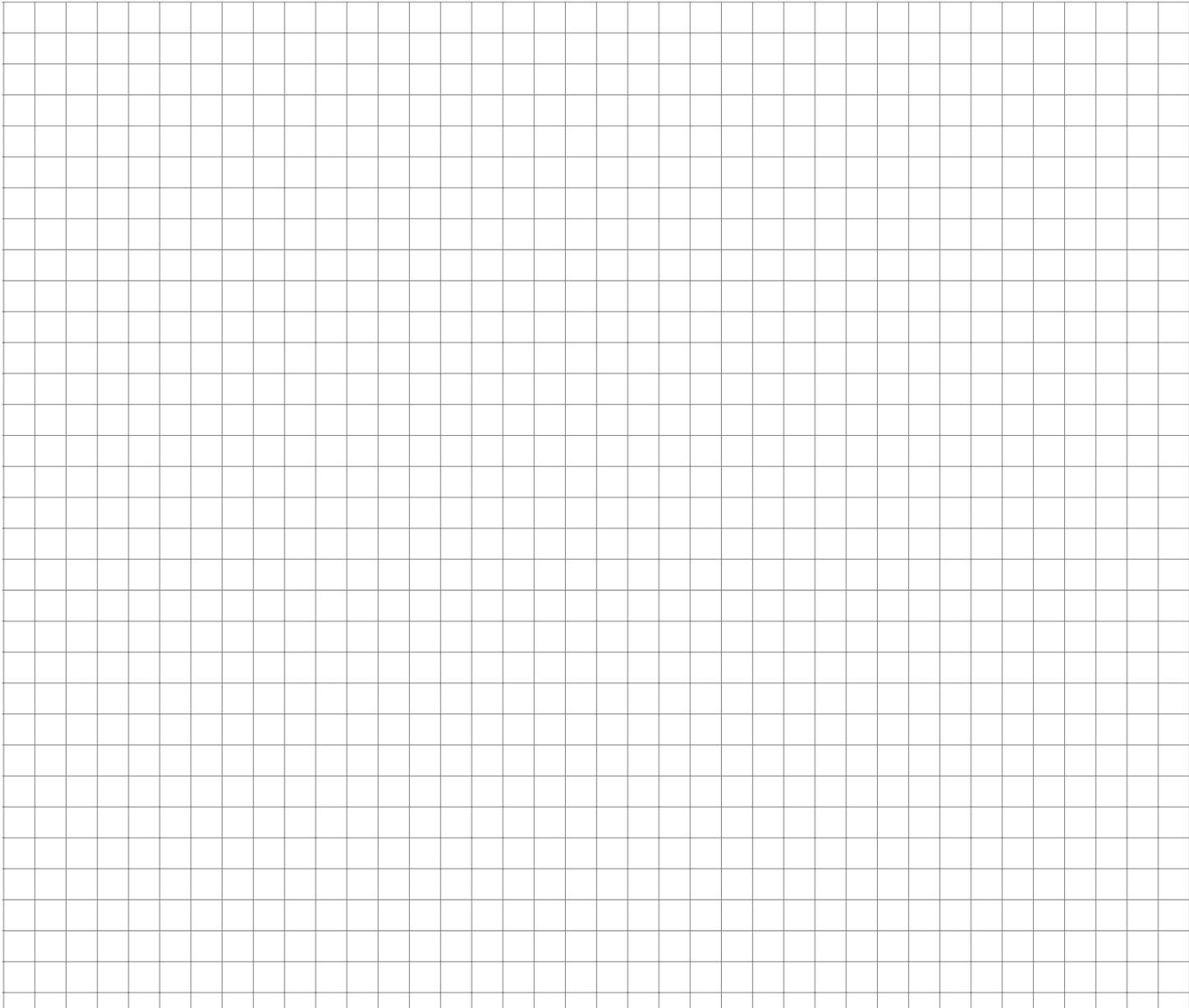
Aufgabe 75

Eine normalverteilte Zufallsvariable X soll untersucht werden. Zwei Tatsachen sind von X bekannt:

- ▶ $P(X > 20) = 20\%$
- ▶ $P(X < 1) = 1\%$

Bestimmen Sie damit:

- a) $\text{Sta}[X] = \sigma$ sowie $E[X] = \mu$
- b) $P(X = 20)$
- c) $P(X \leq 20)$
- d) $P(X \geq 25)$
- e) $P(X \geq 25 | X \geq 20)$
- f) $P(X \geq 20 | X \geq 25)$



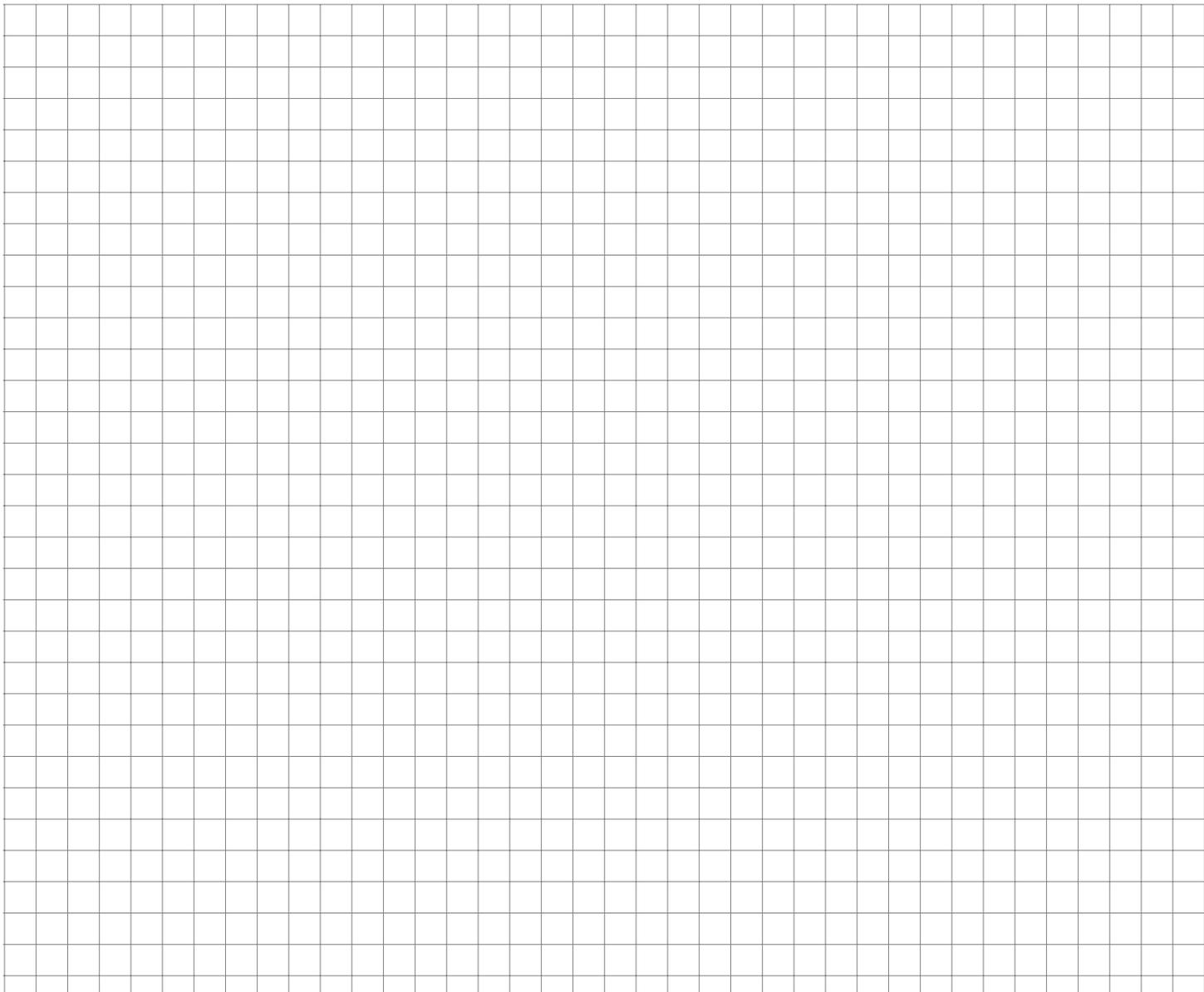
Aufgabe 76

Schokoladennikoläuse mit einem Sollgewicht von 200g sollen bzgl. ihres Gewichts kontrolliert werden. Es stellt sich heraus, dass

- ▶ das Gewicht X der Nikoläuse normalverteilt ist,
- ▶ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Nikolaus mindestens 200g wiegt bei 30 % liegt und
- ▶ ein Nikolaus mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % höchstens 210g wiegt.

Berechnen Sie bzw. geben Sie ohne Rechnung aber mit Begründung an:

- Wie groß ist die Standardabweichung σ sowie der Erwartungswert μ von X ?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zufällig einen Nikolaus mit einem Gewicht von exakt 200g (± 0 g) auszuwählen?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Nikolaus weniger als 190g wiegt?
- Nikoläuse mit weniger als 195g werden aussortiert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Nikolaus aus diesem Ausschuss zwischen 190g und 195g wiegt?

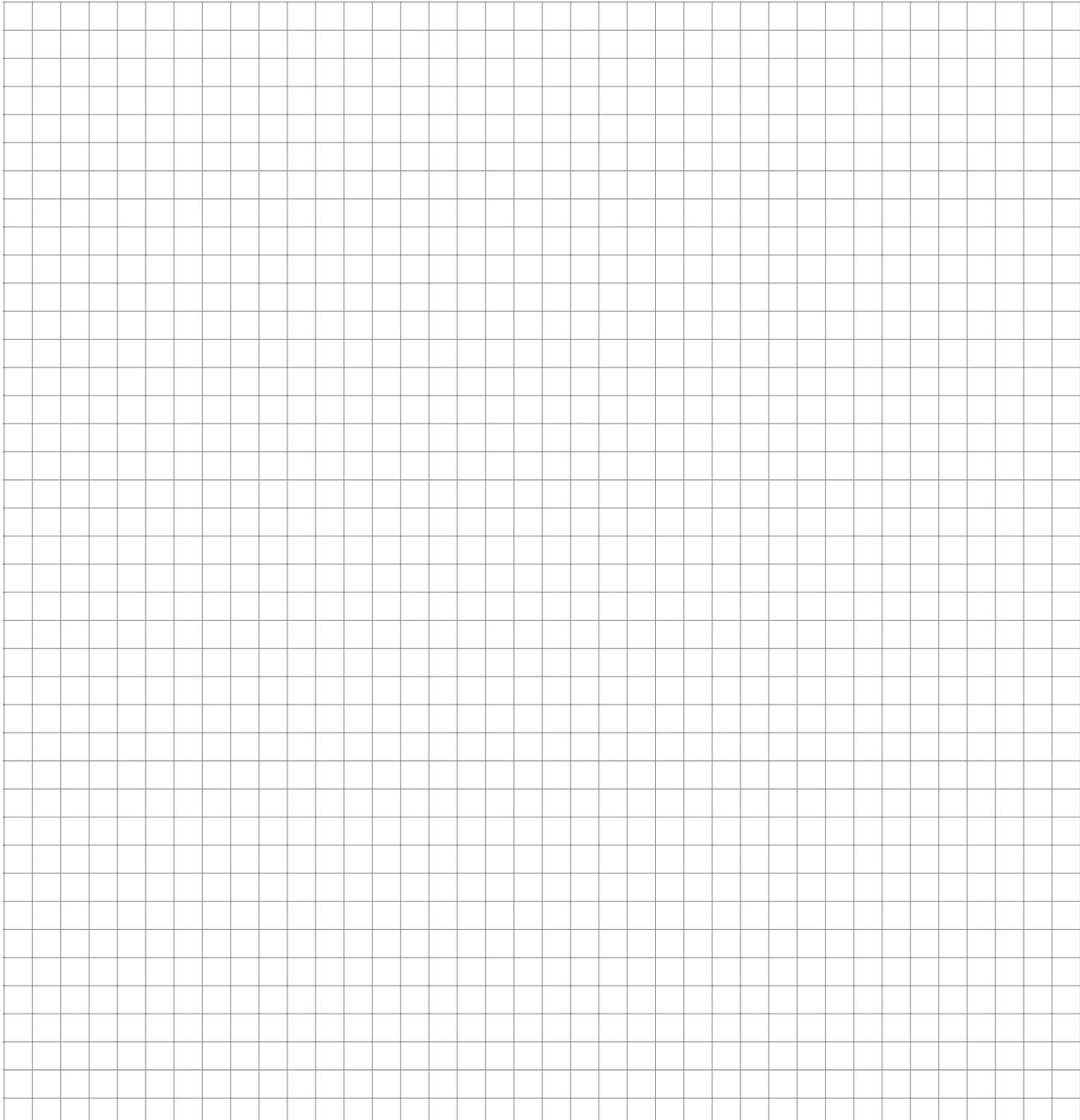


Aufgabe 77

Die zufallsabhängige Nachfrage X nach einem Gut in einer Zeitperiode ist gemäß der folgenden Wahrscheinlichkeitsfunktion verteilt:

$$P(x = n) = \frac{n}{40} \quad \text{für } n = 1, \dots, 8 \quad \text{und} \quad P(x = 9) = \frac{1}{10}$$

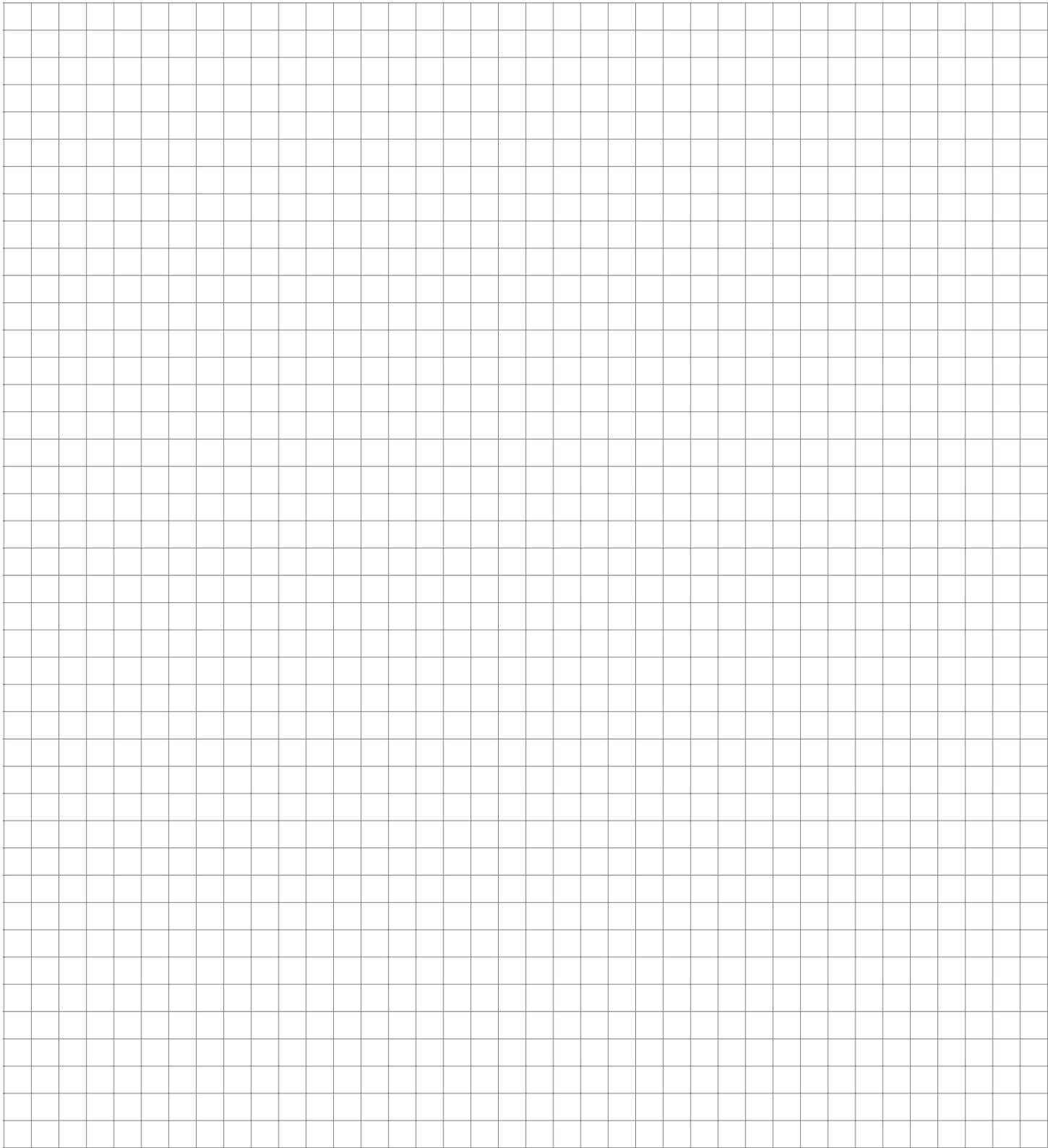
- Skizzieren Sie den Verlauf der Wahrscheinlichkeitsfunktion.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden mindestens 6 Stück des Gutes nachgefragt?
- Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Nachfrage.



Aufgabe 78

Die Lebensdauer einer Maschine sei eine über dem Zeitintervall $[0,65]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie

- den Erwartungswert der Lebensdauer
- die Varianz der Lebensdauer
- die Wahrscheinlichkeit, dass die Lebensdauer zwischen 13 und 39 liegt.

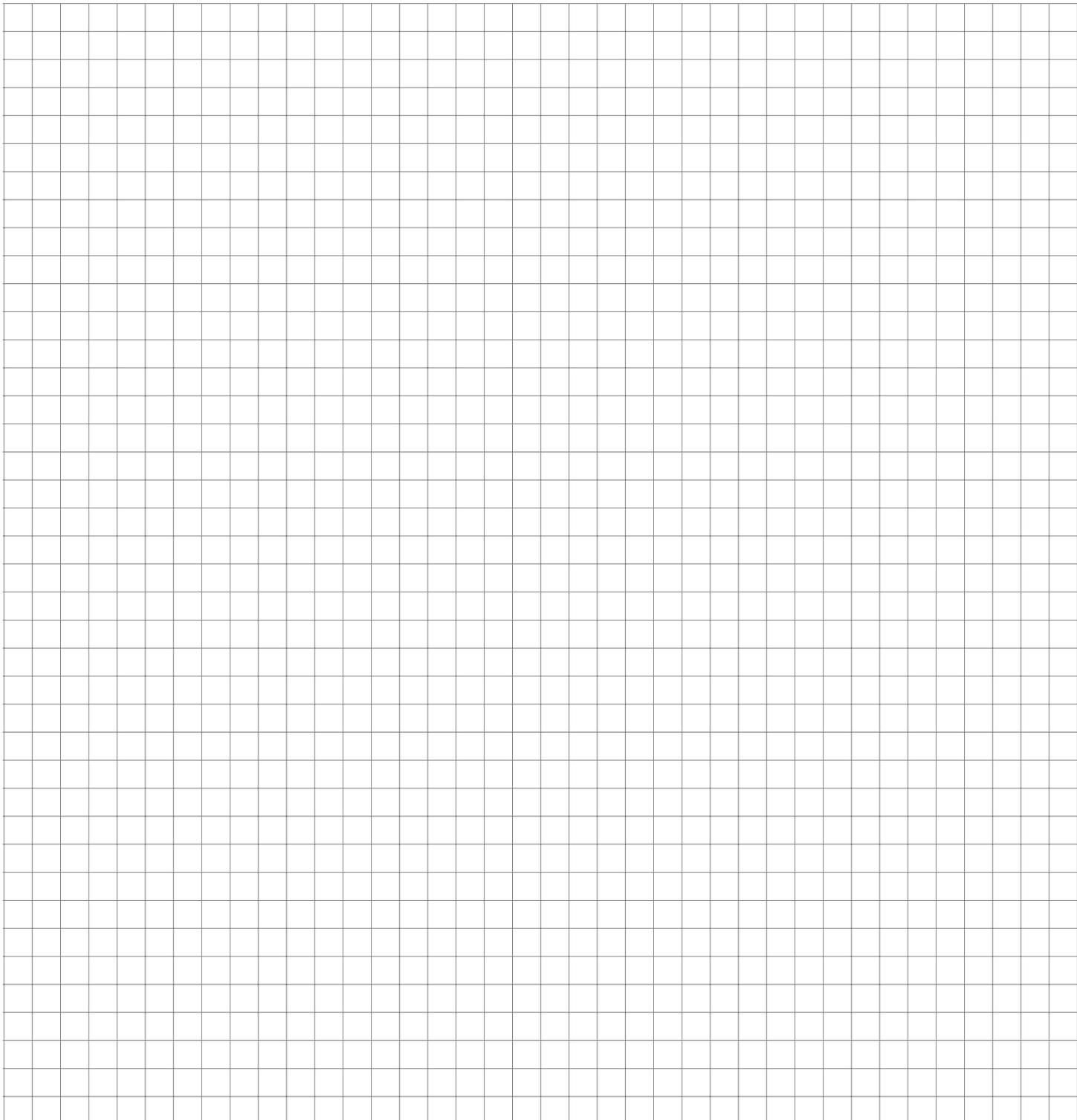


Aufgabe 79

Eine Unternehmung sieht sich auf dem Absatzmarkt zufällig schwankender Nachfrage gegenübergestellt. Die Höhe der Nachfrage X sei folgendermaßen verteilt:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}, & \text{für } 0 \leq x \leq 12 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Produktion der Unternehmung wird unmittelbar abgesetzt, d.h. es existieren keine Absatzlager. Die Kostenfunktion der Unternehmung lautet $Y = 2X + 10$. Man gebe den Erwartungswert und die Varianz der Kosten an.



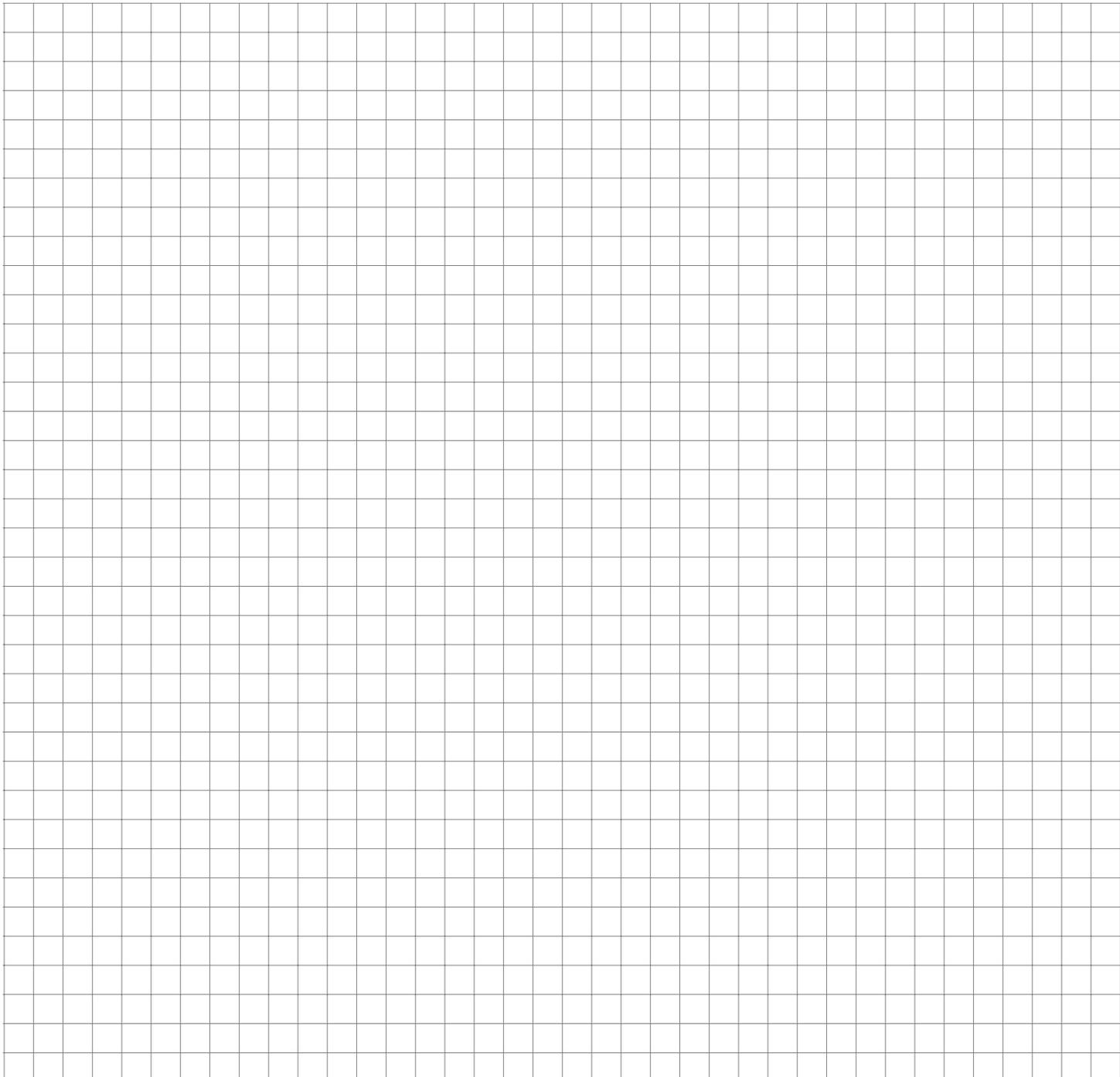
Aufgabe 80

Für eine Zufallsvariable X sei die Wahrscheinlichkeit $P(|X - 10| \geq 2,5)$ mit p^* abgekürzt.

Berechnen Sie p^* für die Fälle, daß X

- im Intervall $[5; 15]$ gleichverteilt ist
- einer $N(\mu; \sigma)$ -Verteilung mit $\mu = 10$ und $\sigma^2 = 4$ genügt
- die Werte 3, 6, 9, 12, 15 jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 0,2 annimmt
- Poisson-verteilt ist mit dem Parameter $\lambda = 10$.

Empfehlung: Veranschaulichen Sie den Bereich $\{x \in \mathbb{R} : |x - 10| \geq 2,5\}$ auf einer Zahlengeraden.



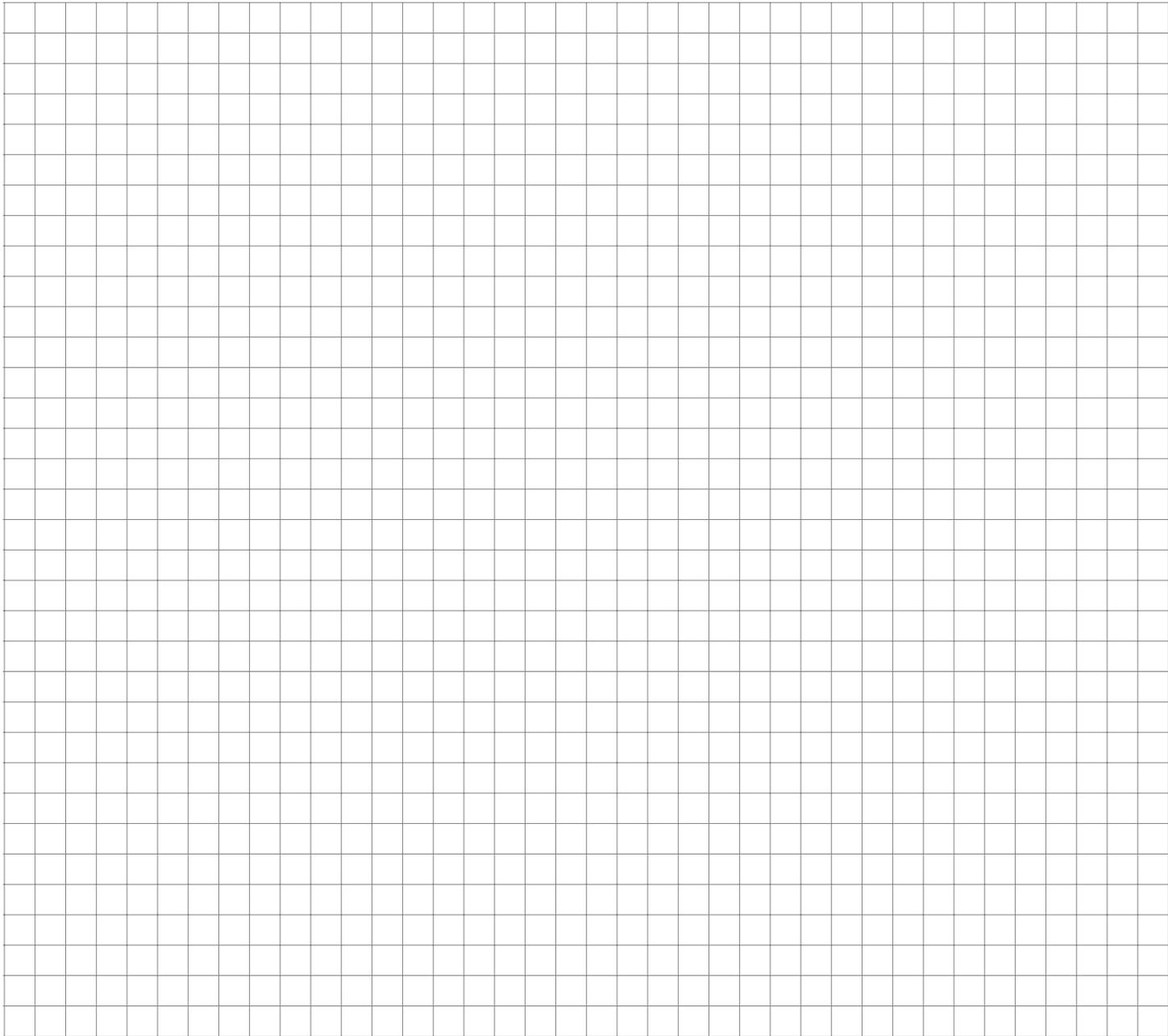
Aufgabe 81

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der möglichen Tore der deutschen Nationalmannschaft bei Länderspielen. Es kommen nur die folgenden Ergebnisse mit den angegebenen Wahrscheinlichkeiten vor:

x	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	0,4	0,5	0,07	0,025	0,005

Wie groß ist der

- Erwartungswert von X ,
- die Varianz und die Standardabweichung von X und
- $P(|X - E[X]| \leq \text{Sta}[X])$?

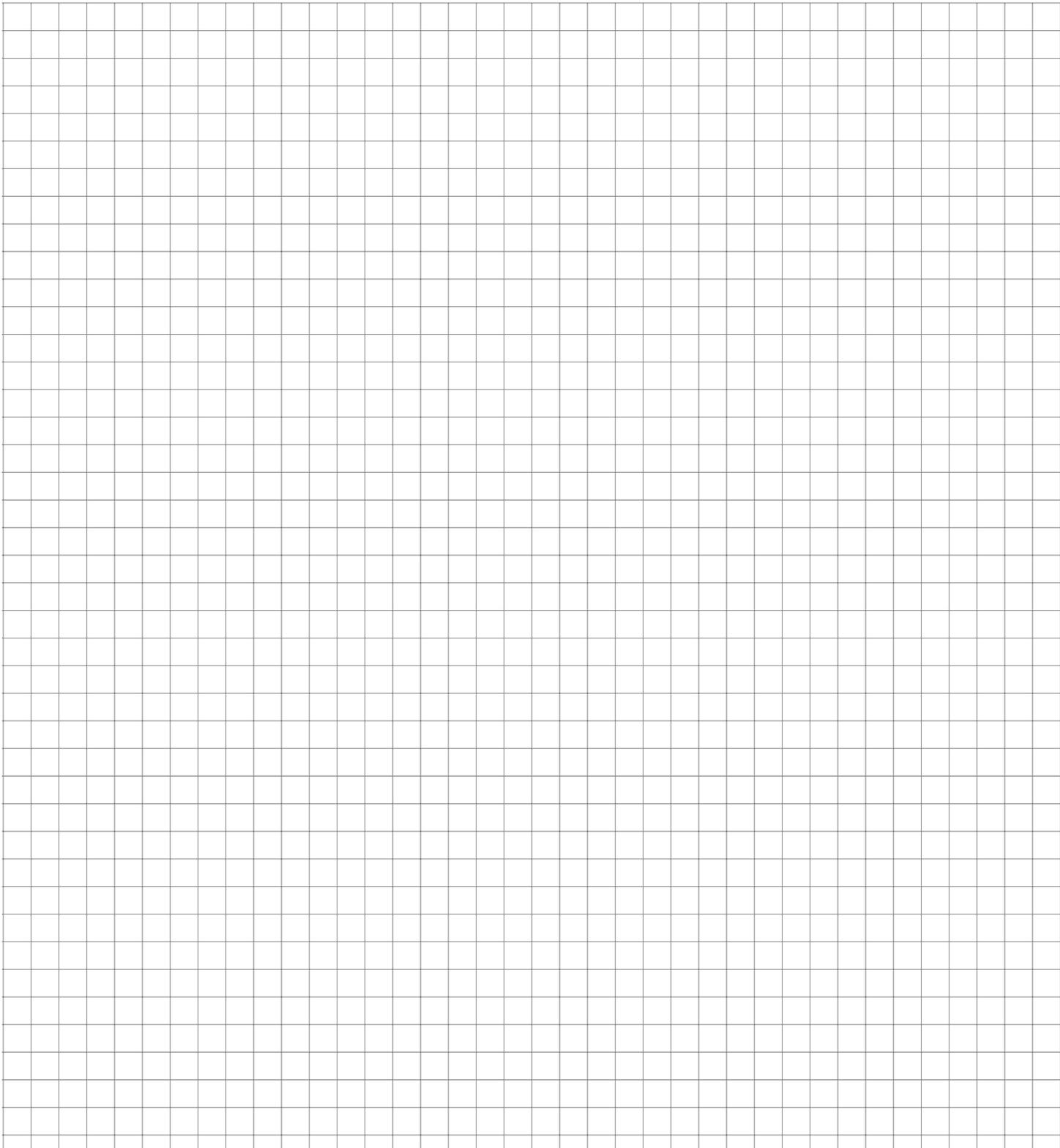


Aufgabe 82

Die Zufallsvariablen X und Y haben die nebenstehende gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion. Man berechne

	y	0	1	2
x				
1		0,1	0,2	0,3
2		0,2	0	0,2

- die Randverteilungen, Erwartungswerte und Varianzen für X und Y ,
- die Kovarianz und Korrelation zwischen X und Y .



Aufgabe 83

Man betrachte die Klausurergebnisse in Mathematik (Zufallsvariable X) und Statistik (Zufallsvariable Y). Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion der zweidimensionalen Zufallsvariablen (X, Y) sei durch die folgende Tabelle gegeben:

$x \downarrow y \rightarrow$	1	2	3	4	5
1	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00
2	0,04	0,10	0,03	0,02	0,01
3	0,02	0,08	0,20	0,08	0,02
4	0,01	0,02	0,04	0,10	0,03
5	0,00	0,01	0,03	0,03	0,03

- a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten
 - (i) in Mathematik zu bestehen und in Statistik nicht zu bestehen
 - (ii) in beiden Klausuren zu bestehen
 - (iii) in beiden Klausuren nicht zu bestehen
 - (iv) in beiden Klausuren besser als 3 zu erhalten
 - (v) in beiden Klausuren zwischen 2 und 4 zu erreichen.
- b) Geben Sie die Randwahrscheinlichkeits- und Randverteilungsfunktionen an.
- c) Sind die beiden Zufallsvariablen unabhängig?
- d) In Mathematik erzielen Beate, Peter, Helga und Bernd die Noten 1, 2, 3 und 4. Wie sehen für diese vier Kandidaten die Notenchancen bei der Statistiklausur aus?



Induktive Statistik

Aufgabe 84

Induktive Stat.: Punktschätzer (1)

Der Erwartungswert μ in der Grundgesamtheit soll durch die Stichprobenfunktion

$$\hat{\Theta} = \frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n)$$

$$\hat{\Theta}' = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^n i X_i$$

$$\hat{\Theta}'' = \frac{2}{n(n+1)} (X_1 + 2X_2 + \dots + nX_n)$$

geschätzt werden. Prüfen Sie die Erwartungstreue der Schätzfunktionen und ermitteln Sie die wirksamste unter diesen.

Hinweise: Es gilt $\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2} n(n+1)$ und $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{3} n(n+1)(n + \frac{1}{2})$

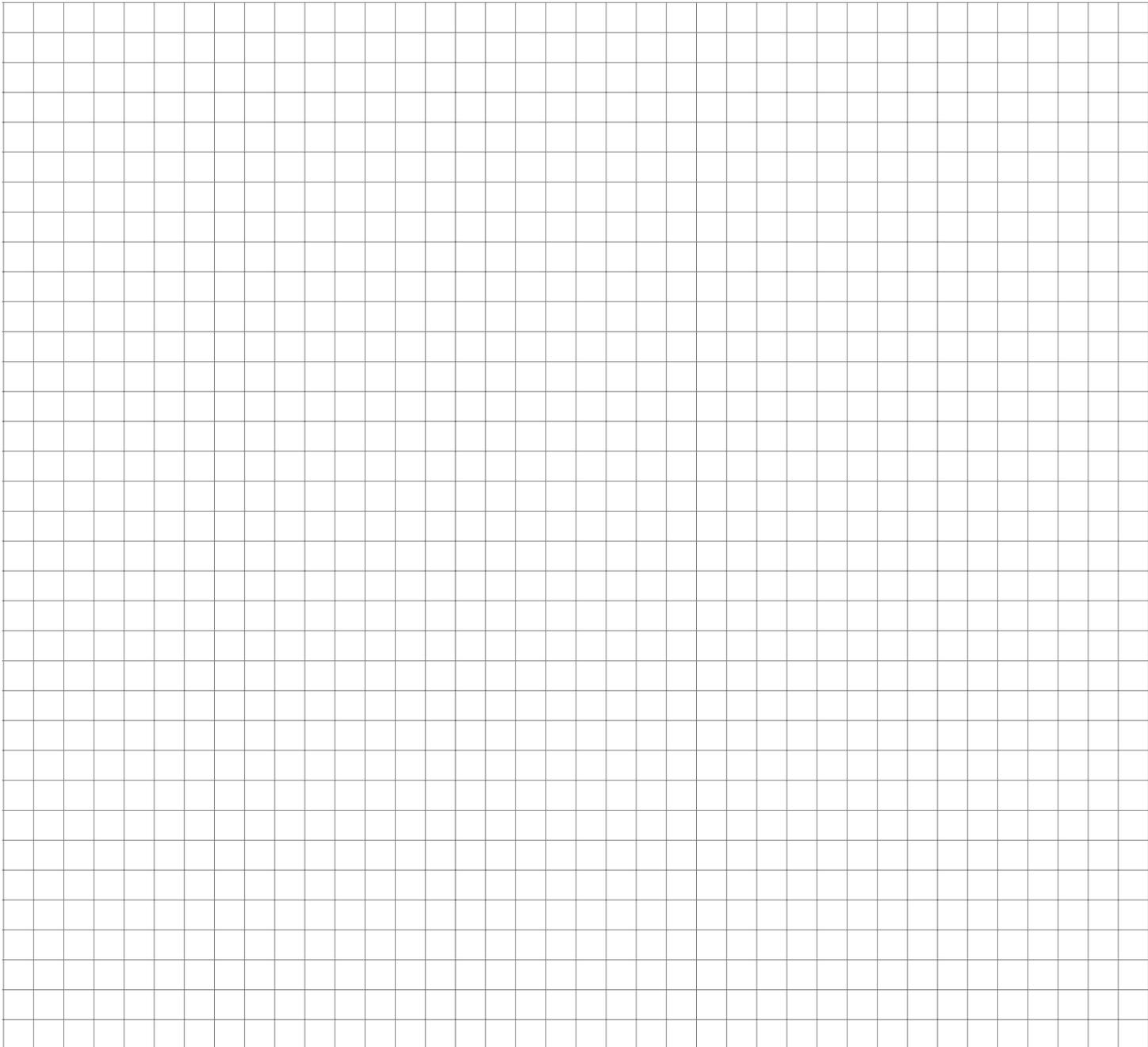
Aufgabe 85

Gegeben sei eine einfache Stichprobe X_1, \dots, X_n aus einer Grundgesamtheit mit unbekanntem Erwartungswert μ . Zur Schätzung von μ wird der Einsatz von linearen Stichprobenfunktionen der folgenden Gestalt erwogen:

$$\hat{\Theta}_1 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \alpha \cdot X_n \quad \text{mit} \quad -1 \leq \alpha \leq 1$$

- Bestimmen Sie α so, dass $\hat{\Theta}_1$ erwartungstreu für μ ist.
- Welche Schätzfunktion ist wirksamer: Die erwartungstreue Variante von $\hat{\Theta}_1$ von Teilaufgabe a) oder eine neue Funktion $\hat{\Theta}_2$ mit

$$\hat{\Theta}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i ?$$



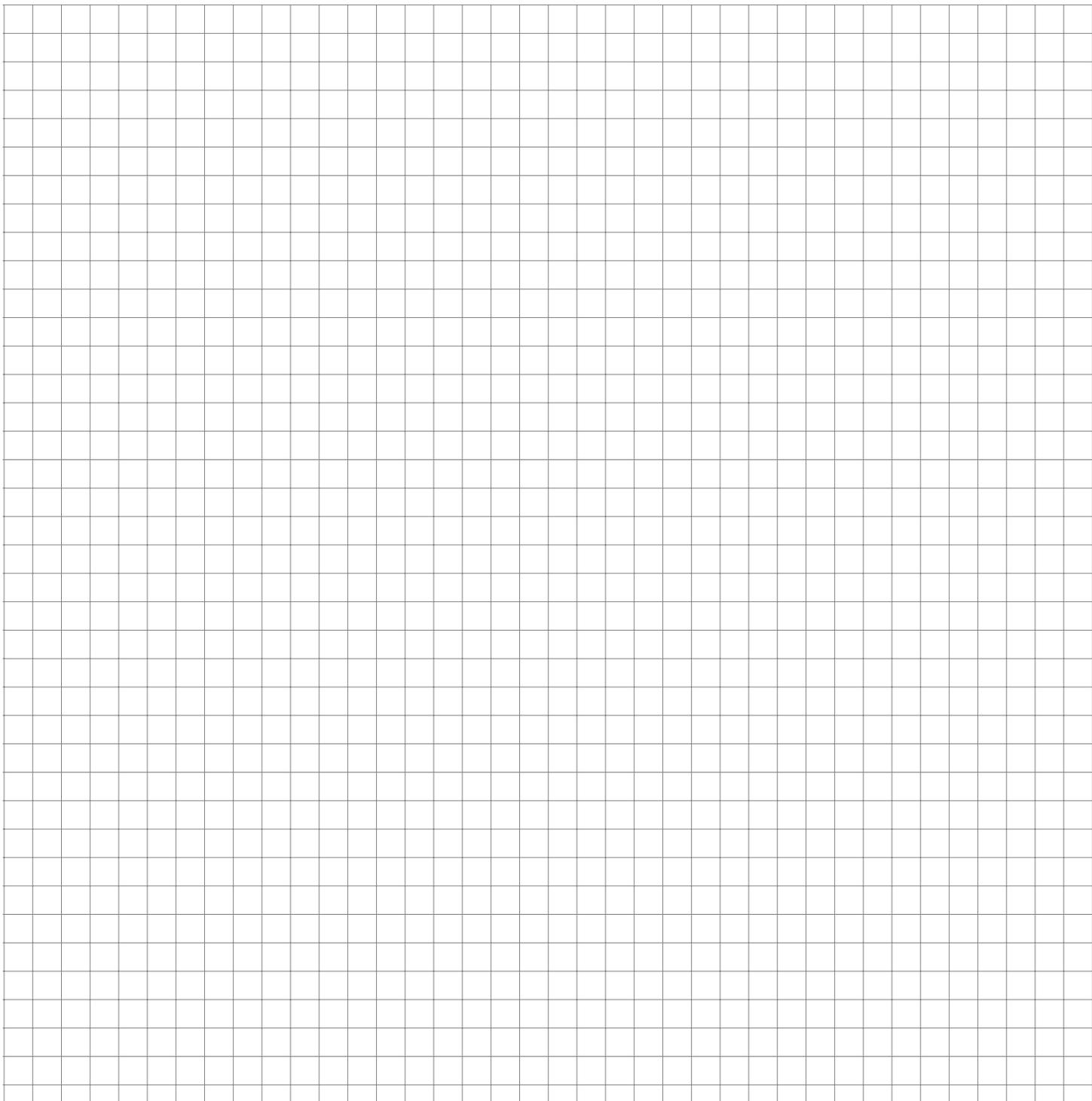
Aufgabe 86

Bei der Prüfung der Füllmenge von Fruchtsaftflaschen ergaben sich folgende Werte:

ccm	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207
Anzahl	2	1	3	1	3	1	2	1	1	0	1

Nach Angaben des Abfüllers ist die Füllmenge normalverteilt mit einer Varianz von $\sigma^2 = 2,25$.

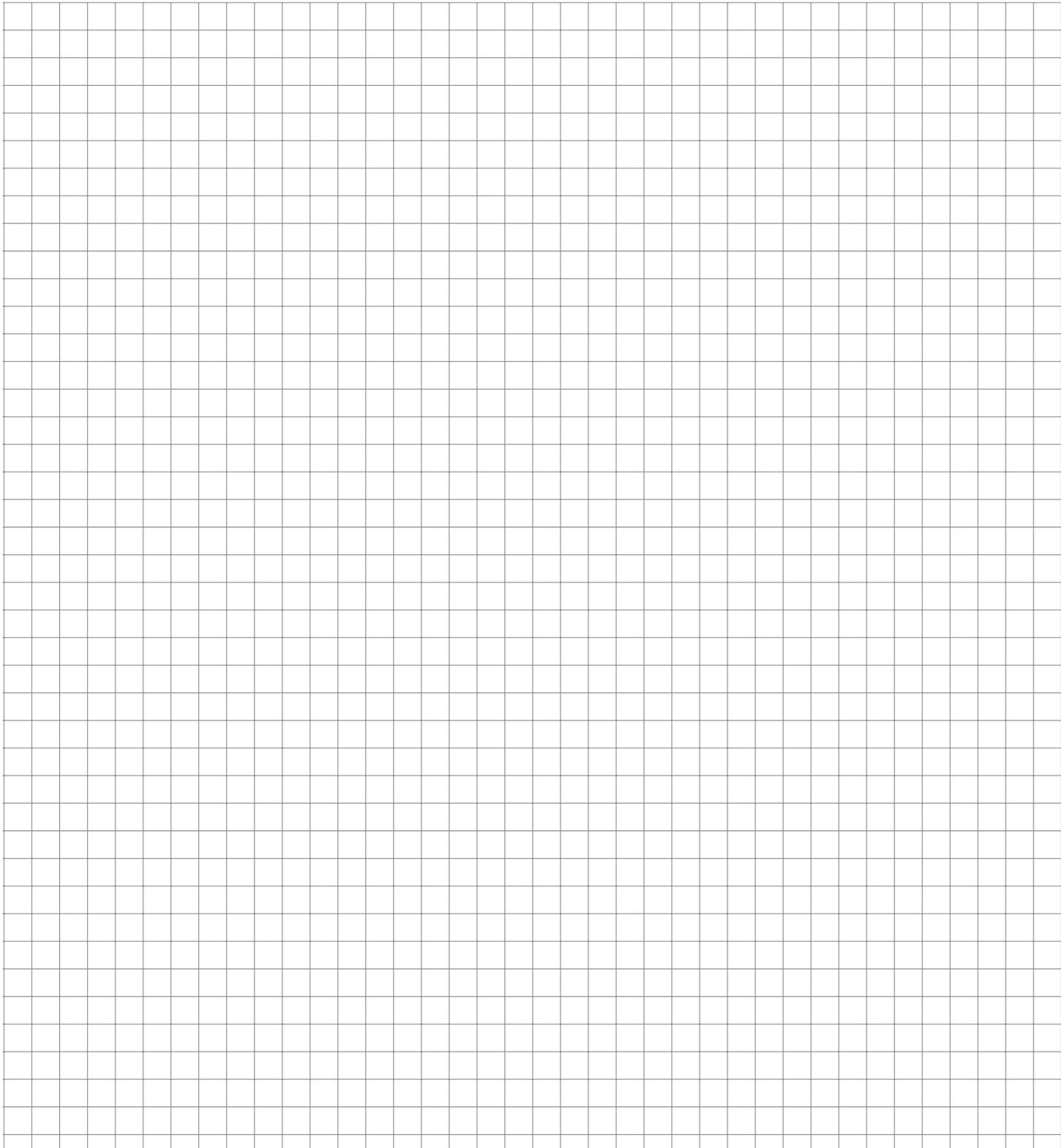
- Man gebe ein Schätzintervall für den Erwartungswert μ zum Niveau $1 - \alpha = 0,94$.
- Welcher Stichprobenumfang n garantiert eine Länge von 1 für das Schätzintervall?



Aufgabe 87

X_1, \dots, X_{31} beschreibe eine einfache Stichprobe aus einer beliebig verteilten Grundgesamtheit. Aus den Ergebnissen wurden $\bar{x} = 9$ und $s^2 = 31/4$ errechnet. Zur Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,05$ bestimme man

- ein Schätzintervall für den Erwartungswert μ ,
- unter der Annahme, dass die Grundgesamtheit normalverteilt ist, ein Schätzintervall für die Varianz σ^2 .

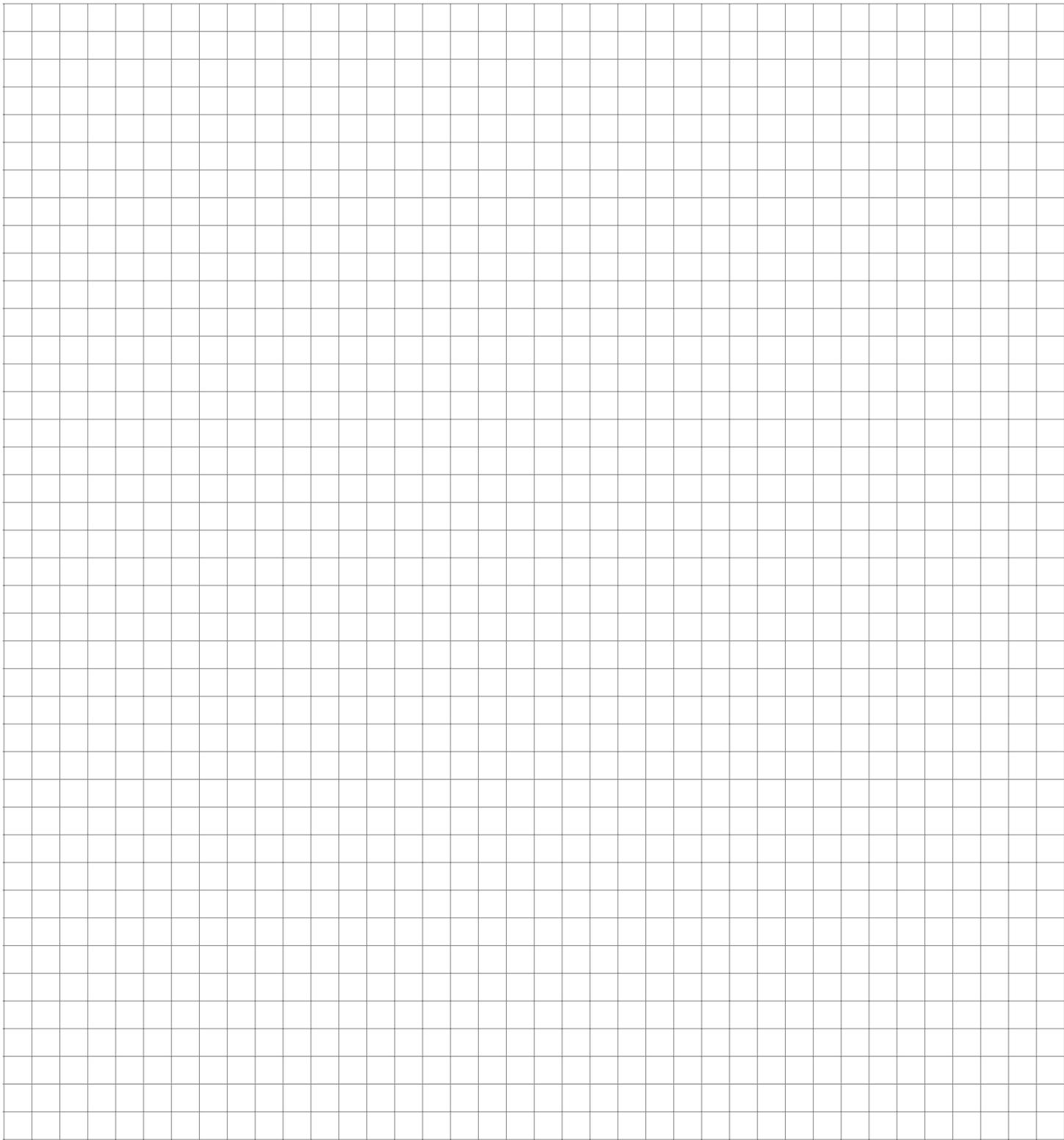


Aufgabe 88

Ein Barista dosiert in einer Espresso-Bar die Menge Kaffeepulver in Gramm bei 10 zufällig ausgewählten Espresso-Bezügen folgendermaßen:

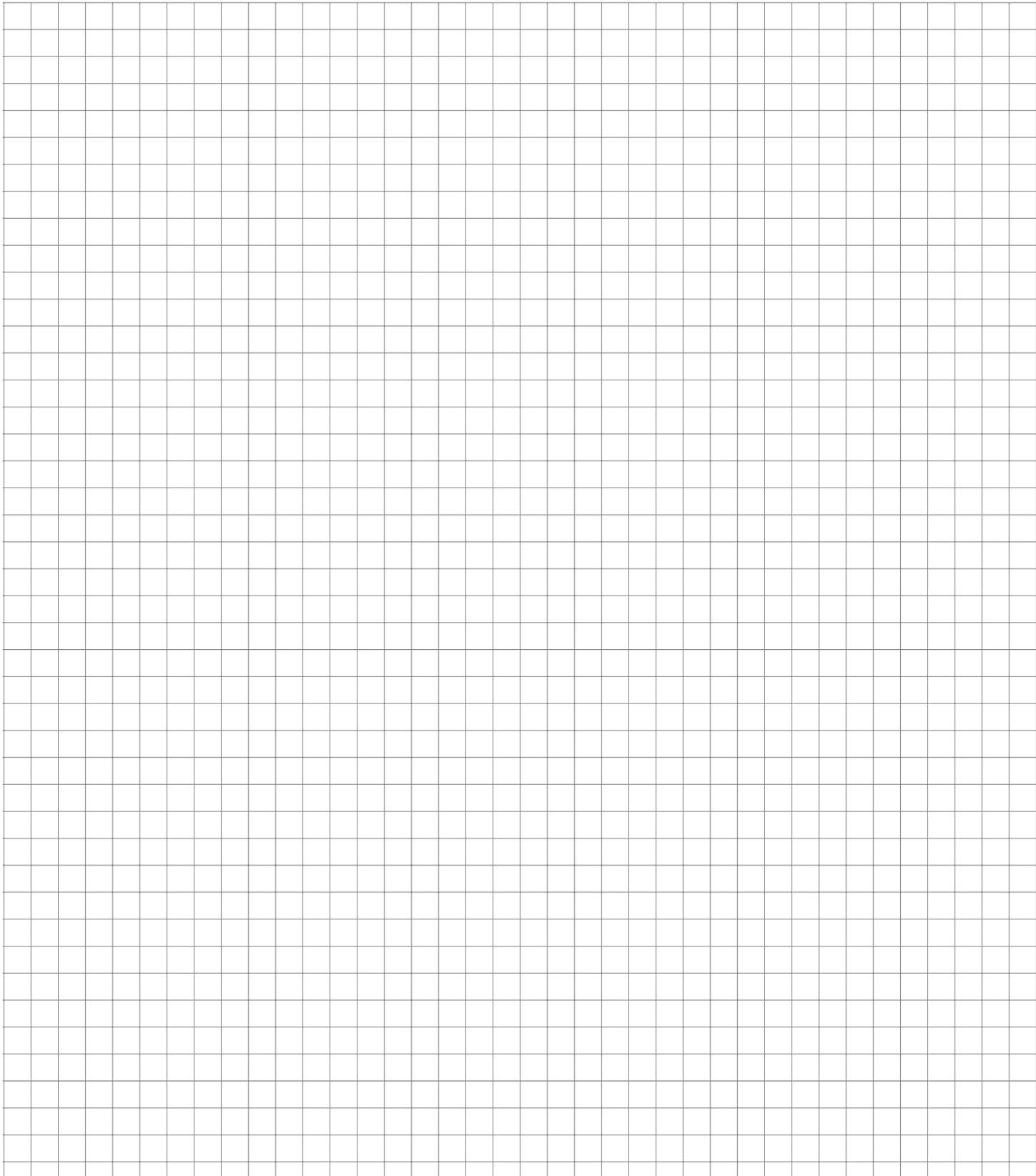
7.3	8.2	7.0	9.2	8.1	6.9	7.1	8.5	9.0	8.5
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Berechnen Sie für diesen Barista ein Konfidenzintervall für die Varianz der Kaffeemenge pro Espresso zum Konfidenzniveau 0,95.



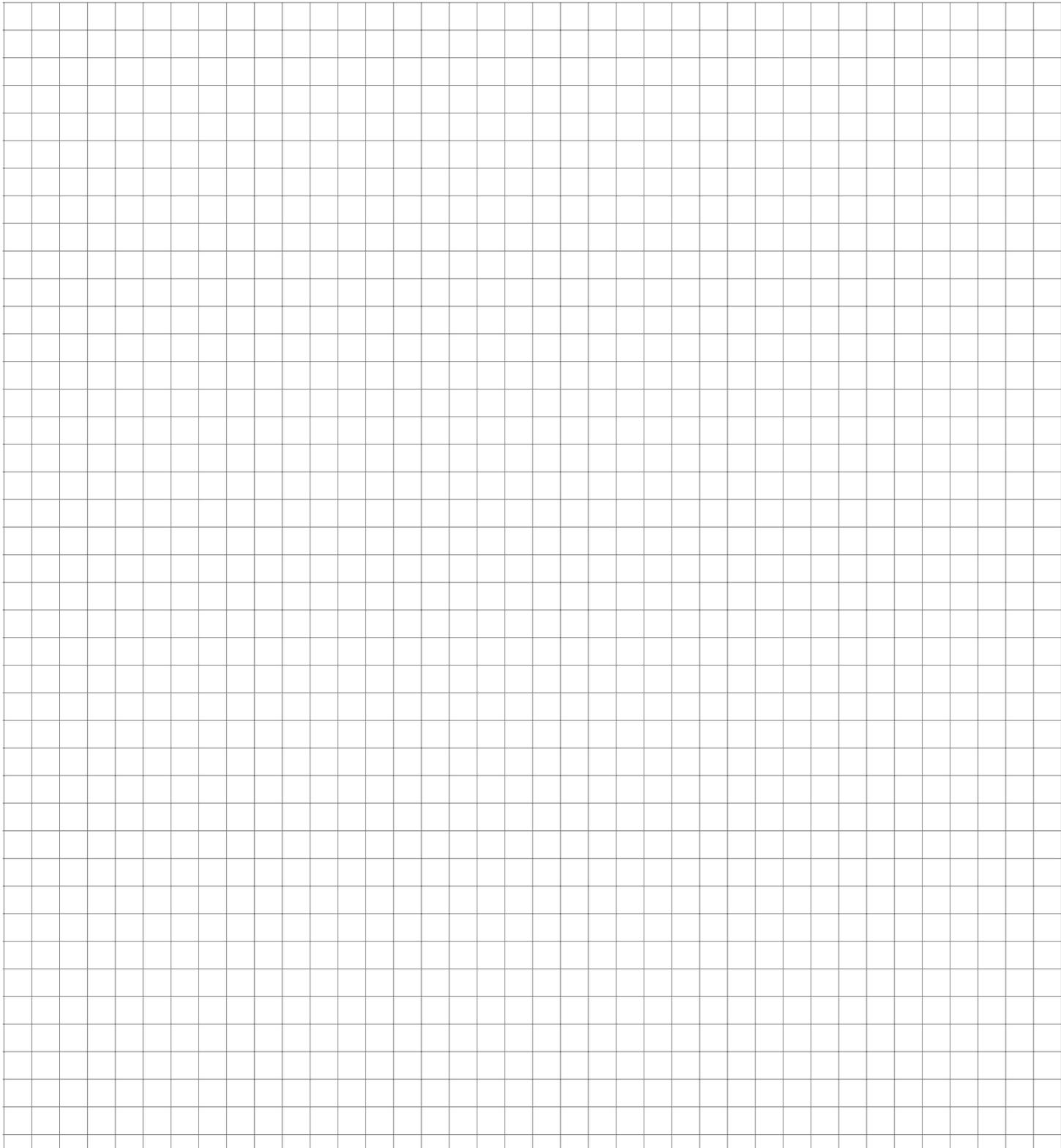
Aufgabe 89

In einem Spielkasino werden Zweifel geäußert, dass ein bestimmter Würfel fair ist, d.h. alle Zahlen gleich häufig auftreten. Der Spielleiter fordert einen Zweifler auf, ein Signifikanzniveau α zwischen 0,01 und 0,40 anzugeben, zu dem die Hypothese H_0 , dass der Würfel fair ist, getestet werden soll. Welches α wird der Zweifler wählen, wenn er möchte, dass der Würfel aus dem Spiel genommen wird?



Aufgabe 90

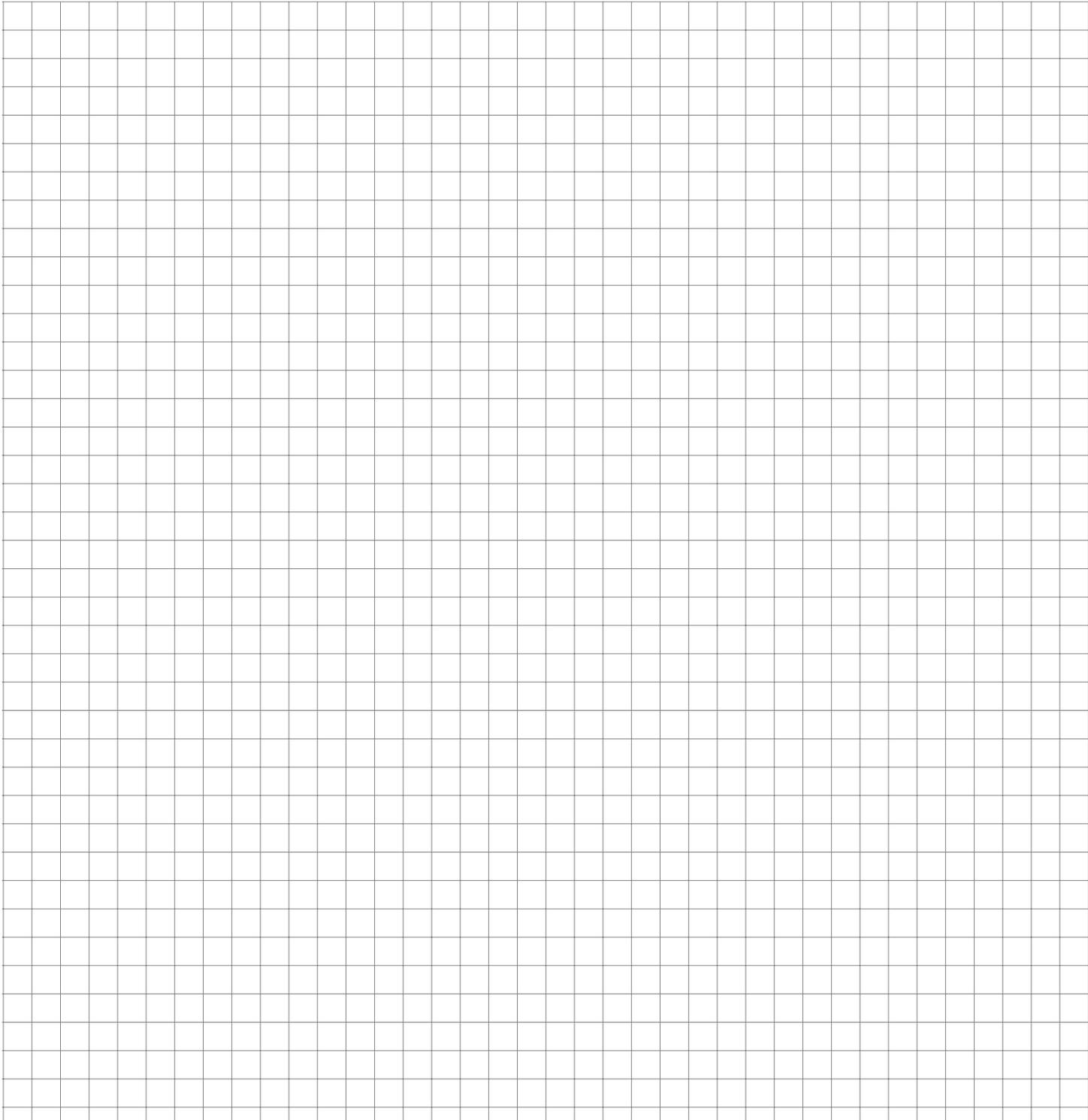
Ein Arbeiter braucht für die Bearbeitung eines Werkstücks im Durchschnitt 7 Minuten (420 sec. = μ_0). Ein Fachmann schlägt, um eine Zeitersparnis zu erreichen ($\mu < \mu_0$), eine andere Bearbeitungsart vor und will die Effektivität seines Vorschlags mithilfe einer Stichprobe vom Umfang $n = 16$ testen. Führen Sie diesen Test (Hypothese $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu < \mu_0$) zum Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$ bzw. $0,01$ durch. Dabei sei ferner vorausgesetzt, dass die Grundgesamtheit normalverteilt ist. Die Stichprobe ergab folgende Werte: $\bar{x} = 408$ und $s = 25,7$.



Aufgabe 91

Die Personalabteilung eines Großunternehmens hat den Verdacht, dass die Mitarbeiter die Mittagspause (maximal 1 Stunde) im Durchschnitt überziehen. Mit einer einfachen Stichprobe der Pausenlänge von 20 Mitarbeitern soll getestet werden, ob die Zeiten eingehalten werden oder ob im Mittel überzogen wird. Es ergibt sich für die Pausendauer ein Stichprobenmittel von 70 Minuten und eine Stichprobenstandardabweichung von 15 Minuten. Die Pausendauer eines Mitarbeiters kann als normalverteilte Zufallsvariable angenommen werden.

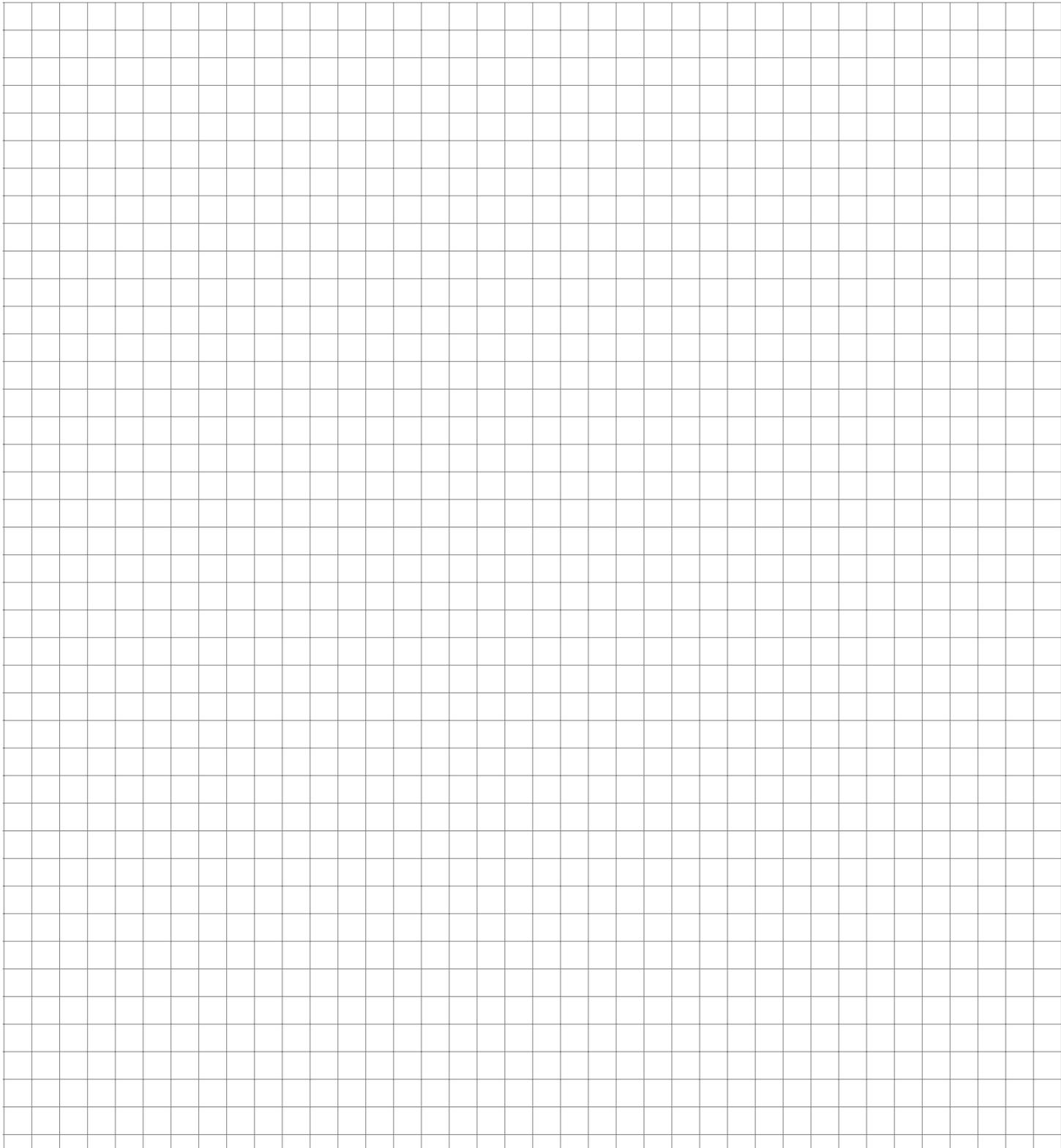
Formulieren Sie Nullhypothese und Gegenhypothese und testen Sie zum Signifikanzniveau von 5 %.



Aufgabe 92

Angeblich sollen Studierende sich in der Nacht vor einer Klausur kürzer in der Tiefschlafphase befinden also im Durchschnitt aller Nächte. Eine einfache Stichprobe von 61 Studenten wird diesbezüglich untersucht. Im Durchschnitt wurde in dieser Stichprobe 48 Minuten Tiefschlaf in den letzten 24h vor der Klausur gemessen, mit einer Stichprobenvarianz von 196.

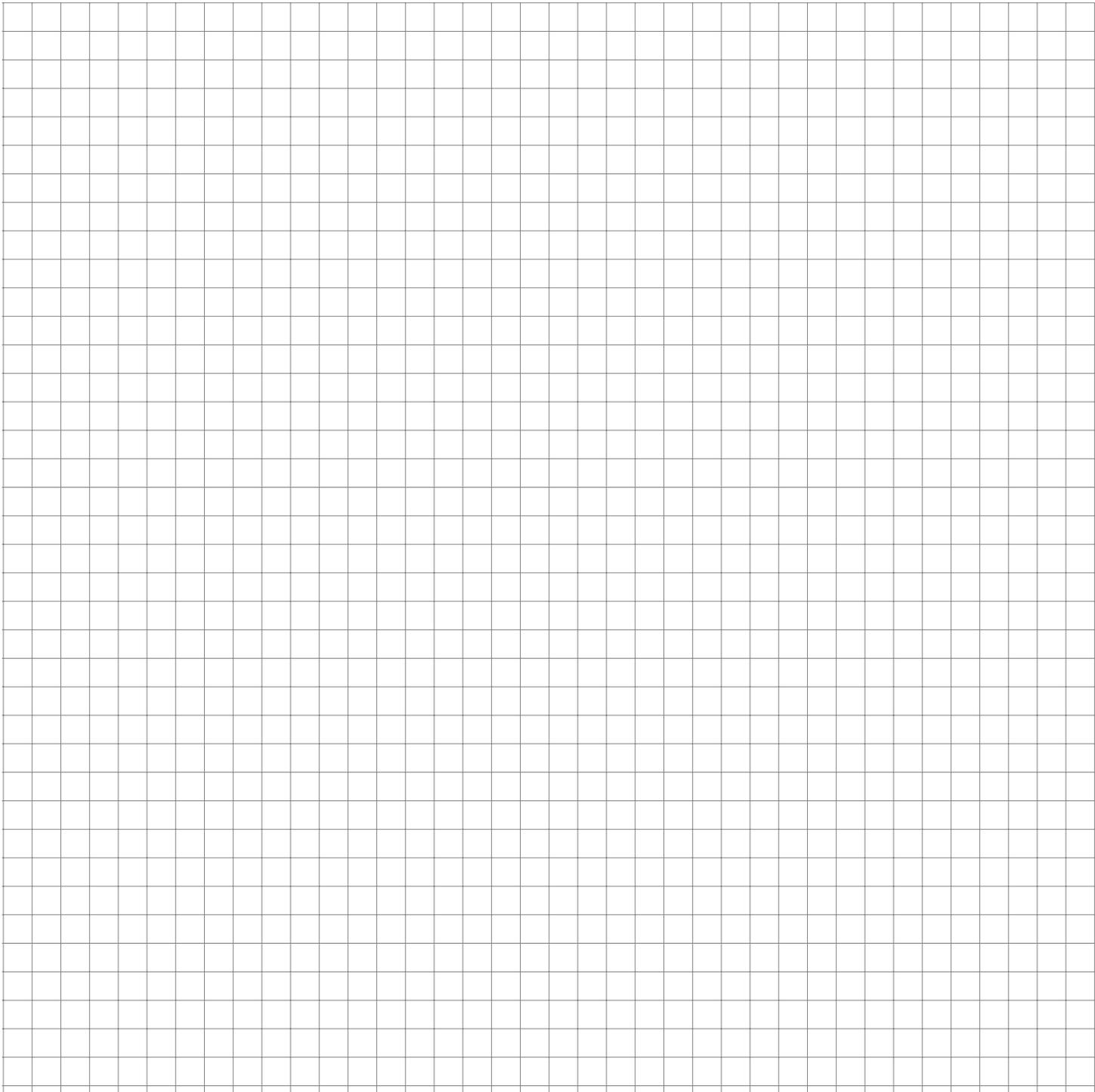
Bestimmen Sie ein 95 %-Konfidenzintervall für die Tiefschlaflänge aller Studierenden am Tag vor der Prüfung.



Aufgabe 93

Die Hochschule X möchte wissen, wie gut Ihre Studenten über internationale aktuelle Nachrichten aus der Politik informiert sind. 40 zufällig ausgewählten Studierenden werden Fragen zu 100 Nachrichten der letzten beiden Monate gestellt. Im Durchschnitt können die Befragten 58 Fragen richtig beantworten bei einer Stichprobenstandardabweichung von 3,2.

- Berechnen Sie ein 99 %-Konfidenzintervall für die durchschnittlich von allen Studenten der Hochschule richtig beantwortete Anzahl der Fragen.
- Im Landesdurchschnitt aller Studenten aller Hochschulen ergeben sich 65 Punkte. Testen Sie zum Signifikanzniveau von 5 %, ob der der Durchschnitt der Punktzahl an der Hochschule X niedriger ist als im Landesdurchschnitt.



Aufgabe 94

Studierende beschwerten sich, dass die Klausuren in Statistik zu schwer seien. Der Dozent möchte das natürlich im Sinne der Studierenden verbessern und lässt durch das Prüfungsamt die Metallklammern der Klausuren durch eine leichtere Variante aus Kunststoff ersetzen. Die Studierenden glauben aber nicht, dass dadurch die Klausuren leichter werden. Der Dozent möchte das beweisen und zieht eine einfache Stichprobe von 10 Klausuren, bei der er folgende Gewichte misst:

65.28	65.84	64.47	63.82	66.64	62.55	65.74	64.90	65.87	65.29
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Gehen Sie im folgenden davon aus, dass es sich beim Gewicht der Klausur um eine normaverteilte Zufallsvariable handelt.

- Bestimmen Sie zum Konfidenzniveau 0,95 ein symmetrisches Schätzintervall für den Erwartungswert des Gewichts einer Klausur.
- Mit Metallklammer hatten die Klausuren früher ein durchschnittliches Gewicht von 65,86 g. Testen Sie zum Signifikanzniveau von 5 % auf Basis der Stichprobe, ob die Klausuren jetzt leichter sind.
- Was bedeutet bei dem Test von b) der Fehler 2. Art?



Aufgabe 95

Die deutsche Nationalmannschaft hat in 50 zufällig ausgewählten Länderspielen die folgenden Toranzahlen geschossen:

Anzahl der Tore pro Spiel	0	1	2	3	4
Anzahl der Spiele mit diesem Ergebnis	18	22	5	3	2

Gehen Sie im folgenden davon aus, dass die erhobenen Toranzahlen aus einer einfachen Stichprobe der Grundgesamtheit aller Länderspiele der deutschen Nationalmannschaft stammen.

- Bestimmen Sie das 95 %-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ der Toranzahl in allen Länderspielen.
- Die Standardabweichung der Tore pro Spiel in der Grundgesamtheit aller Länderspiele sei jetzt mit $\sigma = 1,0$ gegeben. Wie groß muss der Umfang einer Stichprobe sein, damit das 95 %-Konfidenzintervall für μ nicht breiter als 0,5 Tore ist?



Aufgabe 96

Herr Meyer betreibt einen Schnellimbiss für Vegetarier. Eines Tages wird er von einem Kunden wegen Betrugs und Etikettenschwindels verklagt. Der Kunde kann per Fotos nachweisen, dass 8 von 25 von ihm bestellten Gemüsesuppen gar nicht vegetarisch waren, da sich eine Fliege darin befand. Das Gericht verlangt auf Basis dieser als einfach akzeptierten Stichprobe einen Hypothesentest, mit dem der Anteil μ aller Gemüsesuppen mit Fliegen als über den gesetzlich zugelassenen 10 % nachgewiesen wird.

- Ist die Approximation durch die Normalverteilung in diesem Fall gerechtfertigt?
- Formulieren Sie H_0 sowie H_1 .
- Führen Sie den Hypothesentest zu einem Signifikanzniveau von $\alpha = 2,28\%$ durch.



Aufgabe 97

Herr Untermann möchte auf der Karriereleiter in seiner Firma, einem Telekommunikationsunternehmen, etwas vorankommen und schlägt deshalb folgende Maßnahme vor: Der Datendurchsatz der bisher üblichen Flatrates beim Internetzugang von Kunden soll ab einem Volumen von 1GB downloads pro Monat extrem gedrosselt werden. Die alten Konditionen können die Kunden dann optional zukaufen. Bisher hat Herr Untermanns Firma einen Marktanteil von 45 % bei dieser Art flatrates. Eine Stichprobe unter allen potentiellen Kunden vom Umfang $n = 2500$ ergab, dass immerhin noch 43% der potentiellen Kunden diese Leistung mit den verschlechterten Konditionen nachfragen wollen. Herr Untermann schließt daraus, dass sich die Kunden von der Verschlechterung der Vertragsbedingungen nicht abschrecken lassen und freut sich auf die Mehreinnahmen durch seinen Plan.

- Formulieren Sie in diesem Szenario die Nullhypothese H_0 und die Alternative H_1 .
- Worin besteht in diesem Beispiel das Risiko, den Fehler 1. Art zu begehen?
- Was bedeutet hier der Fehler 2. Art?
- Würden Sie an der Stelle von Herrn Untermann ein möglichst kleines Signifikanzniveau α zugrunde legen und dadurch einen größeren Fehler 2. Art (β) in Kauf nehmen oder umgekehrt β klein halten und dabei ein größeres α zulassen?

