Wirtschaftsmathematik Aufgabensammlung

Wintersemester 2016

Prof. Dr. Stefan Etschberger – Hochschule Augsburg

Inhalt

Finanzmathematik

Aufgabe 1

Eine Rechnung über 3.250 € wird nicht sofort bezahlt. Daher sind Verzugszinsen in Höhe von 144,45 € zu bezahlen. Für welche Zeitspanne wurden Verzugszinsen berechnet falls der Zinsfuß 8% beträgt.

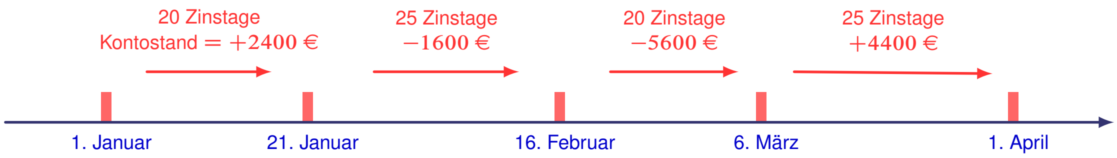
Lösungshinweis:

$$K_n = K_0(1 + n \cdot i) \quad \Rightarrow \quad n = \frac{K_n - K_0}{K_0 \cdot i} = \frac{144{,}45}{3250 \cdot 0{,}08} \approx 0{,}5556 \text{ Jahre} \mathrel{\hat{=}} 200 \text{ Tage}$$

Aufgabe 2

Ein Girokonto weist am Jahresanfang ein Guthaben von 2.400 € auf. Am 6. März werden auf das Konto 10.000 € überwiesen; am 21. Januar und am 16. Februar werden jeweils 4.000 € abgebucht. Die Bank berechnet 12% Sollzins und 0,5% Habenzins. Stellen Sie die Zinsabrechnung zum 1. April auf.

Lösungshinweis:



$$\frac{20}{360} \cdot 0{,}005 \cdot 2400 - \frac{25}{360} \cdot 0{,}12 \cdot 1600 - \frac{20}{360} \cdot 0{,}12 \cdot 5600 + \frac{25}{360} \cdot 0{,}005 \cdot 4400 = -48{,}46\,€$$

Aufgabe 3

Jemand zahlt am 2. Juli 1999 auf sein Sparkonto 1000 € ein. Wie hoch ist der Kontostand am 2. April 2008 bei 3% Zins, falls das Konto zu diesem Zeitpunkt abgerechnet wird.

Lösungshinweis:

$$K = 1000\left(1 + \frac{179}{360} \cdot 0{,}03\right)\left(1 + \frac{3}{100}\right)^8\left(1 + \frac{91}{360} \cdot 0{,}03\right) \approx 1295{,}42$$

Aufgabe 4

Jemand legt 20.000 € zu 6% zinseszinslich an. Auf welche Summe wächst das Kapital in 5 Jahren an bei

a) jährlicher,
b) halbjährlicher,
c) monatlicher,
d) täglicher oder
e) stetiger Verzinsung?

Lösungshinweis:

a) $\cdot 1{,}06^5 \approx 26.764{,}51$
b) $\cdot 1{,}03^{10} \approx 26.878{,}33$
c) $\cdot 1{,}005^{60} \approx 26.977{,}00$
d) $\cdot \left(1 + \frac{0{,}06}{360}\right)^{360 \cdot 5} \approx 26.996{,}50$
e) $\cdot \mathrm{e}^{0{,}06 \cdot 5} \approx 26.997{,}18$

Aufgabe 5

Eine Kapitalanlage hat sich in 10 Jahren verdoppelt. In der ersten Hälfte der Laufzeit betrug der Zinssatz 4%. Wie hoch war er in der zweiten Hälfte?

Lösungshinweis:

$$
\begin{aligned}
K_{10} = 2K_0 &= K_0 \cdot 1{,}04^5 \cdot q^5 \\
\Rightarrow \quad 2 &= 1{,}04^5 \cdot q^5 \\
\Rightarrow q &= \frac{\sqrt[5]{2}}{1{,}04} \approx 1{,}1045 \mathrel{\hat{=}} 10{,}45\%
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6

a) In welcher Zeit verdoppelt sich bei Zinseszinsrechnung jedes beliebige Anfangskapital K bei einem jährlichen Zinssatz von $p = 5\%$?

b) Wie muss der jährliche Zinssatz bei Zinseszinsrechnung aussehen, wenn sich das Anfangskapital in 10 Jahren verdoppeln soll?

Lösungshinweis:

a) $2K_0 = K_0 \cdot 1{,}05^n \quad \Rightarrow \quad n = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}05} \approx 14{,}2$

b) $2K_0 = K_0 \cdot q^{10} \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt[10]{2} = 1{,}0718$

Aufgabe 7

Wie lange müssen 10.000 € angelegt werden, damit sie bei einer jährlichen Verzinsung von 7% ein Endkapital von 25.000 € erbringen?

Lösungshinweis:

$$10.000 \cdot 1{,}07^n = 25.000 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\ln 0{,}25}{\ln 1{,}07} \approx 13{,}54 \text{ Jahre}$$

Aufgabe 8

Ein Waldbestand hat einen Tageswert von 1 Mio. €. Aufgrund von Abholzung und Umweltschäden, nimmt der mengenmäßige Bestand jährlich um 10% stetig ab; der Preis des Holzes steigt halbjährlich um 4%.

a) Welchen Tageswert hat der Wald in 10 Jahren?

b) Nach wie viel Jahren hat sich der Wert des Waldes halbiert?

Lösungshinweis:

a) $K_0 = p_0 \cdot x_0 = 1.000.000 \quad \Rightarrow \quad K_{10} = \underbrace{p_0 \cdot \left(1{,}04^2\right)^{10}}_{\text{Preis in 10 J.}} \cdot \underbrace{x_0 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot 10}}_{\text{Waldbestand in 10 J.}} \approx 806.069$

b)

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{2} K_0 = K_0 \cdot 1{,}04^{2 \cdot n} \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot n} \\ \Rightarrow \quad & \ln \frac{1}{2} = 2 \cdot n \cdot \ln 1{,}04 - 0{,}1 \cdot n \\ \Rightarrow \quad & n \approx 32{,}15 \text{ Jahre} \end{aligned}$$

Aufgabe 9

Die Effektivverzinsung einer Anlage, die vierteljährlich verzinst wird, ist 6,14%. Wie hoch ist der (nominale) Jahreszinsfuß?

Lösungshinweis:

$$\left(1+\frac{i}{4}\right)^4 = 1{,}0614 \quad \Rightarrow \quad i = \left(\sqrt[4]{1{,}0614}-1\right)\cdot 4 = 0{,}06 = 6\%$$

Aufgabe 10

Jemand zahlt am Ende eines jeden Jahres 1000 € auf sein Sparkonto ein, welches zu 3% verzinst wird. Wie hoch ist der gesparte Betrag einschließlich Zinseszins am Ende des 10. Jahres?

Lösungshinweis:

$$R_{10} = 1000 \cdot \frac{1{,}03^{10} - 1}{0{,}03} \approx 11.463{,}88\,€$$

Aufgabe 11

Für den Kauf einer Maschine stehen folgende Zahlungsalternativen zur Auswahl:

a) 8.000 € sofort, 4 jährliche Raten zu je 2.000 €, zahlbar am Ende eines jeden Jahres

b) vier jährliche Raten zu je 4.000 €, zahlbar am Ende eines jeden Jahres

c) 5.000 € sofort, je 3.000 € am Ende des 2. und 3. Jahres und 5.000 € am Ende des 4. Jahres.

Für welche Zahlungsalternative (Barwertvergleich) soll man sich bei einem Zinssatz von 10% entscheiden?

Lösungshinweis:

a) Kapitalwert: $8000 + 2000 \frac{1}{1{,}1^4} \frac{1{,}1^4 - 1}{0{,}1} \approx 14.339{,}73$

b) Rentenbarwert: $4000 \cdot \frac{1}{1{,}1^4} \cdot \frac{1{,}1^4 - 1}{0{,}1} \approx 12.679{,}40$

c) Kapitalwert: $5000 + \frac{3000}{1{,}1^2} + \frac{3000}{1{,}1^3} + \frac{5000}{1{,}1^4} \approx 13.148{,}35$

Also: Variante (2) ist am günstigsten

Aufgabe 12

Ein heute 55-jähriger Arbeitnehmer hat in 10 Jahren einen Anspruch auf eine monatliche Betriebsrente von 500 €, die vorschüssig bezahlt wird. Durch welche Gegenleistung kann sie heute bei einem Zinssatz von 6% abgelöst werden, wenn die Lebenserwartung von 77 Jahren angenommen wird.

Lösungshinweis:

$$r_e = 500\left(12 + 0{,}06 \cdot \frac{13}{2}\right) = 6195{,}00\,€$$

$$\text{Rente ab 65:} \quad R_0 = r_e \cdot \frac{q^{12}-1}{q-1} \cdot \frac{1}{q^{12}} \approx 51.937{,}91\,€$$

$$\text{heute:} \quad \frac{R_0}{q^{10}} \approx 29.001{,}86\,€$$

Aufgabe 13

Ein Bausparer hat einen Bausparvertrag über 50.000 € Bausparsumme abgeschlossen. Der Habenzins beträgt 3%. Der Bausparvertrag ist zuteilungsreif, wenn 40% der Bausparsumme eingezahlt sind.

a) Nach wieviel Jahren ist der Bausparvertrag zuteilungsreif, wenn
   - 3.000 € jährlich nachschüssig
   - 3.000 € jährlich vorschüssig
   - 300 € monatlich nachschüssig

   einbezahlt werden?

b) Welche Sparrate muß der Bausparer
   - jährlich nachschüssig
   - jährlich vorschüssig
   - monatlich nachschüssig

   leisten, damit der Vertrag in vier Jahren zuteilungsreif ist?

Lösungshinweis:

a) ▸ 3000 € jährlich nachschüssig:

$$20.000 = 3000\frac{1{,}03^n - 1}{0{,}03} \quad \Rightarrow \quad 1{,}03^n = 1{,}2 \quad \Rightarrow \quad n \approx 6{,}17\,\text{Jahre}$$

▸ 3000 € jährlich vorschüssig:

$$20.000 = 3000 \cdot 1{,}03 \cdot \frac{1{,}03^n - 1}{0{,}03} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\ln 1{,}194}{\ln 1{,}03} \approx 6\,\text{Jahre}$$

▸ 3000 € monatlich nachschüssig:

$$r_e = 300\left(12 + 0{,}03 \cdot \frac{11}{2}\right) = 3649{,}50 \quad \Rightarrow \quad n = 5{,}15\,\text{Jahre}$$

b) wie a), jetzt r gesucht
   - jährlich nachschüssig: $r = 4780{,}54$ €
   - jährlich vorschüssig: $r = 4641{,}30$ €
   - monatlich nachschüssig: $r_e = 4780{,}54 \quad \Rightarrow \quad r = 392{,}97$ €

Aufgabe 14

Das Vermögen von A ist mit 100.000 € doppelt so hoch wie das Vermögen von B. A spart jährlich 4.000 € nachschüssig, während B 8.000 € spart. Die jährliche Verzinsung ist 6%.

a) Nach wie vielen Jahren sind die Vermögen von A und B gleich hoch?

b) Wie hoch muss die jährliche Sparleistung von B sein, damit er in 10 Jahren das gleiche Vermögen wie A hat?

Lösungshinweis:

a) $100.000 \cdot 1{,}06^n + 4000\dfrac{1{,}06^n - 1}{0{,}06} = 50.000 \cdot 1{,}06^n + 8000\dfrac{1{,}06^n - 1}{0{,}06} \quad \Rightarrow \quad n \approx 23{,}79$

b) $\underbrace{50.000 \cdot 1{,}06^{10}}_{\text{Vorsprung von A}} = (r_b - \underbrace{4000}_{\text{Sparrate von A}}) \cdot \dfrac{1{,}06^{10} - 1}{0{,}06} \quad \Rightarrow \quad r_B = 10.793{,}40\,€$

Aufgabe 15

Jemand möchte von seinem 63. Geburtstag an 20 Jahre lang eine jährliche nachschüssige Rente in Höhe von 20.000 € ausbezahlt bekommen. Welchen Betrag muß er dafür 30 Jahre lang bis zu seinem 63. Geburtstag monatlich vorschüssig einbezahlen? Der Zinsfuß betrage 5,5% jährlich.

Lösungshinweis:

$$\begin{aligned} R_0 &= 20.000 \cdot \frac{1{,}05^{20} - 1}{0{,}055} \cdot \frac{1}{1{,}055^{20}} \\ &= 239.007{,}65\,€ \\ &= r\left(12 + 0{,}055\frac{13}{2}\right) \cdot \frac{1{,}055^{30} - 1}{0{,}055} \\ \Rightarrow \quad r &= 267{,}01\,€ \end{aligned}$$

Aufgabe 16

Als Kaufpreis für ein Haus hat der Erwerber 5 Raten von je 100.000 € zu leisten. Die erste Rate muss sofort bezahlt werden, die übrigen in jährlichen Abständen. Mit welchem Betrag könnte bei 5% Zins die ganze Schuld sofort beglichen werden?

Lösungshinweis:

$$R_0 = 100.000 \cdot \frac{1}{1{,}05^5} \cdot 1{,}05 \cdot \frac{1{,}05^5 - 1}{0{,}05} = 454.595{,}09$$

Aufgabe 17

Welches Kapital benötig man heute, wenn daraus 5 Jahre lang zu jedem Quartalsbeginn eine Spende von 1000 € überwiesen werden soll? Die vierteljährliche Verzinsung ist 1%.

Lösungshinweis:

$$R_0 = 1000 \cdot \frac{1{,}01^{20} - 1}{0{,}01} \cdot 1{,}01 \cdot \frac{1}{1{,}01^{20}} \approx 18.226{,}00\,€$$

Aufgabe 18

In einer Pensionszusage wird eine Rente über 5000 € zu Beginn eines Quartals 10 Jahre lang bezahlt. Welchen Betrag muss die Firma bei einem Jahreszinssatz von 5% am Anfang der Rentenzahlungen für die Pensionsrückstellung (Barwert) einsetzen?

Lösungshinweis:

$$r_{\mathrm{e}} = 5000 \cdot \left(4 + 0{,}05 \cdot \frac{5}{2}\right) = 20.625 \quad \Rightarrow \quad R_0 = 159.260{,}77\,€$$

Aufgabe 19

Ein Unternehmen nimmt einen Kredit über 500.000 € zu 7% Zins auf. Der Kredit ist in fünf Jahren mit gleichbleibenden Tilgungsraten zu tilgen. Erstellen Sie den Tilgungsplan.

Lösungshinweis:

$$T = \frac{1}{5} \cdot 500.000 = 100.000$$

Jahr	R_k	Z_k	T	A_k
1	500.000	35.000	100.000	135.000
2	400.000	28.000	100.000	128.000
3	300.000	21.000	100.000	121.000
4	200.000	14.000	100.000	114.000
5	100.000	7.000	100.000	107.000
6	0	0	0	0

Aufgabe 20

Ein Auto, das 57.000 € kostet, soll durch einen Kredit finanziert werden. Die Hausbank bietet einen Kredit, der in zwei gleich hohen jährlichen Tilgungsraten zurückzuzahlen ist, mit folgenden Konditionen an: Zins p.a. 8%, Auszahlung 90%. Wie hoch ist der Effektivzinsfuß für den Kredit?

Lösungshinweis:

$S \cdot 0.9 = 57000$

$$S = \frac{57.000}{0{,}9} \quad \text{und} \quad T = \frac{S}{2} \quad \text{und} \quad 57.000 = S \cdot 0{,}9 = \frac{A_1}{q} + \frac{A_2}{q^2}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & A_1 = S \cdot 1/2 + S \cdot 0{,}08 = S \cdot 0{,}58 \\
\text{und} \quad & A_2 = S \cdot 1/2 + S \cdot 1/2 \cdot 0{,}08 = S \cdot 0{,}54
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad S \cdot 0{,}9 = \frac{S \cdot 0{,}58}{q} + \frac{S \cdot 0{,}54}{q^2}$$

$$\Rightarrow \quad q^2 = \frac{0{,}58}{0{,}9} \cdot q + \frac{0{,}54}{0{,}9}$$

$$\Rightarrow \quad q_{1/2} = \frac{58 \pm \sqrt{58^2 + 4 \cdot 90 \cdot 54}}{2 \cdot 90} \approx \begin{cases} 1{,}1612 & (> 0 \rightarrow \text{ OK}) \\ \dots & (< 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad i \approx 0{,}1612 = 16{,}12\,\%$$

Aufgabe 21

Eine GmbH nimmt einen Kredit über 2.000.000 € zu 10% Zins auf, der mit gleichbleibenden Tilgungsraten in 20 Jahren zu tilgen ist. Berechnen Sie

a) die Restschuld am Anfang des 10. Jahres,
b) die Restschuld nach 15 Jahren,
c) den Zinsbetrag im 12. Jahr und
d) die Aufwendungen im 18. Jahr.

Lösungshinweis:

a) $R_{10} = 100.000 \cdot (20 - 10 + 1) = 1.100.000$
b) $R_{15} = 100.000 \cdot (20 - 16 + 1) = 500.000$
c) $Z_{12} = 100.000(20 - 12 + 1) \cdot 0{,}1 = 90.000$
d) $A_{18} = t + Z_{18} = 130.000$

Aufgabe 22

Eine Anleihe von 1.000.000 € soll mittels gleichbleibender Annuität zu 7% verzinst und innerhalb der nächsten 5 Jahre getilgt werden. Wie gestaltet sich der Tilgungsplan?

Lösungshinweis:

$$A = 1.000.000 \cdot \frac{1{,}07^5 \cdot 0{,}07}{1{,}07^5 - 1} \approx 243.890{,}69$$

Jahr	R_k	Z_k	T_k	A
1	1.000.000,00	70.000,00	173.890,69	243.890,69
2	826.109,31	57.827,65	186.063,04	243.890,69
3	640.046,26	44.803,24	199.087,46	243.890,69
4	440.958,81	30.867,12	213.023,58	243.890,69
5	227.935,23	15.955,47	227.935,23	243.890,69

Aufgabe 23

Nach 20 Jahren beträgt die Restschuld eines Annuitätenkredits, der zu 8% verzinst wird, eine Gesamtlaufzeit von 25 Jahren hat und mit gleich hohen Annuitäten getilgt wird, noch 37.403,27 €. Erstellen Sie den Tilgungsplan der letzten 5 Jahre.

Lösungshinweis:

Gegeben: $R_{21} = 37.403{,}27$. Berechnung von S aus

$$R_{21} = S \cdot \frac{q^{25} - q^{20}}{q^{25} - 1} \quad \Rightarrow \quad S = 100.000 \quad \Rightarrow \quad A = S \cdot q^n \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1} = 9367{,}88$$

Jahr	R_k	Z_k	T_k	A
21	37.403,27	2.992,26	6.375,62	9.367,88
22	31.027,66	2.482,21	6.885,66	9.367,88
23	24.141,99	1.931,36	7.436,52	9.367,88
24	16.705,47	1.336,44	8.031,44	9.367,88
25	8.674,03	693,92	8.673,95	9.367,88
26	0,08	0,01	0,08	0,09

Aufgabe 24

Ein festverzinsliches Wertpapier ist mit einem Kupon von 8 % p.a. und einem Rücknahmekurs von 103 % nach 15 Jahren ausgestattet. Welches ist der Preis (Kurs) des Wertpapiers bei einer Restlaufzeit von 7 Jahren unmittelbar nach der 8. Zinszahlung, wenn dem Erwerber eine dem dann herrschenden Marktzinsniveau entsprechende Umlaufrendite von 9 % garantiert wird?

Lösungshinweis:

$$C_8 = 1{,}09^{-7} \cdot \left(8 \cdot \frac{1{,}09^7 - 1}{1{,}09 - 1} + 103 \right) \approx 96{,}608$$

Aufgabe 25

Von welcher durchschnittlichen jährlichen Inflationsrate können Sie ausgehen, wenn ein Kapital, das in zehn Jahren nominell 1000 € beträgt, dann einen Realwert von 900 € hat?
(Es wird angenommen, das der Betrag zuhause im Kleiderschrank lag.)

Lösungshinweis:

$$900 = 1000 \cdot q_{\text{infl}}^{\overset{-10}{\cancel{10}}} \quad \Leftrightarrow \quad q_{\text{infl}} = \sqrt[10]{\frac{10}{9}} \approx 1{,}010592 \quad \Leftrightarrow \quad i_{\text{infl}} \approx 1{,}0592\,\%$$

Aufgabe 26

Zu welchem konstanten jährlichen Zins muss ein Betrag K_0 am 1.1.2008 angelegt werden damit am 31.12.2011 die Inflation ausgeglichen wurde? Die jährliche Inflationsraten der betreffenden Jahre seien dabei

Jahr	2008	2009	2010	2011
Inflation in %	3	2	4	5

Lösungshinweis:

$$q_{\text{infl}} = \sqrt[4]{1{,}03 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}05} \approx 1{,}03494 \quad \Leftrightarrow \quad i_{\text{infl}} \approx 3{,}494\,\%$$

Aufgabe 27

Anton Arglos hat von seiner Großmutter 30 000 € geschenkt bekommen, um sein Studium zu finanzieren. Nehmen Sie für die Aufgaben a) und b) an, dass Anton sein Studium ausschließlich aus dem Geldgeschenk finanziert und von einem konstanten, jährlichen Zins von 7 % ausgegangen werden kann. Stellen Sie Ihren Rechenweg jeweils ausführlich und nachvollziehbar dar!

a) Wie lang darf Antons Studium dauern, wenn er jährlich nachschüssig 7000 € entnimmt?
b) Anton fällt auf, dass er das Geld eigentlich jährlich vorschüssig benötigt, aber mit 5000 € jährlich auskommt. Wie lang kann sein Studium unter diesen Annahmen dauern?

Am Ende seines Studiums bemerkt der geschäftstüchtige Anton, dass er nun insgesamt ein Vermögen von 50 000 € besitzt. Anton bekommt ein Angebot seiner Hausbank, das Geld als Festgeld zum jährlichen Zinssatz von i_{Haus} anzulegen. Anton freut sich, da er nun weiß, dass er in 12 Jahren ein Endvermögen von 100 000 € besitzen wird.

c) Wie hoch ist der Zinssatz i_{Haus}, den Anton von seiner Hausbank angeboten bekommt?
d) Die Onlinebank Fastmoney bietet ihm eine Anlage zu einem monatlichen Zins (mit monatlicher Zinsausschüttung) von 0,5 % an. Soll er das Angebot von Fastmoney gegenüber dem Angebot seiner Hausbank bevorzugen? Nehmen Sie (unabhängig von Ihrer Lösung unter Aufgabe c) an, dass die Hausbank Anton einen jährlichen Zins von 6 % anbietet) Begründen Sie Ihre Empfehlung rechnerisch!

Anton entschließt sich, anstatt das Geld anzulegen ein Haus zu kaufen. Hierfür nimmt er zusätzlich einen Kredit von 200 000 € zu einem konstanten Zins von 8 % auf. Der Kredit ist mit gleichbleibenden Tilgungsraten in 20 Jahren zu tilgen.

e) Wieviel Zinsen muss Anton im 15. Jahr bezahlen?

Lösungshinweis:

a) $R_0 = r \cdot \dfrac{q^n - 1}{q-1} \cdot q^{-n} \quad \Leftrightarrow \quad n = \dfrac{\ln\left(\frac{r}{r - i\cdot R_0}\right)}{\ln\ q} \quad \Leftrightarrow \quad n = \dfrac{\ln\left(\frac{7000}{7000 - 0{,}07\cdot 300000}\right)}{\ln\ 1{,}07} = 5{,}2716.$
Das Geld reicht 5 Jahre.

b) $R_n = r \cdot q \cdot \dfrac{q^n - 1}{q-1} q^{-n} \quad \Leftrightarrow \quad 30000 = 5000 \cdot 1{,}07 \cdot \dfrac{1 - 1{,}07^{-n}}{0{,}07}$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{6 \cdot 0{,}07}{1{,}07} = 1{,}07^n - 1 \quad \Leftrightarrow \quad n = -\dfrac{\ln\left(1 - \frac{6\cdot 0{,}07}{1{,}07}\right)}{\ln 1{,}07} \approx 7{,}367\,.$
das Geld reicht also in diesem Fall 7 Jahre.

c) $K_n = K_0(1+i_{\text{Haus}})^n \quad \Leftrightarrow \quad i_{\text{Haus}} = \sqrt[12]{\frac{100000}{50000}} - 1 = \sqrt[12]{2} - 1 = 0{,}05946 \approx 5{,}95\,\%$

d) Alternative 1: Über effektiven Jahreszins:
$q_{\text{eff, Onlinebank}} = (1+0{,}005)^{12} \approx 1{,}0617 > 1{,}06 = q_{\text{eff, Hausbank}}$.

Alternative 2: Über Endbetrag:

$$\begin{aligned} K_{n,\text{Onlinebank}} &= 50\,000 \cdot (1+0{,}005)^{12\cdot 12} &&= 102\,537{,}54 \\ K_{n,\text{Hausbank}} &= 50\,000 \cdot (1+0{,}06)^{12} &&= 100\,609{,}82 \end{aligned}$$

In jedem Fall: Anton sollte das Angebot der Fastmoney-Bank bevorzugen.

e) Restschuld zu Beginn des 15. Jahres: $200\,000 - 14 \cdot 10\,000 = 60\,000$. Damit ist der Zins im 15. Jahr: $60\,000 \cdot 0.08 = 4800$.

Aufgabe 28

Am 1. Januar des Jahres 1626 hat Peter Minuit, der damalige Gouverneur von Neu-Holland, die Insel Manhattan von indigenen Ureinwohnern gegen Glasperlen, Kleidung und Modeschmuck im Wert von 24 Dollar eingetauscht.

Wie hoch wäre der Wert dieser Summe am 1.1.2014 bei einem angenommenen nominalen jährlichen Zinssatz von 5% bei

a) jährlicher (zinseszinslicher),
b) monatlich anteilig unterjähriger bzw.
c) stetiger Verzinsung?
d) Wieviel hätte der durchschnittliche jährliche Zinssatz bei jährlich exponentieller Verzinsung betragen müssen, wenn der Wert von Manhattan heute bei 13 Billionen Dollar (Schätzung von New Yorker Immobilienmaklern für den reinen unbebauten Grundstückswert in 2014) liegen würde ?
e) Wie lange hätten die Indianer mit dem Verkauf warten müssen, wenn sich der Wert von Manhattan von den 24 Dollar jährlich (exponentiell) um 15 % bis zu einem Wert von 1 Milliarde Dollar gesteigert hätte?

Lösungshinweis:

a) $24 \cdot 1{,}05^{2014-1626} \approx 3996311022{,}2$
b) $24 \cdot (1 + {}^{0{,}05}/_{12})^{12\cdot(2014-1626)} \approx 6137903568{,}98$
c) $24 \cdot e^{(2014-1626)\cdot 0{,}05} \approx 6390343312{,}05$
d) $\left(\frac{13.000.000.000.000}{24}\right)^{({}^{1}/_{(2014-1626)})} \approx 1{,}0721$
e) $\dfrac{\ln\left(\frac{1.000.000.000}{24}\right)}{\ln 1{,}15} \approx 125{,}5$

Aufgabe 29

Die Eltern von Susi Sorglos möchten ihr ein Studium finanzieren. Dazu schenken sie ihr an ihrem sechsten Geburtstag, dem 1. Januar 2003, eine Kapitalversicherung. Die Eltern verpflichten sich dabei, jährlich vorschüssig ab diesem Datum und an jedem der folgenden Geburtstage einen Betrag von 312 € auf das Versicherungskonto einzuzahlen. Die letzte Einzahlung erfolgt an Susis 18. Geburtstag.

(Gehen Sie im Folgenden von Ein- und Auszahlungen auf ein Konto mit einem konstanten jährlichen Zinssatz von 6% aus.)

a) Über welchen Betrag kann Susi nach der letzten Einzahlung am 1. Januar 2015 verfügen?

b) Susi rechnet damit, dass sie ab dem 1. Januar 2015 bis zum Bachelor 3 Jahre studieren wird. Über welchen Betrag könnte sie monatlich nachschüssig verfügen, wenn Ihr Vermögen zum Beginn Ihres Studiums 10 000 € beträgt?

c) Susi entschließt sich an Ihrem 18. Geburtstag auf die Zuwendung ihrer Eltern zu verzichten, nicht zu studieren und gleich mit ehrlicher Arbeit Geld zu verdienen. Sie möchte erst einige Jahre sparen, dabei rechnet sie damit, pro Jahr 3000 € nachschüssig zurücklegen zu können. Von dem angesparten Geld und den Zinsen (6 % p.a.) möchte sie vor Ihrem 40. Geburtstag eine mehrjährige Weltreise unternehmen.
Wie viele Jahre muss sie arbeiten, bis sie von dem angesparten Geld bis zu Ihrem 40. Geburtstag jährlich nachschüssig 30 000 € entnehmen kann?
(*Hinweise*: Überlegen Sie wie lange das Projekt insgesamt dauert und setzen sie den Endwert der Ansparphase gleich dem Barwert der Weltreisephase.)

Lösungshinweis:

```
## Error in library(sfsmisc): there is no package called 'sfsmisc'

## Error in eval(expr, envir, enclos): konnte Funktion "eaxis" nicht finden
```

a) Vorschüssige Rente plus die letzte Zahlung am 18. Geburtstag:
$R_n = 312 \cdot \frac{1{,}06^{12}-1}{1{,}06-1} \cdot 1{,}06 + 312 = 5891{,}23\,€$

b) $r_e = r \cdot \left(12 + 0{,}06 \cdot \frac{11}{2}\right) = r \cdot 12{,}33$ und $R_0 = 10.000 = r_e \cdot \frac{1{,}06^3-1}{1{,}06-1} \cdot 1{,}06^{-3}$; damit:

$$r = 10000 \cdot \frac{0{,}06}{12{,}33 \cdot (1 - 1{,}06^{-3})} = 303{,}41\,€$$

c) Endwert Ansparphase ist gleich Barwert Weltreisephase. Gesamtdauer Projekt: 22 Jahre, x Jahre ansparen, $22 - x$ Jahre entnehmen:

$$\begin{aligned}
3000 \cdot \frac{1{,}06^x - 1}{1{,}06 - 1} &= 30\,000 \frac{1{,}06^{22-x} - 1}{1{,}06 - 1} \cdot 1{,}06^{x-22} \\
1{,}06^x - 1 &= 10 \cdot \left(1 - 1{,}06^{x-22}\right) \\
1{,}06^x + 10 \cdot 1{,}06^x \cdot 1{,}06^{-22} &= 11 \\
1{,}06^x &= \frac{11}{1 + 10 \cdot 1{,}06^{-22}} \\
x &= \ln\left(\frac{11}{1+10\cdot 1{,}06^{-22}}\right) \Big/ \ln 1{,}06 \approx 18{,}35424
\end{aligned}$$

Die Weltreise kann nach der 19. Ansparzahlung, also am 37. Geburtstag starten, Susi kann bis zum 40. Geburtstag damit 3 Jahre auf Weltreise bleiben, bis das Konto vollständig geplündert ist.

Aufgabe 30

Sven Sonneohr hat sich mit einer Spaßpartei als Kandidat für das Europaparlament aufstellen lassen und nach dem Wegfall der 3 %-Hürde tatsächlich ein Mandat als Abgeordneter ergattert.

Sein Plan sieht folgendermaßen aus: Er möchte auf keinen Fall sinnvoll am politischen Geschehen teilnehmen, sondern nur von seinen Privilegien als Parlamentarier profitieren. Er freut sich neben dem monatlichen (steuerfreien) Gehalt auch auf eine zusätzliche Pauschale (ebenfalls steuerfrei), die er erhält, ohne über deren Verwendung Rechenschaft ablegen zu müssen. Daneben bekommt er weitere Zulagen, Sitzungsgelder, Erstattungen für Fahrten und Geld für abrechenbare Sachaufwendungen sowie Übergangsgeld nach dem Ausscheiden.

Er schätzt, dass er dadurch ab dem 1.1.2015 nach Abzug seiner Kosten 5 Jahre lang jährlich nachschüssig Netto 180 000 € auf ein mit 3 % verzinstes Konto einzahlen kann.

a) Welche Summe hätte er auf diese Weise bis zum 1.1.2020 angespart?

Anschließend möchte er von diesem Konto monatlich Geld entnehmen.

b) Welchen konstanten Betrag könnte er pro Monat ab dem 1.1.2020 vorschüssig entnehmen, wenn das Kapital 55 Jahre lang (bis zu seinem 90. Lebensjahr) reichen soll?
c) Wie lange würde das angesparte Kapital ab dem 1.1.2020 reichen, wenn Sven pro Monat vorschüssig 4000 € entnimmt?
d) Wie lange würde es reichen, wenn er pro Monat vorschüssig 2300 € entnimmt?

Lösungshinweis:

a) Nachschüssiger Rentenendwert: $R_n = 180000 \cdot \dfrac{1{,}03^5 - 1}{1{,}03 - 1} \approx 955644{,}45\,€$.

b) Rentenendwert Ansparphase = (monatlich vorschüssiger) Rentenbarwert Entnahmephase; gesucht: monatliche Rate r:

$$R_n = \underbrace{r \cdot (12 + i \cdot \tfrac{13}{2})}_{r_e} \cdot q^{-55} \cdot \frac{q^{55-1}}{q-1} \quad \Leftrightarrow \quad r = R_n \frac{q-1}{(1-q^{-55}) \cdot (12 + i \cdot \frac{13}{2})} \approx 2926{,}81\,€$$

c) Wie b), jetzt Laufzeit n unbekannt und $r = 4000$:

$$R_n = 4000 \cdot (12 + i \cdot \tfrac{13}{2}) \cdot q^{-n} \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} \quad \Leftrightarrow \quad R_n = 4000 \cdot (12 + i \cdot \tfrac{13}{2}) \cdot \frac{1 - q^{-n}}{q-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad q^{-n} = 1 - \frac{R_n \cdot i}{4000 \cdot (12 + i \cdot \frac{13}{2})}$$

$$\Leftrightarrow \quad n = -\frac{1}{\ln q} \cdot \ln \left[1 - \frac{R_n \cdot i}{4000 \cdot (12 + i \cdot \frac{13}{2})} \right] \approx 29{,}97652 \approx 30 \text{ Jahre}$$

d) $2300 \cdot (12 + i \cdot \frac{13}{2}) / R_n \approx 0{,}029 < 3\,\%$. Damit reicht das Kapital ewig. (Alternativ: Argument des Logarithmus in Formel negativ, deswegen reicht Kapital ewig)

Lineare Programme

Aufgabe 31

Das junge Start-Up-Unternehmen „*Pimp-My-Phone*“ hat sich auf das Umgestalten von Mobiltelefonen in die Form von Politikerköpfen spezialisiert. Die von den Kunden am meisten nachgefragten Produkte sind die Pakete *Angela* (A) und *Gerhard* (G). Die Firma beschäftigt bereits 50 Angestellte und unterhält 10 Maschinen. Durch den Verkauf eines Paketes A wird ein Reingewinn von 15 € erzielt, der Verkauf eines Paketes G liefert im Vergleich dazu 20 € Gewinn.

Zur Herstellung eines Paketes A werden 20 Arbeitsstunden, 5 Maschinenstunden und 6 Einheiten Kunststoffformteile verwendet. Um ein Paket G herzustellen, werden 10 Arbeitsstunden, 5 Maschinenstunden und 10 Einheiten Kunststoff benötigt. Insgesamt stehen pro Monat 160 Arbeitsstunden pro Mitarbeiter (Nebenbedingung N_1), 200 Maschinenstunden pro Maschine (N_2) und 3000 Einheiten Kunststoff (N_3) maximal zur Verfügung.

Die Geschäftsleitung möchte die Anzahl der hergestellten Pakete *Angela* (x_1) beziehungsweise *Gerhard* (x_2) hinsichtlich einer Gewinnmaximierung festlegen. Dabei kann davon ausgegangen werden, dass alle hergestellten Pakete auch verkauft werden.

a) Formulieren Sie das Problem als lineares Programm mit Nebenbedingungen und Zielfunktion.

b) Lösen Sie das Problem graphisch (Berechnung der relevanten Geradenschnittpunkte ist erforderlich).

c) Löst man das Problem mit dem Simplexalgorithmus kann man zu folgendem Zwischentableau gelangen:

ZF	-3	0	0	0	2	6000
N_1	14	0	1	0	-1	5000
N_2	2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	500
N_3	$\frac{3}{5}$	1	0	0	$\frac{1}{10}$	300

Bestimmen Sie rechnerisch auf Basis dieses Tableaus mit Hilfe des Simplexalgorithmus eine optimale Lösung. Wie hoch ist der maximal erzielbare Gewinn pro Monat?

d) Bei welcher Ressource hat die Firma in der Optimallösung noch nicht ausgeschöpfte Kapazitäten?

e) Aufgrund von Popularitätsschwankungen ändert sich der Gewinn eines Paketes *Angela* auf Werte $c_1 = 15 + \gamma$ mit $\gamma \in \mathbb{R}$. In welchem Intervall kann c_1 liegen, so dass die Basis erhalten bleibt, also weder die Produktion von *Angela* noch die von *Gerhard* zur Erreichung des Optimalpunktes komplett eingestellt werden muss.

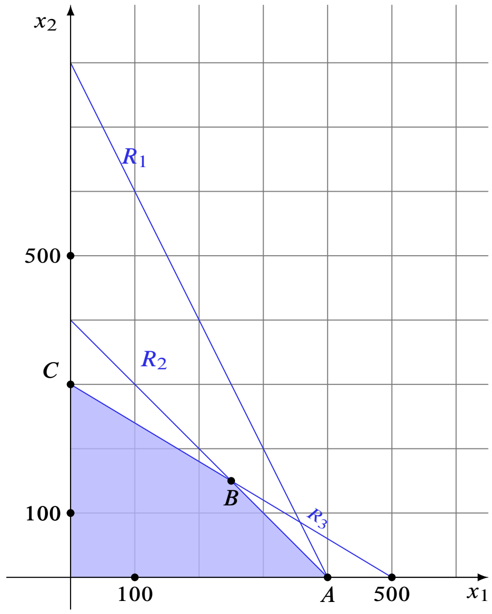
Lösungshinweis:

a) Zielfunktion (ZF):
$15x_1 + 20x_2 \to \max$
Nebenbedingungen:

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad 20x_1 + 10x_2 \leq 160 \cdot 50 = 8000 \\
&(2) \quad 5x_1 + 5x_2 \leq 200 \cdot 10 = 2000 \\
&(3) \quad 6x_1 + 10x_2 \leq 3000
\end{aligned}
$$

Kandidaten für Optimum
$A:\ \text{ZF}(400/0) = 15 \cdot 400 + 20 \cdot 0$
$= 6000$
$C:\ \text{ZF}(0/300) = 15 \cdot 0 + 20 \cdot 300$
$= 6000$
B: $2 \cdot (2) - (3) : 4x_1 = 1000$
$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 250 \\ x_2 = 150 \end{cases}$
$\text{ZF}(250/150) = 15 \cdot 250 + 20 \cdot 150$
$= 6750$
$\Rightarrow$ Optimale Lösung bei (250,150) mit
ZF $= 6750$.

b)



b)

5	0	0	0	$3/2$	$5/4$	6750	$\text{ZF} + 3/2 \cdot N_2$
6	0	0	1	-7	$\frac{5}{2}$	1500	$N_1 - 7 \cdot N_2$
7	1	0	0	$1/2$	$-1/4$	250	$1/2 \cdot N_2$
8	0	1	0	$-3/10$	$\frac{1}{4}$	150	$N_3 - 3/10 \cdot N_2$

c) Die Arbeitszeit ist nicht ausgeschöpft.

Aufgabe 32

Mit Hilfe der Produktionsfaktoren F_1, F_2, F_3 sollen zwei Produkte P_1, P_2 hergestellt werden. Dazu sind folgende Daten bekannt:

Produkt	Menge	Verkaufspreis	Produktionsfaktorverbrauch je Produkteinheit F_1	F_2	F_3
P_1	x_1	4	1	1	3
P_2	x_2	4	1	2	2
Kapazität der Produktionsfaktoren			60	60	120

a) Mit der Zielsetzung „Umsatzmaximierung“ formuliere man das entsprechende lineare Optimierungsproblem und löse dieses Problem graphisch.

b) Wie ist die Kapazität von F_2 zu verändern, wenn ein Umsatzmaximum von 200 erreicht werden soll?

Lösungshinweis:

a) ZF: $4x_1 + 4x_2 \to \max$
$N_1: \ x_1 + x_2 \leq 60$
$N_2: \ x_1 + 2x_2 \leq 60$
$N_3: \ 3x_1 + 2x_2 \leq 120$
Potentielle Kandidaten für Optimum:
A: (0,30)$\Rightarrow$ ZF(0,30)=120
B: ZF(B)=180
C: (40,0)$\Rightarrow$ ZF(40,0)=160

b) Kapazität von F_2 erhöhen heißt Gerade N_2 parallel nach oben verschieben

- Umsatz auf 200 erhöhen heißt Zielfunktion auf Isonutzengerade
  $4x_1 + 4x_2 = 200 \Leftrightarrow$
  $(1) x_1 + x_2 = 50$ einfrieren
- Begrenzung N_3 liefert $(2) 3x_1 + 2x_2 = 120$
  $\Rightarrow$ (2)-2(1) $x_1 = 20 \wedge x_2 = 30$
- Jetzt: F_2 anpassen, bis N_2 auch durch (20,30) läuft: $x_1 + 2x_2 \leq F_2$
  $\Rightarrow 20 + 2 \cdot 30 \leq F_2 \Rightarrow F_2 = 80$
  neue Nebenbed: $x_1 + 2x_2 \leq 80$

Aufgabe 33

Gegeben ist das lineare Optimierungsproblem

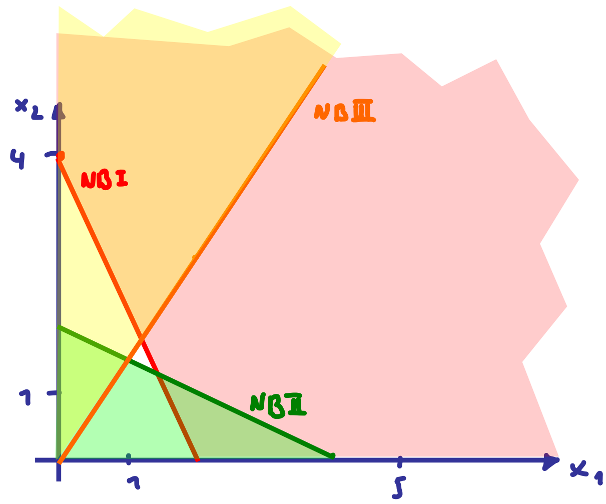
$$
\begin{array}{llcrcl}
\text{ZF:} & x_1 & + & x_2 & \to & \max \\
\text{NB I:} & 2x_1 & + & x_2 & \geqq & 4 \\
\text{NB II:} & x_1 & + & 2x_2 & \leqq & 4 \\
\text{NB III:} & 3x_1 & - & 2x_2 & \leqq & 0
\end{array}
$$

$$x_1, x_2 \geqq 0$$

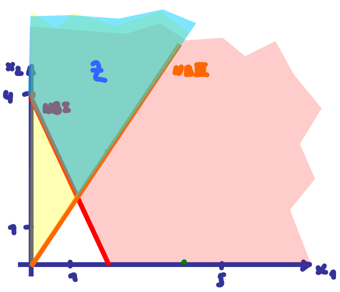
a) Zeigen Sie graphisch, dass dieses Problem unlösbar ist.

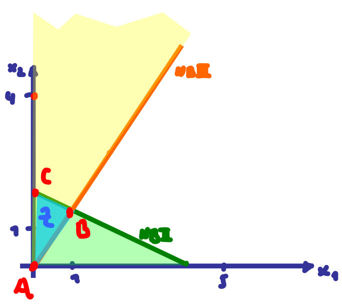
b) Eliminieren Sie *alternativ* die Nebenbedingung
   α) NB I,
   β) NB II,
   γ) NB III
   und diskutieren Sie für jeden dieser Fälle die Lösbarkeit des Problems. Ermitteln Sie gegebenenfalls Optimallösungen und Zielfunktionswert.

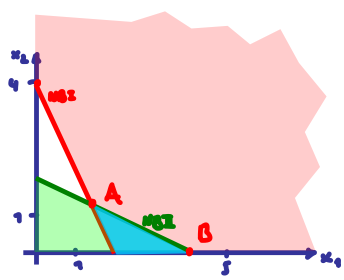
Lösungshinweis:



a) $Z = \{\}$ (es gibt keinen Punkt, der alle 3 NB erfüllt)







b) ohne NB II: Z nicht nach oben beschränkt
→ kein Maximum

ohne NB 1:
$ZF(A) = 0$
$ZF(C) = 0 + 2 = 2$
B: II + III: $4x_1 = 4$
$\Rightarrow x_1 = 1$
in II: $x_2 = 3/2$
$ZF(B) = 1 + 1.5 = 2.5$ → max

$ZF(B) = 4 + 0 = 4$ → max
$A: (4/3, 4/3)$ (Berechnung siehe oben)
$ZF(A) = 8/3 \approx 2.667$

Aufgabe 34

Gegeben sei das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$c_1x_1 + 4x_2 + 10 \;\rightarrow\; \max$$

$$\begin{array}{rcrcl} 3x_1 & + & 6x_2 & \leqq & b_1 \\ 3x_1 & + & x_2 & \leqq & 9 \end{array}$$

$$x_1,x_2 \;\geqq\; 0$$

a) Lösen Sie das Problem für $c_1 = 3$ und $b_1 = 18$ graphisch und geben Sie die Optimallösung sowie den optimalen Zielfunktionswert an.

b) Untersuchen Sie anhand der Graphik aus a), in welchem Bereich der Wert für c_1 variieren darf, so dass die ermittelte Optimallösung erhalten bleibt. Berechnen Sie diesen Bereich.

c) Interpretieren Sie b_1 betriebswirtschaftlich. In welchem Intervall kann man b_1 verändern, so dass beide Produktionsfaktoren für die Produktion verwendet werden? In welchem Intervall kann man b_1 verändern, so dass zur Erreichung der Optimallösung beide Produktionsfaktoren ausgeschöpft werden?

Lösungshinweis:

a) ZF: $3x_1 + 4x_2 + 10 \rightarrow \max$
NB:
(1) $x_1 + 2x_2 \leq 6$
(2) $3x_1 + x_2 \leq 9$
A: $\text{ZF}(0/3) = 3\cdot 0 + 4\cdot 3 + 10 = 22$
C: $\text{ZF}(3/0) = 3\cdot 3 + 4\cdot 0 + 10 = 19$
B: $2\cdot(2) - (1) : 5x_1 = 12 \Rightarrow$
$x_1 = 2{,}4 \Rightarrow x_2 = 1{,}8$
$\text{ZF}(2{,}4/1{,}8) = 3\cdot 2{,}4 + 4\cdot 1{,}8 + 10 = 24{,}4$
$\Rightarrow$Punkt B ist optimale Lösung

b) ZF jetzt $c_1x_1 + 4x_2 + 10$
Steigung der Zielfunktion zwischen -$\frac{1}{2}$ und -3, dann bleibt Optimum (2,4/1,8) erhalten.
Betrachte Isonutzengerade mit ZF-Wert 10
$\Rightarrow c_1x_1 + 4x_2 + 10 = 10 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{c_1}{4}x_1$
$\Rightarrow -3 < -\frac{c_1}{4} < -\frac{1}{2} \Rightarrow 12 > c_1 > 2$

c) NB(1) jetzt: $3x_1 + 6_x2 \leq b_1$
b_1 steuert Obergrenze dieses Produktionsfactors $\widehat{=}$ Parallelverschiebung der Begrenzungslinie
Einsetzen der Extremwerte, bei denen gerade noch beide NB gleichzeitig ausgelastet werden$\Rightarrow$
$(0/9) : 3\cdot 0 + 6\cdot 9 = b_1 \Rightarrow b_1 = 54$ (Obergrenze)
$(3/0) : 3\cdot 9 + 6\cdot 0 = b_1 \Rightarrow b_1 = 9$ (Untergrenze)
$\Rightarrow 9 \leq b_1 \leq 54$

Aufgabe 35

Bauer Paul Profitlich überdenkt die Rationierung des Futters seiner Schweine. Bis dato hatte er zwei Bestandteile im Verhältnis 1:1 gemischt. Sein Hof-Veterinär hat die Menge notwendiger Vitamine in dieser Futtermischung gemessen und grob geschätzt, dass 4 kg Futter pro Schwein und Tag nötig sind, damit die Tiere auf keinen Fall an Vitaminmangelerscheinungen leiden.

Bauer Profitlich hat nun in der aktuellen Ausgabe des *Stallanzeigers* gelesen, dass er pro Tag und Schwein mindestens 2 mg von Vitamin 1, mindestens 3 mg von Vitamin 2 und mindestens 4 mg von Vitamin 3 füttern muss. In der Inhaltsangabe seiner Futtermittelkomponenten steht bei Bestandteil 1, dass es pro kg jeweils 1 mg von jedem dieser drei Vitamine enthält. Futtermittelbestandteil 2 enthält pro kg 1/2 mg von Vitamin 1, 1 mg von Vitamin 2 und 2 mg von Vitamin 3. Beide Futtermittelkomponenten kosten 5 Cent je kg. Bauer Profitlich stellt sich nun die Frage, in welchen Anteilen er die Futtermittelkomponenten mischen muss und wieviel er somit von diesen Komponenten pro Tag und Schwein verfüttern muss, dass seine Kosten minimal sind, trotzdem aber die Vitaminversorgung gewährleistet ist.

a) Formulieren Sie das Problem als lineares Optimierungsproblem mit den Bezeichnungen x_1, x_2 für die Menge an Futtermittelbestandteilen vom Typ 1 beziehungsweise vom Typ 2.
b) Lösen Sie das Problem graphisch (Berechnung der relevanten Geradenschnittpunkte ist trotzdem erforderlich) und geben Sie die Menge der Optimallösungen an.
c) Wieviel muss Bauer Profitlich pro Schwein füttern, wenn alle Nebenbedingungen eingehalten werden sollen und er seine alte Futtermischung weiter verwenden will? Erreicht er so das Kostenoptimum?

Lösungshinweis:

a) ZF: $5x_1 + 5x_2 \rightarrow \min$
NB:
(1) $1x_1 + \frac{1}{2}x_2 \geq 2$ (Vitamin1)
(2) $1x_1 + 1x_2 \geq 3$ (Vitamin2)
(3) $1x_1 + 2x_2 \geq 4$ (Vitamin3)
Kandidaten für Optimum
A: ZF(0/4)=20
D: ZF(4/0)=20
B: $N_1 \wedge N_3 : (2) - (1) : x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 1$
ZF(1/2)=15
C: $N_2 \wedge N_3 : (3) - (2) : x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 2$
ZF(2/1)=15
Optimale Lösung:
$Z^*{=}x \in \mathbb{R}^2 : x = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} +$
$+(1-\lambda)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in [0;1]$
oder: Alle Punkte auf der Verbuidungsstrecke zwischen B und C.

b)

c) Nebenbed. 2 und $x_1 = x_2$
$\Rightarrow x_1 + x_2 \geq 3 \Rightarrow \; x_1 = x_2 = 1{,}5$ kg
d.h.: alte Mischung kann wiederverwendet werden, mind 3kg sind nötig um Vitamversorgung zu gewährleisten.

Aufgabe 36

Gegeben ist das folgende lineare Optimierungsproblem mit den Strukturvariablen $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}_+$, der Zielfunktion Z und den Nebenbedingungen N_1, N_2 und N_3 mit

Z	$3x_1 + 2x_2 + 2x_3$	$\rightarrow$	max
N_1	$x_1 + x_3$	$\leqq$	8
N_2	$x_1 + x_2$	$\leqq$	7
N_3	$x_1 + 2x_2$	$\leqq$	12

Lösen Sie das Problem rechnerisch mittels Simplex-Algorithmus.

Lösungshinweis:

Simplex mit Z $= 3x_1 + 2x_2 + 2x_3$:

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3		
1	-3	-2	-2	0	0	0	0	
2	1	0	1	1	0	0	8	
3	1	1	0	0	1	0	7	
4	1	2	0	0	0	1	12	
5	0	1	-2	0	3	0	21	1 + 3 · 3
6	0	-1	1	1	-1	0	1	2 − 3
7	1	1	0	0	1	0	7	3
8	0	1	0	0	-1	1	5	4 − 3
9	0	-1	0	2	1	0	23	2 + 2 · 6
10	0	-1	1	1	-1	0	1	6
11	1	1	0	0	1	0	7	7
12	0	1	0	0	-1	1	5	8
13	0	0	0	2	0	1	28	9 + 12
14	0	0	1	1	-2	1	6	10 + 12
15	1	0	0	0	2	-1	2	11 − 12
16	0	1	0	0	-1	1	5	12

$\Rightarrow x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 6$ ist optimal mit dem Zielfunktionswert $Z = 28$.

Aufgabe 37

Gegeben ist das folgende lineare Optimierungsproblem mit den Strukturvariablen $x, y \in \mathbb{R}_+$, einer Konstanten $k \in \mathbb{R}$, der Zielfunktion F und den Nebenbedingungen N_1, N_2, N_3 und N_4 mit

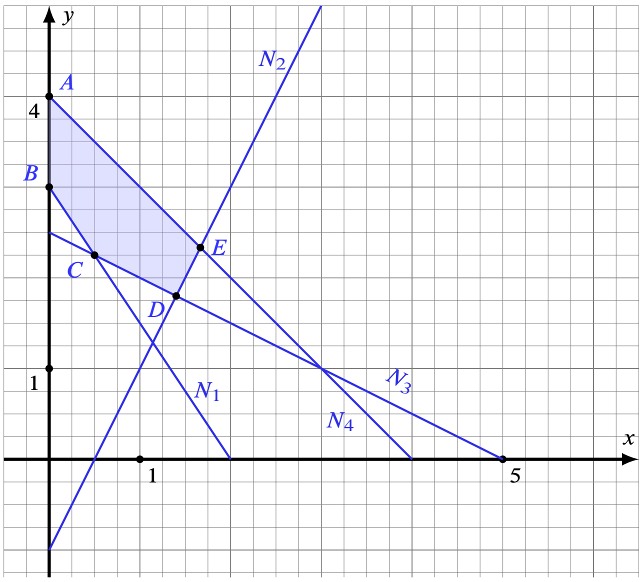
$$\begin{array}{rrcrl}
\text{Zielfunktion:} & kx + y & \to & \min & (F) \\
\text{Nebenbedingungen:} & 3x + 2y & \geq & 6 & (N_1) \\
 & 2x - y & \leq & 1 & (N_2) \\
 & x + 2y & \geq & 5 & (N_3) \\
 & x + y & \leq & 4 & (N_4)
\end{array}$$

Für die Teilaufgaben a) bis c) sei der Wert der Konstanten k in der Zielfunktion gleich 1.

a) Skizzieren Sie den Zulässigkeitsbereich Z des Problems. Benutzen Sie dazu das vorgegebene Koordinatensystem rechts.

b) Berechnen Sie die relevanten Eckpunkte von Z.

c) Benutzen Sie die Ergebnisse aus Teilaufgabe b) und bestimmen Sie damit die Menge der Optimallösungen des Problems.



Kann k so gewählt werden, dass der Schnittpunkt der Randlinien von

d) N_3 und N_4 bzw. von

e) N_2 und N_4 optimal ist?

Geben Sie k für d) und e) gegebenenfalls an.

Lösungshinweis:

a) siehe Zeichnung

b) $A = (0,4)$, $B = (0,3)$, $C = (0.5, 2.25)$, $D = (1.4, 1.8)$, $E(\frac{5}{3}, \frac{7}{3})$

c) $\text{ZF}(A) = 4$,
$\text{ZF}(B) = 3$,
$\text{ZF}(C) = 2{,}75$,
$\text{ZF}(D) = 3{,}2$,
$\text{ZF}(E) = 12/3 = 4$,
optimal ist also C.

d) Das geht nicht, Schnittpunkt ist außerhalb des Zulässigkeitsbereichs.

e) $E = (5/3, 7/3)$ ist optimal, wenn $\text{ZF}(E) \leq \text{ZF}(A)$ und $\text{ZF}(E) \leq \text{ZF}(D) \quad \Leftrightarrow$
$k \cdot \frac{5}{3} + \frac{7}{3} \leq k \cdot 0 + 4 \quad \text{und} \quad k \cdot \frac{5}{3} + \frac{7}{3} \leq k \cdot \frac{7}{5} + \frac{9}{5} \quad \Leftrightarrow \quad k \leq 1 \quad \text{und} \quad k \leq -2 \quad \Leftrightarrow \quad k \leq -2$

Differentialgleichungen

Aufgabe 38

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen:

a) $xy' = 4y + x^5$
b) $y' = y \cdot \tan x - 2 \cdot \sin x$ für $-\pi/2 < x < \pi/2$
c) $x^2 y' = 1 - y$ für $x < 0$
d) $xy' = -y + \mathrm{e}^x$ für $x > 0$
e) $y' = -y + x\mathrm{e}^{-x} + 1$

Lösungshinweis:

a) Gleichung geteilt durch x: $\quad y' = \frac{4}{x} y + x^4 \quad \text{mit} \quad x > 0$
Homogene Gleichung und allgemeine Lösung derselben:

$$y' = \frac{4}{x} y \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{4}{x} \quad \Rightarrow \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x = 4 \ln x$$
$$\Rightarrow y_{\text{hom.}} = D \cdot \mathrm{e}^{4 \ln x} = C \cdot x^4$$

Partikuläre Lösung durch Variation der Konstanten:

$$y_{\text{part.}} = C(x) \cdot x^4 \quad \Rightarrow \quad y' = C'(x) \cdot x^4 + C(x) \cdot 4x^3$$
$$\Rightarrow \quad C'(x) \cdot x^4 + 4C(x) \cdot x^3 = \frac{4}{x} \cdot C(x) \cdot x^4 + x^4$$
$$\Rightarrow \quad C'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad C(x) = x$$
$$\Rightarrow \quad y_{\text{part.}} = C(x) \cdot x^4 = x^5$$

Allgemeine Lösung der DGl:

$$y_{\text{allgemein}} = y_{\text{hom.}} + y_{\text{part.}} = Cx^4 + x^5$$

b) $y' = y \tan x - 2 \sin x \quad$ für $\quad -\pi/2 < x < \pi/2$

$$\text{Homogen:} \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| = \ln\left(1/\cos x\right)$$
$$\Rightarrow \quad y_{\text{hom.}} = C \cdot \mathrm{e}^{\ln \frac{1}{\cos x}} = C \cdot \frac{1}{\cos x}$$

Partikuläre Lösung: $y_{\text{part.}} = C(x) \cdot 1/\cos x$

$$\Rightarrow \quad C'(x) = -2\sin(x)\cos(x) \quad \Rightarrow \quad C(x) = -\sin^2(x)$$

$$\Rightarrow y_{\text{part.}} = -\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)\cdot\sin(x)$$

Allgemeine Lösung: $y_{\text{allg.}} = y_{\text{hom.}} + y_{\text{part.}} = \dfrac{C}{\cos(x)} - \tan(x)\cdot\sin(x)$

c) $x^2y' = 1 - y \quad \Leftrightarrow \quad y' = -\dfrac{1}{x^2}y + \dfrac{1}{x^2} \qquad$ für $\quad x < 0$

Homogen: $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \quad y_{\text{hom.}} = C\cdot \mathrm{e}^{1/x}$

Partikulär: $y_{\text{part.}} = C(x)\cdot\mathrm{e}^{1/x} \quad \Rightarrow \quad C'(x) = \dfrac{1}{x^2}\cdot\mathrm{e}^{-1/x} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \mathrm{e}^{-1/x}$

$\Rightarrow \quad y_{\text{part.}} = \mathrm{e}^{-1/x}\cdot\mathrm{e}^{1/x} = 1$

Allgemein: $y_{\text{allg.}} = y_{\text{hom.}} + y_{\text{part.}} = C\cdot\mathrm{e}^{1/x} + 1$

d) $y' = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x}\mathrm{e}^x \qquad$ für $\quad x > 0$

Homogen: $y_{\text{hom.}} = \mathrm{e}^{\int -1/x\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-\ln x + D} = \dfrac{C}{x}$

Partikulär: $y_{\text{part.}} = C(x)\cdot\dfrac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad C'(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad C(x) = \mathrm{e}^x$

$\Rightarrow \quad y_{\text{part.}} = \mathrm{e}^x\cdot\dfrac{1}{x}$

Allgemein: $y_{\text{allg.}} = y_{\text{hom.}} + y_{\text{part.}} = \dfrac{1}{x}(C + \mathrm{e}^x)$

e) $y' = -y + x\mathrm{e}^{-x} + 1$

Homogen: $y_{\text{hom.}} = \mathrm{e}^{\int(-1)\,\mathrm{d}x} = C\mathrm{e}^{-x}$

Partikulär: $y_{\text{part.}} = C(x)\cdot\mathrm{e}^{-x} \quad \Rightarrow \quad C'(x) = x + \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad C(x) = \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{e}^x$

$\Rightarrow \quad y_{\text{part.}} = \dfrac{x^2}{2}\,\mathrm{e}^{-x} + 1$

Allgemein: $y_{\text{allg.}} = y_{\text{hom.}} + y_{\text{part.}} = C\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-x} + 1 = \dfrac{C + \frac{x^2}{2}}{\mathrm{e}^x} + 1$

Aufgabe 39

Bestimmen Sie die Lösungen der angegebenen Anfangswertprobleme:

a) $y' = 2xy + x, \quad y(0) = 1$

b) $y' = \dfrac{1}{1-x}y + x - 1, \quad y(2) = 0$

c) $(x+1)y' = -(x+2)y + 2\cdot \sin x, \quad y(0) = 2$

d) $y' = \dfrac{y}{x} + x^2, \quad y(1) = 1$

e) $y' = 2xy + 1, \quad y(0) = 0$

Lösungshinweis:

a) $y' = 2xy + x \quad \text{mit} \quad y(0) = 1$

$$\begin{aligned}
\text{Homogen:}\quad & y_{\text{hom.}} = e^{\int (2x)\,dx} = C e^{x^2} \\
\text{Partikulär:}\quad & y_{\text{part.}} = C(x)\cdot e^{x^2} \quad \Rightarrow \quad C'(x) = x\cdot e^{-x^2} \\
\Rightarrow\quad & C(x) = -1/2\cdot e^{-x^2} \\
\Rightarrow\quad & y_{\text{part.}} = -1/2\cdot e^{-x^2}\cdot e^{x^2} \\
\text{Allgemein:}\quad & y_{\text{allg.}} = y_{\text{hom.}} + y_{\text{part.}} = C\cdot e^{x^2} - 1/2 \\
\text{Anfangsbedingung:}\quad & 1 = C\cdot e^0 - 1/2 \quad \Rightarrow C = 3/2 \\
\Rightarrow\quad & y = 3/2\cdot e^{x^2} - 1/2
\end{aligned}$$

b) $y' = \frac{1}{1-x}y + x - 1 \quad \text{mit} \quad y(2) = 0 \quad (\Rightarrow x > 1)$

$$\begin{aligned}
\text{Homogen:}\quad & y_{\text{hom.}} = e^{\int \frac{1}{1-x}\,dx} = C\frac{1}{1-x} \\
\text{Partikulär:}\quad & y_{\text{part.}} = C(x)\cdot \frac{1}{1-x} \quad \Rightarrow \quad C'(x) = -x^2 + 2x - 1 \\
\Rightarrow\quad & C(x) = -1/3\cdot x^3 + x^2 - x \\
\text{Allgemein:}\quad & y_{\text{allg.}} = y_{\text{hom.}} + y_{\text{part.}} = \frac{1}{1-x}(C - 1/3\cdot x^3 + x^2 - x) \\
\text{Anfangsbedingung:}\quad & 0 = -1(C - 8/3 + 4 - 2) \quad \Rightarrow \quad C = 2/3 \\
\Rightarrow\quad & y = \frac{1}{1-x}(2/3 - 1/3\cdot x^3 + x^2 - x)
\end{aligned}$$

c) $y' = -\dfrac{x+2}{x+1} \cdot y + \dfrac{2\sin x}{x+1}$ mit $y(0) = 2$ $(\Rightarrow x > -1)$

$$\begin{aligned}
\text{Homogen:}\quad & y_{\text{hom.}} = \mathrm{e}^{\int -\frac{x+2}{x+1}\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\int \left(1+\frac{1}{x+1}\right)\,\mathrm{d}x} \\
& = \mathrm{e}^{-(x+\ln(x+1))+D} = C\cdot\left(\tfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}\right) \\
\text{Partikulär:}\quad & y_{\text{part.}} = C(x)\cdot\left(\tfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}\right) \quad\Rightarrow\quad C'(x) = 2\mathrm{e}^{x}\sin x \\
\Rightarrow\quad & C(x) = \mathrm{e}^{x}(\sin x - \cos x) \\
\text{Allgemein:}\quad & y_{\text{allg.}} = y_{\text{hom.}} + y_{\text{part.}} = C\cdot\left(\tfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}\right) + \frac{\sin x - \cos x}{x+1} \\
\text{Anfangsbedingung:}\quad & 2 = C\cdot {}^{1}/_{1} + {}^{-1}/_{1} \quad\Rightarrow\quad C = 3 \\
\Rightarrow\quad & y = \frac{1}{x+1}(3\,\mathrm{e}^{-x} + \sin x - \cos x)
\end{aligned}$$

d) $y' = \dfrac{y}{x} + x^2$ mit $y(1) = 1$ $(\Rightarrow x > 0)$

$$\begin{aligned}
\text{Homogen:}\quad & y_{\text{hom.}} = \mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} = C\cdot x \\
\text{Partikulär:}\quad & y_{\text{part.}} = C(x)\cdot x \quad\Rightarrow\quad C'(x) = x \quad\Rightarrow\quad C(x) = \frac{x^2}{2} \\
\text{Allgemein:}\quad & y_{\text{allg.}} = y_{\text{hom.}} + y_{\text{part.}} = C\cdot x + \frac{x^3}{2} \\
\text{Anfangsbedingung:}\quad & 1 = C + {}^{1}/_{2} \quad\Rightarrow\quad C = {}^{1}/_{2} \\
\Rightarrow\quad & y = {}^{1}/_{2}\cdot x\cdot(1+x^2)
\end{aligned}$$

e) $y' = 2xy + 1$ mit $y(0) = 0$

$$\begin{aligned}
\text{Homogen:}\quad & y_{\text{hom.}} = \mathrm{e}^{\int 2x\,\mathrm{d}x} = C\cdot\mathrm{e}^{x^2} \\
\text{Partikulär:}\quad & y_{\text{part.}} = C(x)\cdot\mathrm{e}^{x^2} \quad\Rightarrow\quad C'(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \quad\Rightarrow\quad C(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\
\text{Allgemein:}\quad & y_{\text{allg.}} = y_{\text{hom.}} + y_{\text{part.}} = C\cdot\mathrm{e}^{x^2} + \mathrm{e}^{x^2}\cdot\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\
\text{Anfangsbedingung:}\quad & 0 = C\cdot\mathrm{e}^{0} \quad\Rightarrow\quad C = 0 \\
\Rightarrow\quad & y = \mathrm{e}^{x^2}\cdot\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Aufgabe 40

Ein Einzelhändler registriert für einen Exklusivartikel im Verlauf von 30 Verkaufstagen folgende Verkaufszahlen:

Tag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl	5	2	3	0	0	1	3	6	0	2
Tag	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Anzahl	1	0	1	0	2	3	5	1	0	0
Tag	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Anzahl	3	5	3	1	0	0	0	6	3	1

a) Berechnen Sie die absoluten und relativen Häufigkeiten der Ausprägungen sowie die absolute kumulierte Häufigkeit für $x = 4$. R

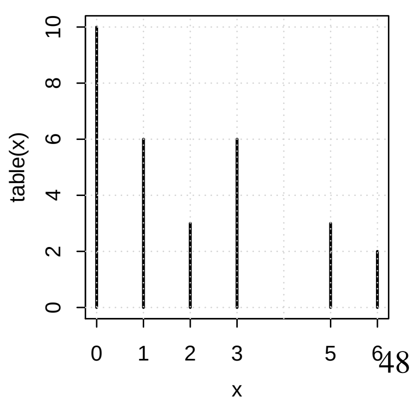
b) Erstellen Sie das zugehörige Balkendiagramm und das Kreissektorendiagramm mithilfe der absoluten Häufigkeiten. R

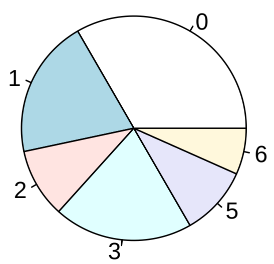
Lösungshinweis:

```
x = c(5, 2, 3, 0, 0, 1, 3, 6, 0, 2, 1, 0, 1, 0, 2, 3, 5,
    1, 0, 0, 3, 5, 3, 1, 0, 0, 0, 6, 3, 1)
T = table(x)
T  # Ausgabe der Häufigkeiten
cumsum(T)  # Ausgabe der kumulierten Häufigkeiten
```

Ausprägung	0	1	2	3	5	6
Häufigkeit	10	6	3	6	3	2
kumuliert	10	16	19	25	28	30

```
plot(table(x))
pie(table(x))
```





Aufgabe 41

Das Ergebnis der Untersuchung eines kardinalskalierten Merkmals X sei in folgender Tabelle wiedergegeben:

Ausprägung	1	2	3	4	7
Anzahl	4	4	6	4	2

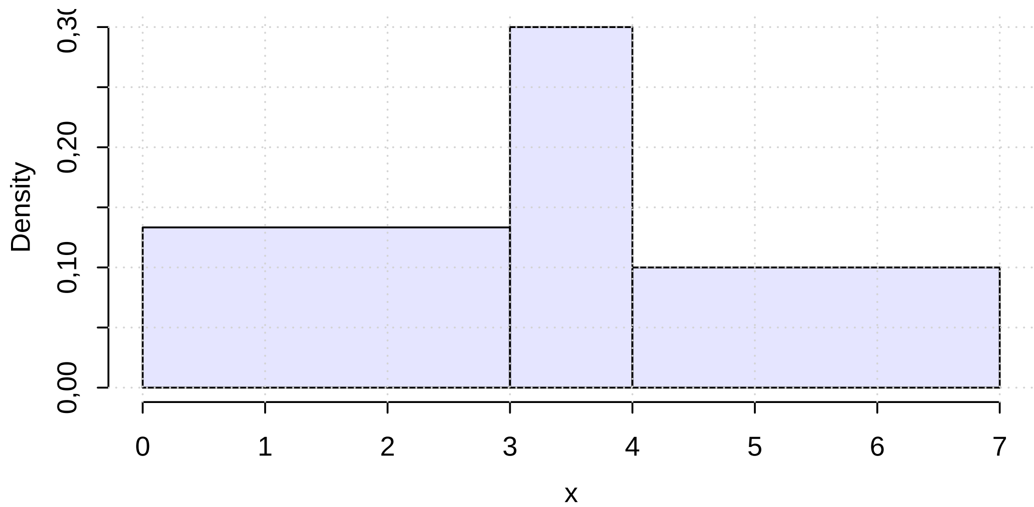
a) Bestimmen Sie das arithmetische Mittel, den Modus und den Median.
b) Berechnen Sie die mittlere quadratische Abweichung.
c) Obige Daten werden nun mittels der Intervalle $[0; 3)$, $[3; 4)$ und $[4; 7]$ klassiert. Bestimmen Sie die Rechteckhöhen des Histogramms.

Lösungshinweis:

```
x = rep(c(1, 2, 3, 4, 7), times = c(4, 4, 6, 4, 2))
median(x)
mean(x)
SP = max(x) - min(x)  # Spannweite
MQA = mean((x - mean(x))^2)  # mittlere quadratische Abweichung
s = sqrt(MQA)  # Standardabweichung
V = s/mean(x)  # Variationskoeffizient
```

$$x_{\text{med}} = 3, \qquad \overline{x} = 3,$$
$$\text{SP} = 6, \qquad s^2 = 2{,}8,$$
$$s \approx 1{,}67332, \qquad V \approx 0{,}55777.$$

```
require(MASS)
hist(x, breaks = c(0, 3, 4, 7), right = FALSE, col = rgb(0,
    0, 1, 0.1), main = "")
grid()
```



Aufgabe 42

10 Personen werden befragt, wieviel Sie in den Weihnachtsferien zugenommen haben. Für die empirische Verteilungsfunktion des abgefragten Merkmals $X \mathrel{\widehat{=}}$ „*Gewichtszunahme vom 23. Dezember bis zum darauf folgenden 7. Januar*“ ergibt sich:

$$F(x) = \begin{cases} 0{,}0 & \text{für} \quad x < -1{,}0 \\ 0{,}1 & \text{für} \quad -1{,}0 \leq x < 1{,}0 \\ 0{,}3 & \text{für} \quad 1{,}0 \leq x < 1{,}5 \\ 0{,}4 & \text{für} \quad 1{,}5 \leq x < 2{,}0 \\ 0{,}9 & \text{für} \quad 2{,}0 \leq x < 6{,}0 \\ 1{,}0 & \text{für} \quad x \geq 6{,}0 \end{cases}$$

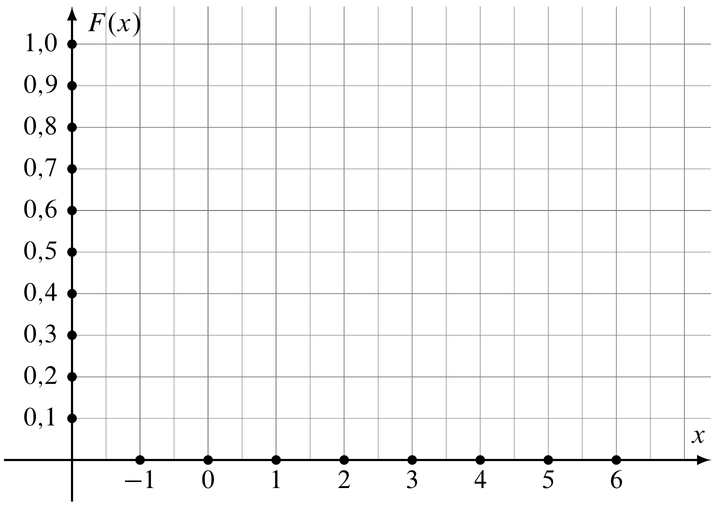
a) Zeichnen Sie $F(x)$ in nebenstehendes Koordinatensystem ein.

b) Schreiben Sie die ursprünglichen Daten als Urliste von X auf.

c) Berechnen Sie das arithmetische Mittel von X.

d) Bestimmen Sie den Median von X.

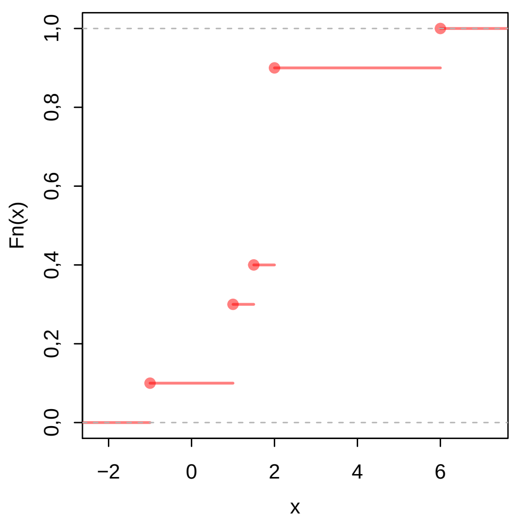
e) Berechnen Sie die mittlere quadratische Abweichung sowie die Standardabweichung von X.



Lösungshinweis:

b) und a) Da die 10 %-Sprünge jeweils einer Person entsprechen (bei 10 Leuten), kann man die Urliste eindeutig aus F ablesen:

```
x = c(-1, 1, 1, 1.5, 2, 2, 2, 2, 2, 6)
plot(ecdf(x), lwd = 2, col = rgb(1, 0, 0, 0.5), main = "")
```



c) Für das arithmetische Mittel ergibt sich $\overline{x} = 1{,}85$.

d) Der Median ist $x_{\text{med}} = 2$.

e) $s^2 = 2{,}7025$ und $s = 1{,}64393$.

Aufgabe 43

Ein bestimmtes Gut wird von genau 7 Firmen produziert. Folgende Tabelle gibt an, wie viele tausend Stück jede Firma herstellt:

Firma:	A	B	C	D	E	F	G	
prod. Stückzahl:	3	2	3	5	6	15	6	(tausend Stück)

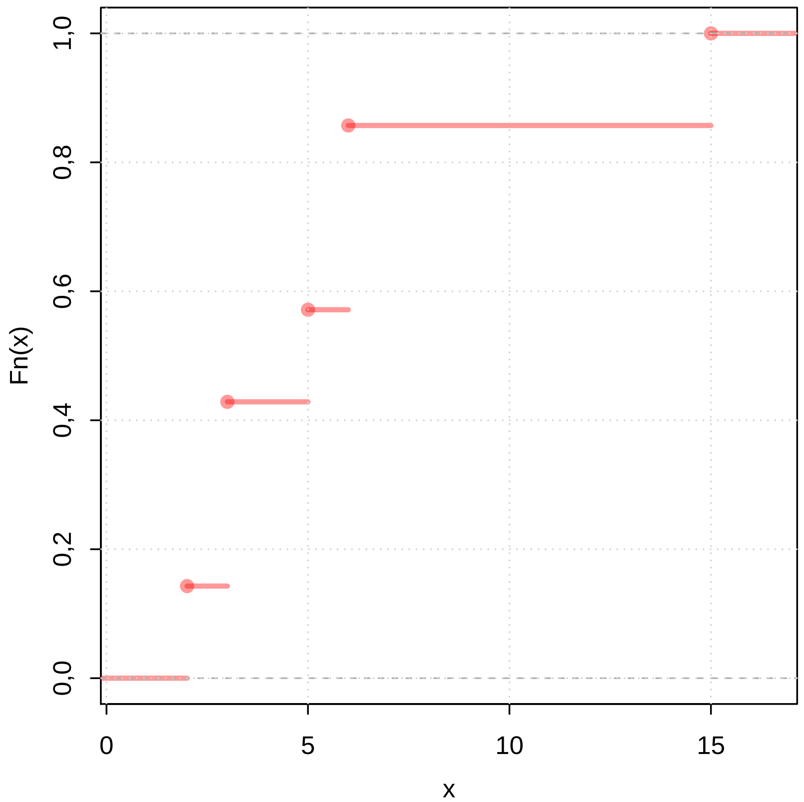
a) Bestimmen Sie den Medianwert der produzierten Stückzahlen.
b) Skizzieren Sie für $x-$Werte aus dem Intervall [0;20] den Verlauf der Funktion $F(x) =$ Anteil der Firmen, die höchstens $1000 \cdot x$ Stück produzieren.
c) Errechnen Sie die Knickpunkte der zugehörigen Lorenzkurve.
d) Errechnen Sie den normierten Gini-Koeffizienten.
e) Bestimmen Sie den Konzentrationskoeffizienten CR_2.

Lösungshinweis:

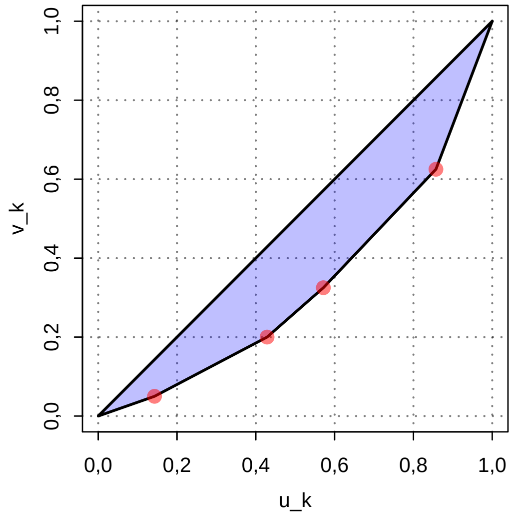
```
x = c(3, 2, 3, 5, 6, 15, 6)
```

a) Median: $x_{\text{med}} = 5$

b)
```
plot(ecdf(x), lwd = 3, col = rgb(1, 0, 0, 0.4), main = "")
```



c)
```r
library(ineq)
plot(Lc(x), las = 2, col = rgb(1, 0, 0, 0.5))   #
```



Für die Knicke ergibt sich:

k	u_k	v_k
1	0,143	0,050
3	0,429	0,200
4	0,571	0,325
6	0,857	0,625

d) $G = 0{,}34286$ und damit $G^* = \dfrac{n}{n-1} \cdot G = \dfrac{7}{6} \cdot 0{,}34286 = 0{,}4$.

e) $\mathrm{CR}_2 = 0{,}525$.

Aufgabe 44

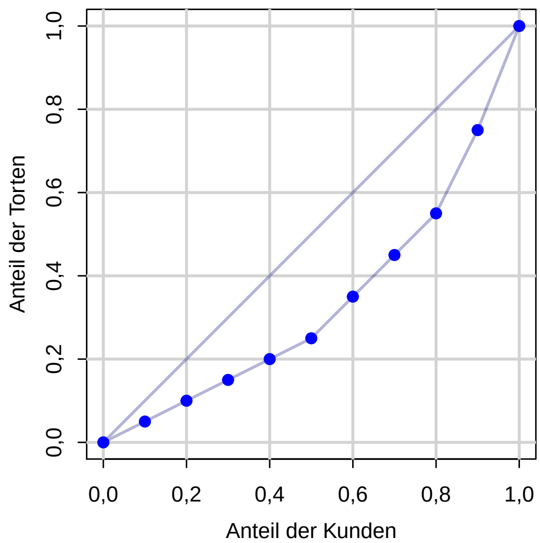
Die Firma CelebWedCake liefert zu einem Festpreis von 200.000 € eine exklusive Premium-Hochzeitstorte an Prominente. In den letzten 5 Jahren wurden insgesamt 20 von diesen Torten verkauft. Pro Kunde ist die Anzahl der verkauften Torten in dieser Zeitspanne mittels der verschiedenen Ausprägungen a_i und den zugehörigen absoluten Häufigkeiten h_i erfasst:

i	1	2	3	4
a_i	1	2	4	5
h_i	5	3	1	h_4

a) Bestimmen Sie h_4.
b) Zeichnen Sie die Lorenzkurve,
c) berechnen Sie den normierten Gini-Koeffizienten sowie
d) den Herfindahl- und
e) den Exponentialindex der Anzahl der verkauften Torten pro Kunde.

Lösungshinweis:

a) Insgesamt 20 Torten, laut Tabelle $1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 15$ Torten für bis zu 4 Torten. Bleibt ein Kunde mit 5 Torten, also $h_4 = 1$.
b) Lorenzkurve siehe rechts
c) Zehn Kunden. Gini: $G = 0{,}33$, normiert: $G_* = 0{,}36667$
d) Herfindahl: 0,145
e) Exponentialindex: 0,12146



Aufgabe 45

Die folgende Tabelle gibt jeweils den jährlichen Umsatz der weltweit 10 umsatzstärksten Softwareunternehmen an:

Nr. des Unternehmens:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Umsatz [in Mrd. US-Dollar]:	4	49	4	22	5	18	12	6	7	6

a) Zeichnen Sie die Lorenzkurve des Umsatzes.
b) Berechnen Sie den Gini-Koeffizienten und den normierten Gini-Koeffizienten.
c) Berechnen Sie den Herfindahl- sowie den Exponentialindex.

Lösungshinweis:

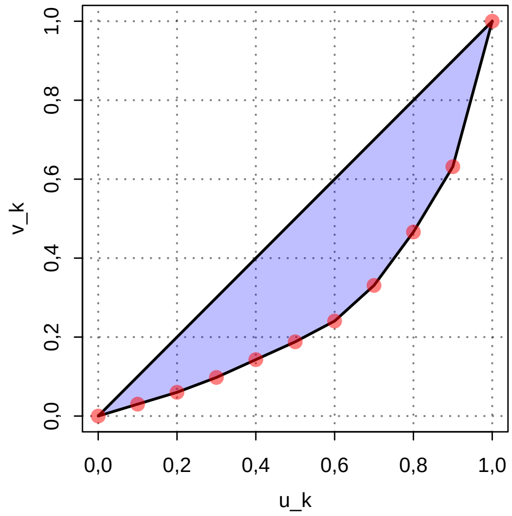
```
x = c(4, 49, 4, 22, 5, 18, 12, 6, 7, 6)
## [1]  4  4  5  6  6  7 12 18 22 49
```

a) Kumulierte Anteile:

```
## Warning: package 'ineq' was built under R version 3.3.1
```

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_k	0,000	0,100	0,200	0,300	0,400	0,500	0,600	0,700	0,800	0,900	1,000
v_k	0,000	0,030	0,060	0,098	0,143	0,188	0,241	0,331	0,466	0,632	1,000

b)
```
library(ineq)
plot(Lc(x), las = 2, col = rgb(1, 0, 0, 0.5))  #
```



c) $G = 0{,}46241$ und damit $G^* = \dfrac{n}{n-1} \cdot G = \dfrac{10}{9} \cdot 0{,}46241 = 0{,}51378.$

d) Herfindahl: 0,19962, Exponentialindex: 0,14633.

Aufgabe 46

Pia lädt 11 Freundinnen zu einem Damenabend ein. Es gibt 8 Flaschen Prosecco. Pro Flasche kann Sie 5 Gläser ausschenken.

- 3 Freundinnen müssen fahren und trinken nichts vom Prosecco,
- 3 Freundinnen trinken jeweils 3 Gläser,
- 4 Freundinnen trinken jeweils 5 Gläser,
- 1 Freundin trinkt 8 Gläser und
- Pia übernimmt den Rest.

a) Welchen Anteil am Prosecco muss Pia trinken?

b) Geben Sie die Häufigkeitsverteilung der Gläser pro Dame an.

c) Bestimmen Sie den Median, das arithmetische Mittel und die Standardabweichung der Gläser pro Dame.

d) Welche Werte nimmt die zur Anzahl der Gläser x pro Dame gebildete empirische Verteilungsfunktion $F(x)$ bei $x = 2$ und bei $x = 5$ an?

e) Zeichnen Sie die Lorenzkurve und

f) berechnen Sie den normierten Gini–Koeffizienten der Gläseranzahl pro Dame.

Lösungshinweis:

a) $(40 - (3 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 8)) : 40 = \frac{3}{40} = 0{,}075.$

b)

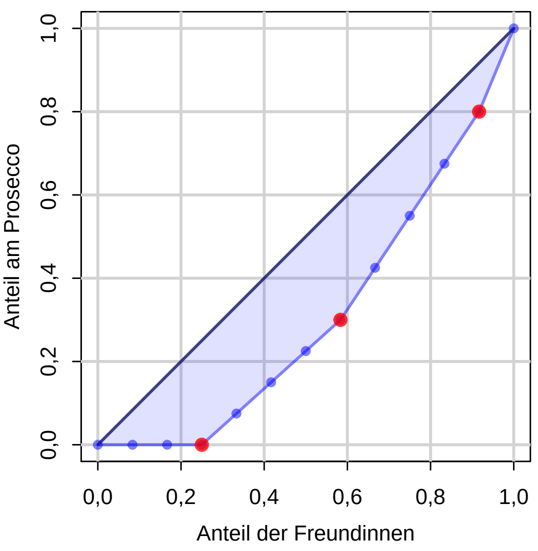
i	1	2	3	4
a_i	0	3	5	8
h_i	3	4	4	1

c) $x_{\text{med}} = 3,$
$\overline{x} = 3{,}33333,$
$s = 2{,}35702\,.$

d) $F(2) = 3/12 = 0{,}25$
$F(5) = 11/12 \approx 0{,}917.$

e) Lorenzkuve siehe rechts

f) 12 Leute: $G = 0{,}383$, norm.: $G_* = 0{,}418$



Aufgabe 47

Für den Aktienkurs und den Optionspreis einer deutschen Aktie ergaben sich folgende Daten:

Kurs	Optionspreis	Kurs	Optionspreis
240,3	16,00	226	11,20
252,5	15,40	202	10,50
238	17,40	208	13,10
228	12,60	177	14,50
223	11,80	190	14,80
238	11,00	180,5	13,70

Zeichnen Sie für diesen Datensatz das Streuungsdiagramm und berechnen Sie den Bravais-Pearson-Korrelationskoeffizienten.

Lösungshinweis:

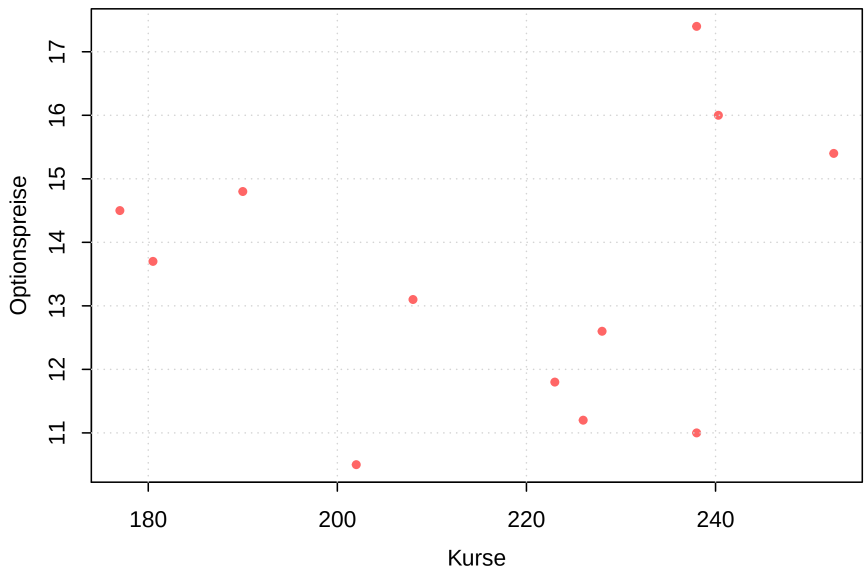
```
# Eingabe der Daten
Kurse = c(240.3, 252.5, 238, 228, 223, 238,  226, 202, 208, 177, 190, 180.5)
Optionspreise = c(16, 15.4, 17.4, 12.6, 11.8, 11, 11.2, 10.5, 13.1, 14.5, 14.8, 13.7)

# Bravais-Pearson-Korrelationskoeffizient:
cor(Kurse, Optionspreise)

## [1] 0,13423
```

Die beiden Merkmale sind anscheinend fast nicht korreliert.

```
# Streuplot:
plot(Kurse, Optionspreise)
```



Aufgabe 48

Zwei Personen sollen fünf verschiedene Produkte A bis E durch Angabe einer Reihenfolge beurteilen. Die Befragung ergab folgende Ergebnisse:

Produkt	Person I	Person II
A	5	3
B	2	1
C	3	4
D	4	2
E	1	5

Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten von Spearman.

Lösungshinweis:

Sowohl mit als auch mit Formel bzw. Taschenrechner ergibt sich $r_{\text{SP}} = -0{,}3$.

```
Person1 = c(5, 2, 3, 4, 1)
Person2 = c(3, 1, 4, 2, 5)
```

```
# method='spearman' ist der Rangkorrelationskoeffizient
# (Schalter ist hier eigentlich überflüssig, da sowieso
# schon Ränge vorliegen)
cor(Person1, Person2, method = "spearman")

## [1] -0,3
```

Aufgabe 49

Ein Betrieb hat im Kalenderjahr 2004 zwölf neue Mitarbeiter eingestellt. Von diesen sind unter anderem folgende Daten bekannt:

Mitarbeiter Nr.	Geschlecht	Ausbildungsdauer (in Jahren)	Abschlussnote
1	männlich	9	4
2	weiblich	10	2
3	weiblich	10	4
4	männlich	11	4
5	weiblich	12	2
6	weiblich	13	2
7	weiblich	14	1
8	männlich	15	3
9	männlich	16	2
10	männlich	17	3
11	weiblich	19	3
12	männlich	22	2

a) Geben Sie die Skalierung der drei Merkmale Geschlecht, Ausbildungsdauer und Abschlussnote an.

b) Ermitteln Sie für jedes der drei Merkmale die folgenden Größen, soweit diese aufgrund des jeweiligen Skalenniveaus sinnvollerweise berechnet werden können:
   (1) Modus
   (2) Median
   (3) Arithmetisches Mittel
   (4) Mittlere quadratische Abweichung
   (5) Variationskoeffizient

c) Geben Sie für jedes der zwei Merkmalspaare
   (1) Geschlecht – Abschlussnote
   (2) Ausbildungsdauer – Abschlussnote
   einen statistisch sinnvollen Korrelationskoeffizienten an.
   (Die Korrelationskoeffizienten müssen nicht berechnet werden.)

Lösungshinweis:

a) Geschlecht: *nominal*,
   Ausbildungsdauer: *kardinal*,
   Abschlussnote: *ordinal*

b)

	Geschlecht	Ausbildungsdauer	Abschlussnote
Modus	(nicht eindeutig)	10	2
Median	–	13,5	2,5
Arithmetisches Mittel	–	14	–
Mittlere quadratische Abweichung	–	14,5	–
Variationskoeffizient	–	0,27	–

c) Geeignete Korrelationskoeffizienten:
   (1) Geschlecht – Abschlussnote: *Kontingenzkoeffizient*
   (2) Ausbildungsdauer – Abschlussnote: *Rangkorrelationskoeffizient*

Aufgabe 50

An einer Hochschule sollen die Studierenden ihre Mensa bezüglich der Qualität des Essens beurteilen. In einer Voruntersuchung haben 50 Studenten aus vier Studienjahren befragt ein bestimmtes Gericht bezüglich des Geschmacks als schlecht, mittel bzw. gut bewertet. Folgende Häufigkeitstabelle fasst die Ergebnisse zusammen:

	Studienjahr			
Bewertung	1	2	3	4
schlecht	0	6	3	1
mittel	5	9	1	0
gut	5	5	6	9

Berechnen Sie den normierten Kontingenzkoeffizient zwischen der Zugehörigkeit zum Studienjahr und der vergebenen Bewertung.

Lösungshinweis:

(Lösung in R nicht prüfungsrelevant, mit Bleistift und Papier schon)

```
Mensa = matrix(c(0, 6, 3, 1,
                 5, 9, 1, 0,
                 5, 5, 6, 9), nrow=3, byrow=T)
dimnames(Mensa) =
  list(Bewertung=c("schlecht", "mittel", "gut"),
       Studienjahr=c("1", "2", "3", "4"))

# wird noch nicht als Kontingenztabelle erkannt
Mensa = as.table(Mensa)

# Paket vcd: "visualizing categorical data"
library(vcd)
K = assocstats(Mensa)$cont
K_max = sqrt(2/3)
K_normiert = K/K_max
```

Mit den Randhäufigkeiten

```
addmargins(Mensa)

##              Studienjahr
## Bewertung    1  2  3  4 Sum
##   schlecht   0  6  3  1  10
##   mittel     5  9  1  0  15
##   gut        5  5  6  9  25
##   Sum       10 20 10 10  50
```

ergibt sich $K = 0{,}50445$ und die normierte Variante $K^* = 0{,}61783$.

Aufgabe 51

In einem Unternehmen fragt man sich, ob zwischen Umsatz und Marketingkosten ein Zusammenhang besteht. Folgende betrieblichen Daten (in 1000 €) liegen vor:

Marketingkosten/Kunde	Umsatz/Kunde
1,4	210
1,8	220
1,9	240
2,4	241
2,8	320
3,2	400
3,6	410
4,0	480

a) Erstellen Sie ein Streuungsdiagramm (y = Umsatz, x = Marketingkosten) und berechnen Sie den Bravais-Pearson- und den Rangkorrelationskoeffizienten.

b) Stellen Sie die Regressionsgerade $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}\,x$ auf und berechnen Sie den Determinationskoeffizienten.

Lösungshinweis:

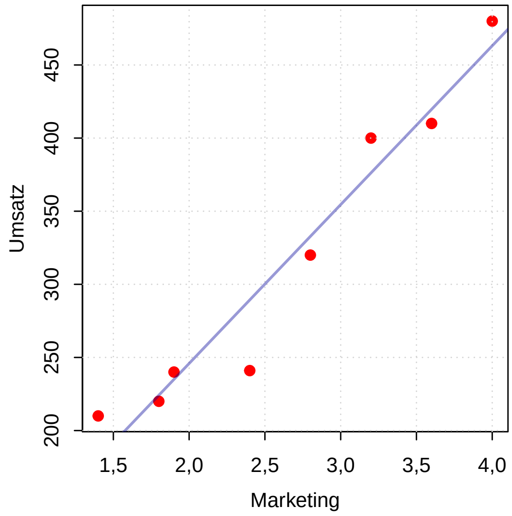
a)
```r
Marketing = c(1.4, 1.8, 1.9, 2.4, 2.8, 3.2, 3.6, 4)
Umsatz = c(210, 220, 240, 241, 320, 400, 410, 480)
Regression = lm(Umsatz ~ Marketing)
plot(Marketing, Umsatz, pch = 20, col = "red", cex = 1.5)
grid()
abline(Regression, col = rgb(0, 0, 0.6, 0.4), lwd = 2)

# Bravais-Pearson:
cor(Marketing, Umsatz)

## [1] 0,97048

# Rangkorrelation:
cor(Marketing, Umsatz, method = "spearman")

## [1] 1
```



b)
```
a = Regression$coefficients[1]
b = Regression$coefficients[2]
```

Modell: $\hat{y} = 28{,}63 + 108{,}624 \cdot x$
Determinationskoeffizient: $R^2 \approx 0{,}94183$

Aufgabe 52

Von einer Firma sind über mehrere Jahre hinweg die Umsätze und die Beschäftigtenzahlen bekannt:

Jahr t:	1	2	3	4	5	6
Umsatz x_t (in Millionen €):	60	55	57	61	65	62
Anzahl y_t der Beschäftigten:	1000	1100	960	840	800	700

a) Berechnen Sie den Variationskoeffizienten des Umsatzes.
b) Berechnen Sie den Rangkorrelationskoeffizienten von Spearman zwischen den beiden Merkmalen Umsatz und Beschäftigtenzahl.
c) Berechnen Sie die Regressionsgerade $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}t$ der Beschäftigtenzahl in Abhängigkeit von der Zeit. Mit welcher Anzahl der Beschäftigten ist im Jahr 8 zu rechnen?

Lösungshinweis:

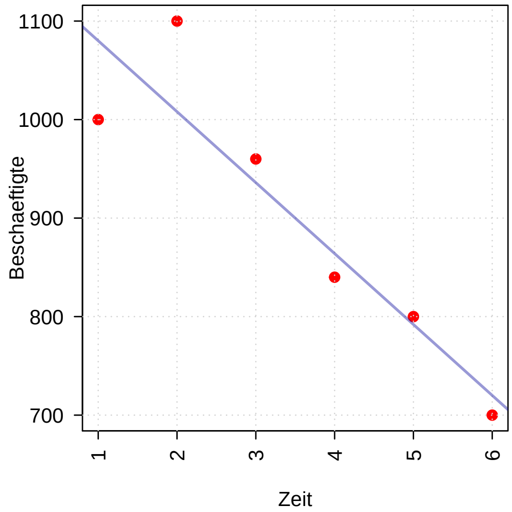
a)
```
Umsatz = c(60,55,57,61,65,62)
Beschaeftigte = 100 * c(10, 11, 9.6, 8.4, 8, 7)
m = mean(Umsatz)              # arithm. Mittel
s = sqrt(mean((Umsatz-m)^2))  # Standardabweichung
V = s/m                       # Variationskoeffizient
V

## [1] 0,054433
```

b) Rangkorrelationskoeffizient
```
# Rangkorrelation
cor(Umsatz, Beschaeftigte, method = "spearman")

## [1] -0,88571
```

c)
```
Zeit = 1:6
Regression = lm(Beschaeftigte ~ Zeit)
plot(Zeit, Beschaeftigte, pch = 20, col = "red", cex = 1.5,
    las = 2)
grid()
abline(Regression, col = rgb(0, 0, 0.6, 0.4), lwd = 2)
a = Regression$coefficients[1]
b = Regression$coefficients[2]
```



Modell: $\hat{y} = 1152 + -72 \cdot x$
Prognose: $y(8) = 1152 + -72 \cdot 8 = 576$

Aufgabe 53

Das Jahreseinkommen einiger Fußballnationalspieler ist zusammen mit der Anzahl der Tore, die sie in Länderspielen für Deutschland erzielen konnten in folgender Tabelle dargestellt:

Spieler Nummer	Jahreseinkommen [in Mio. €]	Anzahl Tore
1	1,1	0
2	0,8	1
3	2,3	3
4	4,2	3
5	1,7	1
6	0,9	0
7	3,7	4
8	0,7	1
9	2,8	2

a) Stellen Sie ein lineares Regressionmodell der Toranzahl in Abhängigkeit vom Spielereinkommen auf.

b) Geben Sie den Determinationskoeffizienten an und interpretieren Sie ihn.

c) Wieviel Tore würden Sie nach diesem Modell bei einem Einkommen von 10 Mio. erwarten?

d) Wieviel Tore müsste nach diesem Modell ein Spieler mehr schießen, wenn er 1 Mio. € mehr verdient?

Lösungshinweis:

a) Rangkorrelationskoeffizient

```
Einkommen = c(1.1, 0.8, 2.3, 4.2, 1.7, 0.9, 3.7, 0.7, 2.8)
Tore = c(0, 1, 3, 3, 1, 0, 4, 1, 2)

Regression = lm(Tore ~ Einkommen)
a = Regression$coefficients[1]
b = Regression$coefficients[2]
```

Es ergibt sich: $\hat{y} = -0{,}218 + 0{,}932 \cdot x$

b)
```
R.Quadrat = (cor(Tore, Einkommen))^2
```

Determinationskoeffizient: $R^2 = 0{,}7438$. Damit sind ca. 74 % der Streuung (Informationsgehalt) der gegebenen Daten durch das Modell erklärbar.

c) Für ein Einkommen von 10 ergibt sich: $\hat{y}(10) \approx -0{,}218 + 0{,}932 \cdot 10 \approx 9{,}103$.

d) Pro Million zusätzlichem Einkommen erhöht sich laut Modell die Toranzahl um $b \approx 0{,}932$, also fast um 1 Tor.

Kombinatorik

Aufgabe 54

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, 5 Buchstaben aus den 26 Buchstaben des Alphabets nebeneinander zu legen, wenn Wiederholungen zulässig bzw. nicht zulässig sind?

Lösungshinweis:

- Mit Wiederholungen: $26^5 = 11881376$
- Ohne Wiederholungen: $\dfrac{26!}{(26-5)!} = 7893600$

Aufgabe 55

Bei der Beurteilung der Klangqualität von 10 Lautsprecher-Boxen ist in der Weise zu verfahren, dass die Tester jeweils zwei Boxen durch aufeinander folgendes Anhören miteinander vergleichen. Um die Objektivität der Tester zu überprüfen, soll auch jede Box mit sich selbst in der angegebenen Weise verglichen werden. Wie viele Hörvergleiche sind durchzuführen, wenn es auf die Reihenfolge, in der zwei Boxen angehört werden, nicht ankommt?

Lösungshinweis:

Mit Wiederholung, ohne Reihenfolge, $n = 10, k = 2$:

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{11}{2} = 55$$

Aufgabe 56

Ein Kartenspiel mit 32 verschiedenen Karten soll so unter 4 Spieler aufgeteilt werden, dass jeder genau 8 Karten erhält.

a) Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es?
b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, dass ein bestimmter Spieler alle vier Asse erhält?
c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, dass einer der Spieler alle vier Asse erhält?
d) Bilden Sie den Quotienten des Ergebnisses von c) und a) und interpretieren Sie den erhaltenen Wert.

Lösungshinweis:

a) $\binom{32}{8} \cdot \binom{24}{8} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8} \approx 9{,}95611 \times 10^{16}$

b) $\underbrace{\binom{4}{4} \cdot \binom{28}{4}}_{\text{Anz.M. 1. Spieler 4 Asse}} \cdot \binom{24}{8} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8} \approx 1{,}93806 \times 10^{14}$

c) $\underbrace{\binom{4}{4} \cdot \binom{28}{4}}_{\text{Anz.M. 1. Spieler 4 Asse}} \cdot \binom{24}{8} \cdot \binom{16}{8} \cdot \binom{8}{8} \cdot 4 \approx 7{,}75225 \times 10^{14}$

d) $\dfrac{\text{Antwort aus c)}}{\text{Antwort aus a)}} \approx 0{,}00779$

Aufgabe 57

Gegeben seien die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

a) Wie viele dreistellige Zahlen können daraus gebildet werden, wenn jede Ziffer höchstens einmal vorkommen darf?
b) Wie viele der so gebildeten Zahlen sind gerade, wie viele ungerade?
c) Wie viele dieser Zahlen sind durch 5 teilbar?
d) Wie viele dieser Zahlen sind kleiner als 200 bzw. größer als 500?

Lösungshinweis:

a) $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$
b) $7 \cdot 8 \cdot 4 = 224$
c) $7 \cdot 8 \cdot 1 = 56$
d) Kleiner als 200: $1 \cdot 8 \cdot 7 = 56$, größer als 500: $5 \cdot 8 \cdot 7 = 280$

Aufgabe 58

Wie viele Möglichkeiten gibt es, im Zahlenlotto „6 aus 49“ genau 3, 4, 5, beziehungsweise 6 richtige Zahlen anzukreuzen?

Lösungshinweis:

richtig angekreuzt	Anzahl Möglichkeiten
3	$\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3} = 246820$
4	$\binom{6}{4} \cdot \binom{43}{2} = 13545$
5	$\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1} = 258$
6	$\binom{6}{6} \cdot \binom{43}{0} = 1$

Aufgabe 59

Eine Statistik-Klausur bestehe aus insgesamt 10 Aufgaben mit den (absteigend sortierten) Punktzahlen

$$22, 20, 16, 12, 12, 10, 8, 8, 8, 6\,.$$

Die Bearbeitung der einzelnen Aufgaben sei in beliebiger Reihenfolge zulässig.

a) Wie viele unterschiedliche Anordnungen (unterschiedliche Bearbeitungsreihenfolgen) gibt es, wenn alle Aufgaben bearbeitet werden?

b) Wie viele unterschiedliche Anordnungen (unterschiedliche Auswahlen der Aufgaben sowie unterschiedliche Bearbeitungsreihenfolgen) gibt es, wenn nur 5 Aufgaben bearbeitet werden?

c) Eine Studentin verfolgt die Strategie, die Aufgaben in absteigender Reihenfolge der erreichbaren Punktzahlen zu bearbeiten. Haben mehrere Aufgaben eine übereinstimmende Punktzahl, wählt Sie irgendeine Anordnung dieser Aufgaben. Wie viele unterschiedliche Bearbeitungsreihenfolgen zur Bearbeitung aller Aufgaben bleiben bei dieser Strategie möglich?

Lösungshinweis:

a) $10! = 3628800$ Möglichkeiten.

b) $\dfrac{10!}{(10-5)!} = 30240$ Möglichkeiten.

c) $2! \cdot 3! = 12$ Möglichkeiten.

Wahrscheinlichkeitstheorie

Aufgabe 60

W-Theorie: Laplace-Wahrscheinlichkeit (1)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit viermaligem Werfen eines Würfels

a) viermal 6
b) keine 6
c) mindestens eine 6
d) der Reihe nach 6,6,6,5
e) dreimal 6 und einmal 5
f) genau die Augensumme 7
g) mindestens zweimal die gleiche Zahl

zu erhalten?

Lösungshinweis:

$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ mit } x_i = 1, \ldots, 6\} \quad \Rightarrow \quad \left|\Omega\right| = 6^4 = 1296$

a) $A = \{(6,6,6,6)\} \quad \Rightarrow \quad |A| = 1 \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{1296} \approx 0{,}00077$

b) $P(B) = \frac{5^4}{6^4} \approx 0{,}48225$

c) $P(C) = 1 - P(B) \approx 0{,}51775$

d) $P(D) = P(A)$

e) $P(E) = \frac{4}{1296} \approx 0{,}00309$

f)

1, 1, 1, 4	: 4 Permutationen
1, 1, 2, 3	: $\frac{4!}{2!} = 12$ Perm.
1, 2, 2, 2	: 4 Perm.
Summe	: 20 Möglichkeiten

$P(F) = \frac{20}{1296} = 0{,}01543$

g) $P(G) = 1 - P(\text{„Alle vier sind unterschiedlich“}) = 1 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4} = \frac{13}{18} \approx 0{,}72222.$

Aufgabe 61

In einem Raum befinden sich n Personen, von denen niemand am 29. Februar Geburtstag hat. Nehmen Sie weiterhin an, dass Sie selbst auch nicht am 29. Februar Geburtstag haben.

a) Sei $n = 3$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei der drei Personen am gleichen Tag (Tag und Monat) Geburtstag haben?
b) Wie viele Leute müssen sich im Raum befinden, so dass die Wahrscheinlichkeit mindestens 50 % beträgt, dass mindestens zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben?
c) Sei $n = 100$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens noch eine Person am selben Tag Geburtstag hat wie Sie selbst?
d) Wie viele Personen müssen sich im Raum befinden, so dass die Wahrscheinlichkeit mindestens 50 % beträgt, dass mindestens noch eine Personen am gleichen Tag Geburtstag hat wie Sie selbst?

Lösungshinweis:

```
P.1 = function(n){1- prod(365:(365-n+1)/365)}
P.2 = function(n){1- (364/365)^n}
```

a) $P(3) = P(\text{„Mind. zwei von drei am gleichen Tag Geburtstag“})$
$= 1 - P(\text{„alle an verschiedenen Tagen Geburtstag“})$
$$= 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363}{365^3} = 0{,}0082$$

b) n Leute: $P(n) = 1 - \dfrac{365!}{(365-n)!} \cdot \dfrac{1}{365^n}$

```
options(digits=5)
n=1:20
df = data.frame(n,        P=sapply(n, P.1),
                n21=n+20, P=sapply(n+20, P.1),
                n41=n+40, P=sapply(n+40, P.1),
                n61=n+60, P=sapply(n+60, P.1))
print(df, row.names=FALSE)
```

```
##   n         P n21     P.1 n41     P.2 n61     P.3
##   1 0,0000000  21 0,44369  41 0,90315  61 0,99509
##   2 0,0027397  22 0,47570  42 0,91403  62 0,99591
##   3 0,0082042  23 0,50730  43 0,92392  63 0,99660
##   4 0,0163559  24 0,53834  44 0,93289  64 0,99719
##   5 0,0271356  25 0,56870  45 0,94098  65 0,99768
##   6 0,0404625  26 0,59824  46 0,94825  66 0,99810
##   7 0,0562357  27 0,62686  47 0,95477  67 0,99844
##   8 0,0743353  28 0,65446  48 0,96060  68 0,99873
##   9 0,0946238  29 0,68097  49 0,96578  69 0,99896
##  10 0,1169482  30 0,70632  50 0,97037  70 0,99916
##  11 0,1411414  31 0,73045  51 0,97443  71 0,99932
##  12 0,1670248  32 0,75335  52 0,97800  72 0,99945
##  13 0,1944103  33 0,77497  53 0,98114  73 0,99956
##  14 0,2231025  34 0,79532  54 0,98388  74 0,99965
##  15 0,2529013  35 0,81438  55 0,98626  75 0,99972
##  16 0,2836040  36 0,83218  56 0,98833  76 0,99978
##  17 0,3150077  37 0,84873  57 0,99012  77 0,99982
##  18 0,3469114  38 0,86407  58 0,99166  78 0,99986
##  19 0,3791185  39 0,87822  59 0,99299  79 0,99989
##  20 0,4114384  40 0,89123  60 0,99412  80 0,99991
```

Also: Ab 23 ist P größer als 50 %.

c) $n = 100: \quad P(\text{c})) = 1 - \dfrac{364^{100}}{365^{100}} = 0{,}23993$

d) $1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n \geq 0{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(364) - \ln(365)} \approx 252{,}65199$, also müssen mind. 253 Leute (außer Ihnen) noch im Raum sein.

Aufgabe 62

Ein dreimotoriges Flugzeug stürzt ab, wenn der Hauptmotor in der Mitte ausfällt oder beide Seitenmotoren ausfallen. Es wird angenommen, dass jeder der Flugzeugmotoren mit der Wahrscheinlichkeit p auf einem bestimmten Flug ausfällt. Ferner wird angenommen, dass der Ausfall eines Motors unabhängig vom Verhalten der anderen Motoren erfolgt.

A bezeichne das Ereignis, dass ein Flugzeug dieses Typs infolge von Motorversagen abstürzt.

a) Ist die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ größer oder kleiner als p? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

b) Bestimmen Sie $P(A)$ für $p = 0{,}01$.

Lösungshinweis:

$H \equiv$ Hauptmotor fällt aus, $S_{1/2} \equiv$ Seitenmotor 1 bzw. 2 fällt aus.

a) $P(A) = P(H \cup (\overline{H} \cap S_1 \cap S_2)) = p + (1-p) \cdot p \cdot p > p.$

b) $p = 0{,}01$: $P(A) = 0{,}01 + 0{,}99 \cdot 0{,}01^2 = 0{,}0101$

Aufgabe 63

Ein Kraftfahrzeughändler weiß aus langjähriger Erfahrung, dass bei den in Zahlung genommenen Wagen 50% Mängel am Motor, 70% an der Karosserie und 30% an Motor und Karosserie aufweisen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein in Zahlung genommener Wagen

a) ohne Mängel an Motor und Karosserie ist,
b) auch einen Mangel am Motor besitzt, wenn bekannt ist, dass die Karosserie schadhaft ist?

Lösungshinweis:

Abkürzungen: (M)otormangel; (K)arosserieschaden.

Gegeben: $P(M) = 0{,}5, \quad P(K) = 0{,}7, \quad P(M \cap K) = 0{,}3.$

Damit ergibt sich:

	K	$\overline{K}$	
M	0,30	0,20	0,50
$\overline{M}$	0,40	0,10	0,50
	0,70	0,30	

a) $P\left(\overline{M} \cap \overline{K}\right) = 0{,}10$

b) $P\left(M|K\right) = \dfrac{P(M \cap K)}{P(K)} = \dfrac{0{,}3}{0{,}7} = \dfrac{3}{7} \approx 0{,}42857$

Aufgabe 64

Alexandra, Bernhard und Claudio sind als heilige drei Könige verkleidet von Haus zu Haus unterwegs. Bei jedem Haus lassen Sie den Zufall entscheiden, wer von den dreien ein Gedicht aufsagen darf. Dazu würfeln sie jeweils vorher einmal mit einem fairen Würfel. Alexandra sagt das Gedicht, wenn eine 1 fällt, Bernhard bei einer 2 oder 3 und Claudio darf bei 4, 5 oder 6 rezitieren. Alexandra sagt das Gedicht mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % perfekt (mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % ist mindestens ein kleiner Fehler dabei), Bernhard sagt das Gedicht mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % perfekt auf, Claudio mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 %.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird das Gedicht bei einem beliebigen Haus perfekt zum Vortrag gebracht?

b) Frau Maier erzählt am Tag nach dem Besuch der drei Ihrer Nachbarin, dass sich bei Ihr ein Sternsinger beim Gedicht ganz schön verhaspelt hätte. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Bernhard das Gedicht bei Frau Maier aufgesagt?

Lösungshinweis:

Abkürzungen: $A \,\hat{=}$ Alexandra sagt das Gedicht, analog (B)ernhard bzw. (C)laudio.
$F \,\hat{=}$ Gedicht mit Fehler aufgesagt.

Gegeben: $P(A) = 1/6, \quad P(B) = 2/6, \quad P(C) = 3/6,$
$P(F|A) = 0{,}2, \quad P(F|B) = 0{,}1, \quad P(F|C) = 0{,}05$

a)
$$\begin{aligned} P(\overline{F}) &= 1 - P(F) \\ &= 1 - \left[P(F|A)\cdot P(A) + P(F|B)\cdot P(B) + P(F|C)\cdot P(C)\right] \\ &= 1 - \left[0{,}2\cdot 1/6 + 0{,}1\cdot 2/6 + 0{,}05\cdot 3/6\right] \\ &= 1 - \tfrac{4+4+3}{120} \\ &= \tfrac{109}{120} \approx 0{,}90833 \end{aligned}$$

b)
$$P(B|F) = \frac{P(B\cap F)}{P(F)} = \frac{P(F|B)\cdot P(B)}{P(F)} = \frac{0{,}1\cdot 2/6}{11/120} = \frac{4}{11} \approx 0{,}36364.$$

Aufgabe 65

In der Stadt D wird im Mittel zu 10 % schwarz gefahren. 70 % der Schwarzfahrer haben keine Fahrkarte, während die anderen 30 % gefälschte oder illegal besorgte Karten besitzen. Von den ehrlichen Fahrgasten haben im Mittel 5 % ihre Fahrkarte vergessen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein kontrollierter Fahrgast, der keine Karte vorzeigen kann, ein Schwarzfahrer?

Lösungshinweis:

Abkürzungen: (S)chwarzfahrer; zeigt (K)arte.

Gegeben: $P(S) = 0{,}1, \quad P\left(\overline{K}|S\right) = 0{,}7, \quad P(K|S) = 0{,}3,$
$P\left(\overline{K}|\overline{S}\right) = 0{,}05$

Lösung:

$$\begin{aligned} P\left(S|\overline{K}\right) &= \frac{P\left(\overline{K}|S\right) \cdot P(S)}{P\left(\overline{K}\right)} = \frac{P\left(\overline{K}|S\right) \cdot P(S)}{P\left(\overline{K}|S\right) \cdot P(S) + P\left(\overline{K}|\overline{S}\right) \cdot P\left(\overline{S}\right)} \\ &= \frac{0{,}7 \cdot 0{,}1}{0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}05 \cdot 0{,}9} = \frac{14}{23} \approx 0{,}6087 \end{aligned}$$

Aufgabe 66

10.000 Flugreisende, die aus einem südlichen Land nach Deutschland einreisen werden auf eine ansteckende tropische Krankheit getestet. Ein positiver Test deutet auf eine Erkrankung hin, allerdings nicht sicher. 9 Leute, bei denen der Test positiv ausgefallen ist sind tatsächlich krank. 9899 Leute mit negativem Testergebnissen sind nicht krank. Insgesamt war der Test bei 9900 Untersuchten negativ. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer beliebig unter diesen 10.000 Flugreisenden ausgewählten Person

a) Der Test positiv ausfällt,
b) die Person krank ist,
c) die Person gesund ist, obwohl der Test positiv ausgefallen ist,
d) der Test positiv ausfällt, wenn bekannt ist, dass die Person gesund ist.

Lösungshinweis:

Abkürzungen: Test ist (p)ositiv; Person hat (K)rankheit.

Gegeben: $P(K \cap p) = 0{,}0009, \quad P\left(\overline{p} \cap \overline{K}\right) = 0{,}9899, \quad P\left(\overline{p}\right) = 0{,}99.$

Damit ergibt sich:

	p	$\overline{p}$	
K	0,0009	0,0001	0,001
$\overline{K}$	0,0091	0,9899	0,999
	0,01	0,99	

a) $P(p) = 1 - 0{,}99 = 0{,}01$
b) $P(K) = 0{,}001$
c) $P\left(\overline{K}|p\right) = \dfrac{0{,}0091}{0{,}01} = 0{,}91$
d) $P\left(p|\overline{K}\right) = \dfrac{0{,}0091}{0{,}999} \approx 0{,}00911$

Aufgabe 67

Geben Sie zu den Ereignissen A, B die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ an, wenn

a) $A \subset B$,
b) $B \subset A$,
c) $A = \Omega$,
d) $B = \Omega$,
e) $A \cap B = \{\}$.

Lösungshinweis:

a) $\dfrac{P(A)}{P(B)}$,
b) $\dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$,
c) $\dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$,
d) $\dfrac{P(A)}{1} = P(A)$,
e) $\dfrac{P\left(\{\}\right)}{P(B)} = 0$.

Aufgabe 68

Ein Schießbudenbesitzer hat festgestellt, dass die Trefferwahrscheinlichkeit in den späten Abendstunden 0,1 pro Schuss beträgt.

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, bei 5 Schüssen mindestens 2 Treffer zu erzielen? R
b) Wie viele Schüsse sind notwendig, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,9 mindestens einen Treffer zu erzielen?

Lösungshinweis:

$X \hat{=}$ Anzahl Treffer bei 5 Schüssen. Damit gilt: $X \sim \mathrm{B}(n = 5;\ p = 0{,}1)$

a) $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 0{,}0815.$
mit R:

```
1 - pbinom(1, size = 5, prob = 0.1)

## [1] 0,08146
```

b) $Y \hat{=}$ Anzahl Treffer bei n Schüssen; damit
$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^n = 1 - 0{,}9^n \geq 0{,}9$
$\Leftrightarrow 0{,}9^n \leq 0{,}1 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \dfrac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}9} \approx 21{,}85435$, also mindestens 22 Schuss sind nötig

Aufgabe 69

Eine binomialverteilte Zufallsvariable X habe einen Erwartungswert von 2 und eine Varianz von 4/3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für x=2?

Lösungshinweis:

Aufgabe 70

Im Laufe eines Jahres werden von 52 aufeinanderfolgenden Ausgaben einer wöchentlich erscheinenden Zeitschrift 11 beliebige Ausgaben mit einer bestimmten Annonce versehen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Leser von 20 beliebigen (aber verschiedenen) Ausgaben

a) zwei Ausgaben
b) keine Ausgabe
c) 20 Ausgaben
d) sämtliche 11 Ausgaben
e) mindestens eine Ausgabe

mit einer Annonce erhält?

Lösungshinweis:

$X \hat{=}$ Anzahl der Zeitschriften mit der Annonce, $X \sim \text{Hyp}(M = 11, N = 52, n = 20)$

a) $P(X = 2) = \frac{\binom{11}{2}\binom{41}{18}}{\binom{52}{20}} \approx 0{,}0882275$
b) $P(X = 0) = \frac{\binom{11}{0}\binom{41}{20}}{\binom{52}{20}} \approx 0{,}002136$
c) Das geht nicht, also $P(X = 20) = 0$.
d) $P(X = 11) = \frac{\binom{11}{11}\binom{41}{9}}{\binom{52}{20}} \approx 0{,}0000028$
e) $P(X \geq 1) = 1 - P(\text{„Teilaufgabe b)“}) = 0{,}997864$

Lösung in R:

```
a = dhyper(x=2, m=11, n=41, k=20)
b = dhyper(x=0, m=11, n=41, k=20)
c = dhyper(x=20, m=11, n=41, k=20)
d = dhyper(x=11, m=11, n=41, k=20)
e = 1 - dhyper(x=0, m=11, n=41, k=20)
print(data.frame(Aufgabe=c("a", "b", "c", "d", "e"),
                 Ergebnis=round(c(a,   b,   c,   d,   e), 7)),
      row.names=FALSE)

##  Aufgabe  Ergebnis
##        a 0,0882275
##        b 0,0021360
##        c 0,0000000
##        d 0,0000028
##        e 0,9978640
```

Aufgabe 71

Unter den 20 Passagieren eines Charterfluges befinden sich zwei Bewaffnete, die das Flugzeug entführen wollen. Zehn Passagiere werden zufällig ausgewählt und genau untersucht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden Bewaffneten unentdeckt bleiben?

Lösungshinweis:

$X \hat{=}$ Anzahl der entdeckten Bombenleger, $X \sim \text{Hyp}(M = 2, N = 20, n = 10)$

$$P(X = 0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{18}{10}}{\binom{20}{10}} \approx 0{,}2368421$$

Lösung in R:

```
P = dhyper(x = 0, m = 2, n = 18, k = 10)
P

## [1] 0,2368421
```

Aufgabe 72

Das Rechenzentrum der Hochschule habe festgestellt, dass während einer Betriebszeit von einem Tag mit der Wahrscheinlichkeit 0,905 kein Ausfall des Systems zu verzeichnen ist. Die Anzahl der Systemausfälle sei Poisson-verteilt.

a) Bestimmen Sie den Parameter λ der Poisson-Verteilung.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Tag genau zwei Systemausfälle zu verzeichnen sind?
c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es bei 5 gleichartigen Systemen, die unabhängig voneinander laufen, zu mindestens einem Ausfall am Tage kommt.

R

Lösungshinweis:

a) $X \hat{=}$ „Anzahl Ausfälle“ $\Rightarrow X \sim P(\lambda)$
$P(X=0) = \frac{\lambda^0}{0!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} = 0{,}905 \Leftrightarrow \lambda = -\ln 0{,}905 \approx 0{,}09982$

b) $P(X=2) = \frac{\lambda^2}{2!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} \approx 0{,}00451$

R

```
lambda = -log(0.905)
pb = dpois(2, lambda = lambda)
pb

## [1] 0,0045088
```

c) $Y \hat{=}$ „Anzahl Systeme mit mind. einem Ausfall“
$\Rightarrow Y \sim B(n=5,\, p = P(X \geq 1) = 1 - 0{,}905 = 0{,}095)$
$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \binom{5}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^5 = 1 - 0{,}905^5 \approx 0{,}39292$

Aufgabe 73

In einer Online-Redaktion weiß man, dass ein Webredakteur gemessen am output sehr wenige sprachliche Fehler produziert. Im Durchschnitt werden drei Fehler pro Monat festgestellt. Die Anzahl der Fehler pro Monat kann als Poisson-verteilt angenommen werden und ist jeweils unabhängig von den anderen Monaten.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

a) dass der Redakteur mehr als 9 Fehler pro Monat begeht,

b) für mehr als 3 Fehler, wenn man weiß, dass er schon 2 Fehler gemacht hat,

c) dass er während eines Jahres in mindestens 3 Monaten keinen Fehler produziert?

R

Lösungshinweis:

$X \mathrel{\hat{=}}$ „Anzahl der Fehler pro Monat“, also $X \sim P(\lambda = 3)$

a) $P(X > 9) = 1 - P(X \leq 9) \approx 1 - 0{,}9989 \approx 0{,}0011$

b) $P(X > 3 | X \geq 2) = \dfrac{P(X > 3)}{P(X \geq 2)} = \dfrac{1 - P(X \leq 3)}{1 - P(X \leq 1)} = \dfrac{1 - 0{,}64723}{1 - 0{,}19915} \approx 0{,}44049$

c) $Y \mathrel{\hat{=}}$ „Anzahl der Monate ohne Fehler in einem Jahr“, also $Y \sim B\big(n = 12; p = P(X = 0)\big)$, wobei $p = \frac{3^0}{0!} \cdot \mathrm{e}^{-3} \approx 0{,}04979$. Damit gilt:

$$
\begin{aligned}
P(Y \geq 3) = 1 - P(Y \leq 2) &= 1 - \big[P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)\big] \\
&= 1 - \Big[\tbinom{12}{0} p^0 (1-p)^{12} + \tbinom{12}{1} p^1 (1-p)^{11} + \tbinom{12}{2} p^2 (1-p)^{10}\Big] \\
&\approx 1 - \big[0{,}54182 + 0{,}34067 + 0{,}09817\big] \approx 0{,}01935
\end{aligned}
$$

R

```r
Pa = 1 - ppois(9, lambda = 3)                        # Teilaufgabe a)
Pb = (1-ppois(3,lambda = 3)) / (1-ppois(1,lambda = 3)) # Teil b)
p = dpois(0, lambda = 3)                             # in c) benutzt
Pc = 1 - pbinom(2, size = 12, prob = p)              # Ergebnis c)
```

```r
c(Pa, Pb, p, Pc)

## [1] 0,0011025 0,4404912 0,0497871 0,0193476
```

Aufgabe 74

Die Gesamtdauer X eines Projektes wird als normalverteilt mit dem Parameter $\mu = 10$ (Wochen) angenommen. Ferner wird für die Wahrscheinlichkeit $P(8 \leq X \leq 12)$ der Wert 0,8 geschätzt. Man bestimme den Parameter σ.

Lösungshinweis:

$$P(8 \leq X \leq 12) = F(12) - F(8) = \Phi\left(\frac{12-10}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{8-10}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)\right)$$

$$= 2\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) - 1 = 0.8$$

$$\Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right) = 0.9$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{\sigma} \approx 1{,}28 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = \frac{2}{1{,}28} \approx 1{,}5625$$

$x_1 \backslash x_2$	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1	0.84134	0.84375	0.84614	0.84850	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Aufgabe 75

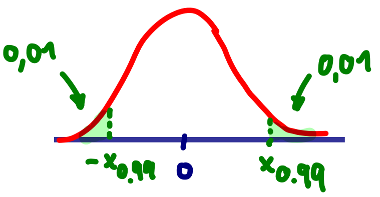
Eine normalverteilte Zufallsvariable X soll untersucht werden. Zwei Tatsachen sind von X bekannt:

- $P(X > 20) = 20\%$
- $P(X < 1) = 1\%$

Bestimmen Sie damit:

a) $\mathrm{Sta}[X] = \sigma$ sowie $\mathrm{E}[X] = \mu$
b) $P(X = 20)$
c) $P(X \leq 20)$
d) $P(X \geq 25)$
e) $P(X \geq 25 | X \geq 20)$
f) $P(X \geq 20 | X \geq 25)$

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$



a) $\left.\begin{array}{l} P(X>20) = 0.2 \\ P(X<1) = 0.01 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 1-F(20) = 0.2 \\ F(1) = 0.01 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 1-\Phi\left(\frac{20-\mu}{\sigma}\right) = 0.2 \\ \Phi\left(\frac{1-\mu}{\sigma}\right) = 0.01 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Phi\left(\frac{20-\mu}{\sigma}\right) = 0.8 \\ \Phi\left(\frac{\mu-1}{\sigma}\right) = 0.99 \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} 20-\mu = 0.84\cdot\sigma \quad (1) \\ \mu - 1 = 2{,}33\cdot\sigma \quad (2) \end{array}\right\}$ $(1)+(2)$: $19 = (0.84+2{,}33)\sigma$

$\Rightarrow \sigma = 5{,}9937$

$\Rightarrow \mu = 2{,}33\cdot\sigma + 1 = 14{,}965$

b) $P(X=20) = 0$

c) $P(X \leq 20) = 1 - 0.2 = 0.8$

d) $P(X \geq 25) = 1 - \Phi\left(\frac{25-14{,}965}{5{,}9937}\right) = 1 - \Phi(1{,}67) = 1 - 0.95254 = 0{,}04746$

e) $P(X \geq 25 | X \geq 20) = 0{,}04746 / 0.20 = 0{,}2373$

f) $P(X \geq 20 | X \geq 25) = 1$

Aufgabe 76

Schokoladennikoläuse mit einem Sollgewicht von 200g sollen bzgl. ihres Gewichts kontrolliert werden. Es stellt sich heraus, dass

- das Gewicht X der Nikoläuse normalverteilt ist,
- die Wahrscheinlichkeit, dass ein Nikolaus mindestens 200g wiegt bei 30 % liegt und
- ein Nikolaus mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % höchstens 210g wiegt.

Berechnen Sie bzw. geben Sie ohne Rechnung aber mit Begründung an:

a) Wie groß ist die Standardabweichung σ sowie der Erwartungswert μ von X?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zufällig einen Nikolaus mit einem Gewicht von exakt 200g ($\pm$0g) auszuwählen?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Nikolaus weniger als 190g wiegt?

d) Nikoläuse mit weniger als 195g werden aussortiert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Nikolaus aus diesem Ausschuss zwischen 190g und 195g wiegt?

Lösungshinweis:

a) $X \sim N(\mu;\sigma)$

$$\left.\begin{array}{l} P(X \geq 200) = 0.30 \\ P(X \leq 210) = 0.99 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 1 - F(200) = 0.30 \\ F(210) = 0.99 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} F(200) = 0.70 \\ F(210) = 0.99 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Phi\left(\frac{200-\mu}{\sigma}\right) = 0.70 \\ \Phi\left(\frac{210-\mu}{\sigma}\right) = 0.99 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \frac{200-\mu}{\sigma} \approx 0.52 \\ \frac{210-\mu}{\sigma} \approx 2{,}33 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 200 - \mu = 0.52 \cdot \sigma & (1) \\ 210 - \mu = 2.33 \cdot \sigma & (2) \end{array}$$

$(2) - (1)$: $\quad 10 = (2.33 - 0.52)\,\sigma$

$\Leftrightarrow \quad \sigma = \frac{10}{1.81} \approx 5{,}525$

in (2): $\quad \mu = 210 - 2.33 \cdot 5.525 = 197{,}13$

b) $P(X = 200) = 0$

c) $P(X < 190) = F(190) = \Phi\left(\frac{190 - 197{,}13}{5{,}525}\right)$

$\approx \Phi(-1{,}29) = 1 - \Phi(1{,}29) \approx 1 - 0.90147$

$= 0{,}09853$

d) $P(190 \leq X \leq 195 \mid X \leq 195) = \frac{P(190 \leq X \leq 195)}{P(X \leq 195)}$

$= \frac{F(195) - F(190)}{F(195)} = 1 - \frac{F(190)}{F(195)} \overset{c)}{=} 1 - \frac{0.09853}{\Phi\left(\frac{195 - 197{,}13}{5{,}525}\right)}$

$= 1 - \frac{0.09853}{1 - \underbrace{\Phi(+0.39)}_{0.65173}} = 1 - 0.09853 : 0.34827 \approx 0.717$

$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$x_1 \backslash x_2$	0	0.01	0.02	0.03
0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381
1	0.84134	0.84375	0.84614	0.84850
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320
2	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010

Aufgabe 77

Die zufallsabhängige Nachfrage X nach einem Gut in einer Zeitperiode ist gemäß der folgenden Wahrscheinlichkeitsfunktion verteilt:

$$P(x = n) = \frac{n}{40} \quad \text{für } n = 1, \dots, 8 \quad \text{und} \quad P(x = 9) = \frac{1}{10}$$

a) Skizzieren Sie den Verlauf der Wahrscheinlichkeitsfunktion.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden mindestens 6 Stück des Gutes nachgefragt?

c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Nachfrage.

Lösungshinweis:

Aufgabe 78

Die Lebensdauer einer Maschine sei eine über dem Zeitintervall [0,65] gleichverteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie

a) den Erwartungswert der Lebensdauer
b) die Varianz der Lebensdauer
c) die Wahrscheinlichkeit, dass die Lebensdauer zwischen 13 und 39 liegt.

Lösungshinweis:

Aufgabe 79

Eine Unternehmung sieht sich auf dem Absatzmarkt zufällig schwankender Nachfrage gegenübergestellt. Die Höhe der Nachfrage X sei folgendermaßen verteilt:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}, & \text{für } 0 \leq x \leq 12 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Produktion der Unternehmung wird unmittelbar abgesetzt, d.h. es existieren keine Absatzlager. Die Kostenfunktion der Unternehmung lautet $Y = 2X + 10$. Man gebe den Erwartungswert und die Varianz der Kosten an.

Lösungshinweis:

Aufgabe 80

Für eine Zufallsvariable X sei die Wahrscheinlichkeit $P(|X - 10| \geq 2{,}5)$ mit p^* abgekürzt.

Berechnen Sie p^* für die Fälle, daß X

a) im Intervall $[5; 15]$ gleichverteilt ist
b) einer $N(\mu; \sigma)$–Verteilung mit $\mu = 10$ und $\sigma^2 = 4$ genügt
c) die Werte 3, 6, 9, 12, 15 jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 0,2 annimmt
d) Poisson–verteilt ist mit dem Parameter $\lambda = 10$.

Empfehlung: Veranschaulichen Sie den Bereich $\{x \in \mathbb{R} : |x - 10| \geq 2{,}5\}$ auf einer Zahlengeraden.

Lösungshinweis:

Aufgabe 81

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der möglichen Tore der deutschen Nationalmannschaft bei Länderspielen. Es kommen nur die folgenden Ergebnisse mit den angegebenen Wahrscheinlichkeiten vor:

x	0	1	2	3	4
$\mathrm{P}(X = x)$	0,4	0,5	0,07	0,025	0,005

Wie groß ist der

a) Erwartungswert von X,

b) die Varianz und die Standardabweichung von X und

c) $P\left(|X - \mathrm{E}[X]| \leq \mathrm{Sta}[X]\right)$?

Lösungshinweis:

Aufgabe 82

Die Zufallsvariablen X und Y haben die nebenstehende gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion. Man berechne

x \ y	0	1	2
1	0,1	0,2	0,3
2	0,2	0	0,2

a) die Randverteilungen, Erwartungswerte und Varianzen für X und Y,
b) die Kovarianz und Korrelation zwischen X und Y.

Lösungshinweis:

Aufgabe 83

Man betrachte die Klausurergebnisse in Mathematik (Zufallsvariable X) und Statistik (Zufallsvariable Y). Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion der zweidimensionalen Zufallsvariablen (X, Y) sei durch die folgende Tabelle gegeben:

$x \downarrow$	$y \rightarrow$ 1	2	3	4	5
1	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00
2	0,04	0,10	0,03	0,02	0,01
3	0,02	0,08	0,20	0,08	0,02
4	0,01	0,02	0,04	0,10	0,03
5	0,00	0,01	0,03	0,03	0,03

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten
   (i) in Mathematik zu bestehen und in Statistik nicht zu bestehen
   (ii) in beiden Klausuren zu bestehen
   (iii) in beiden Klausuren nicht zu bestehen
   (iv) in beiden Klausuren besser als 3 zu erhalten
   (v) in beiden Klausuren zwischen 2 und 4 zu erreichen.

b) Geben Sie die Randwahrscheinlichkeits- und Randverteilungsfunktionen an.

c) Sind die beiden Zufallsvariablen unabhängig?

d) In Mathematik erzielen Beate, Peter, Helga und Bernd die Noten 1, 2, 3 und 4. Wie sehen für diese vier Kandidaten die Notenchancen bei der Statistikklausur aus?

Lösungshinweis:

Induktive Statistik

Aufgabe 84

Der Erwartungswert μ in der Grundgesamtheit soll durch die Stichprobenfunktion

$$\hat{\Theta} = \frac{1}{n}\,(X_1 + \cdots + X_n)$$

$$\hat{\Theta}' = \frac{2}{n^2}\,\sum_{i=1}^{n} i\; X_i$$

$$\hat{\Theta}'' = \frac{2}{n(n+1)}\,(X_1 + 2X_2 + \cdots + nX_n)$$

geschätzt werden. Prüfen Sie die Erwartungstreue der Schätzfunktionen und ermitteln Sie die wirksamste unter diesen.

Hinweise: Es gilt $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}\,n(n+1)$ und $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}\,n(n+1)(n+\frac{1}{2})$

Lösungshinweis:

Aufgabe 85

Gegeben sei eine einfache Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ aus einer Grundgesamtheit mit unbekanntem Erwartungswert μ. Zur Schätzung von μ wird der Einsatz von linearen Stichprobenfunktionen der folgenden Gestalt erwogen:

$$\hat{\Theta}_1 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \alpha \cdot X_n \quad \text{mit} \quad -1 \leq \alpha \leq 1$$

a) Bestimmen Sie α so, dass $\hat{\Theta}_1$ erwartungstreu für μ ist.

b) Welche Schätzfunktion ist wirksamer: Die erwartungstreue Variante von $\hat{\Theta}_1$ von Teilaufgabe a) oder eine neue Funktion $\hat{\Theta}_2$ mit

$$\hat{\Theta}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \; ?$$

Lösungshinweis:

Aufgabe 86

Bei der Prüfung der Füllmenge von Fruchtsaftflaschen ergaben sich folgende Werte:

ccm	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207
Anzahl	2	1	3	1	3	1	2	1	1	0	1

Nach Angaben des Abfüllers ist die Füllmenge normalverteilt mit einer Varianz von $\sigma^2 = 2{,}25$.

a) Man gebe ein Schätzintervall für den Erwartungswert μ zum Niveau $1 - \alpha = 0{,}94$.
b) Welcher Stichprobenumfang n garantiert eine Länge von 1 für das Schätzintervall?

Lösungshinweis:

1. Festlegen des Konfidenzniveaus $1 - \alpha$
2. Bestimmung des $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$-Fraktils c der $N(0,1)$-Verteilung
3. Berechnen des Stichprobenmittels $\bar{x}$
4. Berechnen des Wertes $\frac{\sigma c}{\sqrt{n}}$
5. Ergebnis der Intervall-Schätzung:

$$\left[\bar{x} - \frac{\sigma c}{\sqrt{n}}\ ;\quad \bar{x} + \frac{\sigma c}{\sqrt{n}}\right]$$

a) ① $1-\alpha = 0{,}94$

② $x_{0{,}97} \approx 1{,}88 = c$

③ $\bar{x} = 201$

④ $\frac{\sigma \cdot c}{\sqrt{16}} = \frac{1{,}5 \cdot 1.88}{4} = 0.705$

⑤ $KI = [200.295\ ;\ 201.705]$

b) $L = \frac{2\sigma c}{\sqrt{n}} \iff n \geq (2 \cdot \sigma \cdot c)^2 = 4 \cdot 2{,}25 \cdot 1.88^2 \approx 31{,}81$, also mind. 32

Aufgabe 87

$X_1, \ldots, X_{31}$ beschreibe eine einfache Stichprobe aus einer beliebig verteilten Grundgesamtheit. Aus den Ergebnissen wurden $\bar{x} = 9$ und $s^2 = 31/4$ errechnet. Zur Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}05$ bestimme man

a) ein Schätzintervall für den Erwartungswert μ,

b) ~~unter der Annahme, dass die Grundgesamtheit normalverteilt ist, ein Schätzintervall für die Varianz σ^2.~~

Lösungshinweis:

a) σ unbekannt, 30 Freiheitsgrade → t-Vtlg
(auch OK: Normalvtlg)

$x_{0.975} = 2.042 = c$

$$kI = \left[9 \mp \frac{\sqrt{31/4} \cdot 2.042}{\sqrt{31}} \right] = [9 \mp 1.021] = [7.979\,;\,10.021]$$

N.vtlg $[8.02\,;\,9.98]$

b) $\chi^2(30)$: $x_{0.025} = 16.79$; $x_{0.975} = 46{,}98$

$(n-1)\,s^2 = 30 \cdot 31/4 = 232{,}5$

$$kI = \left[\frac{232{,}5}{46{,}98}\,;\,\frac{232{,}5}{16.79} \right] = [4{,}949\,;\,13{,}848]$$

```
# Aufgabe 51 (Konfidenzintervall)

# a)
c = qt(1-(0.05)/2, 30)
delta = sqrt(31/4)*c/sqrt(31)
m = 9
KI = c(m-delta, m+delta)
KI

# b)
c1 = qchisq(0.025, 30)
c2 = qchisq(0.975, 30)
z  = 30*31/4
KI = c(z/c2, z/c1)
KI
```

Aufgabe 88

Ein Barista dosiert in einer Espressobar die Menge Kaffeepulver in Gramm bei 10 zufällig ausgewählten Espressobezügen folgendermaßen:

7.3	8.2	7.0	9.2	8.1	6.9	7.1	8.5	9.0	8.5

Berechnen Sie für diesen Barista ein Konfidenzintervall für die Varianz der Kaffeemenge pro Espresso zum Konfidenzniveau 0,95.

Lösungshinweis:

Aufgabe 89

In einem Spielkasino werden Zweifel geäußert, dass ein bestimmter Würfel fair ist, d.h. alle Zahlen gleich häufig auftreten. Der Spielleiter fordert einen Zweifler auf, ein Signifikanzniveau α zwischen 0,01 und 0,40 anzugeben, zu dem die Hypothese H_0, dass der Würfel fair ist, getestet werden soll. Welches α wird der Zweifler wählen, wenn er möchte, dass der Würfel aus dem Spiel genommen wird?

Lösungshinweis:

Je größer das Signifikanzniveau,
desto größer der Ablehnungsbereich,
desto eher wird auch ein fairer Würfel
(als gezinkt) abgelehnt.

$\rightarrow \alpha = 0.40$

Aufgabe 90

Ein Arbeiter braucht für die Bearbeitung eines Werkstücks im Durchschnitt 7 Minuten (420 sec. $= \mu_0$). Ein Fachmann schlägt, um eine Zeitersparnis zu erreichen ($\mu < \mu_0$), eine andere Bearbeitungsart vor und will die Effektivität seines Vorschlags mithilfe einer Stichprobe vom Umfang $n = 16$ testen. Führen Sie diesen Test (Hypothese $H_0: \ \mu = \mu_0$ gegen $H_1: \ \mu < \mu_0$) zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$ bzw. $0{,}01$ durch. Dabei sei ferner vorausgesetzt, dass die Grundgesamtheit normalverteilt ist. Die Stichprobe ergab folgende Werte: $\bar{x} = 408$ und $s = 25{,}7$.

Lösungshinweis:

Test parametrisch

↓ ja

Parameter?

↓ μ

Stichprobe klein? σ unbekannt?

↓ ja

einseitig? zweiseitig?

↓ einseitig (Unterschreitung)

- t-Vtlg. mit 15 Freiheitsgraden
- $B = (-\infty ; -x_{1-\alpha})$

① $\alpha = 0.05$ $\qquad$ $\alpha = 0.01$

② $v = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n} = \frac{408-420}{25.7}\sqrt{16} = -1{,}8677$

③ $t(15)$: $x_{0.95} = 1{,}753$ $\qquad$ $x_{0.99} = 2{,}603$

④ $B = (-\infty ; -1{,}753) \Rightarrow v \in B \Rightarrow H_0$ wird verworfen

$B = (-\infty ; -2{,}603) \Rightarrow v \notin B \Rightarrow$ " nicht "

Aufgabe 91

Die Personalabteilung eines Großunternehmens hat den Verdacht, dass die Mitarbeiter die Mittagspause (maximal 1 Stunde) im Durchschnitt überziehen. Mit einer einfachen Stichprobe der Pausenlänge von 20 Mitarbeitern soll getestet werden, ob die Zeiten eingehalten werden oder ob im Mittel überzogen wird. Es ergibt sich für die Pausendauer ein Stichprobenmittel von 70 Minuten und eine Stichprobenstandardabweichung von 15 Minuten. Die Pausendauer eines Mitarbeiters kann als normalverteilte Zufallsvariable angenommen werden.

Formulieren Sie Nullhypothese und Gegenhypothese und testen Sie zum Signifikanzniveau von 5 %.

Lösungshinweis:

$H_0: \mu = 60 \quad H_1: \mu > 60$; also $v = \frac{70-60}{15}\sqrt{20} \approx 2.98$

t-Vtlg, 19 FG: $x_{0.95} = 1.729 \Rightarrow B = (1.729; \infty) \Rightarrow$ H_0 verwerfen

✓

Aufgabe 92

Angeblich sollen Studierende sich in der Nacht vor einer Klausur kürzer in der Tiefschlafphase befinden also im Durchschnitt aller Nächte. Eine einfache Stichprobe von 61 Studenten wird diesbezüglich untersucht. Im Durchschnitt wurde in dieser Stichprobe 48 Minuten Tiefschlaf in den letzten 24h vor der Klausur gemessen, mit einer Stichprobenvarianz von 196.

Bestimmen Sie ein 95 %-Konfidenzintervall für die mittlere Tiefschlaflänge aller Studierenden am Tag vor der Prüfung.

Lösungshinweis:

Normal vteg: $c = x_{0.975} \approx 1.96$

$$KI = \left[48 \pm \frac{\sqrt{196} \cdot 1.96}{\sqrt{61}}\right] = [44.487 ; 51.513]$$

✓

Aufgabe 93

Die Hochschule X möchte wissen, wie gut Ihre Sudenten über internationale aktuelle Nachrichten aus der Politik informiert sind. 40 zufällig ausgewählten Studierenden werden Fragen zu 100 Nachrichten der letzten beiden Monate gestellt. Im Durchschnitt können die Befragten 58 Fragen richtig beantworten bei einer Stichprobenstandardabweichung von 3,2.

a) Berechnen Sie ein 99 %-Konfidenzintervall für die durchschnittlich von allen Studenten der Hochschule richtig beantwortete Anzahl der Fragen.

b) Im Landesdurchschnitt aller Studenten aller Hochschulen ergeben sich 65 Punkte. Testen Sie zum Signifikanzniveau von 5 %, ob der der Durchschnitt der Punktzahl an der Hochschule X niedriger ist als im Landesdurchschnitt.

Lösungshinweis:

n>30: Normal-Vtlg

a) ~~29 Freiheitsgrade~~, ~~t-Vtlg~~

$x_{0.995} \approx 2.\cancel{756}\,58 = c$;

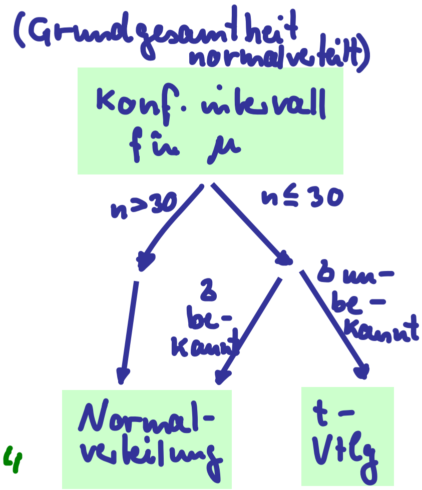
$\Rightarrow KI = [\bar{x} \mp \frac{sc}{\sqrt{n}}] = [\cancel{56.39}\ 56{,}69 ; \cancel{59.61}\ 59{,}30]$

b) $H_0: \mu = 65$ $\quad H_1: \mu < 65$;

$v = \frac{\bar{x}-\mu}{s}\sqrt{n} = \frac{58-65}{3.2}\sqrt{\cancel{30}\,40} \approx -\cancel{11.98}\ -13.835$

$x_{0.05} = -x_{0.95} = -1.\cancel{699}\ -1.64 \Rightarrow B = (-\infty ; -1.\cancel{699})\ -1.64$

$\Rightarrow H_0$ wird verworfen



σ	s
Streuung in Grundgesamtheit	Streuung in Stichprobe

Aufgabe 94

Studierende beschweren sich, dass die Klausuren in Statistik zu schwer seien. Der Dozent möchte das natürlich im Sinne der Studierenden verbessern und lässt durch das Prüfungsamt die Metallklammern der Klausuren durch eine leichtere Variante aus Kunststoff ersetzen. Die Studierenden glauben aber nicht, dass dadurch die Klausuren leichter werden. Der Dozent möchte das beweisen und zieht eine einfache Stichprobe von 10 Klausuren, bei der er folgende Gewichte misst:

65.28	65.84	64.47	63.82	66.64	62.55	65.74	64.90	65.87	65.29

Gehen Sie im folgenden davon aus, dass es sich beim Gewicht der Klausur um eine normaverteilte Zufallsvariable handelt.

a) Bestimmen Sie zum Konfidenzniveau 0,95 ein symmetrisches Schätzintervall für den Erwartungswert des Gewichts einer Klausur.

b) Mit Metallklammer hatten die Klausuren früher ein durchschnittliches Gewicht von 65,86 g. Testen Sie zum Signifikanzniveau von 5 % auf Basis der Stichprobe, ob die Klausuren jetzt leichter sind.

c) Was bedeutet bei dem Test von b) der Fehler 2. Art?

Lösungshinweis:

a) t-Verteilung mit 9 Freiheitsgraden: $c = x_{0,975} \approx 2{,}262$; $\overline{x} = 65{,}04$, $s \approx 1{,}18$. Damit:

$$\text{KI} = \left[\overline{x} \pm \frac{sc}{\sqrt{n}}\right] \approx [64{,}196;\ 65{,}884]$$

b) $\mu_0 = 65{,}\overset{86}{\cancel{68}}$ g. Also: $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu < \mu_0$. Damit:

$$v = \frac{(\overset{65.04}{\overline{x}} - \overset{65.86}{\mu_0})}{\underset{1.18}{s}} \underset{\sqrt{10}}{\sqrt{n}} \approx -2{,}1975$$

Verwerfungsbereich: $B = [-\infty; -x_{0,95}] \approx [-\infty; -1{,}833]$. Damit ist $v \in B$, die Klausuren sind also laut Test signifikant leichter geworden.

c) Einen Fehler 2. Art zu begehen würde hier bedeuten, nicht zweifelsfrei sagen zu können, dass die Klausuren leichter geworden sind, obwohl sie in Wirklichkeit im Durchschnitt leichter sind.

Aufgabe 95

Die deutsche Nationalmannschaft hat in 50 zufällig ausgewählten Länderspielen die folgenden Toranzahlen geschossen:

Anzahl der Tore pro Spiel	0	1	2	3	4
Anzahl der Spiele mit diesem Ergebnis	18	22	5	3	2

Gehen Sie im folgenden davon aus, dass die erhobenen Toranzahlen aus einer einfachen Stichprobe der Grundgesamtheit aller Länderspiele der deutschen Nationalmannschaft stammen.

a) Bestimmen Sie das 95 %-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ der Toranzahl in allen Länderspielen.

b) Die Standardabweichung der Tore pro Spiel in der Grundgesamtheit aller Länderspiele sei jetzt mit $\sigma = 1{,}0$ gegeben. Wie groß muss der Umfang einer Stichprobe sein, damit das 95 %-Konfidenzintervall für μ nicht breiter als 0,5 Tore ist?

Lösungshinweis:

a) Rechne näherungsweise mit Normalverteilung: $x_{0,975} = c \approx 1{,}959964$ $1{,}96$

TR: $\bar{x} = 0{,}98, \quad s = 1{,}039819$

KI $= [0{,}692; 1{,}268]$ $\bar{x} - \frac{sc}{\sqrt{n}} \approx 0.98 - \frac{1.0398 \cdot 1.96}{\sqrt{50}}$

b) Mit $\sigma = 1$ folgt:

$$L = 2\frac{\sigma c}{\sqrt{n}} \leq 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n} \geq 4\sigma c \quad \Rightarrow \quad n \geq 16 \cdot 1^2 \cdot c^2 \approx 61{,}46$$

also: mind. 62

Aufgabe 96

Herr Meyer betreibt einen Schnellimbiss für Vegetarier. Eines Tages wird er von einem Kunden wegen Betrugs und Etikettenschwindels verklagt. Der Kunde kann per Fotos nachweisen, dass 8 von 25 von ihm bestellten Gemüsesuppen gar nicht vegetarisch waren, da sich eine Fliege darin befand. Das Gericht verlangt auf Basis dieser als einfach akzeptierten Stichprobe einen Hypothesentest, mit dem der Anteil μ aller Gemüsesuppen mit Fliegen als über den gesetzlich zugelassenen 10 % nachgewiesen wird.

a) Ist die Approximation durch die Normalverteilung in diesem Fall gerechtfertigt?

b) Formulieren Sie H_0 sowie H_1.

c) Führen Sie den Hypothesentest zu einem Signifikanzniveau von $\alpha = 2{,}28\,\%$ durch.

Lösungshinweis:

Aufgabe 97

Herr Untermann möchte auf der Karriereleiter in seiner Firma, einem Telekommunikationsunternehmen, etwas vorankommen und schlägt deshalb folgende Maßnahme vor: Der Datendurchsatz der bisher üblichen Flatrates beim Internetzugang von Kunden soll ab einem Volumen von 1GB downloads pro Monat extrem gedrosselt werden. Die alten Konditionen können die Kunden dann optional zukaufen. Bisher hat Herr Untermanns Firma einen Marktanteil von 45 % bei dieser Art flatrates. Eine Stichprobe unter allen potentiellen Kunden vom Umfang $n = 2500$ ergab, dass immerhin noch 43% der potentiellen Kunden diese Leistung mit den verschlechterten Konditionen nachfragen wollen. Herr Untermann schließt daraus, dass sich die Kunden von der Verschlechterung der Vertragsbedingungen nicht abschrecken lassen und freut sich auf die Mehreinnahmen durch seinen Plan.

a) Formulieren Sie in diesem Szenario die Nullhypothese H_0 und die Alternative H_1.

b) Worin besteht in diesem Beispiel das Risiko, den Fehler 1. Art zu begehen?

c) Was bedeutet hier der Fehler 2. Art?

d) Würden Sie an der Stelle von Herrn Untermann ein möglichst kleines Signifikanzniveau α zugrunde legen und dadurch einen größeren Fehler 2. Art (β) in Kauf nehmen oder umgekehrt β klein halten und dabei ein größeres α zulassen?

Lösungshinweis: