Wirtschaftsmathematik

Einführung in einige Teilbereiche der Wirtschaftsmathematik

Wintersemester 2016

HSA Wing Sessionlist WS 2016				
			52	
Datum	N.	Zeit	UE	Themen
Dienstag, 20. September 2016	1	18.00-21.15	4	Einführung, Zinsen, Renten
Dienstag, 27. September 2016	2	18.00-21.15	4	Tilgung, Festverz. Wertpapiere
Dienstag, 4. Oktober 2016	3	18.00-21.15	4	Lineare Optimierung: Einführung, Lösungsmethoden
Samstag, 8. Oktober 2016	4	08.00-11.45	4	Lineare Optimierung: Standardmaximumproblem, Simplex
Dienstag, 11. Oktober 2016	5	18.00-21.15	4	Gewöhnliche Differentialgleichungen
Samstag, 15. Oktober 2016	6	08.00-11.45	4	Analytische Lösung linearer DGLs
Dienstag, 18. Oktober 2016	7	18.00-21.15	4	Einführung, univ. Statistik, Konzentration
Samstag, 22. Oktober 2016	8	11.45-15.00	4	Korrelation, Regression, Preisindizes
Dienstag, 25. Oktober 2016	9	18.00-21.15	4	Kombinatorik, Wahrscheinlichkeiten; Binomial, Hypergeo, Poisson
Samstag, 29. Oktober 2016	10	08.00-11.15	4	Zufallsvariablen, Lage- und Streuung, Stetige ZV, Gleich-vtlg.
Dienstag, 15. November 2016	11	18.00-21.15	4	Normalvtlg., Schätzen und Eigenschaften von Punktschätzern
Samstag, 26. November 2016	12	08.00-11.15	4	Konfidenzintervalle, t-Test
Dienstag, 29. November 2016	13	18.00-21.15	4	Puffer, Wiederholung Besprechung Probeklausur
Samstag, 3. Dezember 2016		09.30-11.00		Klausur (regulärer Termin 90 Min., mit Aufsicht)

Prof. Dr. Stefan Etschberger

Stundenplan

Stundenplan (Stand 15.9.2016)

KW 38 19	WIMA, B 4.02, 18:00 20	21	22	23	24	25
KW 39 26	WIMA, B 4.02, 18:00 27	28	29	30		

Oktober 2016

Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag
					KW 39 1	2
KW 40 Tag der d. Einheit 3	WIMA, B 4.02, 18:00 4	5	6	7	WIMA, B 4.02, 08:00 8	9
KW 41 10	WIMA, B 4.02, 18:00 11	12	13	14	WIMA, B 4.02, 08:00 15	16
KW 42 17	WIMA, B 4.02, 18:00 18	19	20	21	WIMA, B 4.02, 11:45 22	23
KW 43 24	WIMA, B 4.02, 18:00 25	26	27	28	WIMA, B 4.02, 08:00 29	Herbstferien 30
KW 44 Herbstferien 31						

November 2016

Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag
	KW 44 Herbstferien 1	Herbstferien 2	Herbstferien 3	Herbstferien 4	Herbstferien 5	Herbstferien 6
KW 45 7	8	9	10	11	12	13
KW 46 14	WIMA, B 4.02, 18:00 15	16	17	18	19	20
KW 47 21	22	23	24	25	WIMA, B 4.02, 08:00 26	1. Advent 27
KW 48 28	WIMA, B 4.02, 18:00 29	30				

Dezember 2016

Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag
			KW 48 1	2	WIMA, B 4.02, 08:30 Prüfungstag 3	4

Gliederung

1. Finanzmathematik
   - Zinsen
   - Renten
   - Tilgung
   - Kursrechnung
2. Lineare Programme
   - Nebenbedingungen und Zulässigkeit
   - Zielfunktion
   - Graphische Lösung
3. Differentialgleichungen
   - Einführung
   - Grundlegende Begriffe
   - Qualitative Analyse von Systemen
   - Beispiele für analytisch lösbare DGL
   - Lineare Differentialgleichungen
4. Statistik: Einführung
   - Berühmte Leute zur Statistik
   - Wie lügt man mit Statistik?
   - Gute und schlechte Grafiken
   - Begriff Statistik
   - Grundbegriffe der Datenerhebung
   - R und RStudio
5. Deskriptive Statistik
   - Häufigkeiten
   - Lage und Streuung
   - Konzentration
   - Zwei Merkmale
   - Korrelation
   - Preisindizes
   - Lineare Regression
6. Wahrscheinlichkeitstheorie
   - Kombinatorik
   - Zufall und Wahrscheinlichkeit
   - Zufallsvariablen und Verteilungen
   - Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik
   - Grundlagen
   - Punkt-Schätzung
   - Intervall-Schätzung
   - Signifikanztests

Vorlesungsbegleitende Unterlagen

- **Arbeitsmaterial**: Foliensatz, Aufgabenskript, Mitschrift auf Wunsch
- **Bücher** (unterstützend):

Bamberg, Günter, Franz Baur und Michael Krapp (2011). **Statistik**. 16. Aufl. München: Oldenbourg Verlag. ISBN: 3486702580.

Fahrmeir, Ludwig, Rita Künstler, Iris Pigeot und Gerhard Tutz (2009). **Statistik: Der Weg zur Datenanalyse**. 7. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer. ISBN: 3642019382.

Luderer, Bernd (2003). **Starthilfe Finanzmathematik. Zinsen, Kurse, Renditen**. 2. Aufl. Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden: Teubner.

Opitz, Otto (2004). **Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler**. 9. Aufl. München: Oldenbourg.

Prüfung

Klausur:

- Klausur am Ende des Semesters
- Bearbeitungszeit: 90 Minuten
- Erreichbare Punktzahl: 90
- Hilfsmittel:
  - Schreibzeug,
  - Taschenrechner, der nicht 70! berechnen kann,
  - ein Blatt (DIN-A4, vorne und hinten beschrieben) mit handgeschriebenen Notizen (keine Kopien oder Ausdrucke),

Wirtschaftsmathematik: Table of Contents

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. Differentialgleichungen
4. Statistik: Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. Wahrscheinlichkeitstheorie
7. Induktive Statistik

1. Finanzmathematik
   - Zinsen
   - Renten
   - Tilgung
   - Kursrechnung

Zinsen

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
Einfache Verzinsung
Zinseszinsen
Gemischte Verzinsung
Nominal- und Effektivzins
Stetige Verzinsung
Zeitwert
1.2. Renten
1.3. Tilgung
1.4. Kursrechnung
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

- Zinsen: Gebühr, die ein Schuldner für die befristete Überlassung von Kapital bezahlt
- Betrag der Zinsen (Z): Abhängig von Höhe des überlassenen Kapitals K, dem vereinbartem Zinssatz und der Dauer der Überlassung

Verwendete Symbole:

Symbol	Bezeichnung
K_0	Betrag zu Beginn
K_t	Betrag zum Zeitpunkt t
K_n	Endbetrag (Zeitpunkt n)
n	ganzzahlige Laufzeit
Z_t	Zinsen zum Zeitpunkt t
$i = \frac{p}{100}$	(konstanter) Zinssatz
$q = 1 + i$	Zinsfaktor
p	(Prozentzinssatz)

Einfache Verzinsung

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
Einfache Verzinsung
Zinseszinsen
Gemischte Verzinsung
Nominal- und Effektivzins
Stetige Verzinsung
Zeitwert
1.2. Renten
1.3. Tilgung
1.4. Kursrechnung
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

- Einfache (lineare) Verzinsung gemäß

$$\begin{aligned} K_n &= K_0 + Z \\ &= K_0 + K_0 \cdot i \cdot n \\ &= K_0 \cdot (1 + i \cdot n) \end{aligned}$$

- Gesetzlich vorgeschrieben für Verzugszinsen und bei Kreditgeschäften zwischen Privatpersonen (BGB, §248)
- K_0 unbekannt: Barwert K_0 über Abzinsung bzw. Diskontierung bzw. Barwertberechnung
- Amtliche Diskontierung:

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + ni}$$

- Kaufmännische Diskontierung (Nur erste Näherung):

$$K_0 = K_n(1 - ni)$$

Unterjährige einfache Verzinsung: Sparbuchmethode

- Sparbuchmethode: Einteilung des Zinsjahres in 12 Monate zu je 30 Tagen,
- Maximal: 360 Zinstage pro Jahr
- Dadurch Berechnung von Monats- bzw. Tageszinsen möglich
- Dazu: Berechnung des Bruchteils eines Zinsjahres über die Anzahl der Zinstage $t \in \{0, 1, \dots, 360\}$
- Regeln: Einzahlungstag wird komplett verzinst, Auszahlungstag gar nicht
- Daraus ergibt sich

$$K_n = K_0 + K_0 \cdot i \cdot \frac{t}{360} = K_0 \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)$$

Die Zinseszinsformel

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
Einfache Verzinsung
Zinseszinsen
Gemischte Verzinsung
Nominal- und Effektivzins
Stetige Verzinsung
Zeitwert
1.2. Renten
1.3. Tilgung
1.4. Kursrechnung
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

- Während Laufzeit Zinszahlungen mit sofortiger Wiederanlage und Verzinsung zum Zinssatz i
- Entwicklung des Kapitals:

$$\begin{aligned}
K_1 &= K_0 + K_0 \cdot i = K_0 \cdot (1 + i) = K_0 \cdot q \\
K_2 &= K_1 \cdot (1 + i) = (K_0 \cdot q) \cdot q = K_0 \cdot q^2 \\
K_3 &= K_2 \cdot (1 + i) = \left(K_0 \cdot q^2\right) \cdot q = K_0 \cdot q^3 \\
&\dots
\end{aligned}$$

- Damit: Zinseszinsformel, mit n (zunächst) ganzzahlig.

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

- q^n heißt Aufzinsungfaktor

Die Zinseszinsformel

Auflösung der Zinseszinsformel nach K_0, q und n:

$$K_0 = K_n q^{-n}$$

- Abzinsungs- oder Diskontierungsformel
- q^{-n} heißt Abzinsungsfaktor

$$q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} \quad \text{bzw.} \quad i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

$$n = \frac{\ln K_n - \ln K_0}{\ln q}$$

Gemischte Verzinsung

- Üblich: Einfache Verzinsung bei Restlaufzeiten kleiner einem ganzzahliges Vielfachen der Zinsperiode
- Genauer: Mit
  - Δt_1 (Anzahl Zinstage im ersten Jahr),
  - n (die weiteren, ganzen Zinsperioden) und
  - Δt_2 (Zinstage im letzten Jahr),

  gilt für das Endkapital K_x:

$$K_x = K_0 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{\Delta t_1}{360}\right) \cdot (1+i)^n \cdot \left(1 + i \cdot \frac{\Delta t_2}{360}\right)$$

- Gemischte Zinsrechnung unter Verwendung der Sparbuchmethode zur Bestimmung der Anzahl der Zinstage

Gemischte Verzinsung: Beispiel

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
Einfache Verzinsung
Zinseszinsen
Gemischte Verzinsung
Nominal- und Effektivzins
Stetige Verzinsung
Zeitwert
1.2. Renten
1.3. Tilgung
1.4. Kursrechnung
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Beispiel

Am 15.9.2016 wurden € 12 000 zu 3,75 % angelegt. Wie hoch ist der Endbetrag bei Kontoauflösung am 21.9.2023 (letzter Zinstag 20.9.2023)?

Lösung:

$$15.9. \;\widehat{=}\; (9-1)\cdot 30 + 15 = 255$$
$$\Rightarrow \Delta t_1 = 360 - (255-1) = 106$$

$$20.9. \;\widehat{=}\; (9-1)\cdot 30 + 20 = 260$$
$$\Rightarrow \Delta t_2 = 260$$

$(n = 6)$:

$$K_x = 12\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 106}{360}\right) \cdot 1{,}0375^6 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 260}{360}\right)$$
$$= 15\,541{,}20$$

Gemischte Verzinsung: Anmerkungen

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
Einfache Verzinsung
Zinseszinsen
Gemischte Verzinsung
Nominal- und Effektivzins
Stetige Verzinsung
Zeitwert
1.2. Renten
1.3. Tilgung
1.4. Kursrechnung
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

- Würde man – von t_0 ausgehend – in ganze Jahre und einem Rest aufteilen, so ergäbe sich:

  $$K_x = 12\,000 \cdot 1{,}0375^7 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 6}{360}\right) = 15\,537{,}08$$

  (7 Jahre von 15.9.16 bis 14.9.23; dazu 6 Tage)

- Würde man die **Zinseszinsformel** mit nicht-ganzzahligem Exponenten verwenden, so ergäbe sich Folgendes:

  $$K_x = 12\,000 \cdot 1{,}0375^{7+\frac{6}{360}} = 15\,536{,}90$$

- Gemischte Verzinsung ist also (zumindest für Kapitalanleger) verbraucherfreundlich

Gemischte Verzinsung: Anmerkungen

Nachteil der gemischten Verzinsung

- Die gemischte Verzinsung ist inkonsistent und vom Zeitpunkt des Zinszuschlages (bzw. der Einzahlung) abhängig.
- Im Beispiel: Wäre der Zeitraum um einen Monat verschoben (vom 15.10.16 bis zur Auflösung am 21.10.23), so ergäbe sich …

$$
\begin{aligned}
K_x &= 12\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 76}{360}\right) \cdot 1{,}0375^6 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 290}{360}\right) \\
&= 15\,540{,}31
\end{aligned}
$$

Die Widersprüche verschwinden, wenn eine unterjährige Verzinsung zum konformen Zinssatz vorgenommen wird.

Unterjährige Verzinsung

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
Einfache Verzinsung
Zinseszinsen
Gemischte Verzinsung
Nominal- und Effektivzins
Stetige Verzinsung
Zeitwert
1.2. Renten
1.3. Tilgung
1.4. Kursrechnung
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

- Abrechnung und Zahlung von Zinsen nicht jährlich, sondern in kürzeren Abständen
- Dazu: m gleich lange Zinsperioden pro Jahr
- Typische Aufteilungen: $m = 2, 4, 12$ Zinsperioden
- Annahme: Laufzeit n in Jahren sei (aus Vereinfachungsgründen) ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{1}{m}$ (z.B. $m = 2$, $n = 1{,}5$ oder $m = 12$, $n = 1{,}25$).

Bei m Zinsabschnitten pro Jahr heißt gegeben, so heißt:

- der Zins i oder i_{nom} der nominelle Jahreszins oder Jahreszins,
- $i_{\text{rel}} = \frac{i}{m}$ der relative Periodenzins,
- i_{kon} der zu i konforme Periodenzins, mit dem die periodische Verzinsung über i_{rel} zum selben Ergebnis führt wie die jährliche Verzinsung mit i.

$$
(1 + i_{\text{kon}})^m = (1 + i)
$$

Unterjährige Verzinsung

Betrachte den relativen Periodenzinsen $i_{\text{rel}} = \frac{i}{m}$, so heißt:

- i der nominelle Jahreszins
- i_{eff} der effektive Jahreszins, wenn jährliche Verzinsung mit i_{eff} zum selben Ergebnis führt wie periodische Verzinsung mit i_{rel}. (Entsprechendes gilt für q_{rel}, $q$kon, q_{eff}).

$$K_1 = K_0 \cdot q_{\text{rel}}^m = K_0 \cdot q_{\text{eff}}$$
$$\Rightarrow q_{\text{eff}} = q_{\text{rel}}^m$$

$$\text{mit } q_{\text{rel}} = 1 + i_{\text{rel}} = 1 + \frac{i}{m}$$

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
Einfache Verzinsung
Zinseszinsen
Gemischte Verzinsung
Nominal- und Effektivzins
Stetige Verzinsung
Zeitwert
1.2. Renten
1.3. Tilgung
1.4. Kursrechnung
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Unterjährige Verzinsung: Formel

- Damit: Effektivzins q_{eff} ist

$$\boxed{q_{\text{eff}} = (1 + i_{\text{rel}})^m = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m}$$

- Endkapital K_n ist:

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot (1 + i_{\text{rel}})^{m \cdot n} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}}$$

- **Anmerkung**: $m \cdot n$ muss nach o.g. Bedingungen ganzzahlig sein.

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
Einfache Verzinsung
Zinseszinsen
Gemischte Verzinsung
Nominal- und Effektivzins
Stetige Verzinsung
Zeitwert
1.2. Renten
1.3. Tilgung
1.4. Kursrechnung
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Beispiel zur unterjährigen Verzinsung

Beispiel

Ein Betrag von 10 000 € soll zu 5 % nominal bei monatlicher Verzinsung angelegt werden. Welcher Betrag kann nach 16 Monaten entnommen werden? Wie hoch ist der Effektivzins?

Lösung:

Mit $i = 5\,\%$, $m = 12$ und $m \cdot n = 16$ gilt:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n} = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}05}{12}\right)^{16} = 10\,687{,}91\,€$$

Effektiver Jahreszins:

$$i_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{0{,}05}{12}\right)^{12} - 1 = 5{,}12\,\%$$

Beispiel zur unterjährigen Verzinsung mit dem konformen Zinssatz

- Widersprüche der gemischten Verzinsung verschwinden, wenn eine unterjährige Verzinsung mit dem konformen Zinssatz gemäß den Richtlinien für den internationalen Wertpapierhandel (ISMA – International Securities Market Association) vorgenommen wird.

Beispiel

Am 15.9.2016 (15.10.2016) wurden 12 000 € zu **effektiv** 3,75 % angelegt. Wie hoch ist der Endbetrag bei Kontoauflösung am 21.9.2023 (21.10.2023)?

Lösung

- Verwendung des konformen Zinses auf täglicher Basis,
- also $q_{\text{kon}} = \sqrt[360]{1{,}0375} = 1{,}0375^{\frac{1}{360}}$
- $K_n = 12\,000 \cdot 1{,}0375^{\frac{106}{360}} \cdot 1{,}0375^{6} \cdot 1{,}0375^{\frac{260}{360}} = 15\,536{,}90$
- alternativ: $K_n = 12\,000 \cdot 1{,}0375^{\frac{76}{360}} \cdot 1{,}0375^{6} \cdot 1{,}0375^{\frac{290}{360}} = 15\,536{,}90$

Stetige Verzinsung

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
Einfache Verzinsung
Zinseszinsen
Gemischte Verzinsung
Nominal- und Effektivzins
Stetige Verzinsung
Zeitwert
1.2. Renten
1.3. Tilgung
1.4. Kursrechnung
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

- Lässt man $m \to \infty$ wachsen, so erhält man aus der obigen Formel

$$K_n = \lim_{m\to\infty} K_0 \left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n} = K_0 \left[\lim_{m\to\infty} \left(\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}\right)\right]^n = K_0 \left(e^i\right)^n$$

- die Formel für die stetige Verzinsung:

$$K_n = K_0 \cdot e^{i\cdot n}$$

- Für den effektiven Jahreszinssatz gilt damit:

$$i_{\text{eff}} = e^i - 1$$

- Anwendung stetiger Wachstumsprozesse:
  - Ökonomie (Bevölkerungswachstum),
  - Physik (radioaktiver Zerfall),
  - BWL (Portfolio- und Kapitalmarkttheorie)

Beispiel zur stetigen Verzinsung

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
Einfache Verzinsung
Zinseszinsen
Gemischte Verzinsung
Nominal- und Effektivzins
Stetige Verzinsung
Zeitwert
1.2. Renten
1.3. Tilgung
1.4. Kursrechnung
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Beispiel (überzogenes Girokonto)

$K_0 = 10\,000$ €, $n = 5$, nominaler Jahreszins $i = 0{,}19$. Wie hoch ist K_n und p_{eff} bei stetiger Verzinsung?

Lösung:

$$K_n = K_0 \cdot e^{i\cdot n} = 10\,000 \cdot e^{0{,}19\cdot 5} = 25\,857{,}10\,€$$

$$i_{\text{eff}} = e^{0{,}19} - 1 = 20{,}925\,\%$$

Anmerkungen

- Bei Variation von m ergeben sich:

m	1	2	4	12	∞
p_{eff}	5	19,903	20,397	20,745	20,925

- Die stetige Verzinsung wird z.B. in der Portfoliotheorie verwendet, da sie mathematisch einfacher zu handhaben ist als die diskrete Verzinsung.

Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik

- Das Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik für Vergleich von Zahlungen, welche zu verschiedenen Zeitpunkten anfallen.

Vereinfachende Annahmen:

- Zinseszinsliche Verzinsung
- Zahlungen stets am Anfang oder am Ende einer Zinsperiode

Prinzip

- Vergleich von 2 oder mehreren zu verschiedenen Zeitpunkten anfallende Geldbeträge: Beziehen auf den gleichen Zeitpunkt durch geeignetes Auf- oder Abzinsen.
- Wahl des Zeitpunktes dabei unerheblich.
- Meist: Zeitpunkt $t = 0$ oder $t = n$ (Ende der Laufzeit)
  - $t = 0$ den Anfang des ersten Zinszeitraums („heute“).
  - $t = 1$ Beginn des 2. Zinszeitraums (1.1. des 2. Jahres).
  - $t = 2$ Beginn des 3. Zinszeitraums (1.1. des 3. Jahres).
  - $t = n$ Ende des letzen Zinszeitraumes (31.12. des n-ten Jahres)

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
Einfache Verzinsung
Zinseszinsen
Gemischte Verzinsung
Nominal- und Effektivzins
Stetige Verzinsung
Zeitwert
1.2. Renten
1.3. Tilgung
1.4. Kursrechnung
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Äquivalenzprinzip: Herleitung

- Zwei Zahlungen, A im Zeitpunkt t_A und B im Zeitpunkt t_B, sind dann gleichwertig ($A \sim B$), wenn ihre Zeitwerte in jedem Zeitpunkt t übereinstimmen.

Beispiel

Gegeben: $A = 10\,000$, $t_A = 2$, $p = 7\%$
Gesucht: B mit $t_B = 5$ so, dass $A \sim B$.

Lösung:

$$B = 10\,000 \cdot 1{,}07^{(5-2)} = 12\,250{,}43\ €$$

Eine Zahlung von € $12\,250{,}43$ nach 5 Jahren ist also gleichwertig zu einer Zahlung von € $10\,000$ nach 2 Jahren. Der Barwert („Wert heute“) beider Zahlungen ist übrigens
$10\,000 \cdot 1{,}07^{-2} = 12\,250{,}43 \cdot 1{,}07^{-5} = 8\,734{,}39$ [€].

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
Einfache Verzinsung
Zinseszinsen
Gemischte Verzinsung
Nominal- und Effektivzins
Stetige Verzinsung
Zeitwert
1.2. Renten
1.3. Tilgung
1.4. Kursrechnung
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Zahlungsströme, Barwert, Endwert

- Ein Zahlungsstrom $(A_0, \dots, A_n)$ ist eine Folge von Zahlungen mit Zahlungszeitpunkten $t = 0, \dots, n$.
- Summe aller auf $t = 0$ abgezinsten Zahlungen (Kapitalwert):

$$K_0 = \sum_{t=0}^{n} \frac{A_t}{q^t} = \sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{-t}$$

- Summe aller auf $t = n$ abgezinsten Zahlungen (Endwert):

$$K_n = \sum_{t=0}^{n} q^n \frac{A_t}{q^t} = \sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{n-t}$$

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
Einfache Verzinsung
Zinseszinsen
Gemischte Verzinsung
Nominal- und Effektivzins
Stetige Verzinsung
Zeitwert
1.2. Renten
1.3. Tilgung
1.4. Kursrechnung
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Gleichheit zweier Zahlungsströme

Zwei Zahlungsströme (A_t), (B_t), $t = 0, \dots, n$ sind genau dann äquivalent, wenn sie zu einem beliebigen Zeitpunkt T den gleichen Zeitwert besitzen:

$$\begin{aligned}
(A_t) \sim (B_t) \quad &\Leftrightarrow & \textstyle\sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{T-t} &= \textstyle\sum_{t=0}^{n} B_t \cdot q^{T-t} \\
&\Leftrightarrow & q^T \textstyle\sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{-t} &= q^T \textstyle\sum_{t=0}^{n} B_t \cdot q^{-t} \\
&\Leftrightarrow & \textstyle\sum_{t=0}^{n} (A_t - B_t) \cdot q^{-t} &= 0
\end{aligned}$$

$$(A_t) \sim (B_t) \;\Leftrightarrow\; \sum_{t=0}^{n} (A_t - B_t)\, q^{-t} = 0$$

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
Einfache Verzinsung
Zinseszinsen
Gemischte Verzinsung
Nominal- und Effektivzins
Stetige Verzinsung
Zeitwert
1.2. Renten
1.3. Tilgung
1.4. Kursrechnung
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Investitionsrechnung: Beispiel

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
Einfache Verzinsung
Zinseszinsen
Gemischte Verzinsung
Nominal- und Effektivzins
Stetige Verzinsung
Zeitwert
1.2. Renten
1.3. Tilgung
1.4. Kursrechnung
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Beispiel

Kalkulationszinssatz gleich 5 %. Welches Projekt ist zu bevorzugen?

Jahr t	0	1	2	3	4	5
A_t	0	1000	0	1000	0	1000
B_t	400	400	400	600	600	600

Lösung: Kapitalwert von (A_t):

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{5} A_t \cdot 1{,}05^{-t} &= 0 \cdot 1{,}05^0 + 1000 \cdot 1{,}05^{-1} + 0 \cdot 1{,}05^{-2} + 1000 \cdot 1{,}05^{-3} \\ &\quad + 0 \cdot 1{,}05^{-4} + 1000 \cdot 1{,}05^{-5} \\ &= 2599{,}74\end{aligned}$$

Kapitalwert von (B_t):

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{5} B_t \cdot 1{,}05^{-t} &= 400 \cdot 1{,}05^0 + 400 \cdot 1{,}05^{-1} + 400 \cdot 1{,}05^{-2} + 600 \cdot 1{,}05^{-3} \\ &\quad + 600 \cdot 1{,}05^{-4} + 600 \cdot 1{,}05^{-5} \\ &= 2625{,}80\end{aligned}$$

Alternative B ist der Alternative A vorzuziehen.

Rentenrechnung

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
1.2. Renten
Unterjährige Renten
Ewige Renten
1.3. Tilgung
1.4. Kursrechnung
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Definition

Rente: Zahlungsstrom mit Zahlungen in gleichen zeitlichen Abständen und (meistens) in konstanter Höhe

Unterscheidung zwischen Renten

- mit Zahlung am Ende einer Rentenperiode (nachschüssig)
- mit Zahlung zu Beginn einer Rentenperiode vorschüssig)

- mit endlicher Laufzeit (endliche Renten)
- mit unendlicher Laufzeit (ewige Renten)

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
1.2. Renten
Unterjährige Renten
Ewige Renten
1.3. Tilgung
1.4. Kursrechnung
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Rentenrechnung: Symbole

Symbol	Bezeichnungen
r_t	Rentenrate in Periode t
n	Laufzeit $(t = 1, \ldots, n)$
m	Anzahl der Rentenzahlungen pro Zinsperiode
q	Zinsfaktor
R_0	Barwert der Rente
R_n	Endwert der Rente

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
1.2. Renten
Unterjährige Renten
Ewige Renten
1.3. Tilgung
1.4. Kursrechnung
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Nachschüssige konstante (endliche) Renten

Rentenzahlung jeweils am Ende einer Zinsperiode, jeweils in Höhe von

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_n = \text{const.} = r$$

$\Rightarrow$ Rentenendwert R_n:

$$\begin{aligned} R_n &= r \cdot q^{n-1} + r \cdot q^{n-2} + \ldots + r \cdot q + r \\ &= r \cdot \left(q^{n-1} + \cdot q^{n-2} + \ldots + q + 1\right) \\ &= r \cdot \sum_{t=0}^{n-1} q^t \qquad \text{(geometrische Reihe)} \\ &= r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \end{aligned}$$

Rentenendwert und Rentenbarwert

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
1.2. Renten
Unterjährige Renten
Ewige Renten
1.3. Tilgung
1.4. Kursrechnung
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

- Endwert R_n der Rente:

$$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r \cdot \text{NREF}_{p,n}$$

- NREF: Nachschüssiger Rentenendwertfaktor für endliche konstante Rente.
- Barwert der Rente:

$$R_0 = R_n \cdot q^{-n} = r \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q-1)} = r \cdot \frac{q^n - 1}{q^{n+1} - q^n} = r \cdot \text{NRBF}_{p,n}$$

- NRBF: Nachschüssiger Rentenbarwertfaktor

Beispiel Rentenendwert

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
1.2. Renten
Unterjährige Renten
Ewige Renten
1.3. Tilgung
1.4. Kursrechnung
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Beispiel

Genau 10 Jahre lang wurde jeweils zum Jahresende ein Betrag von 12.000 € zum Zinssatz von 4% angelegt. Wieviel kann zu Beginn des 11. Jahres (entspricht dem Ende des 10. Jahres) abgehoben werden?

Lösung:
Mit $n = 10$, $q = 1{,}04$ und $r = 12\,000$ gilt Folgendes:

$$R_{10} = 12\,000 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04 - 1}$$

$$= 12\,000 \cdot 12{,}006107$$

$$= 144\,073{,}28 \quad [€]$$

Beispiel Rentenbarwert

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
1.2. Renten
Unterjährige Renten
Ewige Renten
1.3. Tilgung
1.4. Kursrechnung
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Beispiel

Aus welchem zum Zeitpunkt 0 eingezahlten Betrag kann 10 Jahre lang bei 4% Zins eine konstante nachschüssige Rente von 12.000 € bezahlt werden?

Lösung: Frage nach dem Barwert einer Rente. Mit $n = 10$, $q = 1{,}04$ und $r = 12\,000$ gilt:

$$\begin{aligned} R_0 &= 12\,000 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04^{11} - 1{,}04^{10}} \\ &\approx 12\,000 \cdot 8{,}110896 \\ &\approx 97\,330{,}75 \quad [€\,] \end{aligned}$$

Umformung der Rentenbar- und -endwertformel

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
1.2. Renten
Unterjährige Renten
Ewige Renten
1.3. Tilgung
1.4. Kursrechnung
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

- Je nach Fragestellung: Laufzeit n, Rentenzahlung r, Verzinsungsfaktor q .
- Rentenzahlung r:

$$r = \frac{R_0}{\text{NRBF}_{p,n}} = R_0 \cdot \frac{q^{n+1} - q^n}{q^n - 1} = \frac{R_n}{\text{NREF}_{p,n}} = R_n \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1}$$

- Laufzeit n aus R_n:

$$n = \frac{\ln\left(1 + \frac{R_n \cdot i}{r}\right)}{\ln q}$$

- Laufzeit n aus R_0:

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{R_0 \cdot i}{r}\right)}{\ln q}$$

- q aus R_0:

$$R_0 q^{n+1} - (R_0 + r)q^n + r \stackrel{!}{=} 0\,.$$

- q aus R_n:

$$r \cdot q^n - R_n \cdot q + R_n - r \stackrel{!}{=} 0\,.$$

- Berechnung von q im Allgemeinen nur näherungsweise (iterativ) möglich

Beispiel nachschüssige Rente

Beispiel

Ein Steuerberater kauft die Kanzlei eines älteren Kollegen und muss als Kaufpreis 10 Jahre lang jährlich–nachschüssig je 12.500 € zahlen. Durch welchen Betrag könnte der Steuerberater diese Zahlungsverpflichung sofort bei Vertragsabschluss ablösen, wenn mit 8% Zinsen kalkuliert wird?

Lösung: Gesucht ist der Rentenbarwert mit $r = 12\,500$, $q = 1{,}08$ und $n = 10$. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} R_0 &= 12\,500 \cdot \frac{1{,}08^{10} - 1}{1{,}08^{11} - 1{,}08^{10}} \\ &= 12\,500 \cdot 6{,}710081 \\ &= 83\,876{,}01 \quad [€\,] \end{aligned}$$

Beispiel nachschüssige Rente

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
1.2. Renten
Unterjährige Renten
Ewige Renten
1.3. Tilgung
1.4. Kursrechnung
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Beispiel

Der Barwert einer über 15 Jahre laufenden nachschüssigen Jahresrente beträgt bei 5%-iger Verzinsung 10.380 €. Wie hoch sind die jährlichen Rentenzahlungen?

Lösung: Gesucht sind die Rentenzahlungen r mit $R_0 = 10\,380$, $q = 1{,}05$ und $n = 15$. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} r &= 10\,380 \cdot \frac{1{,}05^{16} - 1{,}05^{15}}{1{,}05^{15} - 1} \\ &= 10\,380 \cdot 0{,}096342 \\ &= 1\,000{,}03 \quad [€\,] \end{aligned}$$

Vorschüssige konstante Renten

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
1.2. Renten
Unterjährige Renten
Ewige Renten
1.3. Tilgung
1.4. Kursrechnung
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

- Rentenbetrag wird jeweils zu **Beginn der Zinsperiode** in Höhe von $r_1' = r_2' = \cdots = r_n' = r'$ bezahlt.
- äquivalenzprinzip $\Rightarrow$ Endwert der Rente:
- vorschüssige Rentenzahlung $r' \sim$ nachschüssige Rentenzahlung $r \quad \Rightarrow \quad r = r'q$

$$R_n = r' \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r' \cdot \text{VREF}_{p,n}$$

- **VREF**: Vorschüssiger Rentenendwertfaktor

- Barwert der Rente:

$$\begin{aligned} R_0 &= R_n \cdot q^{-n} \\ &= r' \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q-1)} = r' \cdot \frac{q^n - 1}{q^n - q^{n-1}} = r' \cdot \text{VRBF}_{p,n} \end{aligned}$$

- **VRBF**: Vorschüssiger Rentenbarwertfaktor

Unterjährige Raten und jährliche Verzinsung

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
1.2. Renten
Unterjährige Renten
Ewige Renten
1.3. Tilgung
1.4. Kursrechnung
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Aufteilung der Zinsperiode in mehrere gleich lange Rentenperioden, d.h. m Rentenzahlungen pro Zinsperiode (= Jahr). Dazu:

- Rechnung mit einfacher Verzinsung innerhalb der Zinsperiode
- Rentenzahlungen nachschüssig (also am Ende jeder unterj. Rentenperiode) oder vorschüssig möglich

Lösung: Errechnung von konformen (gleichwertigen) jährlich nachschüssigen Ersatzzahlungen zu den m unterjährigen Zahlungen.

Definition

r_e heißt konforme jährlich nachschüssige Ersatzrentenrate einer nachschüssigen (oder vorschüssigen) unterjährigen Rentenrate r.

Konforme jährliche nachschüssige Ersatzrentenrate

Berechnung von r_e:

falls unterjährige Rente **nachschüssig**:

$$\begin{aligned} r_e &= r + r \cdot \left(1 + \frac{1}{m} \cdot i\right) \\ &\quad + r \cdot \left(1 + \frac{2}{m} \cdot i\right) \\ &\quad + \ldots \\ &\quad + r \cdot \left(1 + \frac{m-1}{m} \cdot i\right) \\ &= r \cdot m \\ &\quad + i \cdot r \cdot \frac{1}{m} \left(1 + 2 + \ldots + (m-1)\right) \end{aligned}$$

$$r_e = r \cdot \left[m + i \cdot \frac{m - 1}{2}\right]$$

falls unterjährige Rente **vorschüssig**:

$$\begin{aligned} r_e &= r \cdot \left(1 + \frac{1}{m} \cdot i\right) \\ &\quad + r \cdot \left(1 + \frac{2}{m} \cdot i\right) \\ &\quad + \ldots \\ &\quad + r \cdot \left(1 + \frac{m}{m} \cdot i\right) \\ &= r \cdot m \\ &\quad + i \cdot r \cdot \frac{1}{m} \left(1 + 2 + \ldots + m\right) \end{aligned}$$

$$r_e = r \cdot \left[m + i \cdot \frac{m + 1}{2}\right]$$

Aus Ersatzrentenrate r_e: Weiterrechnen mit Formeln für jährliche nachschüssige Rente

Beispiel konforme Ersatzrentenraten

Beispiel

Ein Sparer legt monatliche nachschüssig 1.000 € auf ein Konto. Wie hoch ist der Kontostand nach 10 Jahren bei einem Zinssatz von 4%?

Lösung: Gesucht ist der Rentenendwert auf Basis der konformen Rentenraten. Mit $n = 10$, $m = 12$, $q = 1{,}04$ und $r = 1\,000$ ergibt sich Folgendes:

$$R_{10} = 1\,000 \cdot \underbrace{\left[12 + \frac{0{,}04 \cdot 11}{2}\right]}_{12{,}22} \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04 - 1}$$

$$= 12\,220 \cdot 12{,}006107 = 146\,714{,}63$$

Beim Zinssatz von $i = 4\%$ kann eine monatlich nachschüssige Rente von 1.000 € durch eine jährlich nachschüssige Rentenzahlung von 12.220 € gleichwertig ersetzt werden. Der Kontostand nach 10 Jahren beträgt $146\,714{,}63$ €.

Ewige Renten

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
1.2. Renten
Unterjährige Renten
Ewige Renten
1.3. Tilgung
1.4. Kursrechnung
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

- Eine Rente heißt ewige Rente, wenn Anzahl n der Ratenzahlungen nicht begrenzt, n also beliebig groß wird ($n \to \infty$).
- Berechnung des Rentenendwertes dann nicht möglich
- Rentenbarwert R_0 existiert jedoch:

$$
\begin{aligned}
R_0 &= \lim_{n\to\infty} (r \cdot \text{NRBF}) = r \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \\
&= r \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{q^n}}{q - 1} \right) = r \cdot \frac{1}{q - 1} = \frac{r}{i}
\end{aligned}
$$

- Damit: Rentenbarwert einer nachschüssigen ewigen Rente:

$$\boxed{R_0 = \frac{r}{i}}$$

Ewige Renten: Beispiel

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
1.2. Renten
Unterjährige Renten
Ewige Renten
1.3. Tilgung
1.4. Kursrechnung
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Beispiel

Wie groß ist der Barwert einer ewigen nachschüssigen Rente von 40.000 € pro Jahr, wenn der Zins bei 8% liegt?

Lösung:

$$R_0 = \frac{40\,000}{0{,}08} = 500\,000$$

- Anmerkung: Geht man von einer vorschüssigen ewigen Rente aus, so ergibt sich für den Rentenbarwert:

$$R_0 = r' + \frac{r'}{i}$$

Tilgungsrechnung

- Rückzahlung oder Tilgung größerer Darlehen oft in mehreren Raten
- Hier betrachtet: Tilgung in mehreren Teilbeträgen, in konstanten Zeitabständen
- Jede zu bezahlende Rate beinhaltet Zinsen und Tilgung
- Verwendete Symbole:

Symbol	Bezeichnung
S	Darlehenssumme, Anfangsschuld
R_k	Restschuld nach k Jahren
n	Tilgungsdauer ($\in \mathbb{N}$)
Z_k	Zins am Ende des k-ten Jahres
T_k	Tilgungsquote am Ende des k-ten Jahres
A_k	Annuität am Ende des k-ten Jahres

- Unterscheidung zwischen Ratentilgung und Annuitätentilgung

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
1.2. Renten
1.3. Tilgung
Ratentilgung
Annuitätentilgung
1.4. Kursrechnung
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Ratentilgung

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

- Während Laufzeit sind Tilgungsquoten konstant. Daraus folgt:

$$T_k = T = \frac{S}{n}$$

- und damit:

$R_k = S - k \cdot T$	Restschuld nach k Jahren
$Z_k = R_{k-1} \cdot i$	Zins am Ende des k-ten Jahres
$A_k = Z_k + T$	Annuität am Ende des k-ten Jahres

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
1.2. Renten
1.3. Tilgung
Ratentilgung
Annuitätentilgung
1.4. Kursrechnung
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Annuitätentilgung

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
1.2. Renten
1.3. Tilgung
Ratentilgung
Annuitätentilgung
1.4. Kursrechnung
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

- Problem der Ratentilgung: Belastung anfangs hoch, später geringer
- Ausweg: Konstanthalten der Annuitäten über Rentenformel

$$A_k = A = S \cdot \frac{q^n(q-1)}{q^n - 1}$$

- Daraus ergibt sich:

$R_k = S \cdot q^k - A \dfrac{q^k - 1}{q - 1}$	Restschuld nach k Jahren
$Z_k = R_{k-1} \cdot i = A \cdot \left(1 - q^{k-n-1}\right)$	Zinsen im k-ten Jahr
$T_k = A - Z_k = A \cdot q^{k-n-1}$	Tilgung im k-ten Jahr

Kursrechnung

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
1.2. Renten
1.3. Tilgung
1.4. Kursrechnung
Emissionskurs
Duration
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Festverzinsliche Wertpapiere

- Wertpapier: Investor erwirbt für bestimmten Preis ein Recht auf Zahlungen
- Hier: Gesamtfällige festverzinsliche Wertpapiere
- Emission (Erstausgabe): Investor zahlt pro 100 € Nennwert einen Preis C_0 (Emissionskurs)
- Emittend: Zahlt während Laufzeit Zinsen (Kuponszahlung) und (meist nach Ablauf) Tilgung (Rücknahmekurs)
- Kuponzahlung: mittels nominellen Jahreszinses i^* (oder Jahreszinsfuß p^*) auf den Nennwert an Investor, meist jährlich nachschüssig
- Falls $i^* = 0$: Null-Kupon-Anleihen oder Zerobonds
- Rücknahmekurs: Tilgung in einem Betrag am Ende der Laufzeit C_n als Prozentsatz des Nennwertes
- Rendite: i_{eff} Jährlicher Effektivzins, der Leistung des Investors und des Emittenden gleichwertig macht

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
1.2. Renten
1.3. Tilgung
1.4. Kursrechnung
Emissionskurs
Duration
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Äquivalenzgleichung für Emissionskurs

$$C_0 = p^* \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q^{-n} + C_n \cdot q^{-n}$$

Dabei:

- n : Laufzeit in Jahren
- C_0 : Emissionskurs
- p^* : Nominalzinsfuß, jährliche Zinszahlung pro 100 € Nennwert
- C_n : Rücknahmekurs am Ende der Laufzeut
- $q = 1 + i_{\text{eff}}$: Effektiver Jahreszins bzw. Rendite des festverz. Wertpapiers

Anmerkungen:

- Gleichung i.a. nicht elementar nach q auflösbar
- Deswegen oft: Näherung durch Iteration (z.B. regula falsi)
- Emissionskurs $\triangleq$ mit Rendite abgezinster Kapitalwert sämtlicher zukünftiger Leistungen des Wertpapiers

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
1.2. Renten
1.3. Tilgung
1.4. Kursrechnung
Emissionskurs
Duration
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

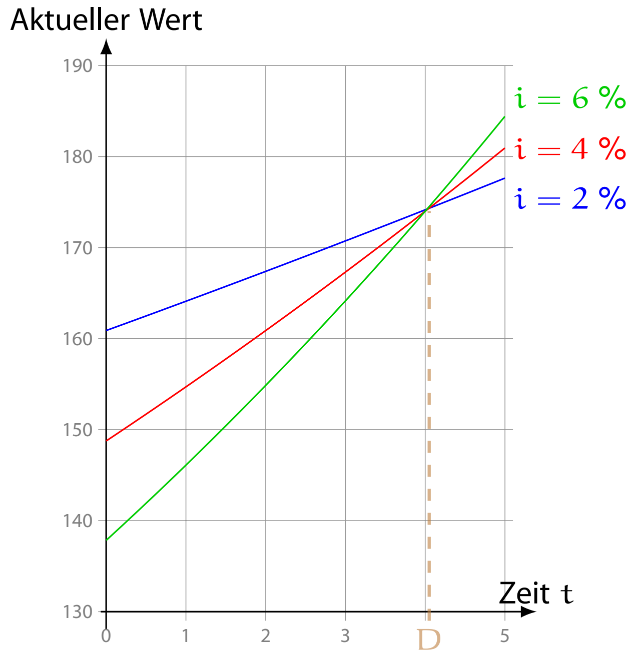
Ganzzahlige Restlaufzeiten

- Festverzinsliche Wertpapiere können meist jederzeit gehandelt werden
- Annahme zunächst: Handel nur unmittelbar nach Kuponzahlung möglich
- Gesucht: Kurs C_t für eine Restlaufzeit von t Jahren
- Lösung: Preis eines Wertpapiers ist zu jedem Zeitpunkt der Kapitalwert aller in der Restlaufzeit noch ausstehenden Leistungen
- Abgezinst wird dabei mit dem Marktzins (auch: Umlaufrendite)

$$C_t = p^* \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1} \cdot q^{-t} + C_n \cdot q^{-t}$$

Risikoanalyse – Duration

- Änderung des Marktzinses: Abhängig von Zeitpunkt Auswirkung auf aktuellen Wert des Papiers
- Fall 1 (Zins steigt): C_0 ist niedriger, aber Wiederanlage der Kuponzahlungen erbringen mehr Rendite
- Fall 2 (Zins fällt): C_0 ist höher, aber Wiederanlage der Kuponzahlungen erbringen weniger Rendite
- Vermutung: An einem (Zeit-)Punkt heben sich diese beiden Effekte auf
- Dieser Zeitpunkt heißt Duration D.



Kursrechnung

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
1.2. Renten
1.3. Tilgung
1.4. Kursrechnung
Emissionskurs
Duration
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Risikoanalyse – Duration

- Der aktuelle Wert eines Papiers $C_t(q) = q^t \cdot C_0(q)$ ändert sich also nicht bzgl. Änderungen von q, wenn $t = D$
- damit gilt für die Duration D

$$\frac{\partial C_D(q)}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\left(q^D \cdot C_0(q)\right) = D \cdot q^{D-1} C_0(q) + q^D \frac{\partial C_0(q)}{\partial q} = 0$$

- Da q^{D-1} immer positiv ist muss also für D gelten $D \cdot C_0(q) + q \cdot \frac{\partial C_0(q)}{\partial q} = 0$ und damit:

$$\boxed{D = -\frac{\partial C_0(q)}{\partial q} \cdot \frac{q}{C_0(q)} = -q \cdot \frac{C_0'(q)}{C_0(q)}}$$

- Weitere mögliche Interpretation der Duration als Bruttozinselastizität des Barwertes.

Kursrechnung

1. Finanzmathematik
1.1. Zinsen
1.2. Renten
1.3. Tilgung
1.4. Kursrechnung
Emissionskurs
Duration
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Partielle Ableitung des Kapitalwertes

- Für die Berechnung von D ist $C_0'(q)$ zu bestimmen;
- bei einem festverzinslichen Wertpapier ergibt sich so

$$C_0'(q) = -\frac{n}{q^{n+1}}\left(p * \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} + C_n\right) + \frac{p*}{q^n} \cdot \frac{n \cdot q^{n-1}(q-1) - (q^n - 1)}{(q-1)^2}$$

Varianten der Duration

- Modifizierte Duration:

$$MD = \frac{D}{q} = -\frac{C_0'(q)}{C_0(q)}$$

- Elastizität (von i):

$$\varepsilon_{C_0,i} = \frac{C_0'(i)}{C_0(i)} \cdot i = -\frac{i}{q} \cdot D = -MD \cdot i$$

Auswirkungen von Zinsänderungen

- Bei bekanntem Emissionskurs: Auswirkungen kleiner Zinsänderungen über Duration

$$C_0(i + \Delta i) \approx C_0(i) \cdot (1 - MD \cdot \Delta i)$$

Wirtschaftsmathematik: Table of Contents

1 Finanzmathematik
2 Lineare Programme
3 Differentialgleichungen
4 Statistik: Einführung
5 Deskriptive Statistik
6 Wahrscheinlichkeitstheorie
7 Induktive Statistik

2 Lineare Programme
Nebenbedingungen und Zulässigkeit
Zielfunktion
Graphische Lösung

Lineare Programe: Beispiel

Ein holzverarbeitender Betrieb möchte ein Produktionsprogramm für Spanplatten festlegen. Dabei sind folgende Restriktionen zu berücksichtigen:

- Es werden zwei Typen von Spanplatten hergestellt:

  Typ A in der Quantität x_1 für den Außenbereich und Typ B in der Quantität x_2 für den Innenbereich. Zur Herstellung der Spanplatten werden zwei Arten von Furnierblättern F_1 bzw. F_2 unterschiedlicher Qualität benutzt. Die Spanplatten werden mittels einer Presse, in der die Furniere verleimt werden, hergestellt.
- Zur Herstellung einer Platte vom Typ A wird ein Blatt von F_1 und zwei Blätter von F_2 benötigt, während bei Typ B drei Blätter von F_1 und ein Blatt von F_2 benutzt werden.
- Von F_1 bzw. F_2 stehen 1500 bzw. 1200 Stück zur Verfügung.
- Die Presse steht insgesamt 700 Minuten zur Verfügung, wobei zur Verleimung beider Plattentypen pro Stück jeweils eine Minute benötigt wird.

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
2.1. Nebenbedingungen und Zulässigkeit
2.2. Zielfunktion
2.3. Graphische Lösung
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Lineare Produktionsplanung: Beispiel

Tabellarische Darstellung der Problemdaten:

Produkt	Menge	Einheiten von F_1	Einheiten von F_2	Pressminuten pro Stück
Typ A	x_1	1	2	1
Typ B	x_2	3	1	1
Kapazitäten		1500	1200	700

Zusammenhang von Daten und Variablen durch System von linearen Ungleichungen beschreibbar:

Restriktionen:

$$\begin{array}{lrcrcrl}
(1) & x_1 & + & 3x_2 & \leqq & 1500 & (\text{Vorrat } F_1) \\
(2) & 2x_1 & + & x_2 & \leqq & 1200 & (\text{Vorrat } F_2) \\
(3) & x_1 & + & x_2 & \leqq & 700 & (\text{Kapazität Presse}) \\
(4)(5) & & & x_1, x_2 & \geqq & 0 & (\text{nicht-negative Mengen})
\end{array}$$

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
2.1. Nebenbedingungen und Zulässigkeit
2.2. Zielfunktion
2.3. Graphische Lösung
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Lineare Produktionsplanung: Beispiel, Zulässigkeitsbereich

Begriffe und Beobachtungen

- Jede (x_1, x_2)-Kombination, die alle Restriktionen (1) bis (5) erfüllt, bezeichnet man als zulässige Lösung.
- Die Menge

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^2 : \quad \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \leqq 1500; \\ 2x_1 + x_2 \leqq 1200; \\ x_1 + x_2 \leqq 700 \end{array} \right\}$$

  nennt man Zulässigkeitsbereich des Problems.
- Wegen Restriktion $x \in \mathbb{R}_+^2$: Erster Quadrant des Koordinatensystems genügt für graphische Darstellung des Zulässigkeitsbereiches.

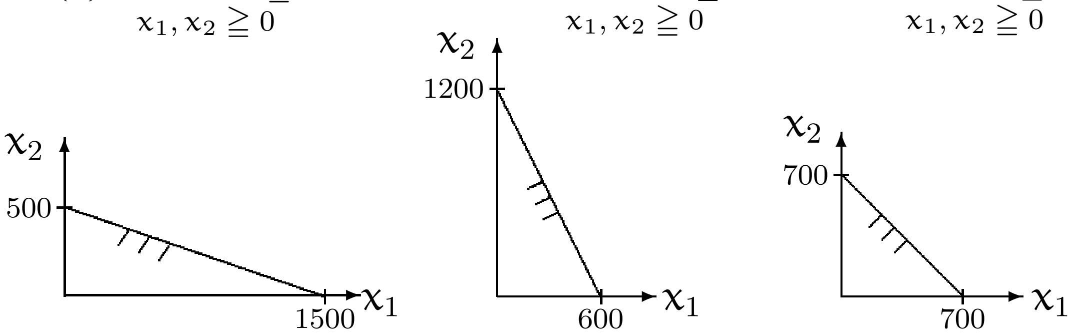
Beispiel: Graphische Darstellung Zulässigkeitsbereich

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
2.1. Nebenbedingungen und Zulässigkeit
2.2. Zielfunktion
2.3. Graphische Lösung
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

- Ungleichung (1) mit $x_1 + 3x_2 \leqq 1500$ entspricht dreieckigem Bereich in $\mathbb{R}_+^2$
- Begrenzung durch die drei Geraden mit $x_1 + 3x_2 = 1500, \; x_1 = 0$ und $x_2 = 0$
- Also: Grenzpunkte $(0{,}500), \; (1500{,}0), \; (0{,}0)$
- Analog für die übrigen Nebenbedingungen

$(1) \quad x_1 + 3x_2 \leqq 1500, \; x_1, x_2 \geqq 0$ $\qquad (2) \quad 2x_1 + x_2 \leqq 1200, \; x_1, x_2 \geqq 0$ $\qquad (3) \quad x_1 + x_2 \leqq 700, \; x_1, x_2 \geqq 0$



Beispiel: Graphische Darstellung der Restriktionen

Beispiel: Graphische Darstellung Zulässigkeitsbereich

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
2.1. Nebenbedingungen und Zulässigkeit
2.2. Zielfunktion
2.3. Graphische Lösung
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

- Die gesamte zulässige Lösungsmenge Z ergibt sich dann aus dem Durchschnitt der angegebenen Bereiche.
- Alle (x_1, x_2)-Kombinationen im mit Z gekennzeichneten Bereich erfüllen damit die vorgegebenen Restriktionen.

Mögliche Fälle für Z

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
2.1. Nebenbedingungen und Zulässigkeit
2.2. Zielfunktion
2.3. Graphische Lösung
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

1. $Z = \emptyset$, d.h., es existiert keine zulässige (x_1, x_2)-Kombination.
2. $|Z| = 1$, d.h., es existiert genau eine zulässige (x_1, x_2)-Kombination. Dieser Fall tritt meist dann auf, wenn die Restriktionen in Form von Gleichungen formuliert werden.
3. $|Z| > 1$, d.h., es existieren mehrere zulässige Lösungen.

- In den ersten beiden Fällen ist durch die Restriktionen das Planungsergebnis festgelegt.
  - Im ersten Fall können nicht alle Restriktionen gleichzeitig erfüllt werden,
  - im zweiten Fall gibt es eine einzige Lösung, die alle Restriktionen erfüllt.
- Im letzten Fall entsteht weiterer Planungsbedarf, da für die Modellvariablen noch Spielraum besteht. Um diesen Spielraum weiter einzuschränken, ist eine Zielsetzung zu formulieren, die die zulässigen Lösungen bewertet. Kann diese Zielsetzung z als lineare Funktion der Modellvariablen modelliert werden, so entsteht ein lineares Optimierungsproblem mit der Zielfunktion $z(x)$ und Nebenbedingungen in Form von Gleichungen und/oder Ungleichungen.

Lineare Produktionsplanung: Beispiel

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
2.1. Nebenbedingungen und Zulässigkeit
2.2. Zielfunktion
2.3. Graphische Lösung
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Der holzverarbeitende Betrieb aus Beispiel 1 verfolgt die Zielsetzung der Gewinnmaximierung. Die Spanplatten vom Typ A bringen 4 €, die vom Typ B 5 € Gewinn pro Stück.

Zusammen mit den Restriktionen aus Beispiel 1 kann nun ein mathematisches Modell in Form eines linearen Optimierungsproblems formuliert werden.

Zielfunktion:

$$z(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 \quad \longrightarrow \text{max} \quad \text{(Gewinnmaximierung)}$$

Nebenbedingungen:

$$\begin{array}{llcllll}
(1) & x_1 & + & 3x_2 & \leqq & 1500 & (\text{Vorrat } F_1) \\
(2) & 2x_1 & + & x_2 & \leqq & 1200 & (\text{Vorrat } F_2) \\
(3) & x_1 & + & x_2 & \leqq & 700 & (\text{Kapazität Presse}) \\
(4)(5) & & & x_1, x_2 \geqq 0 & & & (\text{nicht-negative Mengen})
\end{array}$$

Beispiel: Graphische Lösung

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
2.1. Nebenbedingungen und Zulässigkeit
2.2. Zielfunktion
2.3. Graphische Lösung
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

- Zur graphischen Lösung des Problems: Zusätzlich Zielfunktion in Graphik
- Zu diesem Zweck: Darstellung von Isogewinngeraden
- Für Gewinn in Höhe von c:
$$z(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2 = c \quad \text{bzw.} \quad x_2 = \frac{c}{5} - \frac{4}{5}x_1 \,.$$
- Graphische Darstellung der Optimallösung im Beispiel
- Nur der Achsenabschnitt $= c/5$ hängt vom Wert c ab, die Steigung $= -4/5$ jedoch nicht.
- Im Beispiel maximaler c-Wert im Schnittpunkt der Geraden für die Nebenbedingungen (1) und (3), d.h. in $(x_1, x_2) = (300{,}400)$.
- Ein höherer Zielfunktionswert als
$$z(300{,}400) = 4 \cdot 300 + 5 \cdot 400 = 3200$$
kann unter Einhaltung der Restriktionen nicht erreicht werden. Man spricht von einer optimalen Lösung.

Beispiel, Bereich optimaler Lösungen

- Variante: Gewinnbeiträge der Spanplatten aus Beispiel 1 jetzt für beide Typen gleich 4.- € pro Stück, d.h. $z(x_1, x_2) = 4x_1 + 4x_2$,
- In diesem Fall: kein eindeutiges Optimum
- Bereich Z^* optimaler Lösungen; beschreibbar durch folgende Menge:

$$Z^* = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2_+ : 4x_1 + 4x_2 = 2800,\, x_1 \in [300, 500] \right\}$$

Z^* entspricht der durch die Punkte $C = (300, 400)$ und $D = (500, 200)$ begrenzten Strecke.

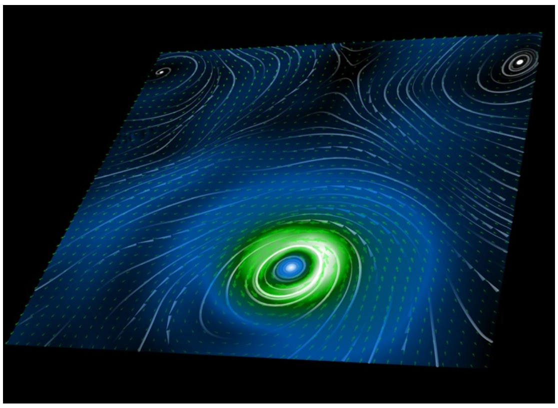
Zusammenfassung für graphische Lösung linearer Optimierungsprobleme (mit nicht-konstanter Zielfunktion):

- Optimale Lösungen liegen stets auf dem Rand des zulässigen Bereiches Z beziehungsweise in „Ecken" von Z.
- Mindestens eine Ecke gehört zur optimalen Lösung.
- Entspricht Menge der Optimallösungen genau einer Ecke von $Z \iff$ ist Optimallösung eindeutig.
- Gibt es zwei „optimale Ecken" , so ist die Menge aller Punkte der durch diese Ecken festgelegten Strecke optimal.

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
2.1. Nebenbedingungen und Zulässigkeit
2.2. Zielfunktion
2.3. Graphische Lösung
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

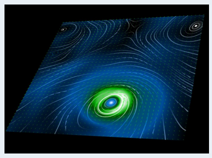
Wirtschaftsmathematik: Table of Contents

1 Finanzmathematik
2 Lineare Programme
3 Differentialgleichungen
4 Statistik: Einführung
5 Deskriptive Statistik
6 Wahrscheinlichkeitstheorie
7 Induktive Statistik



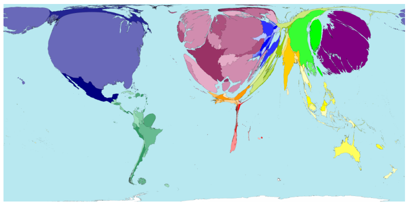
3 Differentialgleichungen
Einführung
Grundlegende Begriffe
Qualitative Analyse von Systemen
Beispiele für analytisch lösbare DGL
Lineare Differentialgleichungen

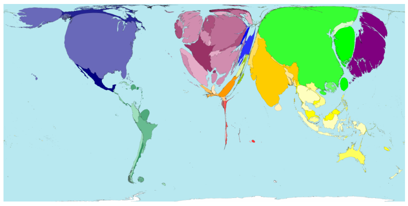
Makroökonomische Systeme und deren Beschreibung



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
Einführung
Ein makroökonomisches Modell
Analyse von Differentialgleichungen
Grundlegende Begriffe
Qualitative Analyse von Systemen
Beispiele für analytisch lösbare DGL
Lineare DGl
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

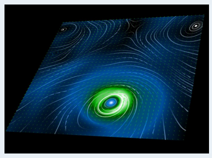
- Lassen sich Beobachtungen an wirtschaftlichen Daten und vor allem deren Veränderung nutzen,
- um Entwicklungen aggregierter Größen in Volkswirtschaften wie z.B.
  - den **Beschäftigungsgrad** oder
  - das **Bruttoinladsprodukt**
- zu modellieren und zu analysieren?





Dazu: **Makroökonomische Modelle**

Das Modell zyklischen Wachstums von Goodwin



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
Einführung
Ein makroökonomisches Modell
Analyse von Differentialgleichungen
Grundlegende Begriffe
Qualitative Analyse von Systemen
Beispiele für analytisch lösbare DGL
Lineare DGl
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Lohnquote und Beschäftigungsgrad: Problem ▸ Modellannahmen

- Betrachtung einer wirtschaftlichen Wachstumsphase
- Gesucht: Ausdruck für sich gegenseitig beeinflussende Lohnquote $u(t)$ und Beschäftigungsgrad $v(t)$

Streikende bei der Telekom

Verwendete Symbole:

- Wachstumsfaktor der Arbeitsproduktivität bzw. des Arbeitskräftepotentials: α, β
- Linearisierungskonstanten: ρ, γ
- Output pro Kapital: κ

Modellannahmen reduzieren sich zu:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{v}(t)}{v(t)} &= (\kappa - \alpha - \beta) - \kappa \cdot u(t) \\ \frac{\dot{u}(t)}{u(t)} &= -(\gamma + \alpha) + \rho \cdot v(t) \end{aligned}$$

- Mit den Abkürzungen:

$$\begin{aligned} a_1 &= \kappa - \alpha - \beta \quad ; \quad a_2 = \kappa \\ b_1 &= \gamma + \alpha \quad ; \quad b_2 = \rho \end{aligned}$$

- ergibt sich:

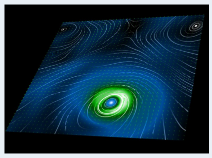
$$\begin{aligned} \frac{\dot{v}(t)}{v(t)} &= a_1 - a_2 u(t) \\ \frac{\dot{u}(t)}{u(t)} &= -b_1 + b_2 v(t) \end{aligned}$$

Zusammenfassung

Beschäftigungsgrad und Lohnquote

$$\begin{aligned}\frac{\dot{v}(t)}{v(t)} &= a_1 - a_2 \cdot u(t)\\ \frac{\dot{u}(t)}{u(t)} &= -b_1 + b_2 \cdot v(t)\end{aligned}$$

- Gleichungen beinhalten jeweils die gesuchte Funktion und ihre Ableitung
- Und nur **eine Veränderliche** (hier t)
- Solche Gleichungen nennt man gewöhnliche Differentialgleichungen
- Nötig für weitere Analyse der Modelle: Aussagen über Verhalten des Systems



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
Einführung
Ein makroökonomisches Modell
Analyse von Differentialgleichungen
Grundlegende Begriffe
Qualitative Analyse von Systemen
Beispiele für analytisch lösbare DGL
Lineare DGl
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

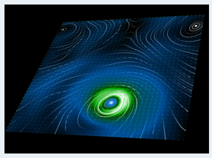
Begriffe

- Differentialgleichung: Eine Gleichung einer gesuchten Funktion y und einigen ihrer Ableitungen
- Gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung: Gleichung gesuchter Funktion y und einigen Ableitungen nach **einer** Veränderlichen x, also Gleichungen der Form:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

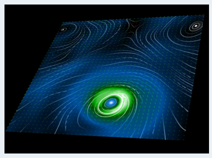
- Explizite Differentialgleichung erster Ordnung: $y' = f(y, x)$
- Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} &F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,\\ y(x_0) &= y_0,\\ y'(x_0) &= y_0', \ldots,\\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{n-1}\end{aligned}$$



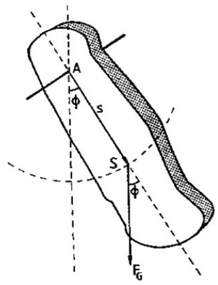
1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
Einführung
Grundlegende Begriffe
Qualitative Analyse von Systemen
Beispiele für analytisch lösbare DGL
Lineare DGl
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Analyse von Differentialgleichungen



1. Finanzmathematik
...neare Programme
...GLs
...ührung
...ndlegende Begriffe
...litative Analyse von ...emen
...piele für analytisch ...are DGL
...eare DGl
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

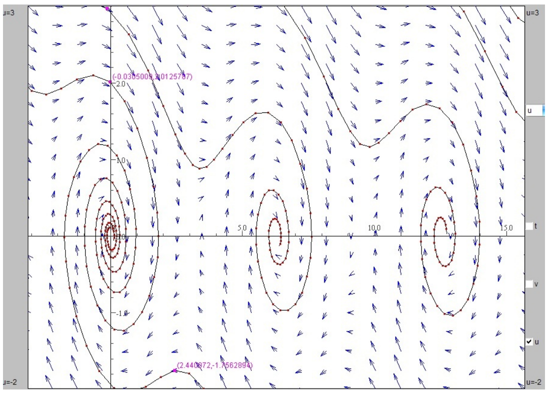
- Wichtige Fragen:
  - Gibt es eine explizite Lösung?
  - Falls vorhanden: Eindeutigkeit?
- Oft trotz Existenz und Eindeutigkeit analytische Lösung nicht möglich; dann zum Beispiel:
  - Richtungsfelder
  - **Numerische Lösungen**
  - Bei Systemen ohne Abhängigkeit von Parameter: Trajektorien
  - Stabile Punkte



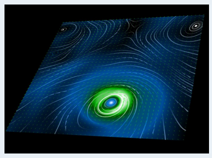
- Physikalisches Pendel, Winkel $v(t)$, Winkelgeschwindigkeit $u(t)$, Dämpfung $\lambda > 0$

$$\frac{dv}{dt} = u(t)$$

$$\frac{du}{dt} = -\sin(v) - \lambda \cdot u(t)$$



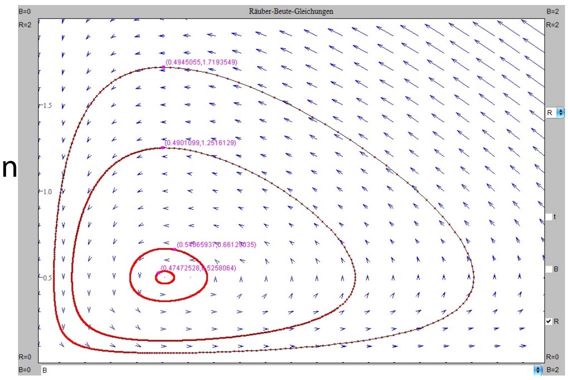
Beispiel: Räuber-Beute-Dynamik



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
Einführung
Grundlegende Begriffe
Qualitative Analyse von Systemen
Analyse des Modells von Goodman
Beispiele für analytisch lösbare DGL
Lineare DGl
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

- Pflanzenfresserpopulation $B(t)$ wächst (ungestört) mit konstanter Rate a_1.
- Bei Existenz von Raubtieren mit den Pflanzenfressern als Beute: Raubtierbestand $R(t)$ vermindert Wachstumsrate der Beutetiere proportional:

$$\frac{\dot{B}(t)}{B(t)} = a_1 - a_2 \cdot R(t)$$

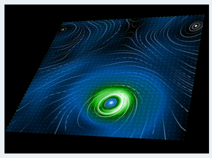


- Ohne Beute ($B(t) = 0$) schrumpft Raubtierbestand kontinuierlich mit konstanter Rate b_1.
- Andererseite wächst ihr Bestand proportional zur vorhandenen Menge der Beutetiere:

$$\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} = -b_1 + b_2 \cdot B(t)$$

- System von Differentialgleichungen beschreibt im B-R-Diagramm zyklische Kurven.
- Bekannt als Lotka-Volterra-Gleichungen

Analogie der Modelle

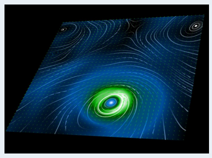


Beute-Jäger-Modell	Goodman-Modell
$\frac{\dot{B}(t)}{B(t)} = a_1 - a_2 \cdot R(t)$	$\frac{\dot{v}(t)}{v(t)} = a_1 - a_2 \cdot u(t)$
$\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} = -b_1 + b_2 \cdot B(t)$	$\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = -b_1 + b_2 \cdot v(t)$

- Die Beschäftigungsgrad $v(t)$ entspricht der Beute,
- Die Lohnquote $u(t)$ den Räubern
- Jede Lösung: Zyklus im u-v-Diagramm
- Anfangsbedingungen bestimmen Orbit
- Wo ist stationäre Lösung?
- Stationäre Lösung bei $u = a_1/a_2$ und $v = b_1/b_2$

Mechanik des Modells

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016



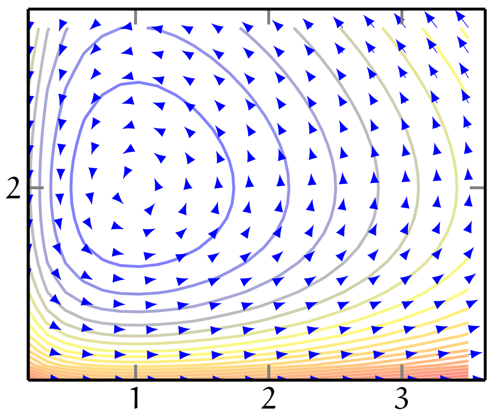
1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
Einführung
Grundlegende Begriffe
Qualitative Analyse von Systemen
Analyse des Modells von Goodman
Beispiele für analytisch lösbare DGL
Lineare DGl
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

1. Beschäftigungsgrad v kleiner als $b_1/b_2 \to$ Lohndruck ist gering, Reallöhne sinken.
2. Dadurch: Sinkende Lohnquote (und steigende Gewinnquote $\to$ wachsende Investitionen)
3. Diese erhöhen die Wachstumsrate der Produktion und sobald diese das Wachstum der Arbeitsproduktivität übersteigt, kommt es zu Neueinstellungen und der Beschäftigungsgrad nimmt zu.
4. Dann: Steigender Beschäftigungsgrad und Lohndruck; Reallöhne wachsen, senken die Gewinnquote, die Investitionen und die Wachstumsrate der Wirtschaft. Sobald diese unter die Wachstumsrate der Arbeitsproduktivität gesunken ist, sinkt der Beschäftigungsgrad wieder.

$$\frac{\dot{v}(t)}{v(t)} = a_1 - a_2 \cdot u(t)$$

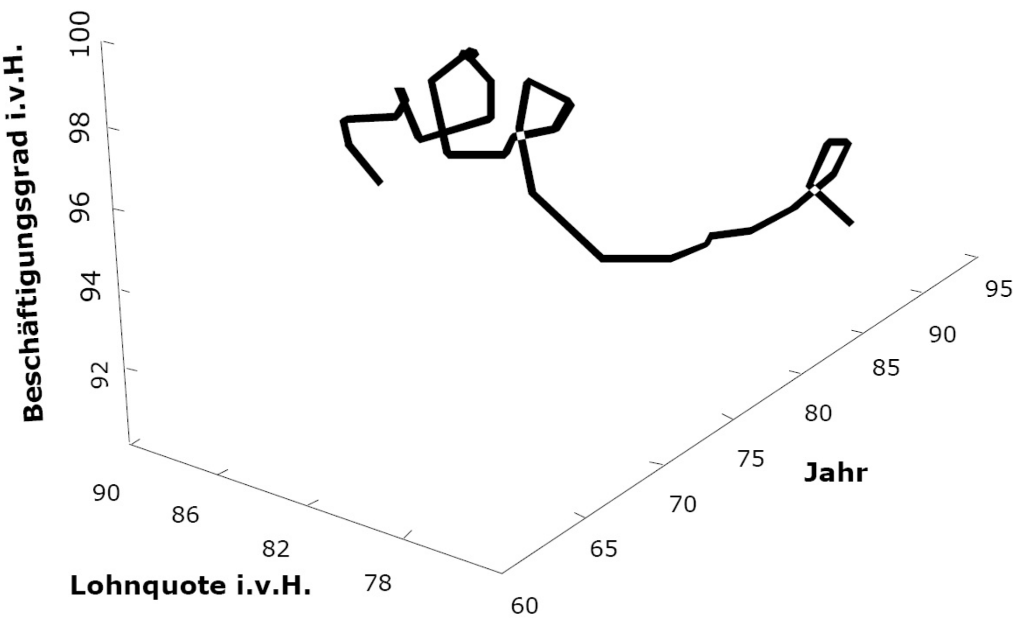
$$\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = -b_1 + b_2 \cdot v(t)$$

Richtungsfeld mit $a_1 = 2, \quad a_2 = b_1 = b_2 = 1$



Empirischer Gehalt des Modells

Westdeutsche Daten 1960-1995



Quelle: Sachverständigenrat (1996)

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
Einführung
Grundlegende Begriffe
Qualitative Analyse von Systemen
Analyse des Modells von Goodman
Beispiele für analytisch lösbare DGL
Lineare DGl
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Beispiele für analytisch lösbare DGL

- Konstante Beschleunigung:

$$\ddot{s}(t) = -g$$

- DGL der Form

$$y' = f(x) \cdot g(x), \quad \text{z.B. } y' = x^2 y$$

- Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung der Form

$$y' + f(x)y = g(x)$$

mit

- $g(x) = 0$: homogene DGL
- $g(x) \neq 0$: inhomogene DGL

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
Einführung
Grundlegende Begriffe
Qualitative Analyse von Systemen
Beispiele für analytisch lösbare DGL
Lineare DGl
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Lineare DGl erster Ordnung

Motivation

- $\dot{u}(t) = \alpha \cdot u(t)$ mit konstantem α beschreibt Wachstums- oder Schrumpfungsprozesse
- Aber: Um 1650 jährliche Wachstumsrate der Weltbevölkerung 0,3% ($\alpha \approx 0{,}003$), heute ca. 2% ($\alpha \approx 0{,}02$)
- Also: α nicht konstant $\to \alpha(t)$
- Und: Gegebenfalls Zufuhr oder Abwanderung von/nach außen (Immi- bzw. Emigration)
- Dann DGl: $\dot{u}(t) = \alpha(t)u(t) + s(t)$

Definition

- Lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$\boxed{y' = f(x)y + s(x)}$$

- $s(x)$ heißt Störfunktion
- Wenn $s(x) : x \mapsto 0$: Homogene DGl $\boxed{y' = f(x)y}$
- Andernfalls: Inhomogene DGl

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
Einführung
Grundlegende Begriffe
Qualitative Analyse von Systemen
Beispiele für analytisch lösbare DGL
Lineare DGl
Lineare DGl erster Ordnung
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Lineare DGl erster Ordnung

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

Zunächst: Lösung der homogenen Gleichung

- Klar: Wenn $y(x)$ eine Lösung der DGl, dann ist auch ein Vielfaches Cy eine Lösung
- Annahme: $f(x)$ soll stetig auf Intervall I sein. Damit existiert Stammfunktion

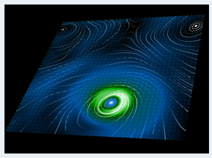
$$A(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \quad \text{für alle } x \in I \quad \text{mit } x_0 \in I \text{ fest}$$

- Es gilt:

$$\frac{d}{dx} e^{\int f(x)dx} = f(x) e^{\int f(x)dx}$$

- Damit $z : x \mapsto e^{\int f(x)dx}$ ist Lösung, jedes Vielfache Cz auch
- Das sind auch alle Lösungen, denn bei beliebiger Lösung y gilt $\frac{d}{dx}\frac{y}{z} = 0$, also y/z konstant, z.B. C, damit $y = Cz$

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
Einführung
Grundlegende Begriffe
Qualitative Analyse von Systemen
Beispiele für analytisch lösbare DGL
Lineare DGl
Lineare DGl erster Ordnung
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
Einführung
Grundlegende Begriffe
Qualitative Analyse von Systemen
Beispiele für analytisch lösbare DGL
Lineare DGl
Lineare DGl erster Ordnung
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

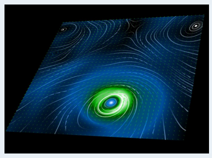
Satz zur Lösung von homogenen linearen DGls 1. Ordnung

- Voraussetzung: $f(x)$ auf dem Intervall I stetig.
- Dann sind die Lösungen der DGL $y' = f(x)y$ genau die Funktionen

$$y : x \mapsto C \cdot e^{\int f(x)dx} \quad \text{mit der freien Konstante } C$$

- Und: Die Anfangswertaufgabe $y' = f(x)y$, $y(x_0) = y_0$ (mit $x_0 \in I$, y_0 beliebig) besitzt genau eine Lösung
- Bestimmung von C über über Anpassung der Anfangsbedingung.
- Beispiele:
  - $y' = (\sin x)y, \quad y(0) = 1$
  - $y' = \frac{1}{x}y, \quad y(1) = 2$

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
Einführung
Grundlegende Begriffe
Qualitative Analyse von Systemen
Beispiele für analytisch lösbare DGL
Lineare DGl
Lineare DGl erster Ordnung
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Lösung der inhomogenen Gleichung

- Gegeben: $y' = f(x)y + s(x)$, wobei f und s auf dem Intervall I definiert sind, und $f(x)$ auf I stetig.
- Zuerst: Suche davon eine partikuläre Lösung y_p, dann gilt für jede andere Lösung der DGl:

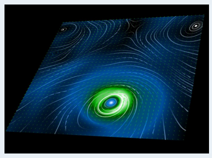
$$(y - y_p)' = fy + s - (fy_p + s) = f(y - y_p)$$

- $y - y_p$ ist also Lösung der homogenen DGl und damit gilt für y

$$y(x) = y_p(x) + C \cdot e^{\int f(x)dx}$$

- Damit ist das die allgemeine Lösung der DGl.
- Praktisch: Zur Lösung der inhomogenen Gleichung ausreichend: Finden irgendeiner partikulären Lösung y_p
- Methode: Variation der Konstanten

Lineare DGl erster Ordnung



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
Einführung
Grundlegende Begriffe
Qualitative Analyse von Systemen
Beispiele für analytisch lösbare DGL
Lineare DGl
Lineare DGl erster Ordnung
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Variation der Konstanten

- Fasse C als differenzierbare Funktion in $y_p := C \cdot e^{\int f(x) dx}$ auf
- Eingesetzt in $y' = f(x)y + s(x)$ ergibt sich

$$C(x)f(x) \cdot e^{\int f(x)dx} + C'(x) \cdot e^{\int f(x)dx} = f(x)C(x) \cdot e^{\int f(x)dx} + s(x)$$

- Damit gilt für die „Konstante" $C(x)$ in der partikulären Lösung y_p:

$$C(x) := \int s(x) \cdot e^{-\int f(x)dx} dx$$

Zusammenfassung

allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung =
partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung +
allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung

Wirtschaftsmathematik: Table of Contents

1 Finanzmathematik
2 Lineare Programme
3 Differentialgleichungen
4 Statistik: Einführung
5 Deskriptive Statistik
6 Wahrscheinlichkeitstheorie
7 Induktive Statistik

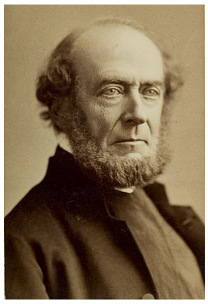
4 Statistik: Einführung
Berühmte Leute zur Statistik
Wie lügt man mit Statistik?
Gute und schlechte Grafiken
Begriff Statistik
Grundbegriffe der Datenerhebung
R und RStudio

Zitate

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
Berühmte Leute zur Statistik
Wie lügt man mit Statistik?
Gute und schlechte Grafiken
Begriff Statistik
Grundbegriffe der Datenerhebung
R und RStudio
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

- **Leonard Henry Courteney (1832-1918)**:

  „There are three kinds of lies: lies, damned lies and statistics.“

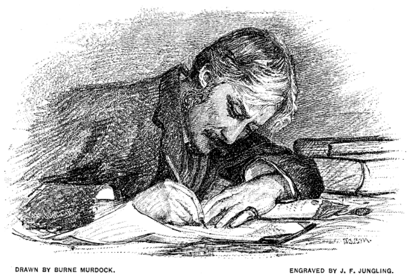


- **Winston Curchill (1874-1965) angeblich**:

  „Ich glaube nur den Statistiken, die ich selbst gefälscht habe.“

- **Andrew Lang (1844-1912)**:

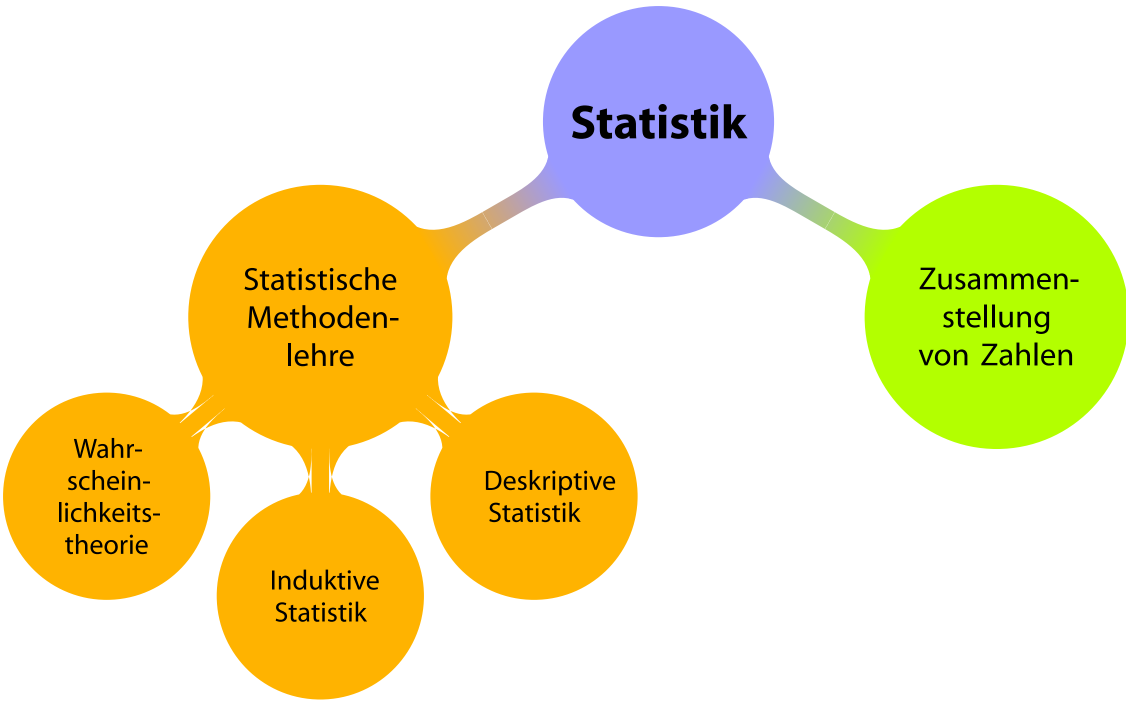
  „Wir benutzen die Statistik wie ein Betrunkener einen Laternenpfahl: Vor allem zur Stütze unseres Standpunktes und weniger zum Beleuchten eines Sachverhalts.“



Quellen: Wikimedia Commons

Bedeutungen des Begriffs Statistik

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
Berühmte Leute zur Statistik
Wie lügt man mit Statistik?
Gute und schlechte Grafiken
Begriff Statistik
Grundbegriffe der Datenerhebung
R und RStudio
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen



Einfaches Beispiel

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
Berühmte Leute zur Statistik
Wie lügt man mit Statistik?
Gute und schlechte Grafiken
Begriff Statistik
Grundbegriffe der Datenerhebung
R und RStudio
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Beispiel

12 Beschäftigte werden nach der Entfernung zum Arbeitsplatz (in km) befragt.
Antworten: 4, 11, 1, 3, 5, 4, 20, 4, 6, 16, 10, 6

- deskriptiv:
  - Durchschnittliche Entfernung: $7{,}5$
  - Klassenbildung:

Klasse	$[0;5)$	$[5;15)$	$[15;30)$
Häufigkeit	5	5	2

- induktiv:
  - Schätze die mittlere Entfernung **aller** Beschäftigten.
  - Prüfe, ob die mittlere Entfernung geringer als 10 km ist.

Merkmale

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
Berühmte Leute zur Statistik
Wie lügt man mit Statistik?
Gute und schlechte Grafiken
Begriff Statistik
Grundbegriffe der Datenerhebung
R und RStudio
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

- Merkmalsträger: Untersuchte statistische Einheit
- Merkmal: Interessierende Eigenschaft des Merkmalträgers
- (Merkmals-)Ausprägung: Konkret beobachteter Wert des Merkmals
- Grundgesamtheit: Menge aller relevanten Merkmalsträger
- Typen von Merkmalen:
  a) qualitativ – quantitativ
     - qualitativ: z.B. Geschlecht
     - quantitativ: z.B. Schuhgröße
     - Qualitative Merkmale sind quantifizierbar (z.B.: weiblich 1, männlich 0)
  b) diskret – stetig
     - diskret: Abzählbar viele unterschiedliche Ausprägungen
     - stetig: Alle Zwischenwerte realisierbar

Skalenniveaus

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
Berühmte Leute zur Statistik
Wie lügt man mit Statistik?
Gute und schlechte Grafiken
Begriff Statistik
Grundbegriffe der Datenerhebung
R und RStudio
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Nominalskala:

- Zahlen haben nur Bezeichnungsfunktion
- z.B. Artikelnummern

Ordinalskala:

- zusätzlich Rangbildung möglich
- z.B. Schulnoten
- Differenzen sind aber **nicht** interpretierbar!
  ➠ Addition usw. ist unzulässig.

Kardinalskala:

- zusätzlich Differenzbildung sinnvoll
- z.B. Gewinn
- Noch feinere Unterscheidung in: Absolutskala, Verhältnisskala, Intervallskala

Skalendegression und Skalenprogression

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
Berühmte Leute zur Statistik
Wie lügt man mit Statistik?
Gute und schlechte Grafiken
Begriff Statistik
Grundbegriffe der Datenerhebung
R und RStudio
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Ziel der Skalierung: Gegebene Information angemessen abbilden, möglichst ohne Über- bzw. Unterschätzungen

Es gilt:

- Grundsätzlich können alle Merkmale nominal skaliert werden.
- Grundsätzlich kann jedes metrische Merkmal ordinal skaliert werden.

Das nennt man Skalendegression. Dabei: Informationsverlust

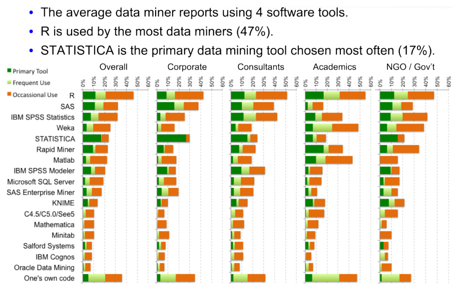
Aber:

- Nominale Merkmale dürfen **nicht** ordinal- oder metrisch skaliert werden.
- Ordinale Merkmale dürfen **nicht** metrisch skaliert werden.

Das nennt nennt man Skalenprogression. Dabei: Interpretation von **mehr Informationen** in die Merkmale, als inhaltlich vertretbar.
(Gefahr der **Fehlinterpretation**)

Was ist R und warum soll man es benutzen?

- R ist ein freies Softwarepaket zu Statistik und Datenanalyse
- R ist sehr mächtig und weit verbreitet in Wissenschaft und Industrie (sogar von mehr Leuten benutzt als z.B. SPSS)
- Ursprung von R: 1993 an der Universität Auckland von Ross Ihaka and Robert Gentleman entwickelt
- Seitdem: Viele Leute haben R verbessert mit tausenden von Paketen für viele Anwendungen
- Nachteil (auf den ersten Blick): Kein point und click tool
- Großer Vorteil (auf den zweiten Blick): Kein point und click tool



source: `http://goo.gl/axhGhh`

graphics source: `http://goo.gl/W70kms`

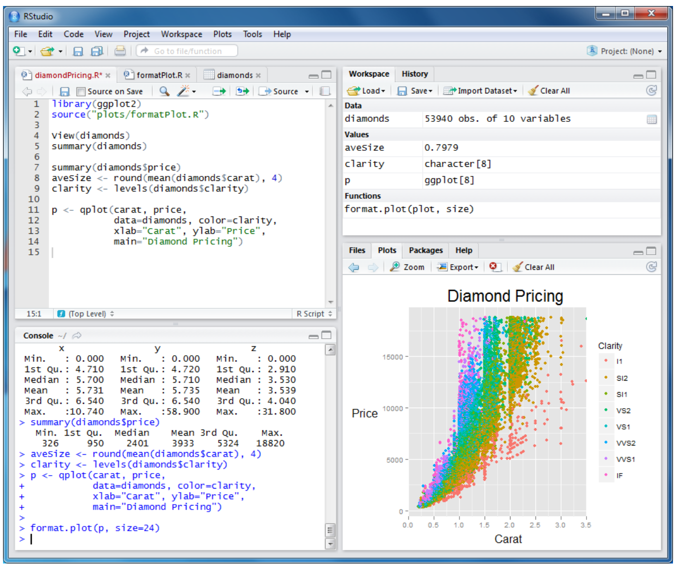
1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
Berühmte Leute zur Statistik
Wie lügt man mit Statistik?
Gute und schlechte Grafiken
Begriff Statistik
Grundbegriffe der Datenerhebung
R und RStudio
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Was ist RStudio?

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

- RStudio ist ein Integrated Development Environment (IDE) um R leichter benutzen zu können.
- Gibt's für OSX, Linux und Windows
- Ist auch frei
- Trotzdem: Sie müssen Kommandos schreiben
- Aber: RStudio unterstützt Sie dabei
- **Download:** `RStudio.com`

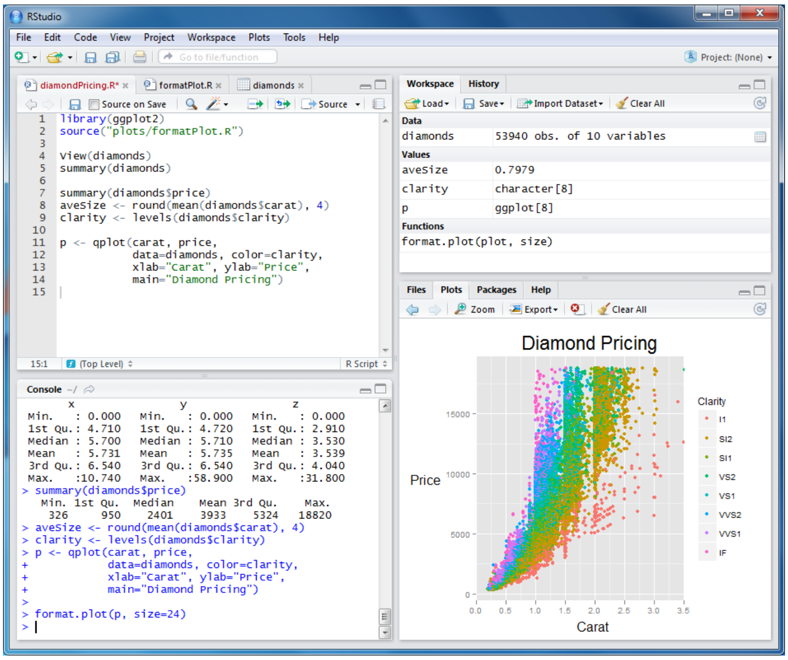
R Studio
Free & Open-Source IDE for R



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
Berühmte Leute zur Statistik
Wie lügt man mit Statistik?
Gute und schlechte Grafiken
Begriff Statistik
Grundbegriffe der Datenerhebung
R und RStudio
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

RStudio Kennenlernen

- Code
- Console
- Workspace
- History
- Files
- Plots
- Packages
- Help
- Auto-Completion
- Data Import



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
Berühmte Leute zur Statistik
Wie lügt man mit Statistik?
Gute und schlechte Grafiken
Begriff Statistik
Grundbegriffe der Datenerhebung
R und RStudio
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Daten einlesen und Struktur anschauen

```r
# Arbeitsverzeichnis setzen (alternativ über Menü)
setwd("C:/ste/work/vorlesungen/2016SS_HSA_Statistik")

# Daten einlesen aus einer csv-Datei (Excel)
MyData = read.csv2(file="../_genericFiles/Daten/Umfrage_HSA_2016_03.csv", header=TRUE)
```

```r
# inspect structure of data
str(MyData)

## 'data.frame': 670 obs. of  18 variables:
##  $ Jahrgang      : int  2015 2015 2015 2015 2015 2015 2015 2015 2015 2015 ...
##  $ Alter         : int  20 25 19 21 25 20 25 20 23 21 ...
##  $ Groesse       : int  174 157 163 185 178 170 165 175 180 161 ...
##  $ Geschlecht    : Factor w/ 2 levels "Frau","Mann": 1 1 1 2 2 1 1 2 2 1 ...
##  $ AlterV        : int  55 54 51 52 60 50 60 52 56 70 ...
##  $ AlterM        : int  53 61 49 50 63 55 60 49 50 55 ...
##  $ GroesseV      : int  187 185 178 183 170 183 185 175 175 180 ...
##  $ GroesseM      : int  169 160 168 165 160 160 170 169 170 165 ...
##  $ Geschwister   : num  3 1 1 4 2 2 4 1 1 2 ...
##  $ Farbe         : Factor w/ 6 levels "blau","gelb",..: 4 6 4 4 1 6 1 6 4 4 ...
##  $ AusgKomm      : num  240 119 270 40 550 ...
##  $ AnzSchuhe     : int  25 30 25 6 5 65 10 7 10 22 ...
##  $ AusgSchuhe    : int  450 300 100 100 80 250 150 400 150 300 ...
##  $ Essgewohnheiten: Factor w/ 5 levels "carnivor","fruktarisch",..: 1 1 1 1 1 1 5 1 1 1 ...
##  $ Raucher       : Factor w/ 2 levels "ja","nein": NA 2 2 2 1 2 2 2 2 1 ...
##  $ NoteMathe     : num  2.3 3.3 1.7 2 4 4 3.3 2.7 3.7 3.3 ...
##  $ MatheZufr     : Ord.factor w/ 4 levels "unzufrieden"<..: 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 ...
##  $ Studiengang   : Factor w/ 5 levels "BW","ET","IM",..: NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA ...
```

Erste Zeilen der Datentabelle


```
# Erste Zeilen in Datentabelle
head(MyData, 6)

##   Jahrgang Alter Groesse Geschlecht AlterV AlterM GroesseV GroesseM Geschwister   Farbe AusgKomm
## 1     2015    20     174       Frau     55     53      187      169           3 schwarz    240.0
## 2     2015    25     157       Frau     54     61      185      160           1   weiss    119.4
## 3     2015    19     163       Frau     51     49      178      168           1 schwarz    270.0
## 4     2015    21     185       Mann     52     50      183      165           4 schwarz     40.0
## 5     2015    25     178       Mann     60     63      170      160           2    blau    550.0
## 6     2015    20     170       Frau     50     55      183      160           2   weiss    420.0
##   AnzSchuhe AusgSchuhe Essgewohnheiten Raucher NoteMathe MatheZufr Studiengang
## 1        25        450        carnivor    <NA>       2.3   geht so        <NA>
## 2        30        300        carnivor    nein       3.3   geht so        <NA>
## 3        25        100        carnivor    nein       1.7   geht so        <NA>
## 4         6        100        carnivor    nein       2.0   geht so        <NA>
## 5         5         80        carnivor      ja       4.0   geht so        <NA>
## 6        65        250        carnivor    nein       4.0   geht so        <NA>
```

```
# lege MyData als den "Standard"-Datensatz fest
attach(MyData)
```

```
# Wie Viele Objekte gibt's im Datensatz?
nrow(MyData)

## [1] 670

# Wie Viele Merkmale?
ncol(MyData)

## [1] 18
```


Daten kennenlernen


```
# Auswahl spezieller Objekte und Merkmale über [Zeile, Spalte]
MyData[1:3, 2:5]

##   Alter Groesse Geschlecht AlterV
## 1    20     174       Frau     55
## 2    25     157       Frau     54
## 3    19     163       Frau     51
```

```
# Auswahl von Objekten über logische Ausdrücke
Auswahl = (MyData$Geschlecht=="Mann" & MyData$Alter < 19)
# zeige die ersten Einträge
head(Auswahl, 30)

##  [1] FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE
## [17] FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE  TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE

# Ausgabe der Auswahl: Alter, Alter des Vaters und der Mutter
MyData[Auswahl,                       # Objektauswahl
      c("Alter", "AlterM", "AlterV")]  # Welche Merkmale?

##     Alter AlterM AlterV
## 23     18     44     48
## 268    18     46     52
## 424    17     46     50
## 456    18     52     55
## 460    18     50     57
## 464    18     40     44
## 479    18     52     44
## 501    18     51     55
## 566    18     52     57
## 620    18     49     58
```

Daten kennenlernen


```r
# Zeige die Männer, die mehr als 1300 Euro für Schuhe
# und Mobilfunk zusammen ausgegeben haben
MyData.Auswahl = MyData[MyData$Geschlecht=="Mann" &
                        MyData$AusgSchuhe + MyData$AusgKomm > 1300,
                        c("Alter", "Geschwister", "Farbe",
                          "AusgSchuhe", "AusgKomm")]
```


Daten kennenlernen

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
   - Berühmte Leute zur Statistik
   - Wie lügt man mit Statistik?
   - Gute und schlechte Grafiken
   - Begriff Statistik
   - Grundbegriffe der Datenerhebung
   - R und RStudio
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik

Quellen

```r
# ohne NAs
MyData.Auswahl = na.exclude(MyData.Auswahl)
MyData.Auswahl
```

```
##     Alter Geschwister   Farbe AusgSchuhe AusgKomm
## 42     24         1.0 schwarz       1000      600
## 81     25         2.0  silber        200     1900
## 121    22         0.0  silber        300     1100
## 142    20         2.0 schwarz        290     1570
## 161    19         1.0 schwarz        600      800
## 227    20         1.0 schwarz        200     1250
## 249    20         1.0    blau       1000      350
## 256    25         0.0 schwarz        280     1200
## 315    21         1.0   weiss        200     1300
## 353    20         0.0 schwarz        400      950
## 415    26         1.0    blau        600     1850
## 419    21         0.0 schwarz        200     1500
## 492    23         2.0   weiss        160     1800
## 493    26         2.0 schwarz        300     2000
## 494    20         2.0 schwarz        250     1500
## 535    20         2.0   weiss       2500     1500
## 548    26         2.0 schwarz        240     1200
## 562    24         1.0 schwarz         70     4668
## 573    21         1.0 schwarz        300     1200
## 581    19         2.0  silber        500      950
## 582    20         1.0 schwarz        500     1000
## 604    24         1.0 schwarz        150     1340
## 605    21         1.0  silber        600      800
## 615    25         4.5 schwarz       1200      600
## 646    22         1.0     rot        200     2500
## 647    23         1.0 schwarz        200     2000
```

Daten kennenlernen


```
# Neue Spalte Gesamtausgaben:
MyData.Auswahl$AusgGesamt = MyData.Auswahl$AusgKomm + MyData.Auswahl$AusgSchuhe
# sortiert nach Gesamtausgaben
MyData.Auswahl[order(MyData.Auswahl$AusgGesamt), ]

##     Alter Geschwister   Farbe AusgSchuhe AusgKomm AusgGesamt
## 249    20         1.0    blau       1000      350       1350
## 353    20         0.0 schwarz        400      950       1350
## 121    22         0.0  silber        300     1100       1400
## 161    19         1.0 schwarz        600      800       1400
## 605    21         1.0  silber        600      800       1400
## 548    26         2.0 schwarz        240     1200       1440
## 227    20         1.0 schwarz        200     1250       1450
## 581    19         2.0  silber        500      950       1450
## 256    25         0.0 schwarz        280     1200       1480
## 604    24         1.0 schwarz        150     1340       1490
## 315    21         1.0   weiss        200     1300       1500
## 573    21         1.0 schwarz        300     1200       1500
## 582    20         1.0 schwarz        500     1000       1500
## 42     24         1.0 schwarz       1000      600       1600
## 653    27         2.0 schwarz        700      950       1650
## 419    21         0.0 schwarz        200     1500       1700
## 494    20         2.0 schwarz        250     1500       1750
## 615    25         4.5 schwarz       1200      600       1800
## 142    20         2.0 schwarz        290     1570       1860
## 492    23         2.0   weiss        160     1800       1960
## 663    27         2.0 schwarz        200     1800       2000
## 81     25         2.0  silber        200     1900       2100
## 647    23         1.0 schwarz        200     2000       2200
## 493    26         2.0 schwarz        300     2000       2300
## 415    26         1.0    blau        600     1850       2450
## 646    22         1.0     rot        200     2500       2700
```

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
   - Berühmte Leute zur Statistik
   - Wie lügt man mit Statistik?
   - Gute und schlechte Grafiken
   - Begriff Statistik
   - Grundbegriffe der Datenerhebung
   - R und RStudio
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Wirtschaftsmathematik: Table of Contents

1 Finanzmathematik
2 Lineare Programme
3 Differentialgleichungen
4 Statistik: Einführung
5 Deskriptive Statistik
6 Wahrscheinlichkeitstheorie
7 Induktive Statistik

5 Deskriptive Statistik
- Häufigkeiten
- Lage und Streuung
- Konzentration
- Zwei Merkmale
- Korrelation
- Preisindizes
- Lineare Regression

Häufigkeitsverteilungen

Auswertungsmethoden für eindimensionales Datenmaterial

- Merkmal X wird an n Merkmalsträgern beobachtet ➠ **Urliste** $(x_1, \dots, x_n)$
  Im Beispiel: $x_1 = 4$, $x_2 = 11$, …, $x_{12} = 6$
- Urlisten sind oft unübersichtlich, z.B.:

```
##  [1] 4 5 4 1 5 4 3 4 5 6 6 5 5 4 7 4 6 5 6 4 5 4 7 5 5 6 7 3
## [29] 7 6 6 7 4 5 4 7 7 5 5 5 5 6 6 4 5 2 5 4 7 5
```

- Dann zweckmäßig: Häufigkeitsverteilungen

Ausprägung (sortiert)	a_j	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
absolute Häufigkeit	$h(a_j) = h_j$	1	1	2	12	17	9	8	50
kumulierte abs. H.	$H(a_j) = \sum_{i=1}^{j} h(a_i)$	1	2	4	16	33	42	50	—
relative Häufigkeit	$f(a_j) = h(a_j)/n$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{12}{50}$	$\frac{17}{50}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{8}{50}$	1
kumulierte rel. H.	$F(a_j) = \sum_{i=1}^{j} f(a_i)$	$\frac{1}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{4}{50}$	$\frac{16}{50}$	$\frac{33}{50}$	$\frac{42}{50}$	1	—

Empirische Verteilungsfunktion

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

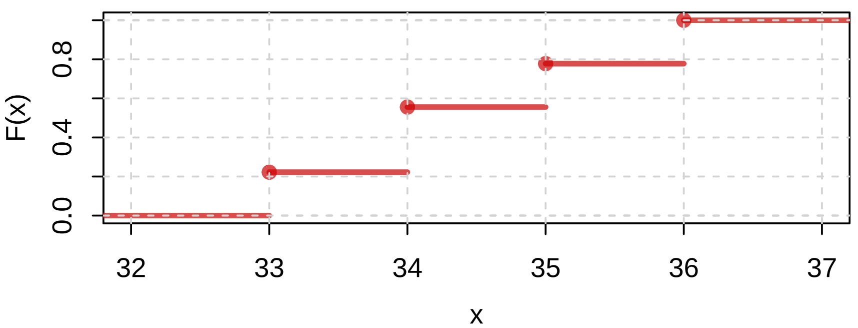
1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

- für metrische Merkmale
- Anteil der Ausprägungen, die höchstens so hoch sind wie x.
- Exakt:

$$F(x) = \sum_{a_i \leqslant x} f(a_i)$$

Beispiel

```
Studenten.ueber.32 = sort(MyData$Alter[MyData$Alter > 32])
Studenten.ueber.32

## [1] 33 33 34 34 34 35 35 36 36

# empirical cumulative distribution function (ecdf)
Studenten.F = ecdf(Studenten.ueber.32)
plot(Studenten.F, col=rgb(0.8,0,0,.7), lwd=3, main="", xlab="x", ylab="F(x)")
grid(lty=2) # Gitternetz
```



Empirische Quantile

- für metrische Merkmale; Voraussetzung: sortierte Urliste
- Umkehrung der Verteilungsfunktion
- Anteil p gegeben, gesucht: $F^{-1}(p)$, falls vorhanden.
- Definition p-Quantil:

$$\tilde{x}_p = \begin{cases} \frac{1}{2}(x_{n\cdot p} + x_{n\cdot p+1}), & \text{wenn } n\cdot p \in \mathbb{N}_0 \\ x_{\lceil n\cdot p\rceil}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel

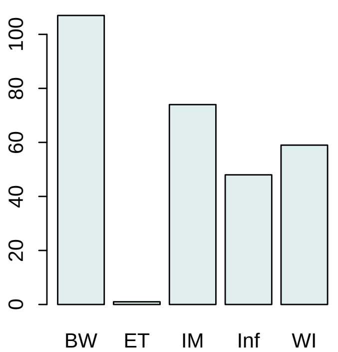
```
## [1] 33 33 34 34 34 35 35 36 36

n = length(Studenten.ueber.32)
p = c(0.05, 2/n, 0.3, 0.5, 0.75, 0.9)

quantile(Studenten.ueber.32, probs=p, type=2)

##        5% 22.22222%       30%       50%       75%       90%
##      33.0      33.5      34.0      34.0      35.0      36.0
```


1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Graphische Darstellungen

❶ Balkendiagramm

```
M.t = table(MyData$Studiengang)
M.t

##
##  BW  ET  IM Inf  WI
## 107   1  74  48  59

barplot(M.t, col="azure2")
```



(Höhe proportional zu Häufigkeit)

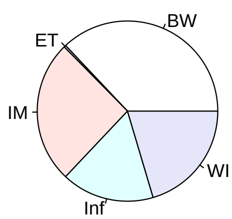
❷ Kreissektorendiagramm

Winkel: $w_j = 360° \cdot f(a_j)$

z.B. $w_{\text{BW}} = 360° \cdot \frac{107}{289} \approx 133.2°$

z.B. $w_{\text{IM}} = 360° \cdot \frac{74}{289} \approx 93.6°$

```
pie(M.t)
```



(Fläche proportional zu Häufigkeit)

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Graphische Darstellungen

❸ Histogramm

- für klassierte Daten
- Fläche proportional zu Häufigkeit:

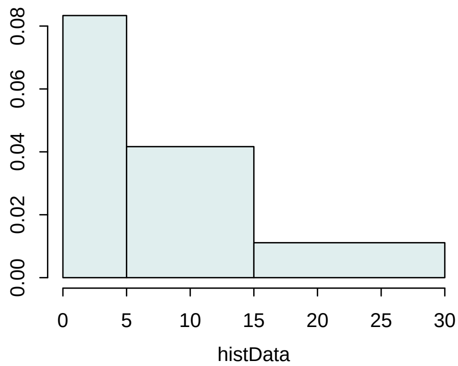
$$\text{Höhe}_j \cdot \text{Breite}_j = c \cdot h(a_j)$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Höhe}_j = c \cdot \frac{h(a_j)}{\text{Breite}_j}}$$

- Im Beispiel mit $c = \frac{1}{12}$:

Klasse	$[0;5)$	$[5;15)$	$[15;30]$
$h(a_j)$	5	5	2
Breite_j	5	10	15
Höhe_j	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{90}$

```r
require(MASS)
histData <- c(0,1,2,3,4,
              5,6,7,10,14,
              15,30)
truehist(histData,
         breaks=c(0, 4.999, 14.999, 30),
         col="azure2", ylab='')
```



Lageparameter

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Modus x_{Mod}: häufigster Wert

Beispiel:

a_j	1	2	4
$h(a_j)$	4	3	1

$\Rightarrow x_{\text{Mod}} = 1$

Sinnvoll bei allen Skalenniveaus.

Median x_{Med}: ‚mittlerer Wert', d.h.

1. Urliste aufsteigend sortieren: $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$
2. Dann

$$x_{\text{Med}} \begin{cases} = x_{\frac{n+1}{2}}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \in [x_{\frac{n}{2}}; x_{\frac{n}{2}+1}], & \text{falls } n \text{ gerade (meist } x_{\text{Med}} = \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})) \end{cases}$$

Im Beispiel oben:
$1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 4 \Rightarrow x_{\text{Med}} \in [1;2]$, z.B. $x_{\text{Med}} = 1{,}5$

Sinnvoll ab ordinalem Skalenniveau.

Lageparameter (2)

- **Arithmetisches Mittel** $\bar{x}$: Durchschnitt, d.h.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} a_j \cdot h(a_j)$$

Im Beispiel:

$$\bar{x} = \tfrac{1}{8} \cdot (\underbrace{1+1+1+1}_{1\cdot 4} + \underbrace{2+2+2}_{2\cdot 3} + \underbrace{4}_{4\cdot 1}) = 1{,}75$$

Sinnvoll nur bei kardinalem Skalenniveau.
Bei klassierten Daten:

$$\bar{x}^* = \tfrac{1}{n} \sum \text{Klassenmitte} \cdot \text{Klassenhäufigkeit}$$

Im Beispiel:

$$\bar{x}^* = \tfrac{1}{12} \cdot (2{,}5 \cdot 5 + 10 \cdot 5 + 22{,}5 \cdot 2) = 8{,}96 \neq 7{,}5 = \bar{x}$$

Streuungsparameter

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

- Voraussetzung: kardinale Werte $x_1, \ldots, x_n$
- **Beispiel:**

$$\left.\begin{array}{l|ccc} \text{a)}\ x_i & 1950 & 2000 & 2050 \\ \hline \text{b)}\ x_i & 0 & 0 & 6000 \end{array}\right\}\ \text{je}\ \bar{x} = 2000$$

- **Spannweite:** $SP = \max\limits_i x_i - \min\limits_i x_i$

  Im Beispiel:

$$\begin{aligned} \text{a)}\quad SP &= 2050 - 1950 = 100 \\ \text{b)}\quad SP &= 6000 - 0 \quad\;\; = 6000 \end{aligned}$$

- **Mittlere quadratische Abweichung:**

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2}_{\text{Verschiebungssatz}}$$

Streuungsparameter (2)

- **Mittlere quadratische Abweichung** im Beispiel:

  a) $s^2 = \frac{1}{3} \cdot (50^2 + 0^2 + 50^2)$
  $= \frac{1}{3} \cdot (1950^2 + 2000^2 + 2050^2) - 2000^2 = 1666{,}67$

  b) $s^2 = \frac{1}{3} \cdot (2000^2 + 2000^2 + 4000^2)$
  $= \frac{1}{3} \cdot (0^2 + 0^2 + 6000^2) - 2000^2 = 8000000$

- **Standardabweichung:** $s = \sqrt{s^2}$
  Im Beispiel:

  a) $s = \sqrt{1666{,}67} = 40{,}82$

  b) $s = \sqrt{8000000} = 2828{,}43$

- **Variationskoeffizient:** $V = \frac{s}{\bar{x}}$ (maßstabsunabhängig)
  Im Beispiel:

  a) $V = \frac{40{,}82}{2000} = 0{,}02 \; (\widehat{=} 2\,\%)$

  b) $V = \frac{2828{,}43}{2000} = 1{,}41 \; (\widehat{=} 141\,\%)$

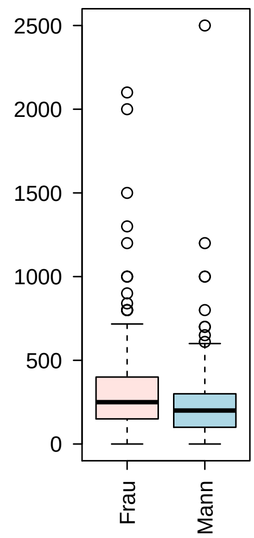
1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Lage und Streuung als Grafik: Boxplot

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

- Graphische Darstellung von Lage und Streuung
- Box: Oberer/Unterer Rand: 3. bzw. 1. Quartil ($\tilde{x}_{0,75}$ bzw. $\tilde{x}_{0,25}$),
- Linie in Mitte: Median
- Whiskers: Länge: Max./Min Wert, aber beschränkt durch das 1,5-fache des Quartilsabstands (falls größter/kleinster Wert größeren/kleineren Abstand von Box: Länge Whiskers durch größten/kleinsten Wert innerhalb dieser Schranken)
- Ausreißer: Alle Objekte außerhalb der Whisker-Grenzen

```
boxplot(AusgSchuhe ~ Geschlecht,
        col=c("mistyrose", "lightblue"),
        data=MyData, main="", las=2)
```



Ausgaben für Schuhe

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

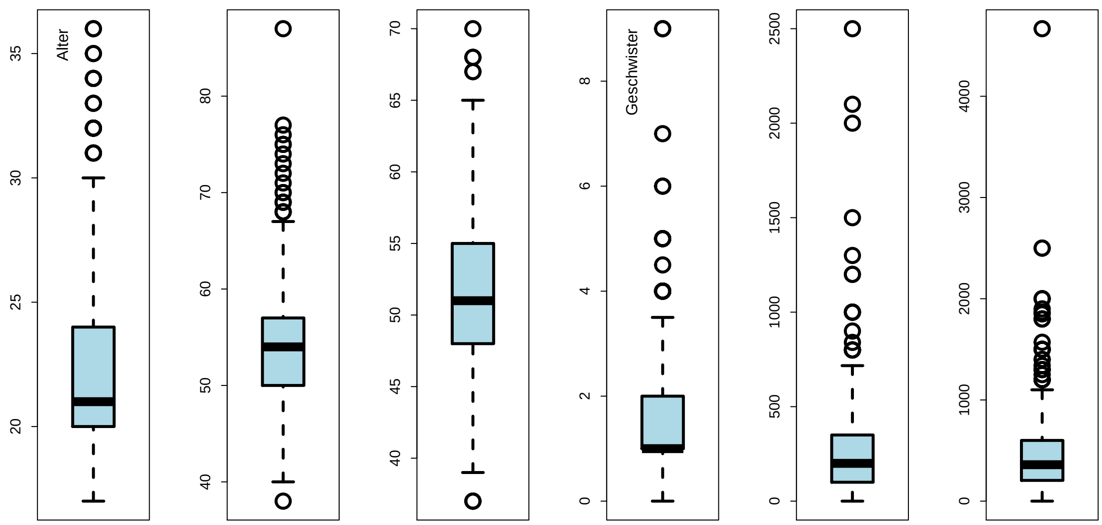
```
summary(MyData)

##     Jahrgang        Alter          Groesse      Geschlecht     AlterV          AlterM
##  Min.   :2014   Min.   :17.00   Min.   :150.0   Frau:389   Min.   :38.00   Min.   :37.00
##  1st Qu.:2014   1st Qu.:20.00   1st Qu.:166.0   Mann:281   1st Qu.:50.00   1st Qu.:48.00
##  Median :2015   Median :21.00   Median :172.0              Median :54.00   Median :51.00
##  Mean   :2015   Mean   :22.13   Mean   :173.1              Mean   :54.28   Mean   :51.64
##  3rd Qu.:2016   3rd Qu.:24.00   3rd Qu.:180.0              3rd Qu.:57.00   3rd Qu.:55.00
##  Max.   :2016   Max.   :36.00   Max.   :198.0              Max.   :87.00   Max.   :70.00
##                                                            NA's   :1       NA's   :1
##     GroesseV        GroesseM       Geschwister        Farbe         AusgKomm          AnzSchuhe
##  Min.   :160.0   Min.   : 76.0   Min.   :0.000   blau   : 31   Min.   :   0.0   Min.   :  2.00
##  1st Qu.:175.0   1st Qu.:162.0   1st Qu.:1.000   gelb   :  5   1st Qu.: 207.5   1st Qu.:  8.00
##  Median :180.0   Median :165.0   Median :1.000   rot    : 24   Median : 360.0   Median : 16.00
##  Mean   :179.1   Mean   :166.2   Mean   :1.509   schwarz:333   Mean   : 458.1   Mean   : 21.22
##  3rd Qu.:183.0   3rd Qu.:170.0   3rd Qu.:2.000   silber : 82   3rd Qu.: 600.0   3rd Qu.: 30.00
##  Max.   :204.0   Max.   :192.0   Max.   :9.000   weiss  :195   Max.   :4668.0   Max.   :275.00
##  NA's   :11      NA's   :8                                     NA's   :2
##    AusgSchuhe         Essgewohnheiten Raucher       NoteMathe           MatheZufr    Studiengang
##  Min.   :   0.0   carnivor     :420   ja  : 81   Min.   :1.000   unzufrieden    :185   BW   :107
##  1st Qu.: 100.0   fruktarisch  :  1   nein:381   1st Qu.:2.650   geht so        :151   ET   :  1
##  Median : 200.0   pescetarisch: 26    NA's:208   Median :3.300   zufrieden      :114   IM   : 74
##  Mean   : 270.5   vegan        :  3              Mean   :3.233   sehr zufrieden: 74    Inf  : 48
##  3rd Qu.: 350.0   vegetarisch  : 15              3rd Qu.:4.000   NA's           :146   WI   : 59
##  Max.   :2500.0   NA's         :205              Max.   :5.000                         NA's:381
##  NA's   :1                                       NA's   :162
```


1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Dateninspektion

Boxplots

```
for(attribute in c("Alter", "AlterV", "AlterM", "Geschwister",
                   "AusgSchuhe", "AusgKomm")) {
  data=MyData[, attribute]
  boxplot(data, # all rows, column of attribute
          col="lightblue",      # fill color
          lwd=3,                # line width
          cex=2,                 # character size
          oma=c(1,1,2,1)
          )
  text(0.7,max(data), attribute, srt=90, adj=1)
}
```



Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Konzentrationsmaße

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

- Gegeben: kardinale Werte $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$
- **Achtung!** Die Werte <u>müssen</u> aufsteigend sortiert werden!
- Lorenzkurve:

> Wieviel Prozent der Merkmalssumme entfällt auf die x Prozent kleinsten Merkmalsträger?

- **Beispiel:** Die 90 % ärmsten besitzen 20 % des Gesamtvermögens.
- Streckenzug: $(0{,}0),\ (u_1, v_1),\ \ldots,\ (u_n, v_n) = (1{,}1)$ mit

$$v_k = \text{Anteil der } k \text{ kleinsten MM-Träger an der MM-Summe} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}$$

$$u_k = \text{Anteil der } k \text{ kleinsten an der Gesamtzahl der MM-Träger} = \frac{k}{n}$$

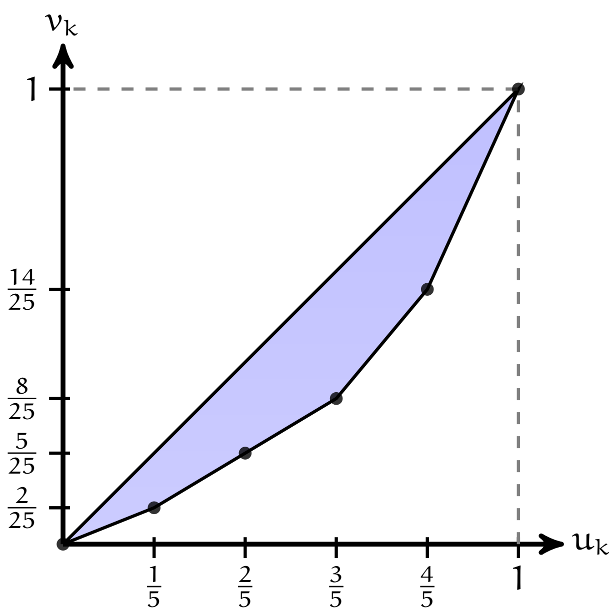
Lorenzkurve: Beispiel

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Markt mit fünf Unternehmen; Umsätze: 6, 3, 11, 2, 3 (Mio. €)

$\Rightarrow n = 5,\ \sum\limits_{k=1}^{5} x_k = 25$

k	1	2	3	4	5
x_k	2	3	3	6	11
p_k	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{11}{25}$
v_k	$\frac{2}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{14}{25}$	1
u_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1



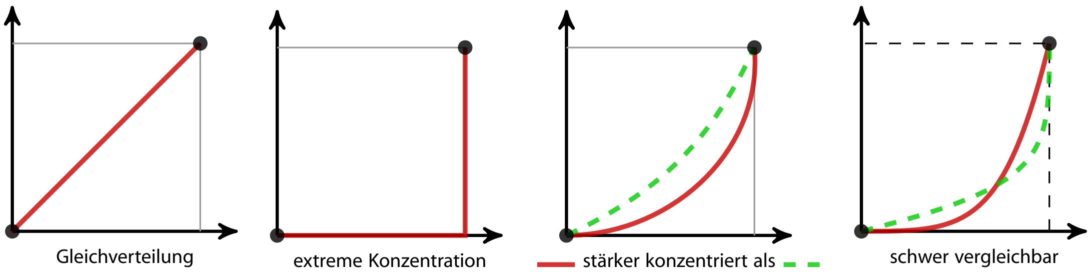
Lorenzkurve

Knickstellen:

- Bei i-tem Merkmalsträger $\iff x_{i+1} > x_i$
- Empirische Verteilungsfunktion liefert Knickstellen:

a_j	2	3	6	11
$h(a_j)$	1	2	1	1
$f(a_j)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
$F(a_j)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1

Vergleich von Lorenzkurven:



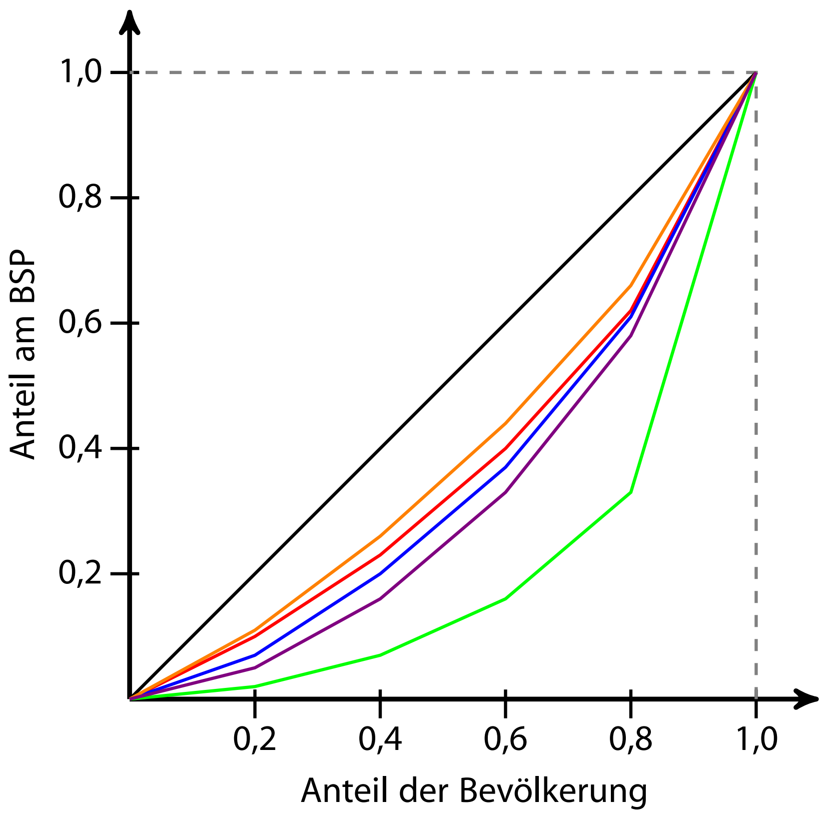
Lorenzkurve: Beispiel Bevölkerungsanteil gegen BSP

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Bangladesch
Brasilien
Deutschland
Ungarn
USA

(Stand 2000)



Gini-Koeffizient

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

- Numerisches Maß der Konzentration: Gini-Koeffizient G

$$G = \frac{\text{Fläche zwischen } 45°\text{-Linie und } L}{\text{Fläche unter } 45°\text{-Linie}} =$$

- Aus den Daten:

$$G = \frac{2\sum_{i=1}^{n} i x_i - (n+1)\sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{2\sum_{i=1}^{n} i p_i - (n+1)}{n} \quad \text{wobei} \quad p_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

- Problem: $G_{\max} = \frac{n-1}{n}$

⇒ Normierter Gini-Koeffizient:

$$G_* = \frac{n}{n-1} \cdot G \in [0; 1]$$

Gini-Koeffizient: Beispiel

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Beispiel:

i	1	2	3	4	$\sum$
x_i	1	2	2	15	20
p_i	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{15}{20}$	1

$$G = \frac{2 \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{20} + 2 \cdot \frac{2}{20} + 3 \cdot \frac{2}{20} + 4 \cdot \frac{15}{20}\right) - (4+1)}{4} = 0{,}525$$

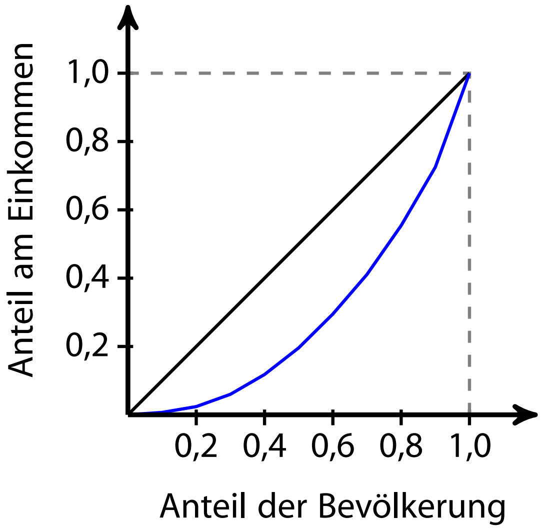
Mit $G_{\max} = \frac{4-1}{4} = 0{,}75$ folgt

$$G_* = \frac{4}{4-1} \cdot 0{,}525 = 0{,}7$$

Konzentrationsmaße: Beispiel

Armutsbericht der Bundesregierung 2008

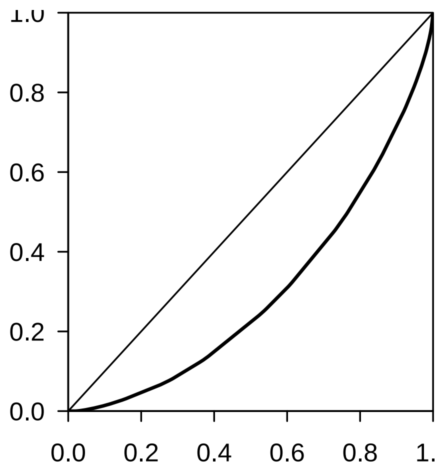
- Verteilung der Bruttoeinkommen in Preisen von 2000
- aus unselbständiger Arbeit der Arbeitnehmer/-innen insgesamt

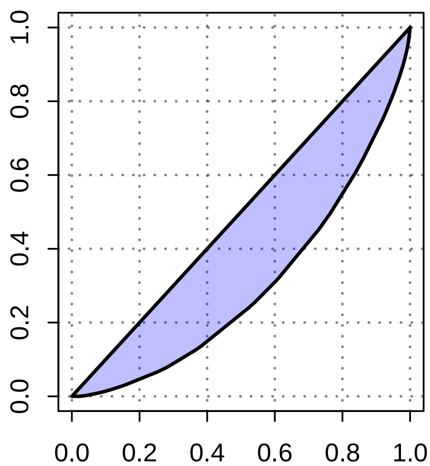


	2002	2003	2004	2005
Arithmetisches Mittel	24.873	24.563	23.987	23.648
Median	21.857	21.531	20.438	20.089
Gini-Koeffizient	0,433	0,441	0,448	0,453

Lorenzkurve mit R

```
require(ineq) # inequality Paket
Lorenz = Lc(na.exclude(MyData$AusgSchuhe))
   plot(Lorenz, xlab="", ylab="", main="") # Standard plot
   plot(c(0,1), c(0,1), type="n", # bisschen netter
       panel.first=grid(lwd=1.5, col=rgb(0,0,0,1/2)),
       xlab="", main="", ylab="")
   polygon(Lorenz$p, Lorenz$L, density=-1, col=rgb(0,0,1,1/4), lwd=2)
```






```
Gini(na.exclude(AusgSchuhe)) # Gini-Koeffizient

## [1] 0.4069336
```


Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Weitere Konzentrationsmaße

- Konzentrationskoeffizient:

$$CR_g = \text{Anteil, der auf die } g \text{ größten entfällt} = \sum_{i=n-g+1}^{n} p_i = 1 - v_{n-g}$$

- Herfindahl-Index:

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \qquad (\in [\tfrac{1}{n}; 1])$$

Es gilt: $H = \frac{1}{n}(V^2 + 1)$ bzw. $V = \sqrt{n \cdot H - 1}$

- Exponentialindex:

$$E = \prod_{i=1}^{n} p_i^{p_i} \qquad (\in [\tfrac{1}{n}; 1]) \qquad \text{wobei} \qquad 0^0 = 1$$

- Im Beispiel mit $x = (1, 2, 2, 15)$:

$$CR_2 = \frac{17}{20} = 0{,}85$$

$$H = \left(\frac{1}{20}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{15}{20}\right)^2 = 0{,}59$$

$$E = \left(\frac{1}{20}\right)^{\frac{1}{20}} \cdots \left(\frac{15}{20}\right)^{\frac{15}{20}} = 0{,}44$$

Auswertungsmethoden für zweidimensionale Daten

Zweidimensionale Urliste

Urliste vom Umfang n zu **zwei** Merkmalen X und Y:

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad \ldots, \quad (x_n, y_n)$$

Kontingenztabelle:

Sinnvoll bei wenigen Ausprägungen bzw. bei klassierten Daten.

	Ausprägungen von Y			
Ausprägungen von X	b_1	b_2	$\ldots$	b_l
a_1	h_{11}	h_{12}	$\ldots$	h_{1l}
a_2	h_{21}	h_{22}	$\ldots$	h_{2l}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
a_k	h_{k1}	h_{k2}	$\ldots$	h_{kl}

Kontingenztabelle

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Unterscheide:

- **Gemeinsame Häufigkeiten:**

$$h_{ij} = h(a_i, b_j)$$

- **Randhäufigkeiten:**

$$h_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{l} h_{ij} \quad \text{und} \quad h_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{k} h_{ij}$$

- **Bedingte (relative) Häufigkeiten:**

$$f_1(a_i \mid b_j) = \frac{h_{ij}}{h_{\cdot j}} \quad \text{und} \quad f_2(b_j \mid a_i) = \frac{h_{ij}}{h_{i\cdot}}$$

Häufigkeiten

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Beispiel: 400 unfallbeteiligte Autoinsassen:

	leicht verletzt ($= b_1$)	schwer verletzt ($= b_2$)	tot ($= b_3$)	
angegurtet ($= a_1$)	264 ($= h_{11}$)	90 ($= h_{12}$)	6 ($= h_{13}$)	360 ($= h_{1\cdot}$)
nicht angegurtet ($= a_2$)	2 ($= h_{21}$)	34 ($= h_{22}$)	4 ($= h_{23}$)	40 ($= h_{2\cdot}$)
	266 ($= h_{\cdot 1}$)	124 ($= h_{\cdot 2}$)	10 ($= h_{\cdot 3}$)	400 ($= n$)

$f_2(b_3 \mid a_2) = \frac{4}{40} = 0{,}1$ (10 % der nicht angegurteten starben.)

$f_1(a_2 \mid b_3) = \frac{4}{10} = 0{,}4$ (40 % der Todesopfer waren nicht angegurtet.)

Streuungsdiagramm

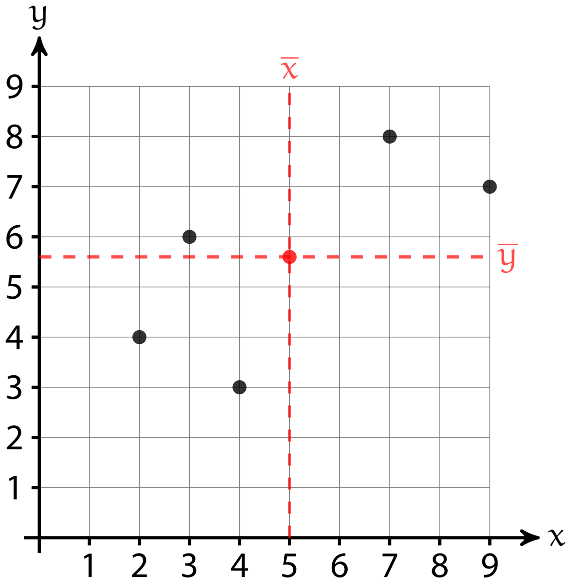
Streuungsdiagramm sinnvoll bei vielen verschiedenen Ausprägungen (z.B. stetige Merkmale)

➠ Alle (x_i, y_i) sowie $(\bar{x}, \bar{y})$ in Koordinatensystem eintragen.

Beispiel:

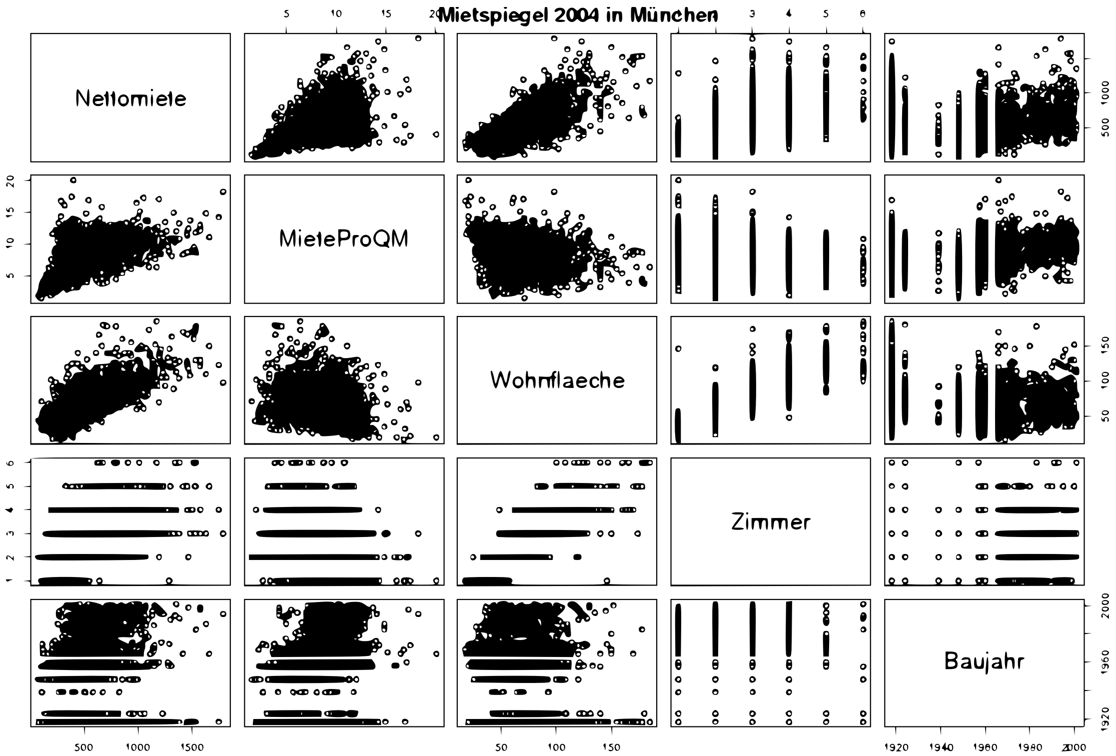
i	1	2	3	4	5	$\sum$
x_i	2	4	3	9	7	25
y_i	4	3	6	7	8	28

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{25}{5} = 5$$
$$\bar{y} = \frac{28}{5} = 5{,}6$$



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Beispiel Streuungsdiagramm

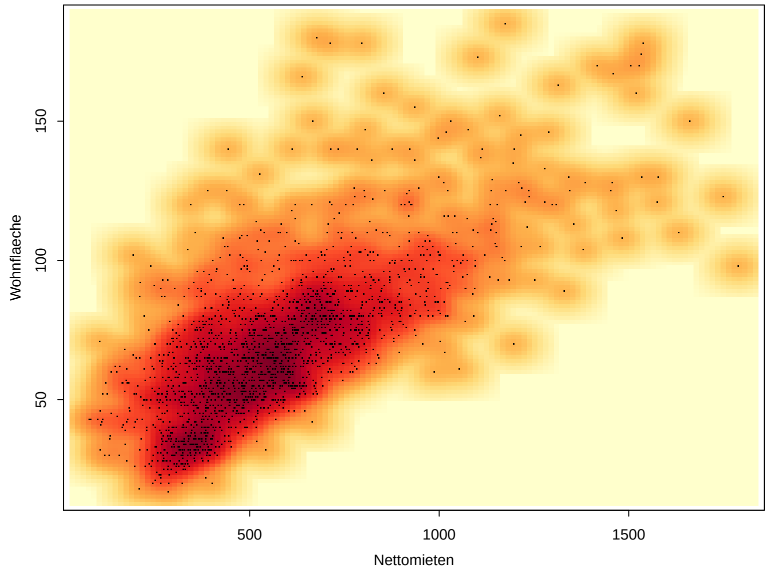


(Datenquelle: Fahrmeir u. a., (2009))

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Beispiel Streuungsdiagramm

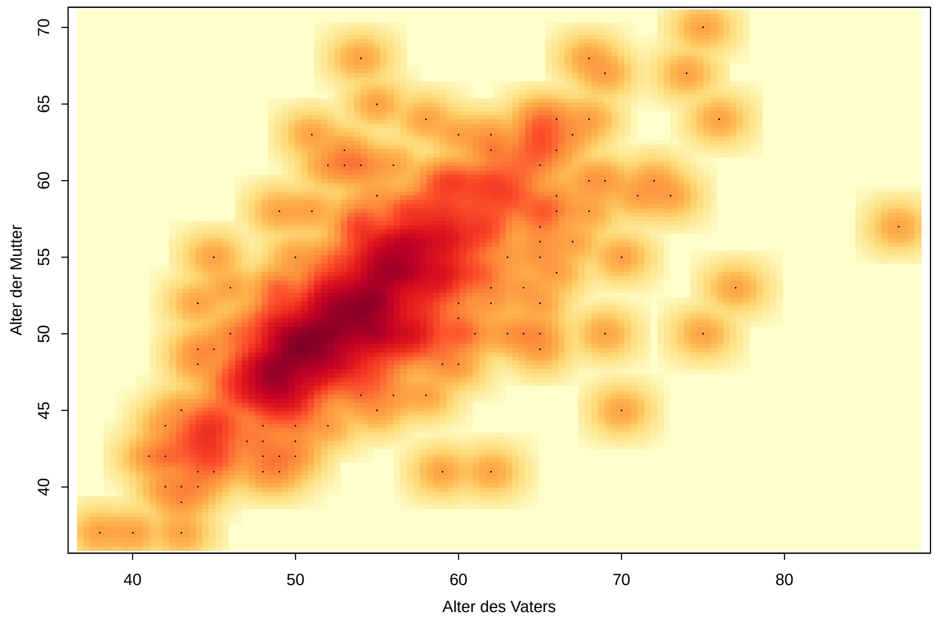
```r
if (!require("RColorBrewer")) {
install.packages("RColorBrewer")
library(RColorBrewer)
}
mieten <- read.table('http://goo.gl/jhpJW4', header=TRUE, sep='\t',
                     check.names=TRUE, fill=TRUE, na.strings=c('',''))
x <- cbind(Nettomieten=mieten$nm, Wohnflaeche=mieten$wfl)

library("geneplotter")  ## from BioConductor
smoothScatter(x, nrpoints=Inf,
              colramp=colorRampPalette(brewer.pal(9,"YlOrRd")),
              bandwidth=c(30,3))
```



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Beispiel Streuungsdiagramm

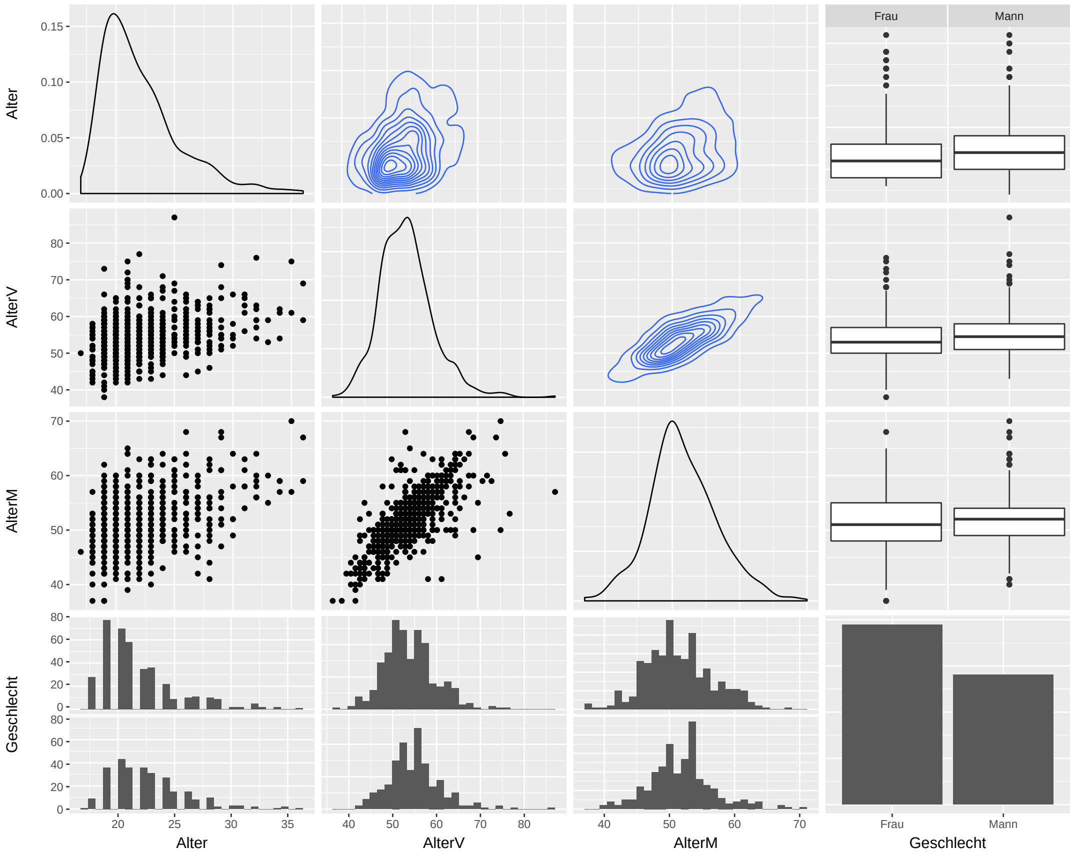
```r
x = cbind("Alter des Vaters"=AlterV, "Alter der Mutter"=AlterM)
require("geneplotter") ## from BioConductor
smoothScatter(x, colramp=colorRampPalette(brewer.pal(9,"YlOrRd")) )
```



Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

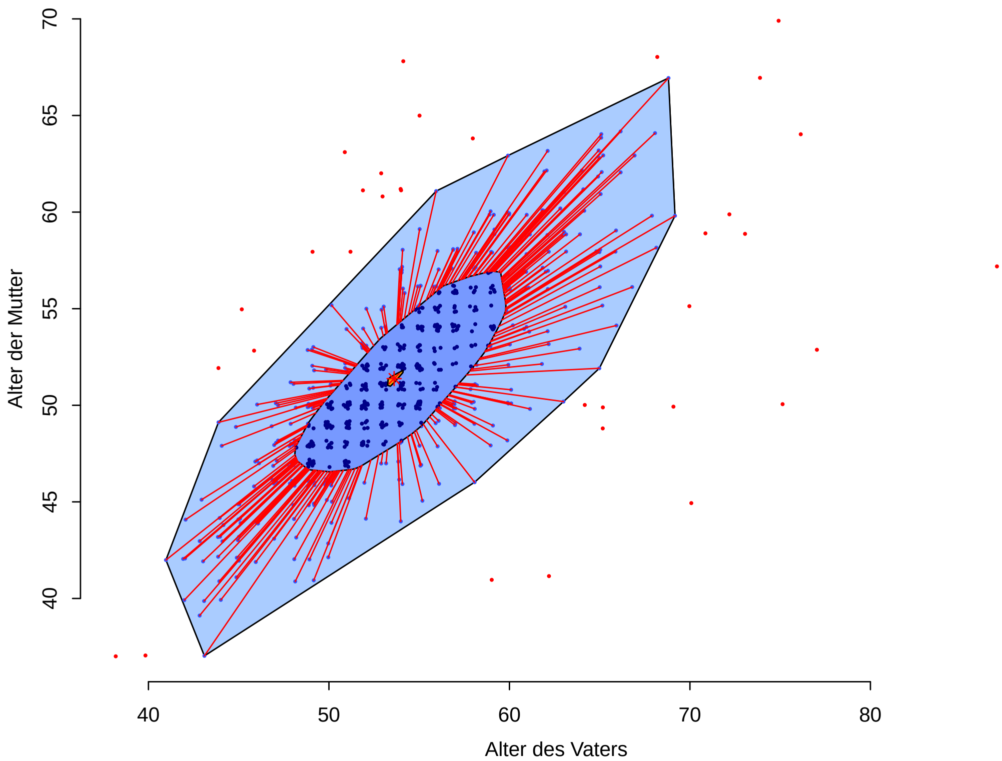
```r
require(GGally)
ggpairs(MyData[, c("Alter", "AlterV", "AlterM", "Geschlecht")],
        upper = list(continuous = "density", combo = "box"),
        color='Geschlecht', alpha=0.5)
```



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Bagplot: Boxplot in 2 Dimensionen

```r
require(aplpack)
bagplot(jitter(AlterV), jitter(AlterM), xlab="Alter des Vaters", ylab="Alter der Mutter")

## [1] "Warning: NA elements have been exchanged by median values!!"
```

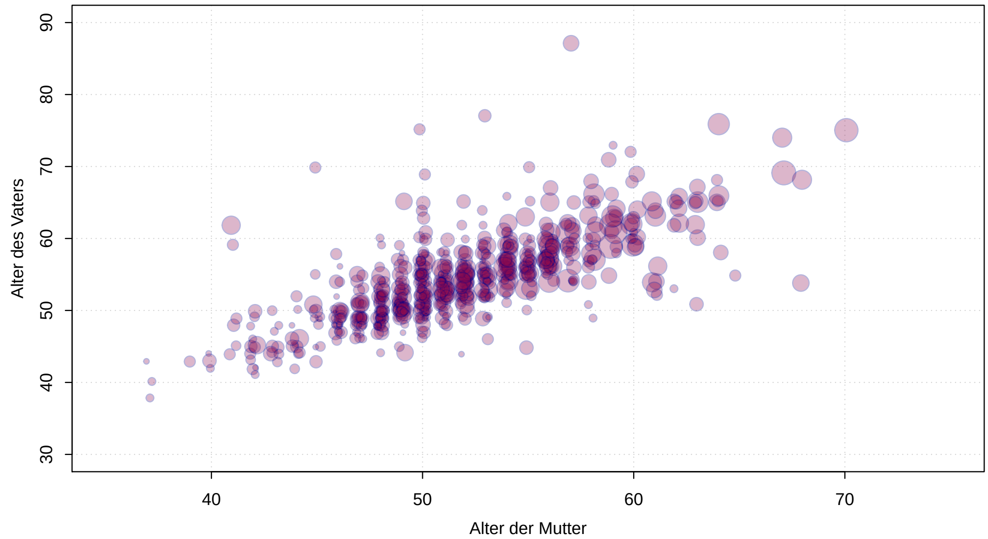


Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Bubbleplot: 3 metrische Variablen

```
require(DescTools)
My.ohne.NA = na.exclude(MyData[,c("AlterM", "AlterV", "Alter")])
with(My.ohne.NA, {
  Alter.skaliert = (Alter-min(Alter))/(max(Alter)-min(Alter))
  PlotBubble(jitter(AlterM), jitter(AlterV), Alter.skaliert,
             col=SetAlpha("deeppink4",0.3),
             border=SetAlpha("darkblue",0.3),
             xlab="Alter der Mutter", ylab="Alter des Vaters",
             panel.first=grid(),
             main="")
  })
```

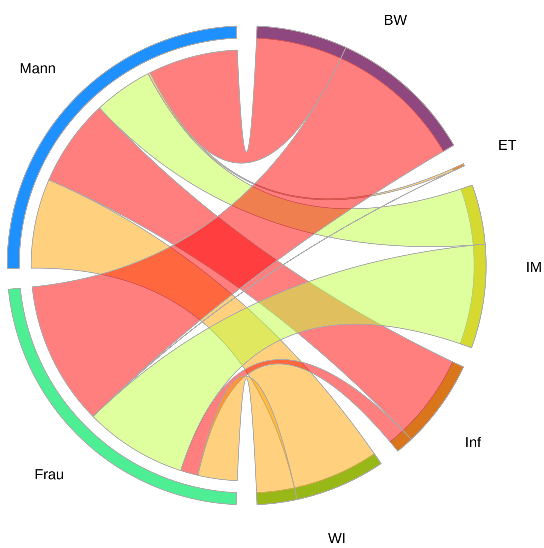


Größe der Blasen: Alter zwischen 0 (Jüngster) und 1 (Ältester)

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Circular Plots: Assoziationen

```
require(DescTools)
with(MyData, {
PlotCirc(table(Studiengang, Geschlecht),
acol=c("dodgerblue","seagreen2","limegreen","olivedrab2","goldenrod2","tomato2"),
rcol=SetAlpha(c("red","orange","olivedrab1"), 0.5)
)})
```



Gute Idee: Noch Experimentell

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Korrelationsrechnung

- Frage: Wie stark ist der Zusammenhang zwischen X und Y?
- Dazu: Korrelationskoeffizienten
- Verschiedene Varianten: Wahl abhängig vom Skalenniveau von X und Y:

	Skalierung von Y		
Skalierung von X	kardinal	ordinal	nominal
kardinal	Bravais-Pearson-Korrelationskoeffizient		
ordinal		Rangkorrelationskoeffizient von Spearman	
nominal			Kontingenzkoeffizient

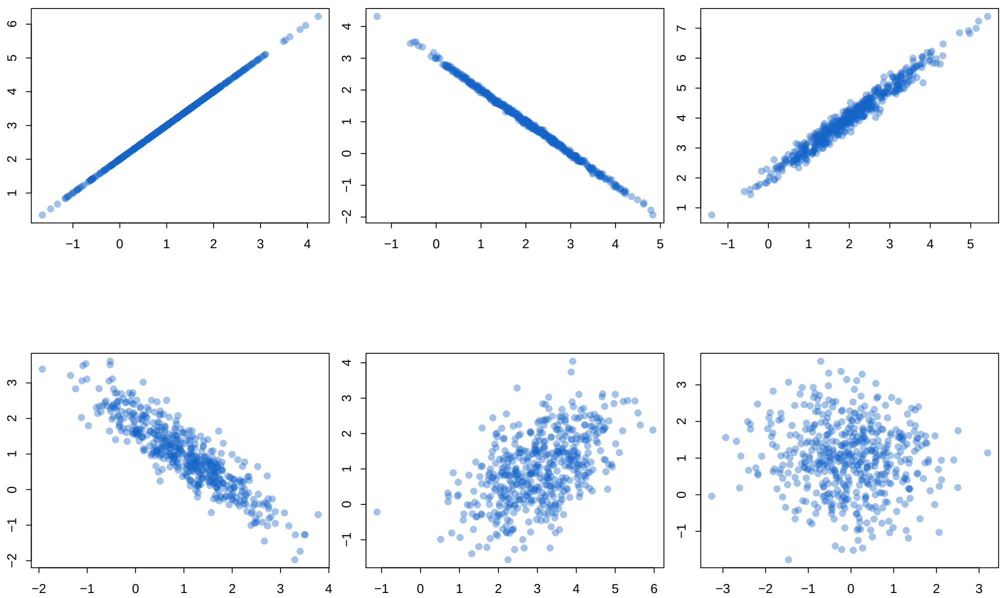
Korrelationskoeffizient von Bravais und Pearson

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Bravais-Pearson-Korrelationskoeffizient
Voraussetzung: X, Y kardinalskaliert

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2}} \in [-1; +1]$$



Bravais-Pearson-Korrelationskoeffizient

Im Beispiel:

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	2	4	4	16	8
2	4	3	16	9	12
3	3	6	9	36	18
4	9	7	81	49	63
5	7	8	49	64	56
$\sum$	25	28	159	174	157

$$\Rightarrow \quad \bar{x} = 25/5 = 5 \qquad \bar{y} = 28/5 = 5{,}6$$

$$r = \frac{157 - 5 \cdot 5 \cdot 5{,}6}{\sqrt{159 - 5 \cdot 5^2}\sqrt{174 - 5 \cdot 5{,}6^2}} = 0{,}703$$

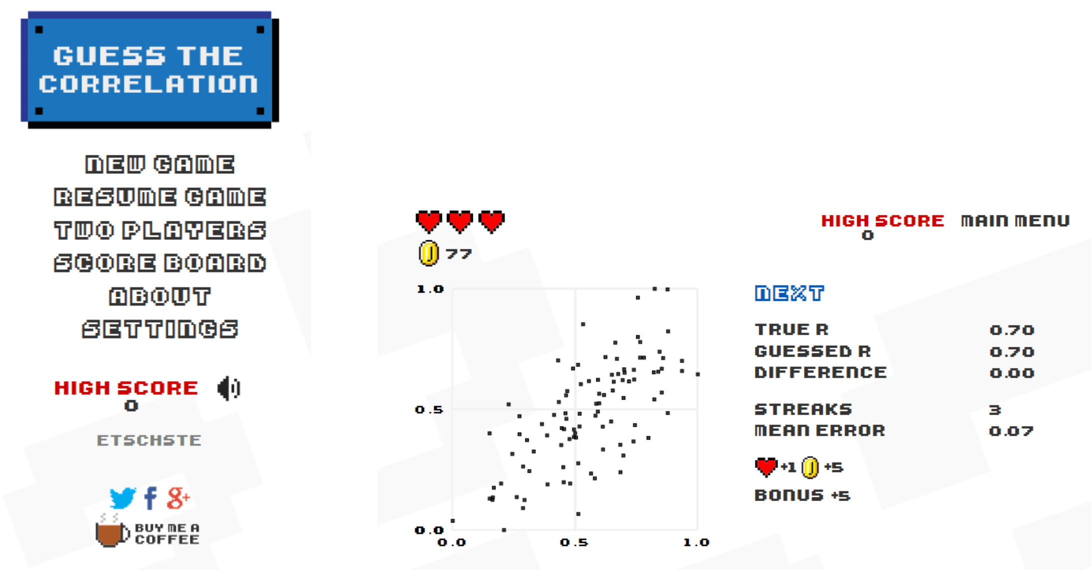
(deutliche positive Korrelation)

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

Guess The Correlation

guessthecorrelation.com



Go for the Highscore!

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Rangkorrelationskoeffizient von Spearman

- Voraussetzungen: X, Y (mindestens) ordinalskaliert, Ränge eindeutig (keine Doppelbelegung von Rängen)
- Vorgehensweise:
  1. Rangnummern R_i (X) bzw. R_i' (Y) mit $R_i^{(\prime)} = 1$ bei größtem Wert usw.
  2. Berechne

$$r_{SP} = 1 - \frac{6 \sum\limits_{i=1}^{n} (R_i - R_i')^2}{(n-1)\,n\,(n+1)} \in [-1;+1]$$

- Hinweise:
  - $r_{SP} = +1$ wird erreicht bei $R_i = R_i' \quad \forall i = 1, \ldots, n$
  - $r_{SP} = -1$ wird erreicht bei $R_i = n + 1 - R_i' \quad \forall i = 1, \ldots, n$
- Falls Ränge nicht eindeutig: Bindungen, dann Berechnung von r_{SP} über Ränge und Formel des Korr.-Koeff. von Bravais-Pearson

Rangkorrelationskoeffizient von Spearman

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Im Beispiel:

x_i	R_i	y_i	R_i'
2	5	4	4
4	3	3	5
3	4	6	3
9	1	7	2
7	2	8	1

$$r_{SP} = 1 - \frac{6 \cdot [(5-4)^2 + (3-5)^2 + (4-3)^2 + (1-2)^2 + (2-1)^2]}{(5-1) \cdot 5 \cdot (5+1)} = 0{,}6$$

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Kontingenzkoeffizient

- Gegeben: Kontingenztabelle mit k Zeilen und l Spalten (vgl. hier)
- Vorgehensweise:
  ① Ergänze Randhäufigkeiten

$$h_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{l} h_{ij} \qquad \text{und} \qquad h_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{k} h_{ij}$$

  ② Berechne theoretische Häufigkeiten

$$\tilde{h}_{ij} = \frac{h_{i\cdot} \cdot h_{\cdot j}}{n}$$

  ③ Berechne

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{(h_{ij} - \tilde{h}_{ij})^2}{\tilde{h}_{ij}}$$

  χ^2 hängt von n ab! $(h_{ij} \mapsto 2 \cdot h_{ij} \Rightarrow \chi^2 \mapsto 2 \cdot \chi^2)$

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Kontingenzkoeffizient

④ **Kontingenzkoeffizient:**

$$K = \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}} \quad \in [0; K_{\max}]$$

wobei

$$K_{\max} = \sqrt{\frac{M-1}{M}} \qquad \text{mit} \qquad M = \min\{k, l\}$$

⑤ **Normierter Kontingenzkoeffizient:**

$$K_* = \frac{K}{K_{\max}} \quad \in [0; 1]$$

$K_* = +1 \iff$
bei Kenntnis von x_i kann y_i erschlossen werden u.u.

Kontingenzkoeffizient

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Beispiel

$X:$ Staatsangehörigkeit (d,a)
$Y:$ Geschlecht (m,w)

h_{ij}	m	w	$h_{i\cdot}$
d	30	30	60
a	10	30	40
$h_{\cdot j}$	40	60	100

$\Rightarrow$

$\tilde{h}_{ij}$	m	w
d	24	36
a	16	24

wobei $\tilde{h}_{11} = \frac{60 \cdot 40}{100} = 24$ usw.

$$\chi^2 = \frac{(30-24)^2}{24} + \frac{(30-36)^2}{36} + \frac{(10-16)^2}{16} + \frac{(30-24)^2}{24} = 6{,}25$$

$$K = \sqrt{\frac{6{,}25}{100+6{,}25}} = 0{,}2425; \qquad M = \min\{2,2\} = 2; \qquad K_{\max} = \sqrt{\frac{2-1}{2}} = 0{,}7071$$

$$K_* = \frac{0{,}2425}{0{,}7071} = 0{,}3430$$

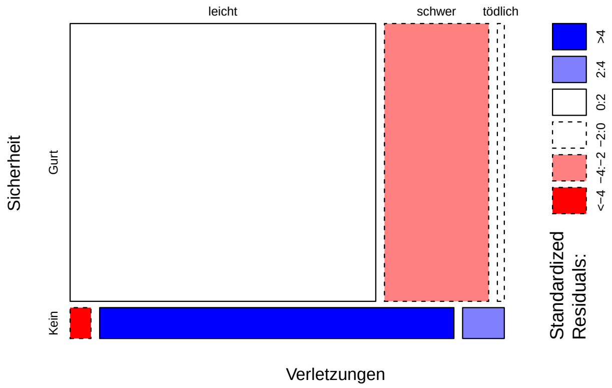
Graphische Repräsentation von Kontingenztabellen

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Beispiel Autounfälle

	Verletzung			
	leicht	schwer	tödlich	
angegurtet	264	90	6	360
nicht angegurtet	2	34	4	40
	266	124	10	400



Mosaikplot Autounfälle

Preisindizes

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

- **Preismesszahl**: Misst Preisveränderung eines einzelnen Gutes:

$$\frac{\text{Preis zum Zeitpunkt } j}{\text{Preis zum Zeitpunkt } i}$$

dabei: j: Berichtsperiode, i: Basisperiode

- **Preisindex**: Misst Preisveränderung mehrerer Güter (Aggregation von Preismesszahlen durch Gewichtung)
- Notation:

$p_0(i)$:	Preis	des i-ten Gutes in Basisperiode	0
$p_t(i)$:	Preis	des i-ten Gutes in Berichtsperiode	t
$q_0(i)$:	Menge	des i-ten Gutes in Basisperiode	0
$q_t(i)$:	Menge	des i-ten Gutes in Berichtsperiode	t

Preisindizes

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

- Gleichgewichteter Preisindex:

$$P^G_{0t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{p_t(i)}{p_0(i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_t(i)}{p_0(i)} \cdot g(i) \qquad \text{mit} \qquad g(i) = \frac{1}{n}$$

Nachteil: Auto und Streichhölzer haben gleiches Gewicht
Lösung: Preise mit Mengen gewichten!

- Preisindex von Laspeyres:

$$P^L_{0t} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_t(i) q_0(i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_0(i) q_0(i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_t(i)}{p_0(i)} \cdot g_0(i) \qquad \text{mit} \qquad g_0(i) = \frac{p_0(i)\, q_0(i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_0(j)\, q_0(j)}$$

- Preisindex von Paasche:

$$P^P_{0t} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_t(i) q_t(i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_0(i) q_t(i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_t(i)}{p_0(i)} \cdot g_t(i) \qquad \text{mit} \qquad g_t(i) = \frac{p_0(i)\, q_t(i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_0(j)\, q_t(j)}$$

Preisindizes: Beispiel

Warenkorb: Kartoffeln und Kaffee

	1950		2013	
	Preis (€)	Menge pro Woche	Preis (€)	Menge pro Woche
1 kg Kartoffeln	0,04	3,58	1,10	1,25
100 g Kaffeebohnen	3,00	0,25	0,70	1,31

$$P^L_{1950,\,2013} = \frac{1{,}10 \cdot 3{,}58 + 0{,}70 \cdot 0{,}25}{0{,}04 \cdot 3{,}58 + 3{,}00 \cdot 0{,}25} \approx 4{,}6048$$

$$P^P_{1950,\,2013} = \frac{1{,}10 \cdot 1{,}25 + 0{,}70 \cdot 1{,}31}{0{,}04 \cdot 1{,}25 + 3{,}00 \cdot 1{,}31} \approx 0{,}5759$$

Weitere Preisindizes

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Idealindex von Fisher:

$$P^F_{0t} = \sqrt{P^L_{0t} P^P_{0t}}$$

Marshall-Edgeworth-Index:

$$P^{ME}_{0t} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_t(i)[q_0(i) + q_t(i)]}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_0(i)[q_0(i) + q_t(i)]}$$

Preisindex von Lowe:

$$P^{LO}_{0t} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_t(i)q(i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_0(i)q(i)}$$

wobei $q(i) \widehat{=} \begin{cases} \text{Durchschn. Menge von} \\ \text{Gut } i \text{ über alle (bekannten)} \\ \text{Perioden} \end{cases}$

Weitere Preisindizes: Beispiel

Warenkorb: Kartoffeln und Kaffee

	1950		2013	
	Preis (€)	Menge pro Woche	Preis (€)	Menge pro Woche
1 kg Kartoffeln	0,04	3,58	1,10	1,25
100 g Kaffeebohnen	3,00	0,25	0,70	1,31

$$P^{F}_{1950,2013} \approx \sqrt{4{,}6048 \cdot 0{,}5759} = 1{,}6284$$

$$P^{ME}_{1950,2013} = \frac{1{,}10 \cdot (3{,}58 + 1{,}25) + 0{,}70 \cdot (0{,}25 + 1{,}31)}{0{,}04 \cdot (3{,}58 + 1{,}25) + 3{,}00 \cdot (0{,}25 + 1{,}31)} = 1{,}3143$$

$$P^{Lo}_{1950,2013} = \frac{1{,}10 \cdot 2{,}5 + 0{,}70 \cdot 0{,}75}{0{,}04 \cdot 2{,}5 + 3{,}00 \cdot 0{,}75} = 1{,}3936$$

Annahme bei P^{LO}: Durchschn. Mengen bei Kartoffeln bzw. Kaffebohnen von 1950 bis 2013 sind 2,5 bzw. 0,75.

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Ausgangsdaten

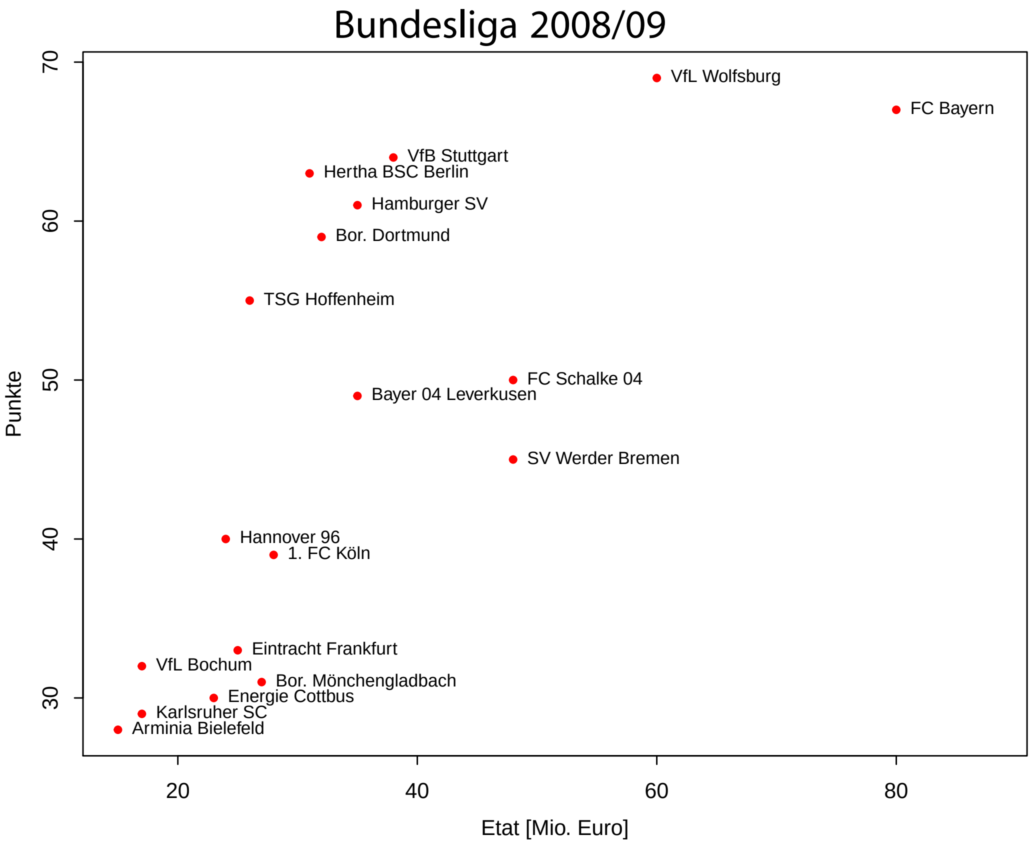
Bundesliga 2008/2009

- Gegeben: Daten zu den 18 Vereinen der ersten Bundesliga in der Saison 2008/09
- Merkmale: **Vereinsetat** für Saison (nur direkte Gehälter und Spielergehälter)
- und **Ergebnispunkte** in Tabelle am Ende der Saison

	Etat	Punkte
FC Bayern	80	67
VfL Wolfsburg	60	69
SV Werder Bremen	48	45
FC Schalke 04	48	50
VfB Stuttgart	38	64
Hamburger SV	35	61
Bayer 04 Leverkusen	35	49
Bor. Dortmund	32	59
Hertha BSC Berlin	31	63
1. FC Köln	28	39
Bor. Mönchengladbach	27	31
TSG Hoffenheim	26	55
Eintracht Frankfurt	25	33
Hannover 96	24	40
Energie Cottbus	23	30
VfL Bochum	17	32
Karlsruher SC	17	29
Arminia Bielefeld	15	28

(Quelle: Welt)

Darstellung der Daten in Streuplot



Trend als lineares Modell

- Kann man die **Tabellenpunkte** näherungsweise über einfache Funktion **in Abhängigkeit des Vereinsetats** darstellen?
- Allgemein: Darstellung einer Variablen Y als Funktion von X:

$$y = f(x)$$

- Dabei:
  - X heißt Regressor bzw. unabhängige Variable
  - Y heißt Regressand bzw. abhängige Variable
- Wichtiger (und einfachster) Spezialfall: f beschreibt einen linearen Trend:

$$y = a + b\,x$$

- Dabei anhand der Daten zu schätzen: a (Achsenabschnitt) und b (Steigung)
- Schätzung von a und b: Lineare Regression

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Fehlerquadratsumme

- Pro Datenpunkt gilt mit Regressionsmodell:

$$y_i = a + bx_i + \epsilon_i$$

- Dabei: ϵ_i ist jeweils Fehler (der Grundgesamtheit),
- mit $e_i = y_i - (\hat{a} + \hat{b}x_i)$: Abweichung (Residuen) zwischen gegebenen Daten der Stichprobe und durch Modell geschätzten Werten
- Modell gut wenn alle Residuen e_i zusammen möglichst klein
- Einfache Summe aber nicht möglich, denn e_i positiv oder negativ
- Deswegen: Summe der Quadrate von e_i
- Prinzip der kleinsten Quadrate: Wähle a und b so, dass

$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + bx_i)]^2 \to \min$$

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Beste Lösung

- Beste und eindeutige Lösung:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\,\bar{x}$$

- Regressionsgerade:

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}\,x$$

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Bundesligabeispiel

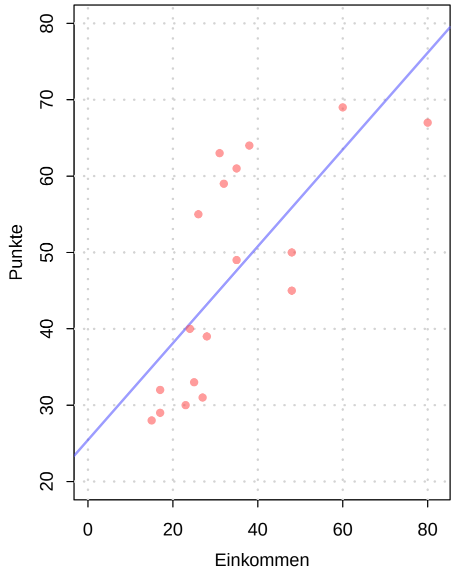
- Berechnung eines linearen Modells der Bundesligadaten
- dabei: Punkte $\hat{=}\, y$ und Etat $\hat{=}\, x$:

$\bar{x}$	33,83
$\bar{y}$	46,89
$\sum x_i^2$	25209
$\sum x_i y_i$	31474
n	18

$$\Rightarrow \hat{b} = \frac{31474 - 18 \cdot 33{,}83 \cdot 46{,}89}{25209 - 18 \cdot 33{,}83^2} \approx 0{,}634$$

$$\Rightarrow \hat{a} = 46{,}89 - \hat{b} \cdot 33{,}83 \approx 25{,}443$$

- Modell: $\hat{y} = 25{,}443 + 0{,}634 \cdot x$



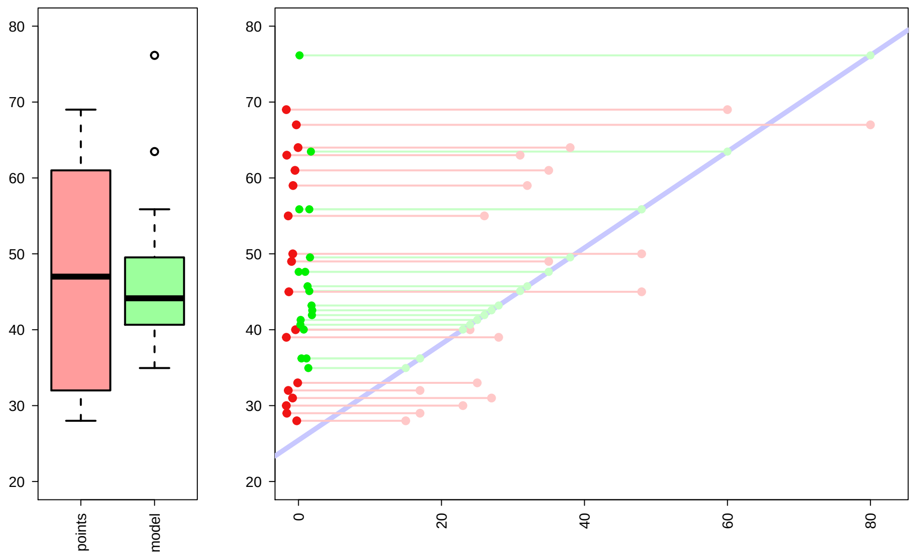
- Prognosewert für Etat $= 30$:

$$\hat{y}(30) = 25{,}443 + 0{,}634 \cdot 30 \approx 44{,}463$$

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Varianz und Information

- **Varianz** der Daten in abhängiger Variablen y_i als Repräsentant des **Information**sgehalts
- Ein Bruchteil davon kann in Modellwerten $\hat{y}_i$ abgebildet werden



- Empirische Varianz (mittlere quadratische Abweichung) für „rot“ bzw. „grün“ ergibt jeweils

$$\frac{1}{18}\sum_{i=1}^{18}(y_i - \bar{y})^2 \approx 200{,}77 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{1}{18}\sum_{i=1}^{18}(\hat{y}_i - \bar{y})^2 \approx 102{,}78$$

Determinationskoeffizient

- Gütemaß für die Regression: Determinationskoeffizient (Bestimmtheitskoeffizient):

$$R^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \hat{y}_i^2 - n\bar{y}^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2} = r^2 \in [0;1]$$

- Mögliche Interpretation von R^2:
  Durch die Regression erklärter Anteil der Varianz
- $R^2 = 0$ wird erreicht wenn X, Y unkorreliert
  $R^2 = 1$ wird erreicht wenn $\hat{y}_i = y_i \; \forall i$ (alle Punkte auf Regressionsgerade)
- Im (Bundesliga-)Beispiel:

$$R^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{18} (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum\limits_{i=1}^{18} (y_i - \bar{y})^2} \approx \frac{102{,}78}{200{,}77} \approx 51{,}19\,\%$$

Regression: 4 eindimensionale Beispiele

- Berühmte Daten aus den 1970er Jahren:

i	x_{1i}	x_{2i}	x_{3i}	x_{4i}	y_{1i}	y_{2i}	y_{3i}	y_{4i}
1	10	10	10	8	8,04	9,14	7,46	6,58
2	8	8	8	8	6,95	8,14	6,77	5,76
3	13	13	13	8	7,58	8,74	12,74	7,71
4	9	9	9	8	8,81	8,77	7,11	8,84
5	11	11	11	8	8,33	9,26	7,81	8,47
6	14	14	14	8	9,96	8,10	8,84	7,04
7	6	6	6	8	7,24	6,13	6,08	5,25
8	4	4	4	19	4,26	3,10	5,39	12,50
9	12	12	12	8	10,84	9,13	8,15	5,56
10	7	7	7	8	4,82	7,26	6,42	7,91
11	5	5	5	8	5,68	4,74	5,73	6,89

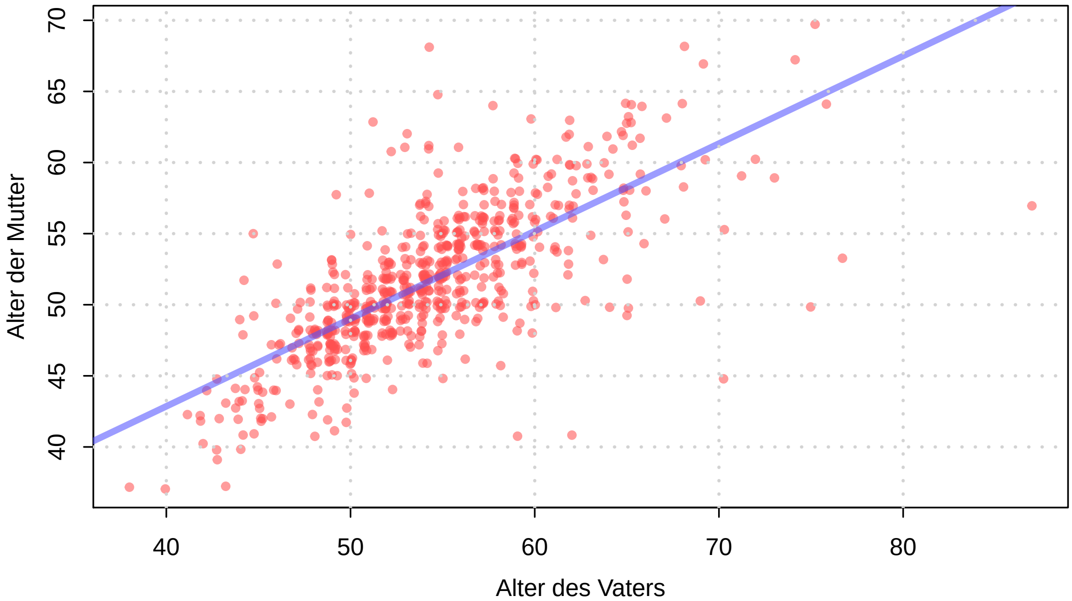
(Quelle: Anscombe, (1973))

Beispieldaten

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
   - Häufigkeiten
   - Lage und Streuung
   - Konzentration
   - Zwei Merkmale
   - Korrelation
   - Preisindizes
   - Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

```
meineRegression = lm(AlterM ~ AlterV)
meineRegression

plot(AlterV, AlterM,
     xlab="Alter des Vaters",
     ylab="Alter der Mutter")
abline(meineRegression)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = AlterM ~ AlterV)
##
## Coefficients:
## (Intercept)       AlterV
##      18.2234       0.6159
```



Cook's Distanz

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
   - Häufigkeiten
   - Lage und Streuung
   - Konzentration
   - Zwei Merkmale
   - Korrelation
   - Preisindizes
   - Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

- Oft Kritisch: Einzelne Punkte, die Modell stark beeinflussen
- Idee: Was würde sich ändern, wenn solche Punkte weggelassen würden?
- Cook-Distanz: Misst den Effekt eines gelöschten Objekts
- Formel für ein lineares Modell mit einem unabh. Merkmal:

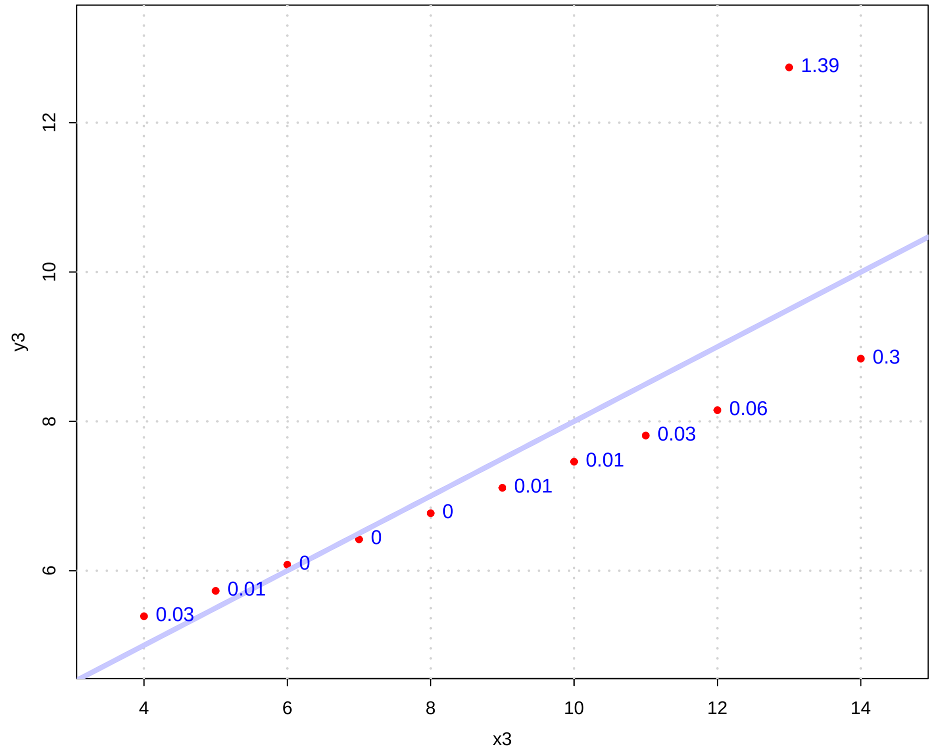
$$D_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} (\hat{y}_j - \hat{y}_{j(\text{ohne } i)})^2}{\text{MSE}}$$

- Dabei bedeutet:
  - $\hat{y}_j$: Prognosewert des kompletten Modells für das j-te Objekt
  - $\hat{y}_{j(\text{ohne } i)}$: Prognosewert des Modells ohne Objekt i für das j-te Objekt
  - $\text{MSE} = \frac{1}{n} \cdot \sum (\hat{y}_i - y_i)^2$: Normierender Term (Schätzwert für Fehlerstreuung)

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Ausreißer?

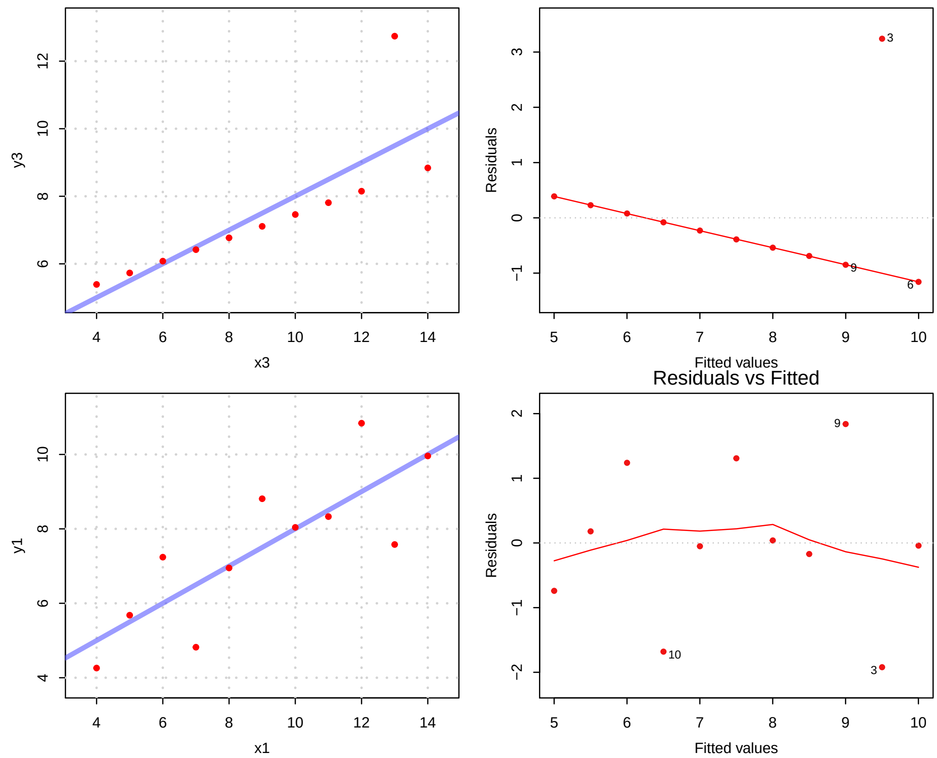
- Anscombe-Daten: Regressionsmodell Nr. 3
- Darstellung der Cook-Distanz neben Punkten
- Faustformel: Werte über 1 sollten genau untersucht werden



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Residualanalyse

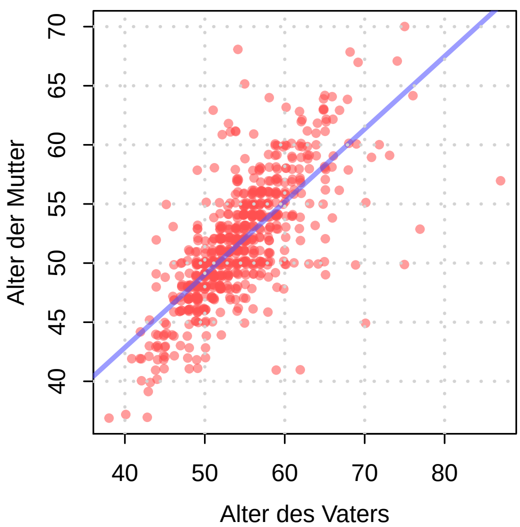
- Oft aufschlussreich: Verteilung der Residuen e_i
- Verbreitet: Graphische Darstellungen der Residuen
- Z.B.: e_i über $\hat{y}_i$

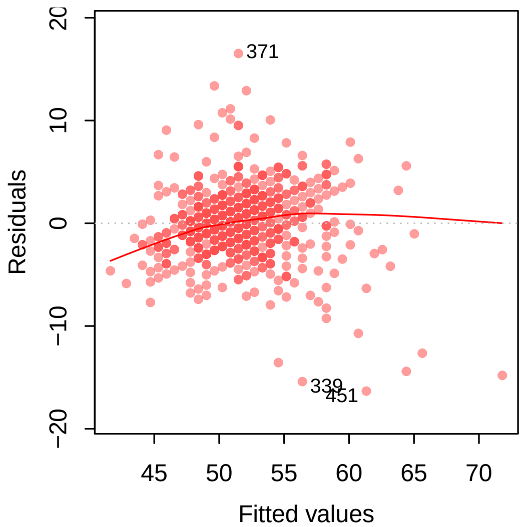


Residualanalyse

Wichtige Eigenschaften der Residuenverteilung

- Möglichst keine systematischen Muster
- Keine Änderung der Varianz in Abhängigkeit von $\hat{y}_i$ (Homoskedastizität)
- Nötig für inferentielle Analysen: Näherungsweise Normalverteilung der Residuen (q-q-plots)





Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
Häufigkeiten
Lage und Streuung
Konzentration
Zwei Merkmale
Korrelation
Preisindizes
Lineare Regression
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Kausalität versus Korrelation

Exkurs: Kausalität vs. Korrelation

- Meist wichtig für sinnvolle Regressionsanalysen:
- Kausale Verbindung zwischen unabhängigem und abhängigem Merkmal
- Sonst bei Änderung der unabhängigen Variablen keine sinnvollen Prognosen möglich
- Oft: Latente Variablen im Hintergrund

Wirtschaftsmathematik: Table of Contents

1 Finanzmathematik

2 Lineare Programme

3 Differentialgleichungen

4 Statistik: Einführung

5 Deskriptive Statistik

6 Wahrscheinlichkeitstheorie

7 Induktive Statistik

6 Wahrscheinlichkeitstheorie
- Kombinatorik
- Zufall und Wahrscheinlichkeit
- Zufallsvariablen und Verteilungen
- Verteilungsparameter

Kombinatorik: Anzahl von Kombinationen bei Auswahl

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
   - Kombinatorik
   - Zufall und Wahrscheinlichkeit
   - Zufallsvariablen und Verteilungen
   - Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik

Quellen

2-mal Würfeln, das heißt Auswahl von $k = 2$ aus $n = 6$ Zahlen.

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

- mit WH, mit RF: alle Möglichkeiten, $6^2 = 36$
- ohne WH, mit RF: Diagonale entfällt, $36 - 6 = 30 = 6 \cdot 5 = \frac{6!}{(6-2)!}$
- ohne WH, ohne RF: Hälfte des letzten Ergebnisses: $\frac{30}{2} = 15 = \frac{6!}{4!2!} = \binom{6}{2}$
- mit WH, ohne RF: Letztes Ergebnis plus Diagonale, $15 + 6 = 21 = \binom{7}{2}$

Auswahl von k aus n Dingen		
	mit Wiederholung	ohne Wiederholung
mit Reihenfolge	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
ohne Reihenfolge	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

Zufallsvorgänge, Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten

- Zufallsvorgang: Geschehen mit ungewissem Ausgang, z.B. Münzwurf
- Elementarereignis ω: Ein möglicher Ausgang, z.B. „ Kopf “ Elementarereignisse schließen sich gegenseitig aus („ Kopf “ oder „ Zahl “)!
- Ergebnismenge Ω: Menge aller ω
- **Beispiel:** Werfen zweier Würfel:

$$\Omega : \begin{Bmatrix} (1{,}1) & (1{,}2) & \cdots & (1{,}6) \\ (2{,}1) & (2{,}2) & \cdots & (2{,}6) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (6{,}1) & (6{,}2) & \cdots & (6{,}6) \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Omega = \{(x_1, x_2) : \; x_1, x_2 \in \{1, \ldots, 6\}\}$$

Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten

- Ereignis A: Folgeerscheinung eines Elementarereignisses
- Formal:

$$A \subset \Omega$$

- Ereignisse schließen sich nicht gegenseitig aus!
- **Beispiel:** Werfen zweier Würfel:

Ereignis	verbal	formal
A	Augensumme $= 4$	$\{(1{,}3),\ (2{,}2),\ (3{,}1)\}$
B	Erste Zahl $= 2$	$\{(2{,}1),\ (2{,}2),\ \ldots,\ (2{,}6)\}$

- Wahrscheinlichkeit $P(A)$: Chance für das Eintreten von A
- Laplace-Wahrscheinlichkeit:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Fälle}}{\text{Anzahl aller möglichen Fälle}}$$

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik
Quellen

Laplace Wahrscheinlichkeit und Urnenmodell

- **Beispiel:** Werfen zweier Würfel:

$$\text{Augensumme} = 4: \quad A = \{(1{,}3),\ (2{,}2),\ (3{,}1)\}$$

$$|\Omega| = 36, \quad |A| = 3 \Rightarrow P(A) = \tfrac{3}{36} = \tfrac{1}{12} = 0{,}083$$

- **Urnenmodell:** Ziehe n Objekte aus einer Menge mit N Objekten
Anzahl Möglichkeiten:

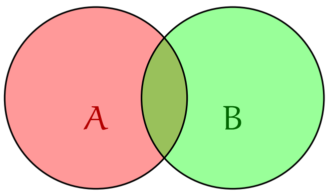
  mit Zurücklegen: N^n
  ohne Zurücklegen: $N \cdot (N-1) \cdots (N-(n-1)) = \frac{N!}{(N-n)!}$

- **Beispiel:**
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem gut gemischten 32-er Kartenblatt bei viermaligem Ziehen vier Asse zu bekommen?
a) Ziehen mit Zurücklegen,
b) Ziehen ohne Zurücklegen

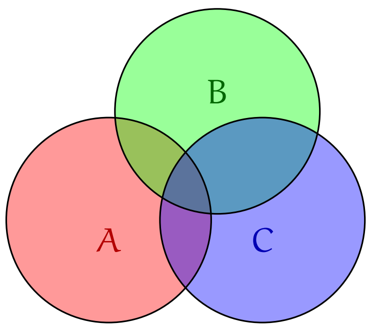
1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik
Quellen

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

- Wichtige Rechenregeln:



1. $P(A) \leqq 1$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqq P(B)$
4. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
5. $P(A \cup B) =$
   $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



- **Beispiel:**

$$P(\text{„Augenzahl} \leqq 5\text{“}) = 1 - P(\text{„Augenzahl} = 6\text{“}) = 1 - \tfrac{1}{6} = \tfrac{5}{6}$$

Beispiel Gegenereignis

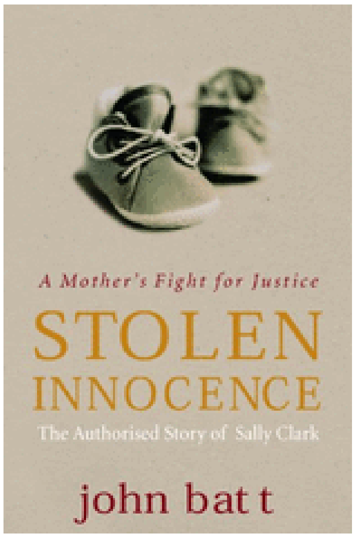
1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik
Quellen

Der Fall Sally Clark

- Sally Clarks Söhne Christopher und Harry sterben 1996 und 1997 beide kurz nach der Geburt an plötzlichem Kindstod.
- Kinderarzt: „Wahrscheinlich Mord, da 2 maliger plötzlicher Kindstod sehr unwahrscheinlich!“ (ohne konkrete Hinweise)
- Gerichtliche Untersuchung
- Hauptargument der Anklage gestützt durch Gerichtsgutachter Sir Roy Meadow (renommierter Facharzt für Kinderheilkunde): Wahrscheinlichkeit für plötzlichen Kindstod ist 1:8500, d.h. Wahrscheinlichkeit für 2 maliges Auftreten in einer Familie

$$p = \left(\frac{1}{8500}\right)^2 \approx 1 : 72\,000\,000$$

- Urteil: Doppelmord; Strafe: 2 mal lebenslang; Inhaftierung von Sally Clark 1999



Bedingte Wahrscheinlichkeiten

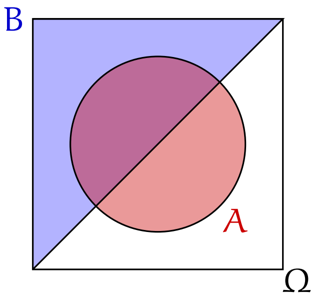
Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik
Quellen

- Wahrscheinlichkeit von A hängt von anderem Ereignis B ab. (B kann zeitlich vor A liegen, muss aber nicht!)
- **Beispiel:** Wahrscheinlichkeit für Statistiknote hängt von Mathenote ab.
- Formal:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Im Venndiagramm:



Unabhängigkeit von Ereignissen

- A, B unabhängig: Eintreten von A liefert keine Information über $P(B)$.
- Formal:

$$\boxed{P(A \mid B) = P(A)}$$

- Bei Unabhängigkeit ist äquivalent dazu:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

- Dann gilt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

- **Beispiel:** Werfen zweier Würfel:

$$\left.\begin{array}{rl} A: & \text{"'erster Würfel gleich 6"'} \\ B: & \text{"'zweiter Würfel gleich 6"'} \end{array}\right\} \Rightarrow P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6} = P(A)$$

Zufallsvariablen

Zufallsvariablen und Verteilungen

- Beschreibung von Ereignissen durch reelle Zahlen
- Formal: Zufallsvariable ist Abbildung von Ereignisraum in reelle Zahlen:

$$\boxed{X: \ \Omega \to \mathbb{R}}$$

- **Nach** Durchführung des Zufallsvorgangs:

Realisation: $x = X(\omega)$

- **Vor** Durchführung des Zufallsvorgangs:

Wertebereich: $X(\Omega) = \{x: \ x = X(\omega), \ \omega \in \Omega\}$

- **Beispiel:** Würfeln, X: Augenzahl, $X(\Omega) = \{1,2,\ldots,6\}$, $x = 4$ (z.B.)

$$P(X = 4) = \tfrac{1}{6}, \quad P(X \leqq 3) = \tfrac{3}{6} = \tfrac{1}{2}$$

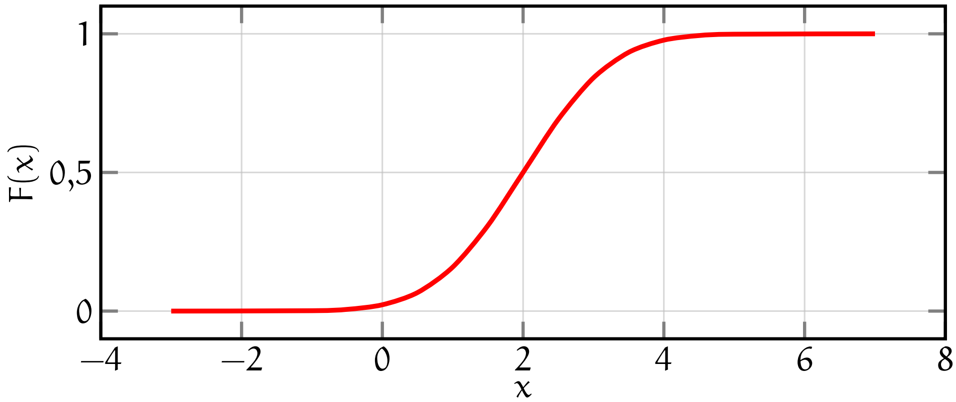
Verteilungsfunktion

- Zuweisung von Wahrscheinlichkeiten zu Realisationen
- Formal:

$$F(x) = P(X \leqq x)$$

- Eigenschaften der Verteilungsfunktion:
  - $F(x) \in [0; 1]$
  - Definitionsbereich: $\mathbb{R}$ mit $F(-\infty) = 0, \; F(\infty) = 1$
  - monoton wachsend, d.h. $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leqq F(x_2)$
  - Es gilt:

$$P(a < X \leqq b) = F(b) - F(a)$$



Beispiel einer Verteilungsfunktion

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik
Quellen

Diskrete Zufallsvariablen

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

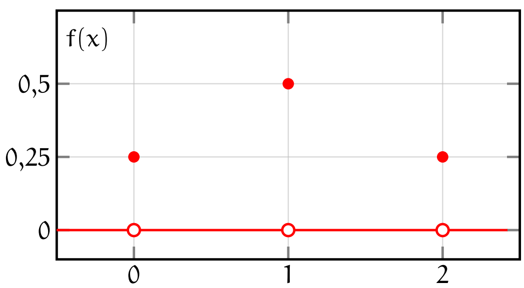
- X heißt diskret, wenn $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots\}$ endlich ist.
- Wahrscheinlichkeitsfunktion dann:

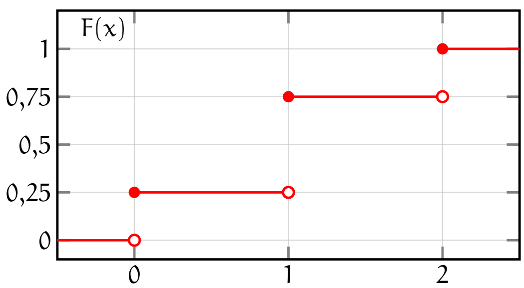
$$f(x) = P(X = x)$$

Beispiel: Münze 2 mal werfen; X: Anzahl "'Kopf"'

	(Z,Z)	$(Z,K),\ (K,Z)$	(K,K)
x_i	0	1	2
$f(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \quad x < 0 \\ \frac{1}{4}, & \text{falls } 0 \leqq x < 1 \\ \frac{3}{4}, & \text{falls } 1 \leqq x < 2 \\ 1, & \text{falls } \quad x \geqq 2 \end{cases}$$





1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik
Quellen

Binomialverteilung

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik
Quellen

- **Wiederholter** Zufallsvorgang
- n Durchführungen (jeweils unabhängig)
- Pro Durchführung: A oder $\bar{A}$ mit $P(A) = p$ ($\widehat{=}$ Ziehen mit Zurücklegen)
- Schreibe:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } A \text{ bei } i\text{-ter Durchführung eintritt} \\ 0, & \text{falls } \bar{A} \text{ bei } i\text{-ter Durchführung eintritt} \end{cases}$$

- Dann gibt

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

an, wie oft A eintritt.
- Gesucht: Wahrscheinlichkeitsfunktion von X

Binomialverteilung

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik
Quellen

- Herleitung:
  1) $P(X_i = 1) = P(A) = p, \; P(X_i = 0) = P(\bar{A}) = 1 - p$
  2) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = x$ entspricht "'x mal Ereignis A und $n - x$ mal $\bar{A}$"'
     Wahrscheinlichkeit (bei Unabhängigkeit): $p^x \cdot (1-p)^{n-x}$
  3) Aber: Reihenfolge irrelevant! Anzahl Anordnungen: $\binom{n}{x}$

➠ Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung:

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}, & \text{falls } x \in \{0, 1, \ldots, n\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Kurzschreibweise: $X \sim B(n; p)$
  X ist binomialverteilt mit Parametern n und p
- Tabellen zeigen meist $F(x)$
- für $f(x)$ gilt: $f(x) = F(x) - F(x-1)$

$X \sim B(n, 0.25)$, Tabelle der Binomialverteilung $F(x) = P(X \leqslant x)$

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik
Quellen

$x \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0.7500	0.5625	0.4219	0.3164	0.2373	0.1780	0.1335	0.1001	0.0751	0.0563	0.0422	0.0317	0.0238	0.0178	0.0134
1	1.0000	0.9375	0.8438	0.7383	0.6328	0.5339	0.4450	0.3671	0.3003	0.2440	0.1971	0.1584	0.1267	0.1010	0.0802
2		1.0000	0.9844	0.9492	0.8965	0.8306	0.7564	0.6786	0.6007	0.5256	0.4552	0.3907	0.3326	0.2811	0.2361
3			1.0000	0.9961	0.9844	0.9624	0.9295	0.8862	0.8343	0.7759	0.7133	0.6488	0.5843	0.5213	0.4613
4				1.0000	0.9990	0.9954	0.9871	0.9727	0.9511	0.9219	0.8854	0.8424	0.7940	0.7415	0.6865
5					1.0000	0.9998	0.9987	0.9958	0.9900	0.9803	0.9657	0.9456	0.9198	0.8883	0.8516
6						1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9965	0.9924	0.9858	0.9757	0.9617	0.9434
7							1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9988	0.9972	0.9944	0.9897	0.9827
8								1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9990	0.9979	0.9958
9									1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992
10										1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
11											1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$x \setminus n$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0	0.0100	0.0075	0.0056	0.0042	0.0032	0.0024	0.0018	0.0013	0.0010	0.0008	0.0006	0.0004	0.0003	0.0002	0.0002
1	0.0635	0.0501	0.0395	0.0310	0.0243	0.0190	0.0149	0.0116	0.0090	0.0070	0.0055	0.0042	0.0033	0.0025	0.0020
2	0.1971	0.1637	0.1353	0.1114	0.0913	0.0745	0.0607	0.0492	0.0398	0.0321	0.0258	0.0208	0.0166	0.0133	0.0106
3	0.4050	0.3530	0.3057	0.2631	0.2252	0.1917	0.1624	0.1370	0.1150	0.0962	0.0802	0.0666	0.0551	0.0455	0.0375
4	0.6302	0.5739	0.5187	0.4654	0.4149	0.3674	0.3235	0.2832	0.2467	0.2138	0.1844	0.1583	0.1354	0.1153	0.0979
5	0.8104	0.7653	0.7175	0.6678	0.6172	0.5666	0.5168	0.4685	0.4222	0.3783	0.3372	0.2990	0.2638	0.2317	0.2026
6	0.9205	0.8929	0.8610	0.8251	0.7858	0.7436	0.6994	0.6537	0.6074	0.5611	0.5154	0.4708	0.4279	0.3869	0.3481
7	0.9729	0.9598	0.9431	0.9226	0.8982	0.8701	0.8385	0.8037	0.7662	0.7265	0.6852	0.6427	0.5998	0.5568	0.5143
8	0.9925	0.9876	0.9807	0.9713	0.9591	0.9439	0.9254	0.9037	0.8787	0.8506	0.8196	0.7860	0.7502	0.7126	0.6736
9	0.9984	0.9969	0.9946	0.9911	0.9861	0.9794	0.9705	0.9592	0.9453	0.9287	0.9092	0.8868	0.8616	0.8337	0.8034
10	0.9997	0.9994	0.9988	0.9977	0.9961	0.9936	0.9900	0.9852	0.9787	0.9703	0.9599	0.9472	0.9321	0.9145	0.8943
11	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9991	0.9983	0.9971	0.9954	0.9928	0.9893	0.9845	0.9784	0.9706	0.9610	0.9494
12	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9988	0.9979	0.9966	0.9948	0.9922	0.9888	0.9842	0.9784
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9995	0.9991	0.9985	0.9976	0.9962	0.9944	0.9918
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9989	0.9982	0.9973
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9992
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998
17		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18			1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Binomialverteilung: Beispiel

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik
Quellen

Beispiel

Aus einem 32-er Kartenblatt wird 3-mal eine Karte mit Zurücklegen gezogen.
Wie wahrscheinlich ist es, 2-mal Herz zu ziehen?

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } i\text{-te Karte Herz} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad X_i \sim B(1; \tfrac{8}{32})$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + X_3 \quad \Rightarrow \quad X \sim B(3; \tfrac{1}{4})$$

Mithilfe der Wahrscheinlichkeitsfunktion:

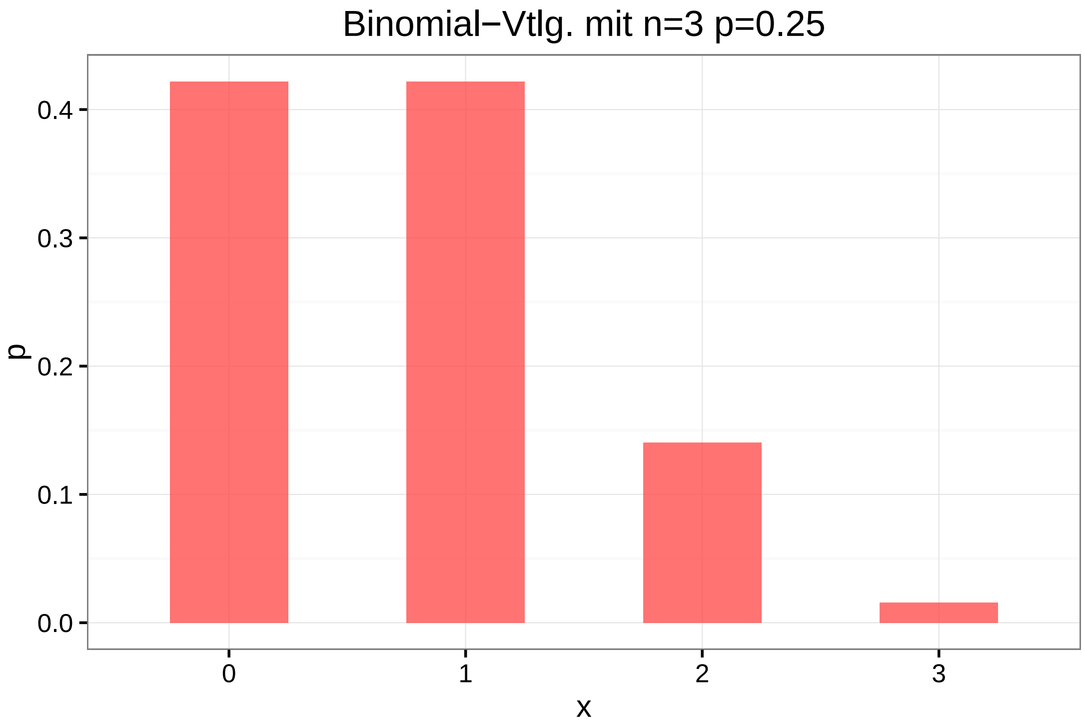
$$P(X = 2) = f(2) = \binom{3}{2} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^1 = 0{,}1406$$

Mithilfe der Tabelle ($n = 3$):

$$P(X = 2) = F(2) - F(1) = 0{,}9844 - 0{,}8438 = 0{,}1406$$

Binomialverteilung: Wahrscheinlichkeitsfunktion

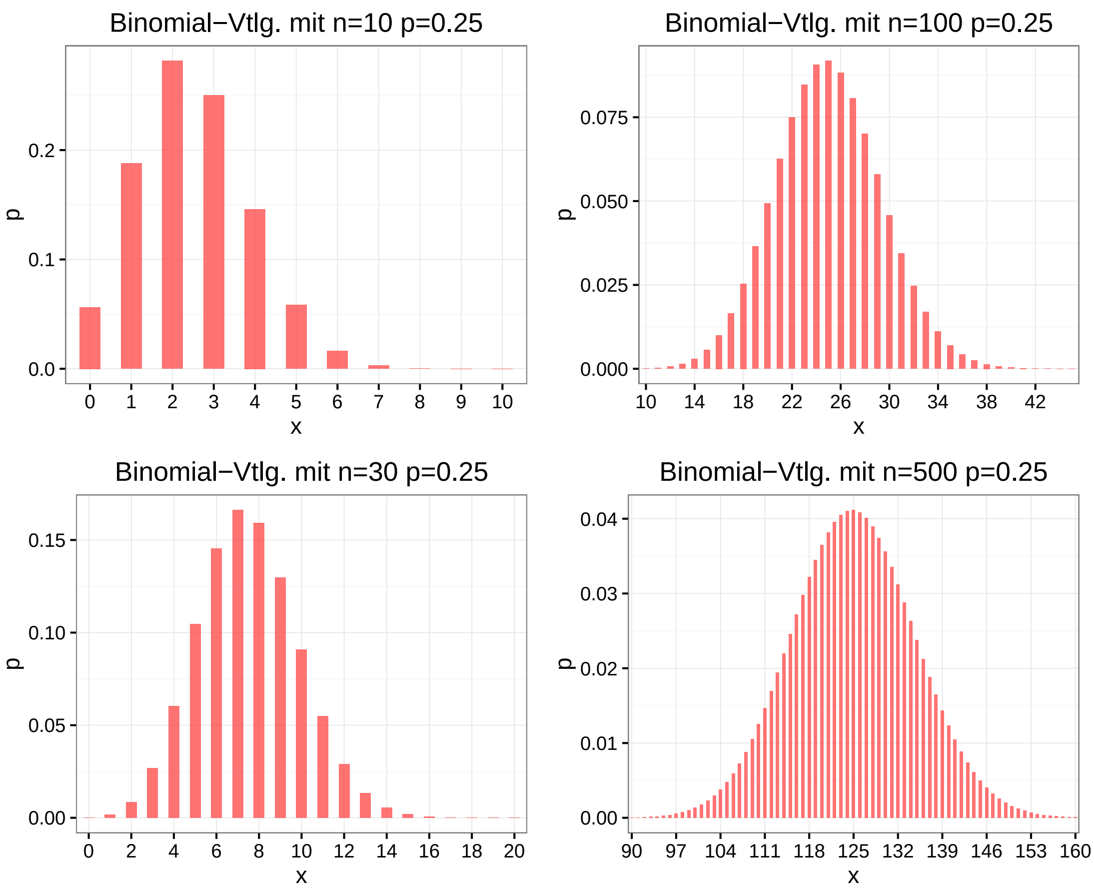
- $X \sim B(3, \frac{1}{4})$



Binomialverteilung: Wahrscheinlichkeitsfunktion

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik
Quellen



Hypergeometrische Verteilung

- n-faches Ziehen **ohne** Zurücklegen aus N Objekten, davon M markiert.

  $$X = \text{Anzahl gezogener Objekte mit Markierung}$$

  heißt hypergeometrisch verteilt mit den Parametern N, M, n.
- Kurzschreibweise: $X \sim \text{Hyp}(N; M; n)$
- Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, & \text{falls } x \text{ möglich} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Ist $n \leqq \frac{N}{20}$, so gilt: $\text{Hyp}(N; M; n) \approx B(n; \frac{M}{N})$

Beispiel: Hypergeometrische Verteilung

- Aus einem 32-Kartenblatt wird 3-mal eine Karte ohne Zurücklegen gezogen.
- Wie wahrscheinlich ist es, 2-mal "'Herz"' zu ziehen?
- D.h.: $N = 32$, $M = 8$, $n = 3$, $x = 2$.

$$P(X=2) = f(2) = \frac{\binom{8}{2}\binom{32-8}{3-2}}{\binom{32}{3}} = \frac{\binom{8}{2}\binom{24}{1}}{\binom{32}{3}} = \frac{\frac{8!}{2!\cdot 6!}\cdot 24}{\frac{32!}{3!\cdot 29!}}$$

$$= \frac{29!\cdot 8!\cdot 3!\cdot 24}{32!\cdot 6!\cdot 2!} = \frac{8\cdot 7\cdot 3\cdot 24}{32\cdot 31\cdot 30} = \frac{4032}{29760} = \frac{21}{155}$$

$$= 0{,}1355$$

Dabei wurde verwendet:

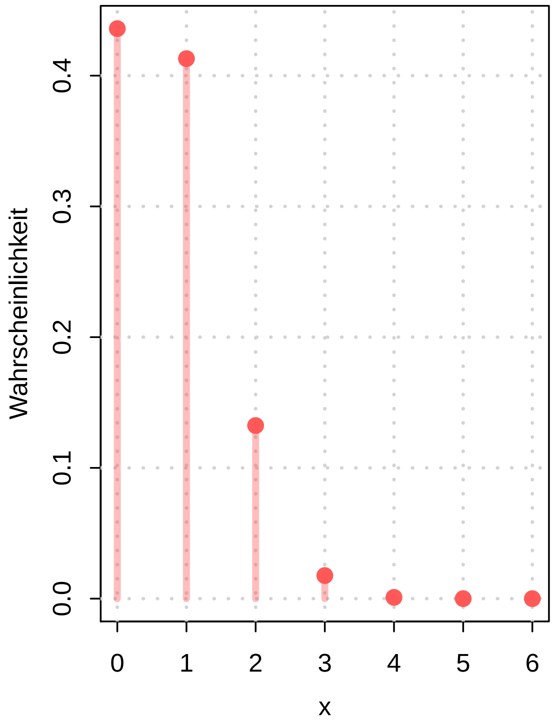
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{und} \quad \binom{n}{1} = n.$$

Hypergeometrische Verteilung

Beispiel: x Treffer im Lotto 6 aus 49

- $X \sim \text{Hyp}(49, 6, 6)$

x	$P(X = x)$ (in %)
0	43.596498
1	41.301945
2	13.237803
3	1.765040
4	0.096862
5	0.001845
6	0.000007



Poisson-Verteilung

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik
Quellen

- Approximation für $B(n; p)$ und $\text{Hyp}(N; M; n)$
- Geeignet, wenn
  p klein ($\leqq 0{,}1$), n groß ($\geqq 50$) und $np \leqq 10$.

➡ „Verteilung der seltenen Ereignisse“
(z.B. Anzahl 6-er pro Lottoausspielung)

- X ist poissonverteilt mit Parameter λ: $X \sim P(\lambda)$
- Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}, & \text{falls } x = 0,1,2,\ldots \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- $F(x)$ in Tabelle
- Überblick: Approximation

$$\text{Hyp}(N; M; n) \xrightarrow{p = \frac{M}{N}} B(n; p) \xrightarrow{\lambda = np = n\frac{M}{N}} P(\lambda)$$

Poissonverteilung: $X \sim P(\lambda)$, Tabelle der Verteilungsfunktionen

$x \backslash \lambda$	1.6	1.7	1.8	1.9	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3
0	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496	0.1353	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550	0.0498
1	0.5249	0.4933	0.4628	0.4338	0.4060	0.3796	0.3546	0.3309	0.3085	0.2873	0.2674	0.2487	0.2311	0.2146	0.1992
2	0.7834	0.7572	0.7306	0.7037	0.6767	0.6496	0.6227	0.5960	0.5697	0.5438	0.5184	0.4936	0.4695	0.4460	0.4232
3	0.9212	0.9068	0.8913	0.8747	0.8571	0.8387	0.8194	0.7994	0.7787	0.7576	0.7360	0.7141	0.6919	0.6696	0.6472
4	0.9763	0.9704	0.9636	0.9559	0.9474	0.9379	0.9275	0.9163	0.9041	0.8912	0.8774	0.8629	0.8477	0.8318	0.8153
5	0.9940	0.9920	0.9896	0.9868	0.9834	0.9796	0.9751	0.9700	0.9643	0.9580	0.9510	0.9433	0.9349	0.9258	0.9161
6	0.9987	0.9981	0.9974	0.9966	0.9955	0.9941	0.9925	0.9906	0.9884	0.9858	0.9828	0.9794	0.9756	0.9713	0.9665
7	0.9997	0.9996	0.9994	0.9992	0.9989	0.9985	0.9980	0.9974	0.9967	0.9958	0.9947	0.9934	0.9919	0.9901	0.9881
8	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9995	0.9994	0.9991	0.9989	0.9985	0.9981	0.9976	0.9970	0.9962
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9992	0.9989
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$x \backslash \lambda$	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5
0	0.0451	0.0408	0.0369	0.0334	0.0302	0.0273	0.0247	0.0224	0.0203	0.0183	0.0166	0.0150	0.0136	0.0123	0.0111
1	0.1847	0.1712	0.1586	0.1469	0.1359	0.1257	0.1162	0.1074	0.0992	0.0916	0.0845	0.0780	0.0719	0.0663	0.0611
2	0.4012	0.3799	0.3594	0.3397	0.3209	0.3028	0.2854	0.2689	0.2531	0.2381	0.2238	0.2102	0.1974	0.1852	0.1736
3	0.6248	0.6025	0.5803	0.5584	0.5366	0.5152	0.4942	0.4735	0.4533	0.4335	0.4142	0.3954	0.3772	0.3595	0.3423
4	0.7982	0.7806	0.7626	0.7442	0.7255	0.7064	0.6872	0.6679	0.6484	0.6288	0.6093	0.5898	0.5704	0.5512	0.5321
5	0.9057	0.8946	0.8829	0.8706	0.8576	0.8441	0.8301	0.8156	0.8006	0.7851	0.7693	0.7532	0.7367	0.7199	0.7029
6	0.9612	0.9554	0.9490	0.9422	0.9347	0.9267	0.9182	0.9091	0.8995	0.8893	0.8787	0.8675	0.8558	0.8437	0.8311
7	0.9858	0.9832	0.9802	0.9769	0.9733	0.9692	0.9648	0.9599	0.9546	0.9489	0.9427	0.9361	0.9290	0.9214	0.9134
8	0.9953	0.9943	0.9931	0.9917	0.9901	0.9883	0.9863	0.9840	0.9815	0.9786	0.9755	0.9721	0.9683	0.9642	0.9598
9	0.9986	0.9982	0.9978	0.9973	0.9967	0.9960	0.9952	0.9942	0.9931	0.9919	0.9905	0.9889	0.9871	0.9851	0.9829
10	0.9996	0.9995	0.9994	0.9992	0.9990	0.9987	0.9984	0.9981	0.9977	0.9972	0.9966	0.9959	0.9952	0.9943	0.9933
11	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9991	0.9989	0.9986	0.9983	0.9980	0.9976
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9992
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Poisson-Verteilung: Beispiel

Beispiel

- $X \sim B(10\,000; 0{,}0003)$; In Tabelle der Binomialverteilung nicht vertafelt! Approximation:

$$\left.\begin{array}{rll} p &= 0{,}0003 &< 0{,}1 \\ n &= 10\,000 &> 50 \\ np &= 3 &< 10 \end{array}\right\} \Rightarrow B(10\,000; 0{,}0003) \approx P(3)$$

- Mithilfe der Wahrscheinlichkeitsfunktion:

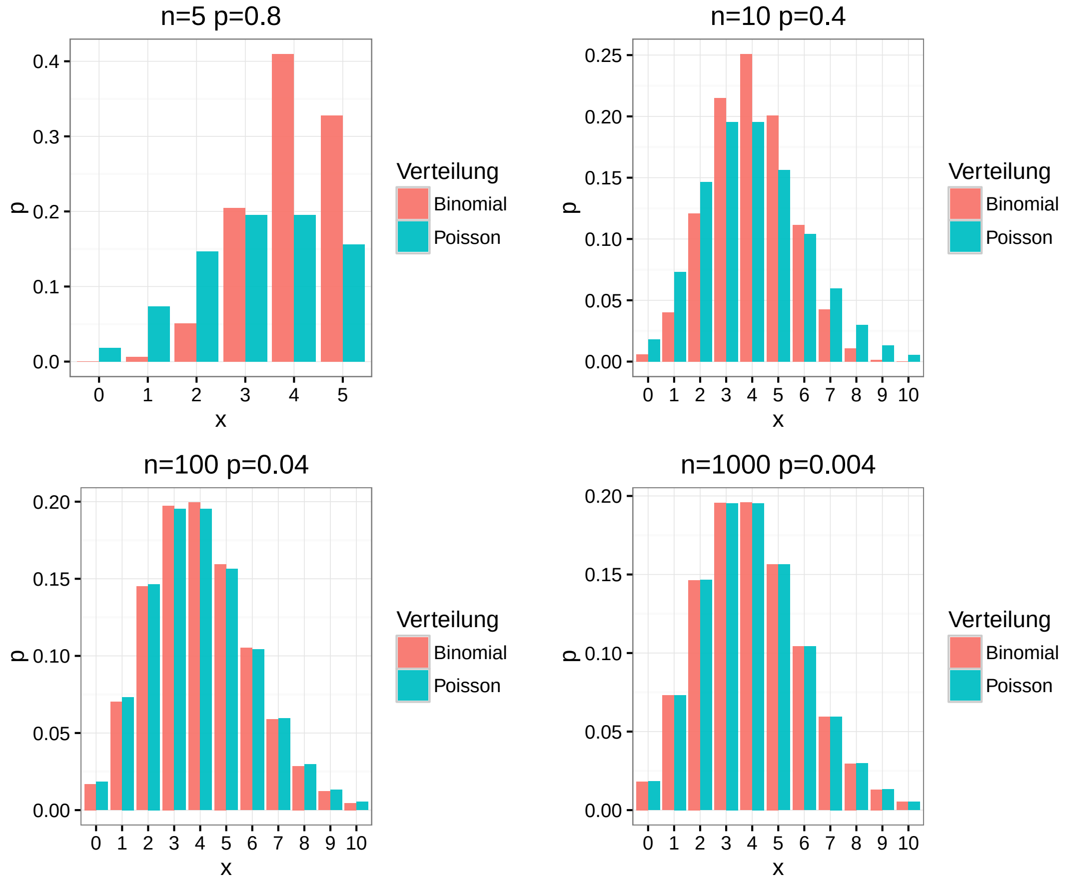
$$P(X=5) = \frac{3^5}{5!} \cdot e^{-3} = 0{,}1008188$$

- Mithilfe der Tabelle der Poissonverteilung:

$$P(X=5) = F(5) - F(4) = 0{,}9161 - 0{,}8153 = 0{,}1008$$

- Exakter Wert: $P(X=5) = 0{,}1008239$

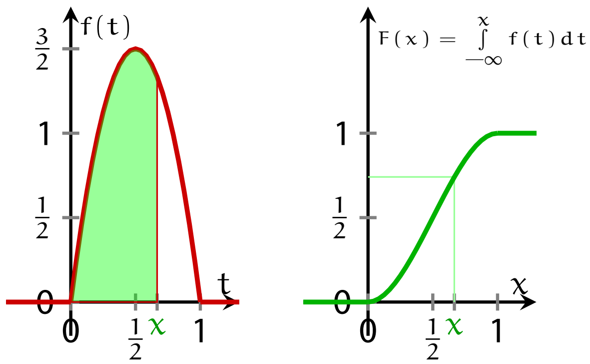
Poisson- versus Binomialverteilung: Vergleich



Stetige Zufallsvariablen

- X heißt stetig, wenn $F(x)$ stetig ist.
- Dann existiert ein $f(t)$ mit:

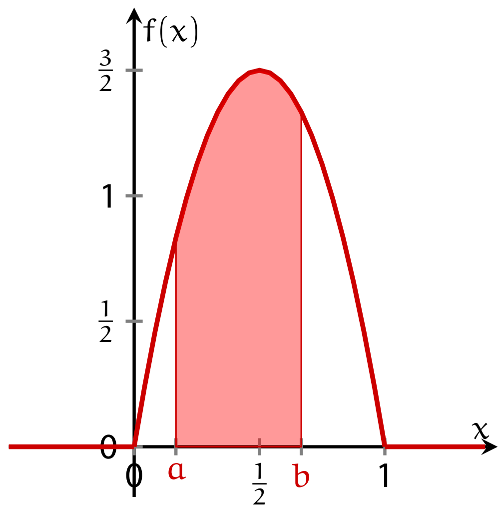
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$



$f(x)$ heißt Dichtefunktion von X.

- Dann:

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P(a \leqq X < b) \\ &= P(a < X \leqq b) \\ &= P(a \leqq X \leqq b) \\ &= \int_a^b f(x)\,dx \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$



Dichtefunktion

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik
Quellen

Eigenschaften der Dichtefunktion

- $f(x) \geqq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- Wegen $F(\infty) = 1$ muss stets gelten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

- $P(X = x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- $f(x) > 1$ ist möglich
- für $x \in \mathbb{R}$ ist $F(x)$ differenzierbar $\Rightarrow F'(x) = f(x)$.
- Intervallgrenzen spielen keine Rolle:

$$\begin{aligned} P(X \in [a;b]) &= P(X \in (a;b]) \\ &= P(X \in [a;b)) \\ &= P(X \in (a;b)) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Dichtefunktion: Beispiel

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik
Quellen

Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad x < 0 \\ \frac{1}{10}, & \text{falls} \quad 0 \leqq x \leqq 10 \\ 0, & \text{falls} \quad x > 10 \end{cases}$$

Verteilungsfunktion:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{10}\,dt = \left[\frac{t}{10}\right]_0^x = \frac{x}{10} \Rightarrow$$

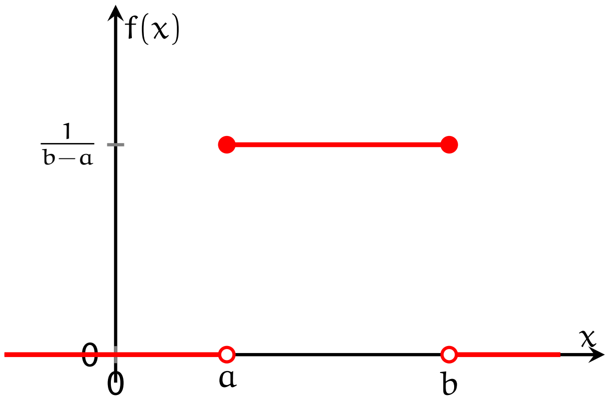
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad x < 0 \\ \frac{x}{10}, & \text{falls} \quad 0 \leqq x \leqq 10 \\ 1, & \text{falls} \quad x > 10 \end{cases}$$

Gleichverteilung

Eine Zufallsvariable X mit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{falls } \; a \leqq x \leqq b \\ 0 \quad , & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt gleichverteilt im Intervall $[a;b]$.



Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik
Quellen

Gleichverteilung

- Verteilungsfunktion der Gleichverteilung:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad , & \text{falls } \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{falls } \; a \leqq x \leqq b \\ 1 \quad , & \text{falls } \quad x > b \end{cases}$$

- **Beispiel:** X gleichverteilt in $[1;20]$

$$P(2 \leqq X \leqq 12) = F(12) - F(2) = \frac{12-1}{20-1} - \frac{2-1}{20-1}$$
$$= \frac{12-2}{20-1} = \frac{10}{19}$$
$$= 0{,}5263$$

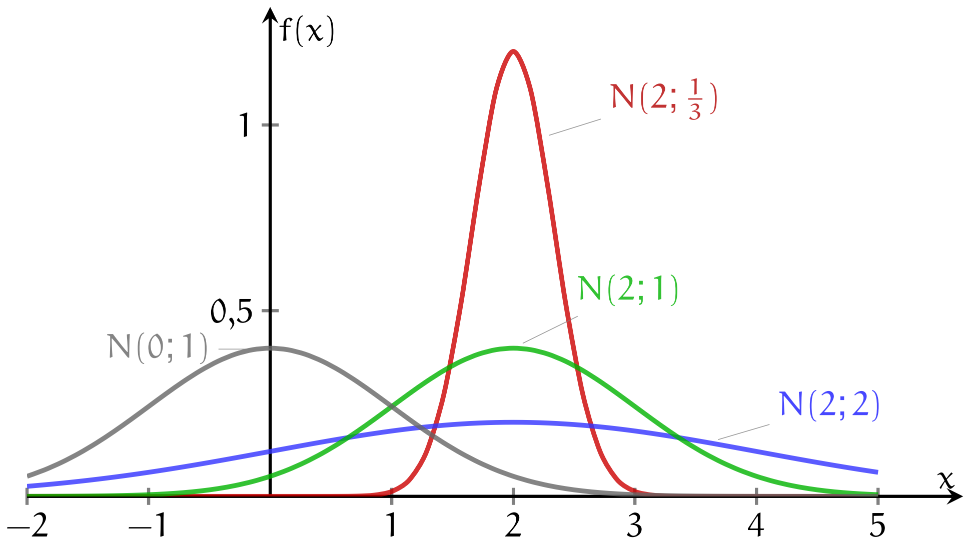
Normalverteilung

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik
Quellen

Eine Zufallsvariable X mit einer Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

und $\sigma > 0$ heißt normalverteilt.

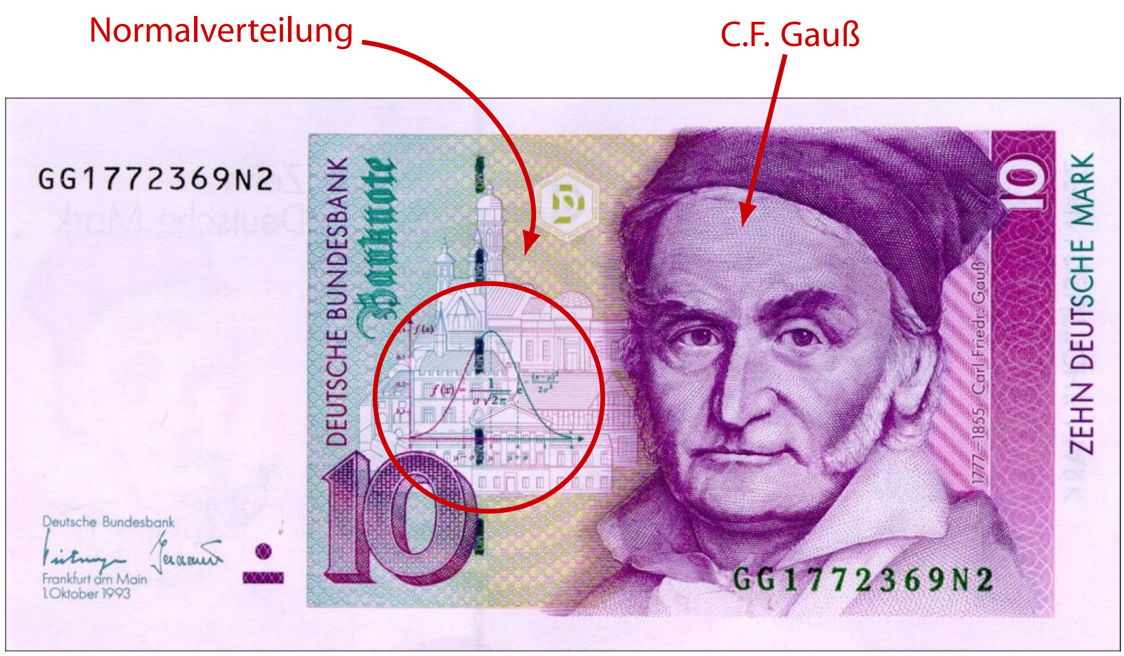


Kurzschreibweise: $X \sim N(\mu; \sigma)$

Normalverteilung: Gaußkurve

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik
Quellen



Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik
Quellen

Dabei bedeutet $\Phi(x)$ zum Beispiel: $\Phi(2{,}13) = \Phi(2{,}1 + 0{,}03) = 0{,}9834$. Diesen Wert findet man in der Zeile mit $x_1 = 2{,}1$ und der Spalte mit $x_2 = 0{,}03$.

$x_1 \backslash x_2$	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5754
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6737	0.6773	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7020	0.7054	0.7089	0.7123	0.7157	0.7191	0.7224
0.6	0.7258	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7518	0.7549
0.7	0.7580	0.7612	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7882	0.7910	0.7939	0.7967	0.7996	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8290	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8414	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8532	0.8554	0.8577	0.8599	0.8622
1.1	0.8643	0.8665	0.8687	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9083	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9193	0.9207	0.9222	0.9237	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9358	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9430	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9485	0.9495	0.9505	0.9516	0.9526	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9600	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9679	0.9686	0.9693	0.9700	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0.9767
2	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9914	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9933	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9975	0.9975	0.9976	0.9977	0.9978	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9983	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995

Eigenschaften der Normalverteilung

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik
Quellen

- Dichte ist symmetrisch zu μ:

$$f(\mu - x) = f(\mu + x)$$

⇒ μ ist Lage-, σ ist Streuungsparameter

- Standardnormalverteilung:
  $N(0; 1)$ mit Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ ($\rightarrow$ Tabelle 3)
- Kenntnis von $\Phi(x)$, μ und σ genügt, denn:
  $X \sim N(\mu; \sigma) \iff \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0; 1) \quad \Rightarrow$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

- Tabelle enthält nur positive x: Deswegen

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Normalverteilung: Beispiel

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik
Quellen

Beispiel:

Projektdauer $X \sim N(39; 2)$.

Wahrscheinlichkeit für Projektdauer zwischen 37 und 41 Wochen?

Lösung:

$$\begin{aligned} P(37 \leqq X \leqq 41) &= F(41) - F(37) \\ &= \Phi\left(\tfrac{41-39}{2}\right) - \Phi\left(\tfrac{37-39}{2}\right) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-1) \\ &= \Phi(1) - [1 - \Phi(1)] \\ &= 2 \cdot \Phi(1) - 1 \\ &= 2 \cdot 0{,}8413 - 1 \\ &= 0{,}6826 \end{aligned}$$

Lageparameter

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik
Quellen

a) **Modus** x_{Mod}: $f(x_{\text{Mod}}) \geqq f(x)$ für alle x
(i.A. nicht eindeutig, z.B. Gleichverteilung)

Beispiele:

- Normalverteilung: $x_{\text{Mod}} = \mu$
- Diskrete Verteilung mit:

$$\left.\begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2 \\ f(x) & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{\text{Mod}} = 1$$

b) **Median** x_{Med}: $F(x_{\text{Med}}) = \frac{1}{2}$ bzw. kleinstes x mit $F(x) > \frac{1}{2}$

Beispiele:

- Normalverteilung: $x_{\text{Med}} = \mu$
- Diskrete Verteilung
  oben: $F(0) = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, $F(1) = \frac{3}{4} > \frac{1}{2} \Rightarrow x_{\text{Med}} = 1$

Lageparameter: Fraktile

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik
Quellen

c) **α-Fraktil** x_α: $F(x_\alpha) = \alpha$ (für stetige Verteilungen)

Beispiel: $X \sim N(0;1)$, $Y \sim N(3;2)$

$$\begin{aligned} x_{0,975} &= & &1{,}96 \\ x_{0,025} &= -x_{0,975} &&= -1{,}96 \\ y_{0,025} &= 2 \cdot x_{0,025} + 3 &&= -0{,}92 \end{aligned}$$

(Tab. 3)

Hinweise:

- $x_{\text{Med}} = x_{0,5}$
- Wenn x_α nicht vertafelt $\to$ Interpolation:

$$x_\alpha \approx x_a + (x_b - x_a) \cdot \frac{\alpha - a}{b - a}$$

mit
a : größte vertafelte Zahl $< \alpha$
b : kleinste vertafelte Zahl $> \alpha$

Beispiel: $X \sim N(0;1)$; $x_{0,6} \approx$
$0{,}25 + (0{,}26 - 0{,}25) \cdot \frac{0{,}6 - 0{,}5987}{0{,}6026 - 0{,}5987} = 0{,}2533$

Lageparameter: Erwartungswert

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik
Quellen

d) **Erwartungswert** $E(X)$ bzw. μ:

$$E(X) = \begin{cases} \sum\limits_i x_i f(x_i), & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx, & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

Beispiel: Diskrete Verteilung mit

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \quad E(X) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$

Beispiel: Für eine exponentialverteilte Zufallsvariable X mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{für } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{folgt}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \lambda \int_0^{\infty} x \cdot e^{-\lambda x}\,dx = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x} - \int_0^{\infty} 1 \cdot \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right) dx \right]$$

$$= -x e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = -0 - \left(-0 - \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda}$$

Rechenregeln für den Erwartungswert

- Ist f symmetrisch bzgl. a, so gilt $E(X) = a$
  Beispiel: f der Gleichverteilung symmetrisch bzgl. $\frac{a+b}{2} \Rightarrow E(X) = \frac{a+b}{2}$
- Lineare Transformation:

$$E(a + bX) = a + b \cdot E(X)$$

- Summenbildung:

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

Beispiel: X gleichverteilt in $[0;10]$, $Y \sim N(1;1)$; $Z = X + 5Y$

$$E(Z) = E(X + 5Y) = E(X) + E(5Y) = E(X) + 5 \cdot E(Y) = \tfrac{10+0}{2} + 5 \cdot 1 = 10$$

- Unabhängigkeit:

$$X,\ Y \text{ unabhängig} \Rightarrow E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

Streuungsparameter

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
   - Kombinatorik
   - Zufall und Wahrscheinlichkeit
   - Zufallsvariablen und Verteilungen
   - Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik

Quellen

- Varianz $\mathrm{Var}(X)$ bzw. σ^2:

$$\mathrm{Var}(X) = E([X - E(X)]^2) = \begin{cases} \sum\limits_i [x_i - E(X)]^2 f(x_i), & \text{wenn } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f(x)\,dx, & \text{wenn } X \text{ stetig} \end{cases}$$

- Standardabweichung $\mathrm{Sta}(X)$ bzw. σ: $\mathrm{Sta}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

Beispiel: Diskrete Verteilung

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

:

$$\mathrm{Var}(X) = (0-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + (1-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + (2-1)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Beispiel: Für eine exponentialverteilte Zufallsvariable X (Dichte siehe Erwartungswert) folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X)) f(x)\,dx = \lambda \int_0^{\infty} \left(x - \tfrac{1}{\lambda}\right)^2 \cdot e^{-\lambda x}\,dx \\ &= e^{-\lambda x}\left(-x^2 + \tfrac{2x}{\lambda} - \left(\tfrac{1}{\lambda}\right)^2 - \tfrac{2}{\lambda^2} - \tfrac{2x}{\lambda} + \tfrac{2}{\lambda^2}\right)\Big|_0^{\infty} \\ &= 0 - \left(-0^2 - \left(\tfrac{1}{\lambda}\right)^2\right) = \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Rechenregeln für die Varianz

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik
Quellen

- **Verschiebungssatz**:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2$$

Beispiel: Diskrete Verteilung

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X^2) &= 0^2 \cdot \tfrac{1}{4} + 1^2 \cdot \tfrac{1}{2} + 2^2 \cdot \tfrac{1}{4} \\ &= \tfrac{3}{2} \\ \Rightarrow \quad \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 &= \tfrac{3}{2} - 1^2 = \tfrac{1}{2} = \mathrm{Var}(X) \end{aligned}$$

- **Lineare Transformation**:

$$\mathrm{Var}(a + bX) = b^2\,\mathrm{Var}(X)$$

- **Summenbildung** gilt nur, wenn die X_i unabhängig! Dann:

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)$$

Erwartungswerte und Varianzen wichtiger Verteilungen

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik
Quellen

Verteilung von X	$\mathrm{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$
Binomialverteilung $B(n;p)$	np	$np(1-p)$
Hypergeometrische Verteilung mit den Parametern N, M, n	$n\frac{M}{N}$	$n\frac{M}{N}\frac{N-M}{N}\frac{N-n}{N-1}$
Poisson-Verteilung $P(\lambda)$	λ	λ
Gleichverteilung in $[a;b]$ mit $a<b$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Normalverteilung $N(\mu;\sigma)$	μ	σ^2

Anwendung: Ungleichung von Tschebyschow

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik
Quellen

- Für beliebige Zufallsvariablen X und $\varepsilon > 0$ gilt die Ungleichung von Tschebyschow:

$$P\big(|X - E[X]| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\text{Var}[X]}{\varepsilon^2}$$

Beispiele:

- X ist gleichverteilt mit Parametern a, b und $\varepsilon = \frac{1}{3}(a-b)$, also $E[X] = \frac{1}{2}(a+b)$ und $\text{Var}[X] = \frac{1}{12}(a-b)^2$

$$\Rightarrow P\Big(\big|X - \tfrac{1}{2}(a+b)\big| \geqslant \tfrac{1}{3}(a-b)\Big) \leqslant \frac{(a-b)^2}{12} \cdot \frac{3^2}{(a-b)^2} = 3/4$$

- $X \sim B(100; 0{,}2)$ und $\varepsilon = 10$
damit: $E[X] = 100 \cdot 0{,}2 = 20$ und $\text{Var}[X] = 100 \cdot 0{,}2 \cdot (1 - 0{,}2) = 16$

$$\Rightarrow P\big(|X - 20| \geqslant 10\big) \leqslant \frac{16}{10^2} = 0{,}16$$

Kovarianz und Korrelation

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
Kombinatorik
Zufall und Wahrscheinlichkeit
Zufallsvariablen und Verteilungen
Verteilungsparameter
7. Induktive Statistik
Quellen

- Kovarianz:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X,Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\ &= E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) \\ &\text{(Verschiebungssatz)} \end{aligned}$$

- Korrelationskoeffizient:

$$\rho(X,Y) = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}}$$

- **Bemerkungen:**
  - ρ ist r nachgebildet $\Rightarrow \rho \in [-1; 1]$
  - $|\rho| = 1 \iff Y = a + bX$ (mit $b \neq 0$)
  - $\rho = 0 \iff X, Y$ **unkorreliert**
- Varianz einer Summe zweier ZV:

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\,\text{Cov}(X,Y)$$

Wirtschaftsmathematik: Table of Contents

1 Finanzmathematik

2 Lineare Programme

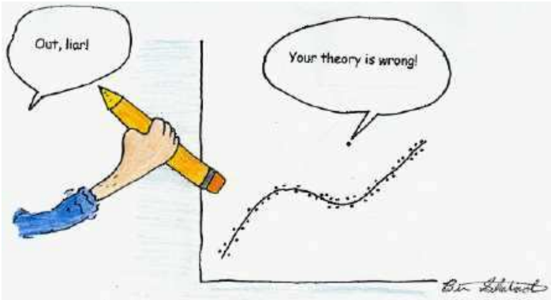
3 Differentialgleichungen

4 Statistik: Einführung

5 Deskriptive Statistik

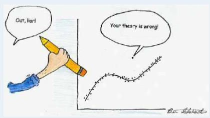
6 Wahrscheinlichkeitstheorie

7 Induktive Statistik



7 Induktive Statistik
- Grundlagen
- Punkt-Schätzung
- Intervall-Schätzung
- Signifikanztests

Grundlagen der induktiven Statistik



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
   - Grundlagen
   - Punkt-Schätzung
   - Intervall-Schätzung
   - Signifikanztests

Quellen

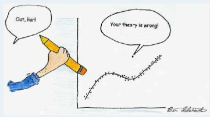
- Vollerhebung of unmöglich,
- Deshalb: Beobachte Teilgesamtheit und schließe auf Grundgesamtheit

Beispiel

Warensendung von 1000 Stück; darunter M Stück Ausschuss.
M ist unbekannt.
$\rightarrow$ Zufällige Entnahme von $n = 30$ Stück („Stichprobe“).
Darunter 2 Stück Ausschuss.
Denkbare Zielsetzungen:

- Schätze M durch eine Zahl (z.B. $\frac{2}{30} \cdot 1000 = 66{,}67$)
- Schätze ein Intervall für M (z.B. $M \in [58; 84]$)
- Teste die Hypothese, dass $M > 50$ ist.

Grundbegriffe

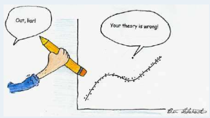


1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen

- Grundgesamtheit (G): Menge aller relevanten Merkmalsträger.
- Verteilung von G: $F(x) = P(X \leqq x) =$ Wahrscheinlichkeit, dass ein Merkmalsträger ausgewählt wird, der beim untersuchten Merkmal maximal die Ausprägung x aufweist.
- Uneingeschränkte (reine) Zufallsauswahl:
  Jedes Element von G hat die selbe Chance, ausgewählt zu werden.
- Stichprobenumfang (n): Anzahl der Merkmalsträger in der Stichprobe.
- Einfache Stichprobe:
  Uneingeschränkte Zufallsauswahl und unabhängige Ziehung.
  $\rightarrow$ Alle Stichprobenvariablen $X_1, \ldots, X_n$ sind iid.
- Stichprobenergebnis:
  n-Tupel der Realisationen der Stichprobenvariablen, $(x_1, \ldots, x_n)$.

Wichtige Stichprobenfunktionen

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

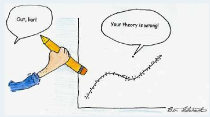


1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen

- Gegeben: Einfache Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$, Beliebige Verteilung, mit $E(X_i) = \mu$, $Var(X_i) = \sigma^2$

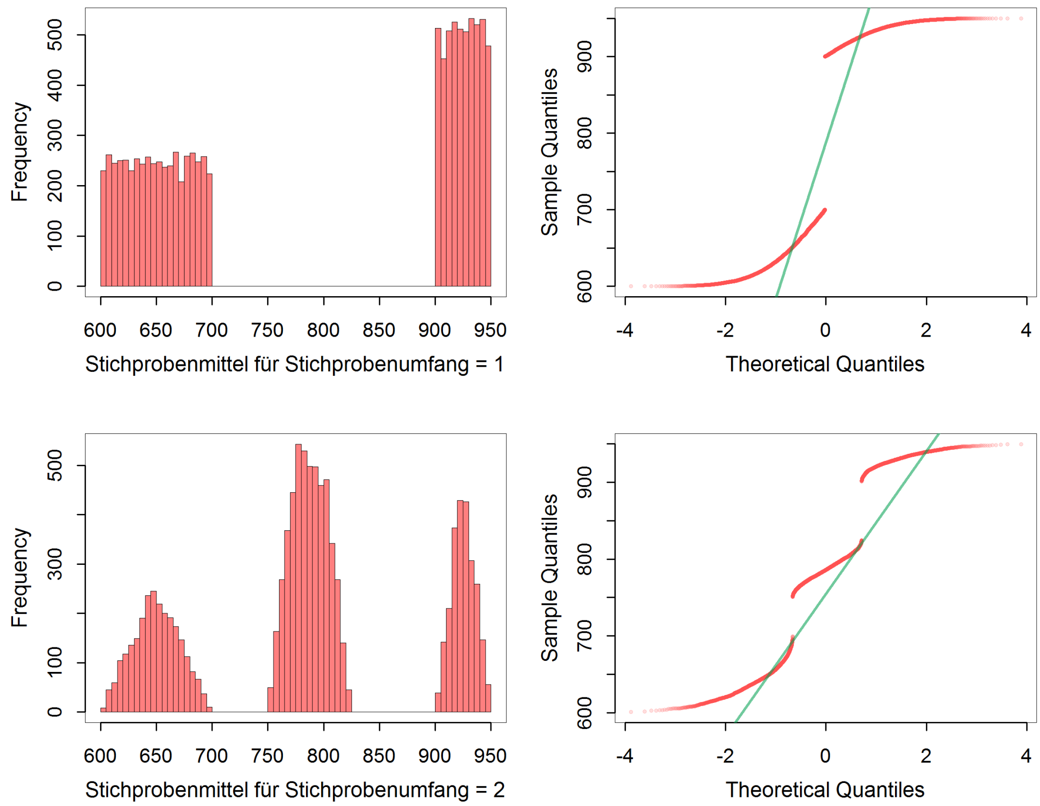
Stichprobenfunktion V	Bezeichnung	$E(V)$	$Var(V)$
$\sum_{i=1}^{n} X_i$	Merkmalssumme	$n\mu$	$n\sigma^2$
$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	Stichprobenmittel	μ	$\frac{\sigma^2}{n}$
$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$	Gauß-Statistik	0	1
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$	mittlere quadratische Abweichung bezüglich μ	σ^2	
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$	mittlere quadratische Abweichung	$\frac{n-1}{n}\sigma^2$	
$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$	Stichprobenvarianz	σ^2	
$S = \sqrt{S^2}$	Stichproben-Standardabweichung		
$\frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n}$	t-Statistik		

Auswirkungen der Stichprobengröße

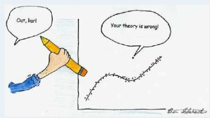


1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen

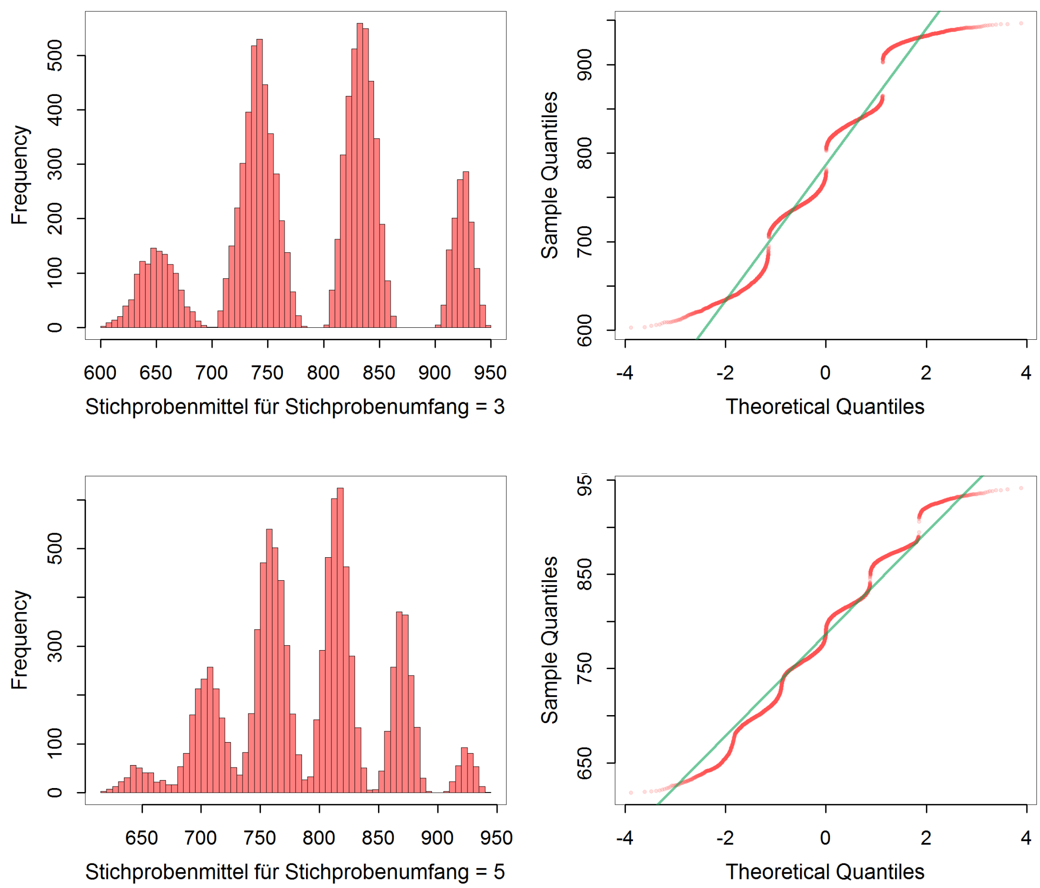
Ziehen von 10.000 Stichproben (jeweils vom Umfang n) und Berechnung der Stichprobenmittel (Verteilung: zwei überlagerte Gleichverteilungen):

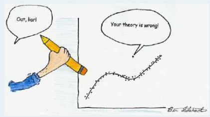


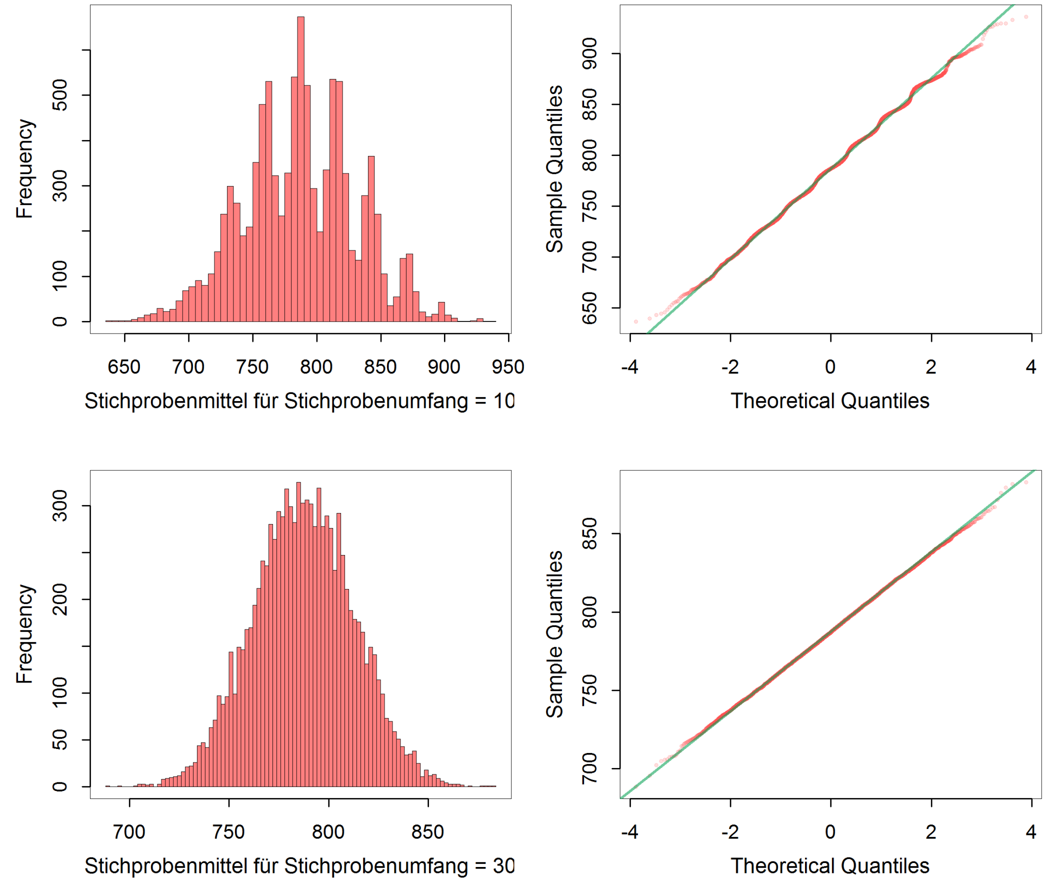
Auswirkungen der Stichprobengröße



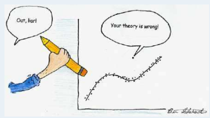
1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen







1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen

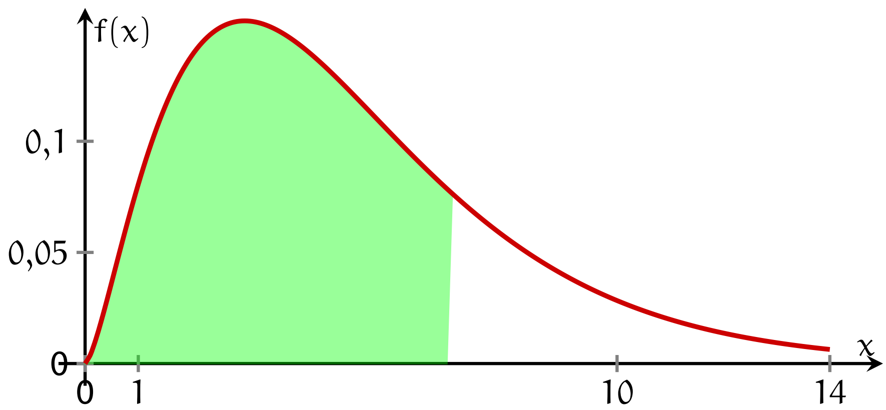


Chi-Quadrat-Verteilung

- Sind $X_1, \ldots, X_n$ iid $N(0;1)$-verteilte Zufallsvariablen, so wird die Verteilung von

$$Z = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

als **Chi-Quadrat-Verteilung mit n Freiheitsgraden** bezeichnet.



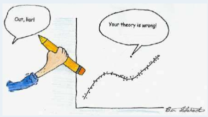
- Kurzschreibweise: $Z \sim \chi^2(n)$
- **Beispiel:** $\chi^2(30)$: $x_{0,975} = 46{,}98$

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen

Quantilstabelle der χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden

$\alpha \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0.005	0.00	0.01	0.07	0.21	0.41	0.68	0.99	1.34	1.73	2.16	2.60	3.07	3.56	4.07	4.60
0.01	0.00	0.02	0.11	0.30	0.55	0.87	1.24	1.65	2.09	2.56	3.05	3.57	4.11	4.66	5.23
0.025	0.00	0.05	0.22	0.48	0.83	1.24	1.69	2.18	2.70	3.25	3.82	4.40	5.01	5.63	6.26
0.05	0.00	0.10	0.35	0.71	1.15	1.64	2.17	2.73	3.33	3.94	4.57	5.23	5.89	6.57	7.26
0.1	0.02	0.21	0.58	1.06	1.61	2.20	2.83	3.49	4.17	4.87	5.58	6.30	7.04	7.79	8.55
0.2	0.06	0.45	1.01	1.65	2.34	3.07	3.82	4.59	5.38	6.18	6.99	7.81	8.63	9.47	10.31
0.25	0.10	0.58	1.21	1.92	2.67	3.45	4.25	5.07	5.90	6.74	7.58	8.44	9.30	10.17	11.04
0.4	0.28	1.02	1.87	2.75	3.66	4.57	5.49	6.42	7.36	8.30	9.24	10.18	11.13	12.08	13.03
0.5	0.45	1.39	2.37	3.36	4.35	5.35	6.35	7.34	8.34	9.34	10.34	11.34	12.34	13.34	14.34
0.6	0.71	1.83	2.95	4.04	5.13	6.21	7.28	8.35	9.41	10.47	11.53	12.58	13.64	14.69	15.73
0.75	1.32	2.77	4.11	5.39	6.63	7.84	9.04	10.22	11.39	12.55	13.70	14.85	15.98	17.12	18.25
0.8	1.64	3.22	4.64	5.99	7.29	8.56	9.80	11.03	12.24	13.44	14.63	15.81	16.98	18.15	19.31
0.9	2.71	4.61	6.25	7.78	9.24	10.64	12.02	13.36	14.68	15.99	17.27	18.55	19.81	21.06	22.31
0.95	3.84	5.99	7.81	9.49	11.07	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31	19.68	21.03	22.36	23.68	25.00
0.975	5.02	7.38	9.35	11.14	12.83	14.45	16.01	17.53	19.02	20.48	21.92	23.34	24.74	26.12	27.49
0.99	6.63	9.21	11.34	13.28	15.09	16.81	18.48	20.09	21.67	23.21	24.73	26.22	27.69	29.14	30.58
0.995	7.88	10.60	12.84	14.86	16.75	18.55	20.28	21.95	23.59	25.19	26.76	28.30	29.82	31.32	32.80

$\alpha \backslash n$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0.005	5.14	5.70	6.26	6.84	7.43	8.03	8.64	9.26	9.89	10.52	11.16	11.81	12.46	13.12	13.79
0.01	5.81	6.41	7.01	7.63	8.26	8.90	9.54	10.20	10.86	11.52	12.20	12.88	13.56	14.26	14.95
0.025	6.91	7.56	8.23	8.91	9.59	10.28	10.98	11.69	12.40	13.12	13.84	14.57	15.31	16.05	16.79
0.05	7.96	8.67	9.39	10.12	10.85	11.59	12.34	13.09	13.85	14.61	15.38	16.15	16.93	17.71	18.49
0.1	9.31	10.09	10.86	11.65	12.44	13.24	14.04	14.85	15.66	16.47	17.29	18.11	18.94	19.77	20.60
0.2	11.15	12.00	12.86	13.72	14.58	15.44	16.31	17.19	18.06	18.94	19.82	20.70	21.59	22.48	23.36
0.25	11.91	12.79	13.68	14.56	15.45	16.34	17.24	18.14	19.04	19.94	20.84	21.75	22.66	23.57	24.48
0.4	13.98	14.94	15.89	16.85	17.81	18.77	19.73	20.69	21.65	22.62	23.58	24.54	25.51	26.48	27.44
0.5	15.34	16.34	17.34	18.34	19.34	20.34	21.34	22.34	23.34	24.34	25.34	26.34	27.34	28.34	29.34
0.6	16.78	17.82	18.87	19.91	20.95	21.99	23.03	24.07	25.11	26.14	27.18	28.21	29.25	30.28	31.32
0.75	19.37	20.49	21.60	22.72	23.83	24.93	26.04	27.14	28.24	29.34	30.43	31.53	32.62	33.71	34.80
0.8	20.47	21.61	22.76	23.90	25.04	26.17	27.30	28.43	29.55	30.68	31.79	32.91	34.03	35.14	36.25
0.9	23.54	24.77	25.99	27.20	28.41	29.62	30.81	32.01	33.20	34.38	35.56	36.74	37.92	39.09	40.26
0.95	26.30	27.59	28.87	30.14	31.41	32.67	33.92	35.17	36.41	37.65	38.89	40.11	41.34	42.56	43.77
0.975	28.85	30.19	31.53	32.85	34.17	35.48	36.78	38.08	39.36	40.65	41.92	43.19	44.46	45.72	46.98
0.99	32.00	33.41	34.81	36.19	37.57	38.93	40.29	41.64	42.98	44.31	45.64	46.96	48.28	49.59	50.89
0.995	34.27	35.72	37.16	38.58	40.00	41.40	42.80	44.18	45.56	46.93	48.29	49.64	50.99	52.34	53.67



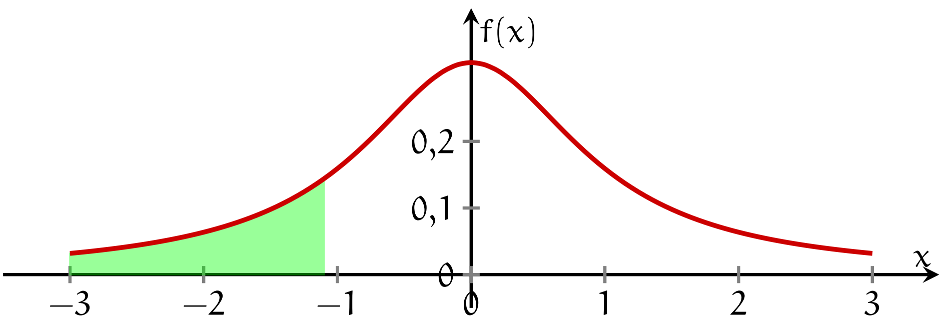
Testverteilungen: t-Verteilung

- Ist $X \sim N(0;1)$, $Z \sim \chi^2(n)$, X, Z unabhängig, so wird die Verteilung von

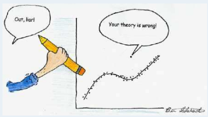
$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{1}{n} Z}}$$

als t-Verteilung mit n Freiheitsgraden bezeichnet.

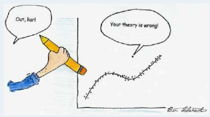
William Sealy Gosset
1876 – 1937



- Kurzschreibweise: $T \sim t(n)$
- **Beispiel:** $t(10)$ $x_{0,6} = 0{,}260$, $x_{0,5} = 0$, $x_{0,1} = -x_{0,9} = -1{,}372$



Quantilstabelle der t-Verteilung mit n Freiheitsgraden

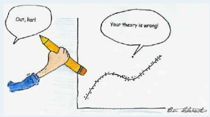


1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen

$\alpha \setminus n$	0.6	0.75	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.325	1.000	1.376	3.078	6.314	12.706	31.820	63.657
2	0.289	0.816	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.765	0.979	1.638	2.353	3.183	4.541	5.841
4	0.271	0.741	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.727	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.718	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.711	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.706	0.889	1.397	1.860	2.306	2.897	3.355
9	0.261	0.703	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.700	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.698	0.875	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.696	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.054
13	0.259	0.694	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.692	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.258	0.691	0.866	1.341	1.753	2.131	2.603	2.947
16	0.258	0.690	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.689	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.688	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.688	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.687	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.686	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.686	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.685	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.685	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.684	0.856	1.316	1.708	2.059	2.485	2.787
26	0.256	0.684	0.856	1.315	1.706	2.055	2.479	2.779
27	0.256	0.684	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.683	0.855	1.312	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.683	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.683	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750

t-Verteilung vs. Normalverteilung

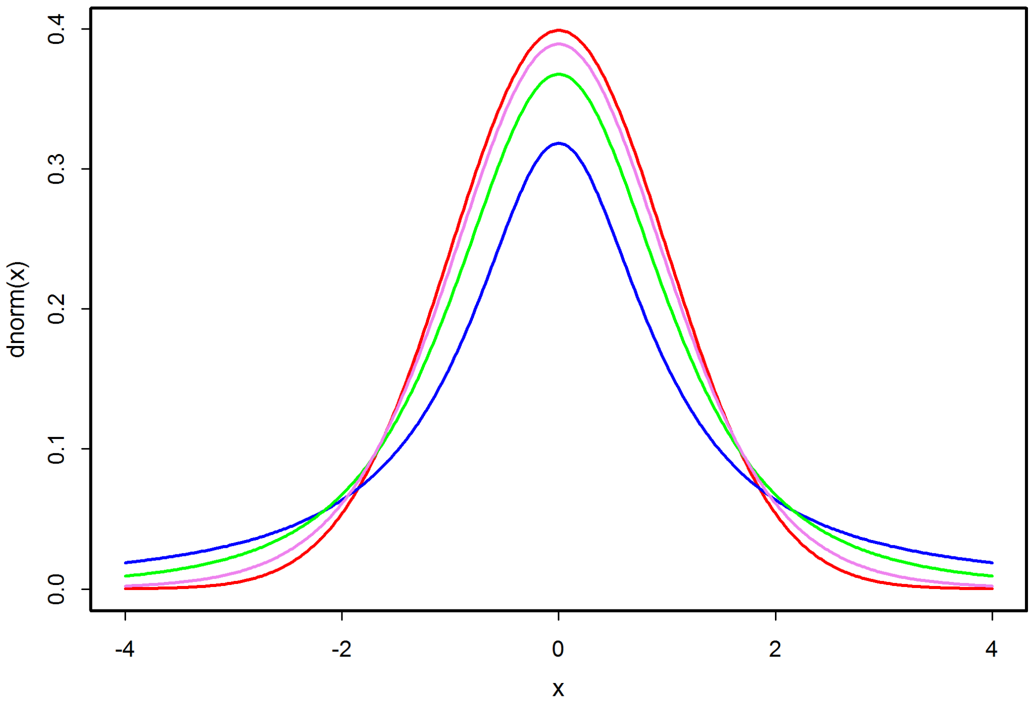
Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016



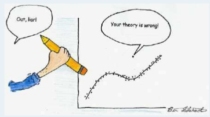
1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen

Dichtefunktion

- t-Verteilung mit 1 (blau), 3 (grün) und 10 (lila) Freiheitsgraden
- Standardnormalverteilung (rot)



Punkt-Schätzung



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen

- Ein unbekannter Parameter ϑ der Verteilung von G soll auf Basis einer Stichprobe geschätzt werden.
- Zum Beispiel: σ von $N(10; \sigma)$
- Schätzwert: $\widehat{\vartheta}$
- Vorgehen: Verwendung einer Schätzfunktion

$$\widehat{\Theta} = g(X_1, \ldots, X_n)$$

Beachte: Der Schätzwert $\widehat{\vartheta}$ ist die Realisierung der ZV (!) $\widehat{\Theta}$.

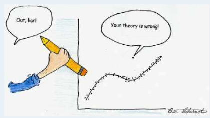
- Frage: Welche Stichprobenfunktion ist zur Schätzung geeignet?

➡ Kriterien für die Beurteilung/Konstruktion von Schätzfunktionen!

- Im Folgenden: Vorliegen einer einfachen Stichprobe, d.h. $X_1, \ldots, X_n$ iid.

Beispiel

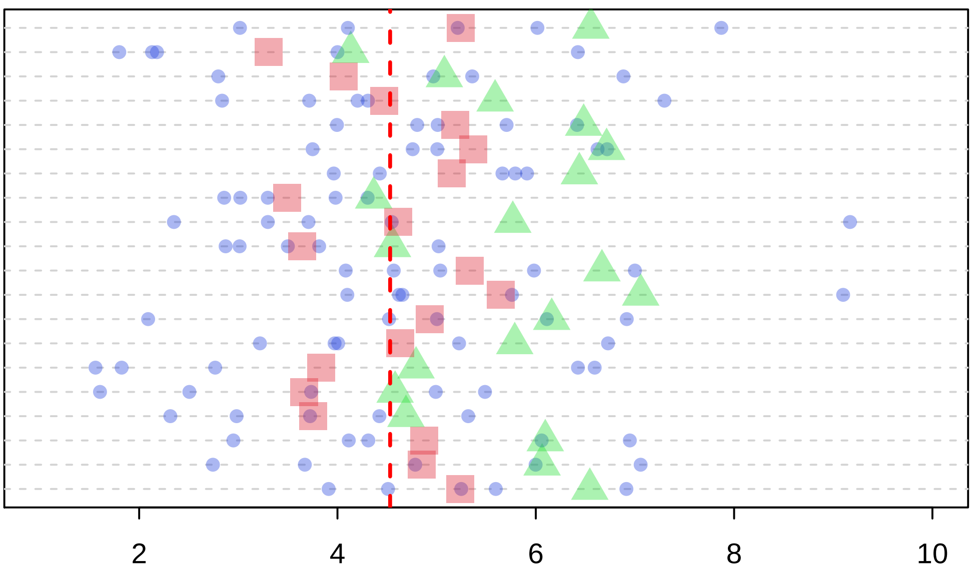
Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen

- Schätzen des Mittelwertes einer Grundgesamtheit
- dazu: Einfache Stichprobe vom Umfang 5
- und den beiden Stichprobenfunktionen

$$\widehat{\Theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \widehat{\Theta}_2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$$



Mittelwert Grundgesamtheit = 4.53

Erwartungstreue und Wirksamkeit

- Eine Schätzfunktion $\hat{\Theta} = g(X_1, \ldots, X_n)$ heißt erwartungstreu oder unverzerrt für ϑ, wenn unabhängig vom numerischen Wert von ϑ gilt:

$$E(\hat{\Theta}) = \vartheta$$

Beispiel

Sind $\hat{\Theta}_1 = \bar{X}$, $\hat{\Theta}_2 = \frac{X_1 + X_n}{2}$, $\hat{\Theta}_3 = \frac{1}{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ erwartungstreu für μ?

a) $\hat{\Theta}_1$: $\quad E(\bar{X}) = \mu$
$\Rightarrow \hat{\Theta}_1$ ist erwartungstreu.

b) $\hat{\Theta}_2$: $\quad E\left(\frac{X_1 + X_n}{2}\right) = \frac{1}{2}[E(X_1) + E(X_n)] = \frac{1}{2}(\mu + \mu) = \mu$
$\Rightarrow \hat{\Theta}_2$ ist erwartungstreu.

c) $\hat{\Theta}_3$: $E\left(\frac{1}{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n} \mu = \frac{n}{n-1} \mu \neq \mu$
$\Rightarrow \hat{\Theta}_3$ ist nicht erwartungstreu

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen

Erwartungstreue und Wirksamkeit

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

- Welche der erwartungstreuen Schätzfunktionen $\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2$ ist „besser"?
- Von zwei erwartungstreuen Schätzfunktionen $\hat{\Theta}_1$, $\hat{\Theta}_2$ für ϑ heißt $\hat{\Theta}_1$ wirksamer als $\hat{\Theta}_2$, wenn unabhängig vom numerischen Wert von ϑ gilt:

$$\mathrm{Var}(\hat{\Theta}_1) < \mathrm{Var}(\hat{\Theta}_2)$$

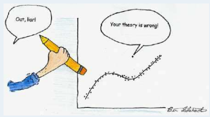
Beispiel: ($\hat{\Theta}_1 = \bar{X}$, $\hat{\Theta}_2 = \frac{X_1 + X_n}{2}$)
Wegen

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Var}(\hat{\Theta}_1) &= \mathrm{Var}(\bar{X}) &&= \frac{\sigma^2}{n} \\ \mathrm{Var}(\hat{\Theta}_2) &= \mathrm{Var}\left(\frac{X_1 + X_n}{2}\right) = \frac{1}{4}(\sigma^2 + \sigma^2) &&= \frac{\sigma^2}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathrm{Var}(\hat{\Theta}_1) < \mathrm{Var}(\hat{\Theta}_2)$$

(falls $n > 2$) ist $\hat{\Theta}_1$ wirksamer als $\hat{\Theta}_2$.

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen

Intervall-Schätzung



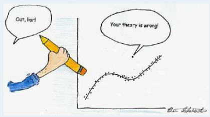
- Für einen unbekannten Verteilungsparameter ϑ soll auf Basis einer Stichprobe ein Intervall geschätzt werden.
- Verwendung der Stichprobenfunktionen V_u, V_o, so dass $V_u \leqq V_o$ und

$$P(V_u \leqq \vartheta \leqq V_o) = 1 - \alpha$$

  stets gelten.
  $[V_u; V_o]$ heißt Konfidenzintervall (KI) für ϑ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$.
- Beachte: Das Schätzintervall $[v_u; v_o]$ ist Realisierung der Zufallsvariablen (!) V_u, V_o.
  ➠ Irrtumswahrscheinlichkeit α (klein, i.d.R. $\alpha \leqq 0{,}1$)
- Frage: Welche Konfidenzintervalle sind zur Schätzung geeignet?
  ➠ Hängt von Verteilung von G sowie vom unbekannten Parameter (μ, σ^2) ab!
- Im Folgenden: Einfache Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ mit $E(X_i) = \mu$, $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$

Intervall-Schätzung

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

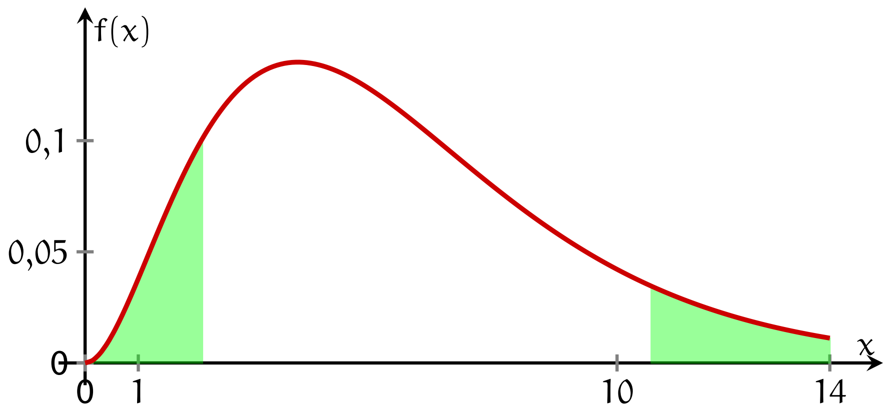


1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen

Wichtiger Spezialfall: Symmetrische Konfidenzintervalle

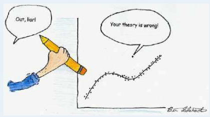
- Symmetrisch heißt **nicht**, dass die Dichte symmetrisch ist, sondern
- übereinstimmende Wahrscheinlichkeiten für Über-/Unterschreiten des Konfidenzintervalls, d.h.

$$P(V_u > \vartheta) = P(V_o < \vartheta) = \frac{\alpha}{2}$$



- **Wichtig:** Eine Verkleinerung von α bewirkt eine Vergrößerung des Konfidenzintervalls.

Konfidenzintervall für μ bei Normalverteilung mit bekanntem σ^2



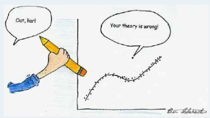
Vorgehensweise:

1. Festlegen des Konfidenzniveaus $1-\alpha$
2. Bestimmung des $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$-Fraktils c der $N(0,1)$-Verteilung
3. Berechnen des Stichprobenmittels $\bar{x}$
4. Berechnen des Wertes $\dfrac{\sigma c}{\sqrt{n}}$
5. Ergebnis der Intervall-Schätzung:

$$\left[\bar{x}-\frac{\sigma c}{\sqrt{n}}\,;\quad \bar{x}+\frac{\sigma c}{\sqrt{n}}\right]$$

Intervallschätzung: Beispiel

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen

Beispiel

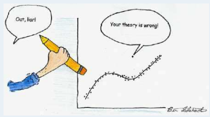
Normalverteilung mit $\sigma = 2{,}4$
$(x_1, \ldots, x_9)$ = (184.2, 182.6, 185.3, 184.5, 186.2, 183.9, 185.0, 187.1, 184.4)

Gesucht: Konfidenzintervall für μ zum Konfidenzniveau $1-\alpha = 0{,}99$

1. $1-\alpha = 0{,}99$
2. $N(0;1)$: $c = x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{1-\frac{0,01}{2}} = x_{0,995} = 2{,}576$ (Tab. 3; Interpolation)
3. $\bar{x} = \frac{1}{9}\,(184{,}2 + \cdots + 184{,}4) = 184{,}8$
4. $\frac{\sigma c}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}4 \cdot 2{,}576}{\sqrt{9}} = 2{,}06$
5. KI $= [184{,}8 - 2{,}06; 184{,}8 + 2{,}06] = [182{,}74; 186{,}86]$

Interpretation: Mit 99 % Wahrscheinlichkeit ist $\mu \in [182{,}74; 186{,}86]$.

Wichtige Fraktilswerte



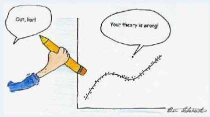
Wichtige $N(0;1)$-Fraktilswerte:

α	x_α
0,9	1,281552
0,95	1,644854
0,975	1,959964
0,99	2,326348
0,995	2,575829

(I.d.R. genügen drei Nachkommastellen.)

Intervalllänge

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen

- Bei bekannter Standardabweichung gilt offenkundig

$$L = V_o - V_u = \frac{2\sigma c}{\sqrt{n}}$$

- Welcher Stichprobenumfang n sichert eine vorgegebene (Maximal-)Länge L? $\Rightarrow$ Nach n auflösen! $\Rightarrow$

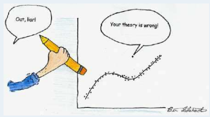
$$\boxed{n \geqq \left(\frac{2\sigma c}{L}\right)^2}$$

- Eine Halbierung von L erfordert eine Vervierfachung von n!
- Angewendet auf letztes **Beispiel**:

$$L = 4 \Rightarrow n \geqq \left(\tfrac{2\cdot 2{,}4\cdot 2{,}576}{4}\right)^2 = 9{,}556 \Rightarrow n \geqq 10$$

$$L = 2 \Rightarrow n \geqq \left(\tfrac{2\cdot 2{,}4\cdot 2{,}576}{2}\right)^2 = 38{,}222 \Rightarrow n \geqq 39$$

Konfidenzintervall



Konfidenzintervall für μ bei Normalverteilung mit unbekanntem σ^2

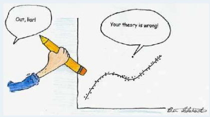
- Vorgehensweise:
  1. Festlegen des Konfidenzniveaus $1-\alpha$
  2. Bestimmung des $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$-Fraktils c der $t(n-1)$-Verteilung
  3. Berechnen des Stichprobenmittels $\bar{x}$ und der Stichproben-Standardabweichung s
  4. Berechnen des Wertes $\frac{sc}{\sqrt{n}}$
  5. Ergebnis der Intervall-Schätzung:

$$\left[\bar{x}-\frac{sc}{\sqrt{n}}\,;\quad \bar{x}+\frac{sc}{\sqrt{n}}\right]$$

- Zu Schritt 2: Falls $n-1>30$ wird die $N(0;1)$-Verteilung verwendet.

Konfidenzintervalllänge

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen

Beispiel:
Wie das letzte Beispiel, jedoch σ unbekannt.

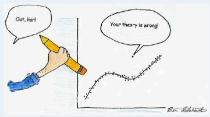
1. $1-\alpha=0{,}99$
2. $t(8)$: $c=x_{1-\frac{\alpha}{2}}=x_{1-\frac{0{,}01}{2}}=x_{0{,}995}=3{,}355$ (Tab. 4)
3. $\bar{x}=\frac{1}{9}\,(184{,}2+\cdots+184{,}4)=184{,}8$
   $s=\sqrt{\frac{1}{8}\left[(184{,}2^2+\cdots+184{,}4^2)-9\cdot 184{,}8^2\right]}=1{,}31$
4. $\frac{sc}{\sqrt{n}}=\frac{1{,}31\cdot 3{,}355}{\sqrt{9}}=1{,}47$
5. $\mathrm{KI}=[184{,}8-1{,}47;184{,}8+1{,}47]=[183{,}33;186{,}27]$

Interpretation: Mit 99 % Wahrscheinlichkeit ist $\mu\in[183{,}33;186{,}27]$.

R Beispiel

```r
x <- c(184.2, 182.6, 185.3, 184.5, 186.2,
       183.9, 185.0, 187.1, 184.4)
t.test(x,conf.level=.99)
```

```
##
##  One Sample t-test
##
## data:  x
## t = 422.11, df = 8, p-value < 2.2e-16
## alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
## 99 percent confidence interval:
##  183.331 186.269
## sample estimates:
## mean of x
##     184.8
```

Konfidenzintervall für μ bei beliebiger Verteilung

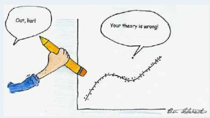
- Voraussetzung: $n > 30$, bzw. falls G dichotom: $5 \leqq \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leqq n - 5$
- Vorgehensweise:
  1. Festlegen des Konfidenzniveaus $1 - \alpha$
  2. Bestimmung des $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$-Fraktils c der Standardnormalverteilung $N(0;1)$
  3. Berechnung des Stichprobenmittels $\bar{x}$ sowe eines Schätzwertes $\hat{\sigma}$ für die Standardabweichung σ der GG mittels

$$\hat{\sigma} = \begin{cases} \sigma, & \text{falls } \sigma \text{ bekannt} \\ \sqrt{\bar{x}(1-\bar{x})}, & \text{falls GG dichotom} \\ s, & \text{sonst} \end{cases}$$

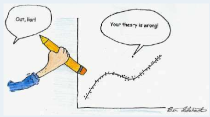
  4. Berechnung von $\frac{\hat{\sigma} c}{\sqrt{n}}$
  5. Ergebnis der Intervallschätzung:

$$\left[\bar{x} - \frac{\hat{\sigma} c}{\sqrt{n}}; \bar{x} + \frac{\hat{\sigma} c}{\sqrt{n}}\right]$$

- Zu Schritt 3: Manchmal kann anderer Schätzwert $\hat{\sigma}$ sinnvoller sein.



Konfidenzintervall für μ bei beliebiger Verteilung



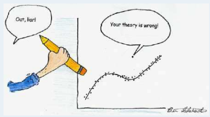
1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen

Beispiel:
Poisson-Verteilung mit $\lambda\ (= \mu = \sigma^2)$ unbekannt.
$(x_1, \ldots, x_{40}) = (3; 8; \ldots; 6)$
Gesucht: KI für λ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0{,}9$

1. $1 - \alpha = 0{,}9$
2. $N(0;1):\ c = x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{1-\frac{0,1}{2}} = x_{0,95} = 1{,}645$
3. $\bar{x} = \frac{1}{40}(3 + 8 + \cdots + 6) = 6{,}5$
   $\hat{\sigma} = \sqrt{\bar{x}} = \sqrt{6{,}5} = 2{,}55$ (da $\sigma^2 = \lambda$)
4. $\frac{\hat{\sigma} c}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}55 \cdot 1{,}645}{\sqrt{40}} = 0{,}66$
5. $\text{KI} = [6{,}5 - 0{,}66; 6{,}5 + 0{,}66] = [5{,}84; 7{,}16]$

Konfidenzintervall für σ^2 bei Normalverteilung

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen

Vorgehensweise

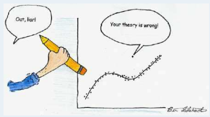
1. Festlegen eines Konfidenzniveaus $1 - \alpha$
2. Bestimmung der $\frac{\alpha}{2}$- bzw. $(1 - \frac{\alpha}{2})$-Fraktile (c_1 bzw. c_2) der $\chi^2(n-1)$-Verteilung
3. Aus der Stichprobe: Berechnung der Größe

$$(n-1)s^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2 v$$

4. Berechnung des Konfidenzintervalls

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{c_2}; \frac{(n-1)s^2}{c_1}\right]$$

KI für σ^2 bei Normalverteilung



Beispiel:

$G \sim N(\mu; \sigma)$;

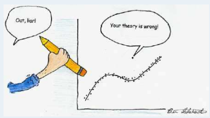
$(x_1, \ldots, x_5) = (1, 1.5, 2.5, 3, 2)$

Gesucht: KI für σ^2 zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0{,}99$

1. $1 - \alpha = 0{,}99$
2. $\chi^2(5-1): \; c_1 = x_{\frac{\alpha}{2}} = x_{0{,}005} = 0{,}21$
   $c_2 = x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{0{,}995} = 14{,}86$
3. $\bar{x} = \frac{1}{5}(1 + 1{,}5 + 2{,}5 + 3 + 2) = 2$
   $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - 5 \cdot \bar{x}^2 = 1^2 + 1{,}5^2 + 2{,}5^2 + 3^2 + 2^2 - 5 \cdot 2^2 = 2{,}5$
4. KI = $\left[\frac{2{,}5}{14{,}86}; \frac{2{,}5}{0{,}21}\right] = [0{,}17; 11{,}9]$

(Extrem groß, da n klein.)

Signifikanztests



- Vorliegen einer Hypothese über die Verteilung(en) der Grundgesamtheit(en).
- Beispiele:
  - „Der Würfel ist fair.“
  - „Die Brenndauern zweier unterschiedlicher Glühbirnensorten sind gleich.“
- Hypothese soll anhand einer Stichprobe überprüft werden.
- Prinzip:
  - Hypothese verwerfen, wenn „signifikanter“ Widerspruch zur Stichprobe.
  - Ansonsten: Hypothese nicht verwerfen.
- Eine verworfene Hypothese gilt als statistisch widerlegt.
- Nicht-Verwerfung ist dagegen ein „Freispruch aus Mangel an Beweisen“.

Zu Beachten:

Nicht-Verwerfung ist **kein** „statistischer Beweis“, dass Hypothese wahr ist!
(„Trick“: Hypothese falsch $\iff$ Gegenhypothese wahr!)

Test des Erwartungswertes bei bekannter Varianz in der Grundgesamtheit

- Zunächst:
  - $G \sim N(\mu; \sigma)$ mit σ bekannt
  - Einfache Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$
  - (Null-)Hypothese $H_0 : \mu = \mu_0$
- **Beispiel:**
  $X_1, \ldots, X_{25}$ mit $X_i =$ Füllmenge der i-ten Flasche $\sim N(\mu; 1{,}5)$
  Nullhypothese $H_0 : \mu = 500$, d.h. $\mu_0 = 500$
- Je nach Interessenlage sind unterschiedliche **Gegenhypothesen** möglich:

  a) $H_1 : \mu \neq \mu_0$
  b) $H_1 : \mu < \mu_0$
  c) $H_1 : \mu > \mu_0$

- Entscheidung:

	$H_0 : \mu = \mu_0$	wird abgelehnt gegenüber
a)	$H_1 : \mu \neq \mu_0$,	wenn $\lvert\bar{x} - \mu_0\rvert$ „sehr groß" ist
b)	$H_1 : \mu < \mu_0$,	wenn $\bar{x}$ „weit kleiner" als μ_0 ist
c)	$H_1 : \mu > \mu_0$,	wenn $\bar{x}$ „weit größer" als μ_0 ist

Test des Erwartungswertes bei bekannter Varianz in der Grundgesamtheit

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016

1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
   - Grundlagen
   - Punkt-Schätzung
   - Intervall-Schätzung
   - Signifikanztests

Quellen

Entscheidungskriterium aus Stichprobe:

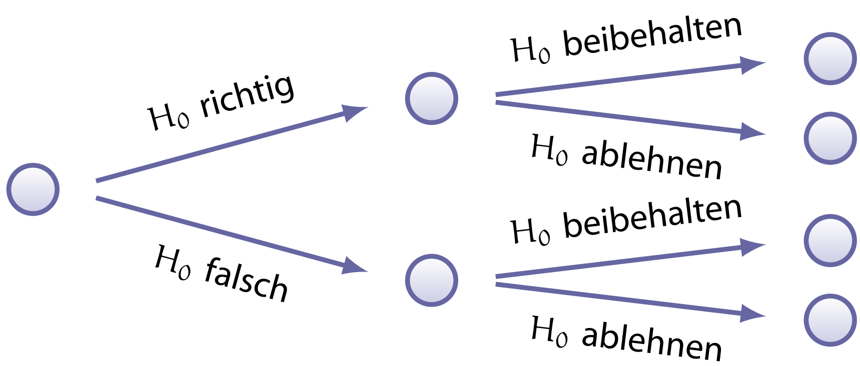
$$v = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$$

- Vorteil: Verteilung bekannt: $N(0; 1)$
- Dann:

	$H_0 : \mu = \mu_0$	wird abgelehnt gegenüber
a)	$H_1 : \mu \neq \mu_0$,	wenn $\lvert v\rvert$ „sehr groß" ist
b)	$H_1 : \mu < \mu_0$,	wenn v „sehr negativ" ist
c)	$H_1 : \mu > \mu_0$,	wenn v „sehr positiv" ist

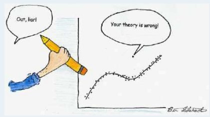
Mögliche Fehlentscheidungen

- **Ablehnung von H_0**, obwohl H_0 richtig ist: Fehler 1. Art
- **Nicht-Ablehnung von H_0**, obwohl H_0 falsch ist: Fehler 2. Art



- Signifikanzniveau α: Maximal erlaubte Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art.

Test des Erwartungswertes bei bekannter Varianz in der Grundgesamtheit

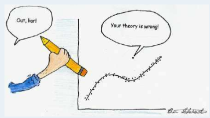


- Mithilfe von α und V kann geklärt werden, was „sehr groß“ usw. heißt:
  Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art im Fall
  a): $|v| > x$, obwohl H_0 richtig:

$$\begin{aligned}
P(|V| > x) &= P(V > x) + P(V < -x) \\
&= 2 \cdot P(V > x) \qquad \text{(Symmetrie der Normalverteilung)} \\
&= 2 \cdot [1 - P(V \leqq x)] = 2 \cdot [1 - \Phi(x)] \stackrel{!}{=} \alpha \\
&\iff \Phi(x) = 1 - \tfrac{\alpha}{2} \\
&\iff x = x_{1-\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

  H_0 wird demnach verworfen,
  wenn $|v| > x_{1-\frac{\alpha}{2}}$ bzw. $v \in B$ ist.
  $B = (-\infty; -x_{1-\frac{\alpha}{2}}) \cup (x_{1-\frac{\alpha}{2}}; \infty)$ heißt Verwerfungsbereich.
- Analoge Vorgehensweise für die Fälle b) und c)

Test des Erwartungswertes bei bekannter Varianz in der GG



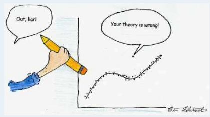
Rezept

1. Ein Signifikanzniveau α wird festgelegt.
2. Der Verwerfungsbereich

$$\begin{aligned}
B &= \left(-\infty;\ -x_{1-\alpha/2}\right) \cup \left(x_{1-\alpha/2};\ \infty\right) && \text{im Fall a)} \\
B &= (-\infty;\ -x_{1-\alpha}) && \text{im Fall b)} \\
B &= (x_{1-\alpha};\ \infty) && \text{im Fall c)}
\end{aligned}$$

   wird festgelegt, wobei $x_{1-\alpha/2}$ bzw. $x_{1-\alpha}$ das $(1-\alpha/2)$- bzw. das $(1-\alpha)$-Fraktil der $N(0,1)$-Verteilung ist. (Wichtig: Der Ablehnungsbereich ist also unabhängig von der Stichprobe)
3. Wichtig: Erst jetzt werden die Daten der Stichprobe erhoben/beachtet:
   Der Testfunktionswert $v = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ wird berechnet.
4. H_0 wird genau dann verworfen, wenn $v \in B$ gilt.

Einstichproben-Gaußtest



Beispiel:

$X_1, \ldots, X_{25}$ mit $X_i \sim N(\mu; 1{,}5)$ und $\bar{x} = 499{,}28$
Prüfe $H_0: \ \mu = 500, \ H_1: \ \mu \neq 500$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}01$

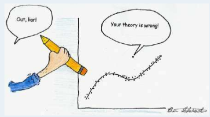
Lösung: Einstichproben-Gaußtest, Fall a)

1. $\alpha = 0{,}01$
2. $N(0;1): \ x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{1-0{,}005} = x_{0{,}995} = 2{,}576$
   $\Rightarrow B = (-\infty; -2{,}576) \cup (2{,}576; \infty)$
3. $v = \frac{499{,}28-500}{1{,}5} \cdot \sqrt{25} = -2{,}4$
4. $v \notin B \Rightarrow H_0$ nicht verwerfen

Interpretation: Zum Signifikanzniveau 1 % kann der Brauerei keine Abweichung vom Sollwert $\mu_0 = 500$ nachgewiesen werden.

Aufbau und Klassifikation von Signifikanztests

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen

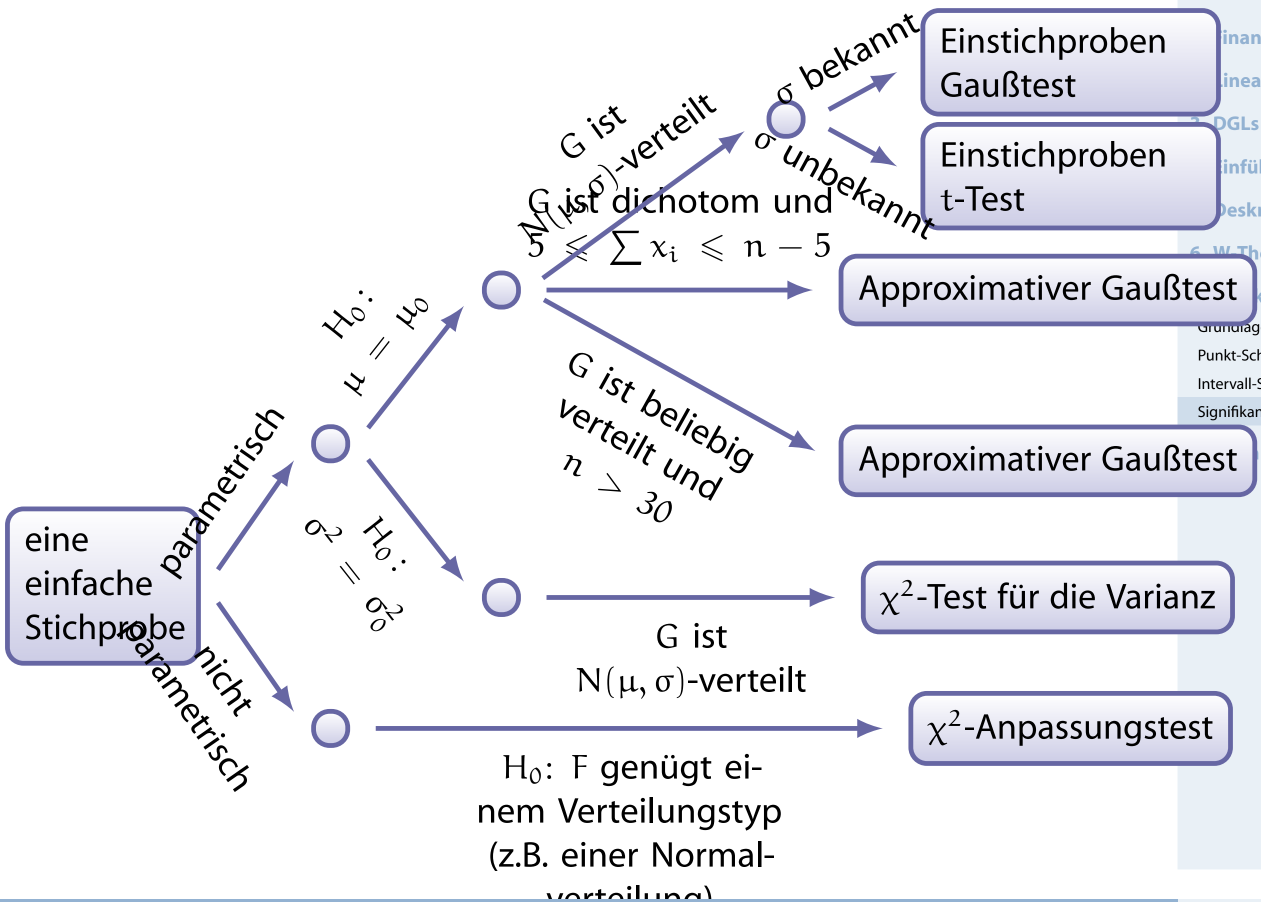
Der jeweils geeignete Test hängt ab von ...

- dem zu testenden Hypothesenpaar H_0, H_1; unterscheide:
  - Parametrische Hypothesen:
    Beziehen sich auf unbekannte(n) Verteilungsparameter $(\mu, \sigma^2, \ldots)$
  - Nichtparametrische Hypothesen:
    Beinhalten sonstige Aussagen, z.B. „Alter und Einkommen sind unabh."
- den Voraussetzungen an die Verteilung/parameter (z.B. $G \sim N(\mu; \sigma)$)
- den Voraussetzungen an den Stichprobenumfang (z.B. $n > 30$)
- Art und Anzahl der Stichproben; unterscheide:
  - Signifikanztests bei einer einfachen Stichprobe
  - Signifikanztests bei mehreren unabhängigen Stichproben
  - Signifikanztests bei zwei verbundenen Stichproben

In dieser Vorlesung: Nur **einfache Stichproben**

Klassifizierung von Signifikanztests

Signifikanztests bei einer einfachen Stichprobe



Einstichproben-t-Test und approximativer Gaußtest

Gegeben:

- Einfache Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ mit
- $E(X_i) = \mu, \;\; \mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$

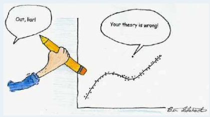
Hypothesenpaare:

a)	$H_0 : \mu = \mu_0$		$H_1 : \mu \neq \mu_0$
b)	$H_0 : \mu = \mu_0$	(oder $\mu \geqq \mu_0$),	$H_1 : \mu < \mu_0$
c)	$H_0 : \mu = \mu_0$	(oder $\mu \leqq \mu_0$),	$H_1 : \mu > \mu_0$

Voraussetzungen:

1. Normalverteilung mit σ unbekannt (Einstichproben-t-Test) **oder**
2. Beliebige Verteilung mit $n > 30$ bzw. $5 \leqq \sum x_i \leqq n - 5$ (bei $B(1; p)$) (approximativer Gaußtest)

Einstichproben-t-Test, approximativer Gaußtest



Ablauf:

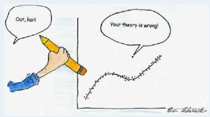
1. Festlegen des Signifikanzniveaus α
2. Festlegen des Verwerfungsbereichs B:
   - Falls $H_1 : \mu \neq \mu_0$: $\quad B = (-\infty; -x_{1-\alpha/2}) \cup (x_{1-\alpha/2}; \infty)$
   - Falls $H_1 : \mu < \mu_0$: $\quad B = (-\infty; -x_{1-\alpha})$
   - Falls $H_1 : \mu > \mu_0$: $\quad B = (x_{1-\alpha}; \infty)$

   Dabei steht $x_{1-\alpha/2}$ bzw. $x_{1-\alpha}$ für das jeweilige Fraktil
   - der $t(n-1)$-Verteilung bei $n \leqslant 29$ bzw.
   - der $N(0;1)$-Verteilung bei $n \geqslant 30$.
3. Berechnen des Testfunktionswertes:

$$v = \begin{cases} \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s}\sqrt{n} & \text{falls Grundgesamtheit } N(\mu;\sigma)\text{-verteilt, } \sigma \text{ unbekannt oder falls Verteilung der GG beliebig, } n > 30, \sigma \text{ unbekannt} \\ \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} & \text{falls Verteilung der GG beliebig, } n > 30, \sigma \text{ bekannt} \\ \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{\mu_0(1-\mu_0)}}\sqrt{n} & \text{falls GG gemäß } B(1;\mu)\text{-verteilt, } n > 30 \end{cases}$$

Einstichproben-t-Test: Beispiel

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016



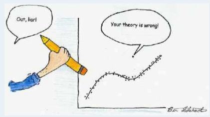
1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen

Beispiel t-Test: Energieaufnahme von Frauen

- Empfohlene täglich Energieaufnahme für Frauen: 7724 kJ (1845 kcal)
- Nehme einfache Stichprobe von 11 Frauen und teste zum Signifkanzniveau $\alpha = 0{,}05$ für
- H_0: „Der Erwartungswert der täglichen Energieaufnahme für Frauen ist 7724 kJ" (μ_0)
- gegen H_1: $\mu \neq \mu_0$

```
daily.intake <- c(5260, 5470, 5640, 6180, 6390, 6515, 6805, 7515, 7515, 8230, 8770)
t.test(daily.intake, alternative="two.sided", mu=7724, conf.level=0.95)

##
##  One Sample t-test
##
## data:  daily.intake
## t = -2.8179, df = 10, p-value = 0.01823
## alternative hypothesis: true mean is not equal to 7724
## 95 percent confidence interval:
##  5986.348 7520.925
## sample estimates:
## mean of x
##  6753.636
```

Einstichproben-t-Test, approx. Gaußtest



Beispiel:

$X_1, \ldots, X_{2000} \sim B(1; p)$ mit

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls i-te Person Wähler einer bestimmten Partei} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Ergebnis der Stichprobe: $\sum\limits_{i=1}^{2000} x_i = 108$

Prüfe $H_0: p \leqq 0{,}05$ gegen $H_1: p > 0{,}05$ zum Signifikanzniveau 2 %

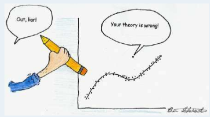
Lösung:

approximativer Gaußtest bei dichotomer (zweiwertiger) Verteilung; Voraussetzung 2 erfüllt: $5 \leqq 108 \leqq 2000 - 5$

1. $\alpha = 0{,}02$
2. $N(0;1): x_{1-\alpha} = x_{0{,}98} = 2{,}05$ (Tabelle) $\Rightarrow B = (2{,}05; \infty)$
3. $v = \dfrac{\frac{108}{2000} - 0{,}05}{\sqrt{0{,}05 \cdot (1 - 0{,}05)}} \sqrt{2000} = 0{,}82$
4. $v \notin B \Rightarrow H_0$ nicht verwerfen

Zusatzfrage: Entscheidung, falls $\alpha = 0{,}01$? $\rightarrow$ Keine Änderung!

Chi-Quadrat-Test für die Varianz



- Gegeben: Einfache Stichprobe $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu; \sigma)$
- Hypothesenpaare:

a)	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$		$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
b)	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$	(oder $\sigma^2 \geqq \sigma_0^2$),	$H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$
c)	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$	(oder $\sigma^2 \leqq \sigma_0^2$),	$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$

- **Vorgehensweise:**
  1. Festlegen des Signifikanzniveaus α.
  2. Festlegen des Verwerfungsbereichs:

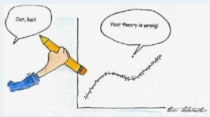
     $B = [0; x_{\alpha/2}) \cup (x_{1-\alpha/2}; \infty)$ im Fall a)

     $B = [0; x_\alpha)$ im Fall b)

     $B = (x_{1-\alpha}; \infty)$ im Fall c)
  3. Berechnung des Testfunktionswertes:

$$v = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Chi-Quadrat-Test für die Varianz



Beispiel: $G \sim N(\mu; \sigma)$

$$(x_1, \ldots, x_{10}) = (2100; 2130; 2150; 2170; 2210; 2070; 2230; 2150; 2230; 2200)$$

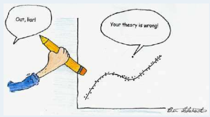
Prüfe $H_0: \ \sigma = 40, \ H_1: \ \sigma \neq 40$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}1$

Lösung: χ^2-Test für die Varianz, Hypothese Fall a);
Voraussetzungen sind erfüllt

1. $\alpha = 0{,}1$
2. $\chi^2(9): \ x_{\frac{\alpha}{2}} = x_{0,05} = 3{,}33; \ x_{1-\frac{\alpha}{2}} = x_{0,95} = 16{,}92$
   (Tabelle der χ^2-Verteilung)
   $$\Rightarrow B = [0; 3{,}33) \cup (16{,}92; \infty)$$
3. $\bar{x} = \frac{1}{10}(2100 + 2130 + \cdots + 2200) = 2164$
   $v = \frac{1}{40^2}[(2100-2164)^2 + \cdots + (2200-2164)^2] = 16{,}65$
   $\Rightarrow v \notin B \Rightarrow H_0$ nicht verwerfen

Zwei verbundene einfache Stichproben: Kontingenztest

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Grundlagen
Punkt-Schätzung
Intervall-Schätzung
Signifikanztests
Quellen

- Situation: In Grundgesamtheit G: Zwei verbundene einfache Stichproben, also Beobachtung zweier Merkmale X, Y
- Hypothese:

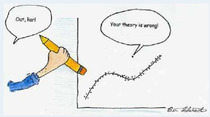
> H_0: Die beiden Merkmale X und Y sind in G unabhängig.
> H_1: X und Y sind in G abhängig.

Vorgehensweise Kontingenztest:

1. Festlegen des Signifikanzniveaus α.
2. Unterteilung der x-Achse in $k \geqslant 2$ und die y-Achse in $l \geqslant 2$ disjunkte, aneinander angrenzende Intervalle $A_1, \ldots, A_k$ bzw. $B_1, \ldots, B_l$
3. Erstellen einer Kontingenztabelle mit Randhäufigkeiten:

$x\downarrow \ y\rightarrow$ B_1	B_2	$\cdots$	B_l	
A_1 h_{11}	h_{12}	$\cdots$	h_{1l}	$h_{1\bullet}$
A_2 h_{21}	h_{22}	$\cdots$	h_{2l}	$h_{2\bullet}$
$\vdots$ $\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
A_k h_{k1}	h_{k2}	$\cdots$	h_{kl}	$h_{k\bullet}$
$h_{\bullet 1}$	$h_{\bullet 2}$	$\cdots$	$h_{\bullet l}$	n

Zwei verbundene einfache Stichproben: Kontingenztest



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
   - Grundlagen
   - Punkt-Schätzung
   - Intervall-Schätzung
   - Signifikanztests

Quellen

Vorgehensweise Kontingenztest (Fortsetzung):

4. Mit dem Fraktilswert $x_{1-\alpha}$ der χ^2-Verteilung mit $(k-1)\cdot(l-1)$ Freiheitsgraden: Berechnung des Verwerfungsbereichs

$$B = (x_{1-\alpha}; \infty)$$

5. Zu jeder Kombination aus $i = 1, \ldots, k$ und $j = 1, \ldots, l$: Berechnung der Größe

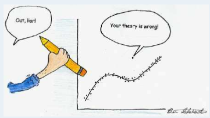
$$\tilde{h}_{ij} = \frac{h_{i\bullet} \cdot h_{\bullet j}}{n}$$

6. Berechnung des Testfunktionswerts v:

$$v = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{\left(\tilde{h}_{ij} - h_{ij}\right)^2}{\tilde{h}_{ij}} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{h_{ij}^2}{\tilde{h}_{ij}} - n$$

7. Ablehnung von H_0 genau dann, wenn $v \in B$.

Zwei verbundene einfache Stichproben: Kontingenztest



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
   - Grundlagen
   - Punkt-Schätzung
   - Intervall-Schätzung
   - Signifikanztests

Quellen

Kontingenztest: Beispiel

- 400 Erstkandidaten einer praktischen Führerscheinprüfung schneiden abhängig von der besuchten Fahrschule folgendermaßen ab:

	Fahrschule		
	A	B	C
bestanden	130	88	62
durchgefallen	70	38	12

- Zum Signifikanzniveau von 5 % soll getestet werden, ob das Bestehen der Prüfung unabhängig von der besuchten Fahrschule ist.

Testdurchführung

1. Signifikanzniveau $\alpha = 5\,\%$
2. entfällt, da Skalenniveau nominal
3. Kontingenztabelle:

	A	B	C	$\sum$
best.	130	88	62	280
durchg.	70	38	12	120
$\sum$	200	126	74	400

4. χ^2-Verteilung mit $(3-1)\cdot(2-1) = 2$ Freiheitsgraden: $x_{1-0,05} = x_{0,95} = 5{,}99$:

$$B = (5{,}99; \infty)$$

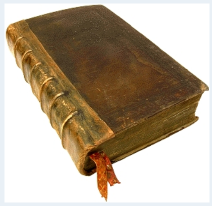
5. Berechnung der $\tilde{h}_{ij}$:

	A	B	C
best.	140	88,2	51,8
durchg.	60	37,8	22,2

6. $$v = \frac{(140-130)^2}{140} + \ldots + \frac{(22{,}2-12)^2}{22{,}2} \approx 9{,}077$$

7. $v \in B$: Also wird H_0 abgelehnt, die Prüfungsergebnisse sind abhängig von der Fahrschule.

Quellenübersicht



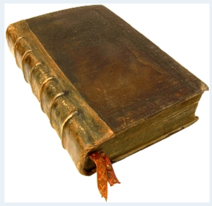
1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Bücher

- Bamberg, Günter, Franz Baur und Michael Krapp (2011). **Statistik**. 16. Aufl. München: Oldenbourg Verlag. ISBN: 3486702580.
- Fahrmeir, Ludwig, Rita Künstler, Iris Pigeot und Gerhard Tutz (2009). **Statistik: Der Weg zur Datenanalyse**. 7. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer. ISBN: 3642019382.
- Luderer, Bernd (2003). **Starthilfe Finanzmathematik. Zinsen, Kurse, Renditen**. 2. Aufl. Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden: Teubner.
- Opitz, Otto (2004). **Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler**. 9. Aufl. München: Oldenbourg.

Quellenübersicht

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2016



1. Finanzmathematik
2. Lineare Programme
3. DGLs
4. Einführung
5. Deskriptive Statistik
6. W-Theorie
7. Induktive Statistik
Quellen

Quellen zu Bildern und Daten

- Anscombe, Francis (1973). „Graphs in Statistical Analysis“. In: **The American Statistician**, S. 195–199.
- Bach, Axel, Reinhard Brüning, Katrin Krieft, Hilmar Liebsch und Martin Rosenberg (2006). **Mit Zahlen lügen**. URL: `http://www.wdr.de/tv/quarks/sendungsbeitraege/2006/1017/000_zahlen.jsp`.
- Fahrmeir, Ludwig, Rita Künstler, Iris Pigeot und Gerhard Tutz (2009). **Statistik: Der Weg zur Datenanalyse**. 7. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer. ISBN: 3642019382.
- Kramer, Walter (2011). **So lügt man mit Statistik**. Piper Verlag. ISBN: 3492264131.