Klausur Wirtschaftsmathematik
Lösungshinweise

Prüfungsdatum: 27. Juni 2015 – Prüfer: Etschberger
Studiengang: Wirtschaftsingenieurwesen

Aufgabe 1 **16 Punkte**

Anton Arglos hat von seiner Großmutter 30 000 € geschenkt bekommen, um sein Studium zu finanzieren. Nehmen Sie für die Aufgaben a) und b) an, dass Anton sein Studium ausschließlich aus dem Geldgeschenk finanziert und von einem konstanten, jährlichen Zins von 7 % ausgegangen werden kann. Stellen Sie Ihren Rechenweg jeweils ausführlich und nachvollziehbar dar!

a) Wie lang darf Antons Studium dauern, wenn er jährlich nachschüssig 7000 € entnimmt?

b) Anton fällt auf, dass er das Geld eigentlich jährlich vorschüssig benötigt, aber mit 5000 € jährlich auskommt. Wie lang kann sein Studium unter diesen Annahmen dauern?

Am Ende seines Studiums bemerkt der geschäftstüchtige Anton, dass er nun insgesamt ein Vermögen von 50 000 € besitzt. Anton bekommt ein Angebot seiner Hausbank, das Geld als Festgeld zum jährlichen Zinssatz von i_{Haus} anzulegen. Anton freut sich, da er nun weiß, dass er in 12 Jahren ein Endvermögen von 100 000 € besitzen wird.

c) Wie hoch ist der Zinssatz i_{Haus}, den Anton von seiner Hausbank angeboten bekommt?

d) Die Onlinebank Fastmoney bietet ihm eine Anlage zu einem monatlichen Zins (mit monatlicher Zinsausschüttung) von 0,5 % an. Soll er das Angebot von Fastmoney gegenüber dem Angebot seiner Hausbank bevorzugen? Nehmen Sie (unabhängig von Ihrer Lösung unter Aufgabe c) an, dass die Hausbank Anton einen jährlichen Zins von 6 % anbietet) Begründen Sie Ihre Empfehlung rechnerisch!

Anton entschließt sich, anstatt das Geld anzulegen ein Haus zu kaufen. Hierfür nimmt er zusätzlich einen Kredit von 200 000 € zu einem konstanten Zins von 8 % auf. Der Kredit ist mit gleichbleibenden Tilgungsraten in 20 Jahren zu tilgen.

e) Wieviel Zinsen muss Anton im 15. Jahr bezahlen?

Lösungshinweis:

a) $R_0 = r \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q^{-n} \quad \Leftrightarrow \quad n = \dfrac{\ln\left(\frac{r}{r - i \cdot R_0}\right)}{\ln\ q} \quad \Leftrightarrow \quad n = \dfrac{\ln\left(\frac{7000}{7000 - 0{,}07 \cdot 300000}\right)}{\ln\ 1{,}07} = 5{,}2716.$

Das Geld reicht 5 Jahre.

b) $R_n = r \cdot q \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1} q^{-n} \quad \Leftrightarrow \quad 30000 = 5000 \cdot 1{,}07 \cdot \dfrac{1 - 1{,}07^{-n}}{0{,}07}$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{6 \cdot 0{,}07}{1{,}07} = 1{,}07^n - 1 \quad \Leftrightarrow \quad n = -\dfrac{\ln\left(1 - \frac{6 \cdot 0{,}07}{1{,}07}\right)}{\ln 1{,}07} \approx 7{,}3670045\,.$

das Geld reicht also in diesem Fall 7 Jahre.

c) $K_n = K_0(1 + i_{\text{Haus}})^n \quad \Leftrightarrow \quad i_{\text{Haus}} = \sqrt[12]{\frac{100000}{50000}} - 1 = \sqrt[12]{2} - 1 = 0{,}0594631 \approx 5{,}95\,\%$

d) Alternative 1: Über effektiven Jahreszins:
$q_{\text{eff, Onlinebank}} = (1 + 0{,}005)^{12} \approx 1{,}0617 > 1{,}06 = q_{\text{eff, Hausbank}}$.

Alternative 2: Über Endbetrag:

$$\begin{aligned} K_{n,\text{Onlinebank}} &= 50\,000 \cdot (1 + 0{,}005)^{12\cdot 12} &&= 102\,537{,}54 \\ K_{n,\text{Hausbank}} &= 50\,000 \cdot (1 + 0{,}06)^{12} &&= 100\,609{,}82 \end{aligned}$$

In jedem Fall: Anton sollte das Angebot der Fastmoney-Bank bevorzugen.

e) Restschuld zu Beginn des 15. Jahres: $200\,000 - 14 \cdot 10\,000 = 60\,000$. Damit ist der Zins im 15. Jahr: $60\,000 \cdot 0.08 = 4800$.

Aufgabe 2 **15 Punkte**

Gärtner Blümel will seinen 100 m^2 großen Garten mit Kartoffeln und Bohnen bepflanzen. Folgende Daten stehen zur Verfügung:

	Kartoffeln	Bohnen
Arbeits- und Materialkosten [€/m^2]	12	2
Reingewinn [€/m^2]	20	10

Herr Blümel möchte

- seinen Reingewinn maximieren (Zielfunktion),
- kann maximal 900 € investieren (Nebenbedingung 1) und außerdem
- nicht mehr als 60% der 100 m^2 Anbaufläche für Bohnen beanspruchen (Nebenbedingung 2).
- Die gesamte Anbaufläche ist 100 m^2. (Nebenbedingung 3).

a) Formulieren Sie das Problem als lineares Programm mit Zielfunktion und Nebenbedingungen. Bezeichnen Sie dabei die Anbaufläche für Kartoffeln mit x_1, die für Bohnen mit x_2.

b) Skizzieren Sie den Zulässigkeitsbereich. Markieren Sie die theoretisch möglichen Optimallösungen.

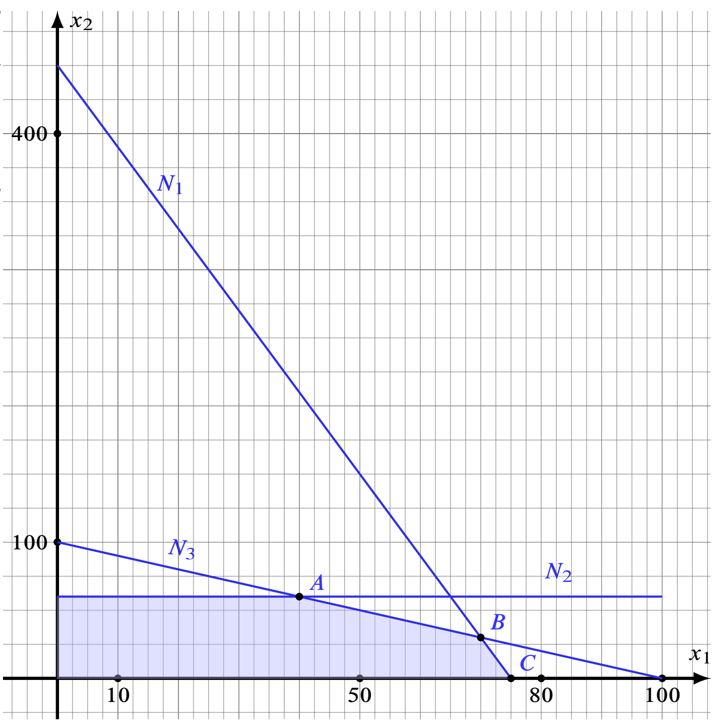
c) Wieviel m^2 soll Herr Blümel mit Kartoffeln und wieviel mit Bohnen bepflanzen, damit sein Reingewinn möglichst groß wird?
(*Hinweis*: Berechnung der relevanten Schnittpunkte ist erforderlich, Durchführung des Simplex ist nicht verlangt)

Lösungshinweis:

a)

Zielfunktion	$20x_1 + 10x_2$	$\to$	max
NB 1	$12x_1 + 2x_2$	$\leqq$	900
NB 2	x_2	$\leqq$	60
NB 3	$x_1 + x_2$	$\leqq$	100

b) Siehe Skizze:



c) $A = (40, 60)$,
$B = (70, 30)$,
$C = (75, 0)$. Damit

$ZF(A) = 20 \cdot 40 + 10 \cdot 60 = 1400$,

$ZF(B) = 20 \cdot 70 + 10 \cdot 30 = 1700$

$ZF(C) = 20 \cdot 75 + 10 \cdot 0 = 1500$

also ist B optimal.

Aufgabe 3 **17 Punkte**

Bestimmen Sie für $x > 0$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$2xy' - y = x + 1, \quad y(2) = 4\,.$$

Lösungshinweis:

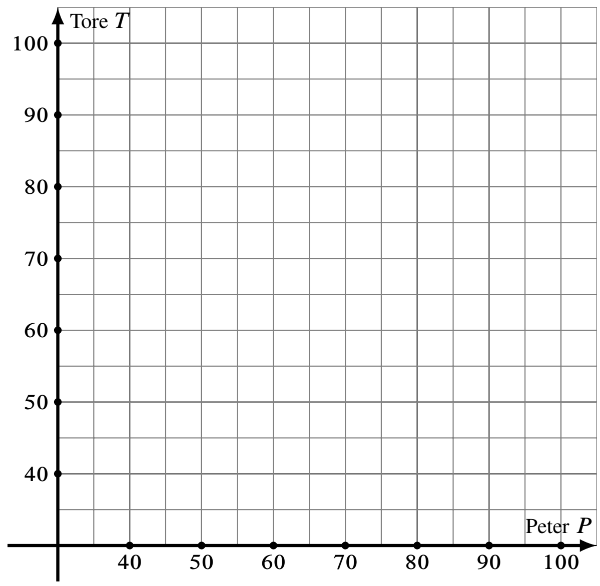
$\Leftrightarrow$	$y' = \dfrac{1}{2x} \cdot y + \dfrac{1}{2}(1 + x^{-1})$
allgemeine homogene Lösung:	$y_{\text{hom.}} = C \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int x^{-1}\,\mathrm{d}x} = C \cdot x^{\frac{1}{2}}$
mit	$C(x) = \displaystyle\int \frac{\frac{1}{2}(1 + x^{-1})}{x^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x = x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$
folgt die partikuläre Lösung	$y_p = x^{\frac{1}{2}} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\right) = x - 1$
Und damit die Gesamtlösung	$y(x) = C \cdot x^{\frac{1}{2}} + x - 1$
Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt:	$y(2) = C\sqrt{2} + 2 - 1 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad C = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$
Ergebnis:	$y = 3\sqrt{\dfrac{x}{2}} + x - 1$

Aufgabe 4 **17 Punkte**

Boris interessiert sich eigentlich nicht für Fußball. Er hat aber neulich Barbara kennengelernt, die leidenschaftlich gerne Fußball kuckt. Um bei Ihr nicht als total ahnungslos dazustehen, möchte Boris das Wissen seines WG-Kumpels Peter nutzen, der sich als Fachmann bezeichnet. Peter hatte schon in der Vergangenheit immer Tipps über die Anzahl der Tore abgegeben, die ein bestimmter Verein in der kommenden Saison insgesamt erzielen wird.

Boris findet eine Tabelle zur vergangenen Saison mit Peters damaligen Prognosen und den dann tatsächlich gefallenen Toren von 10 Vereinen. Er liest:

Verein	Peters Prognose	tatsächliche Tore
1	40	81
2	76	55
3	94	36
4	46	82
5	33	87
6	78	48
7	65	63
8	86	55
9	97	39
10	33	99



a) Tragen Sie die beiden Merkmale Peters Prognose P und die tatsächlich gefallenen Tore T als Streuplot in das nebenstehende Koordinatensystem ein.

b) Berechnen Sie einen geeigneten Korrelationskoeffizienten der beiden Variablen.

c) Die Prognosen von Peter scheinen ziemlich schlecht zu sein. Warum kann man basierend auf diesen Daten trotzdem Peters Prognosen vermutlich als Ausgangspunkt einer neuen, eigenen Prognose nutzen?

d) Boris möchte das „Wissen“ von Peter ausnutzen und berechnet zu diesem Zweck ein lineares Regressionsmodell der Toranzahl in Abhängigkeit von Peters Prognosewerten. Berechnen Sie auch dieses Modell und geben Sie die Modellgleichung an.

e) Angenommen Peter prognostiziert für einen Verein in der kommenden Saison 45 Tore: Wieviel Tore würde Boris (basierend auf dem Regressionsmodell) schätzen?

Lösungshinweis:

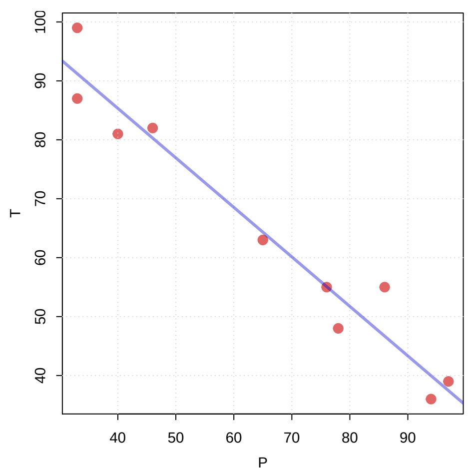
a) Streuplot: siehe rechts

b) Bravais-Pearson: $r = -0{,}9736118$

c) Auch die negative Korrelation kann man ausnutzen, vorausgesetzt, sie setzt sich in der Zukunft so fort...

d) $T(P) = 118{,}945076 - 0{,}8402018 \cdot P$

e) $T(45) = 118{,}945076 - 0{,}8402018 \cdot 45 \approx 81{,}1359955$



Aufgabe 5

8 Punkte

a) Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen Permutationen, die aus allen Buchstaben des Wortes SEEWEG gebildet werden können.

b) Wie viele von den Wörtern beginnen und enden mit einem E?

c) Wie viele von den Wörtern beginnen mit E und enden mit einem G?

d) In wie vielen Wörtern stehen alle drei E hintereinander?

Lösungshinweis:

a) $\frac{6!}{3!} = 120$

b) $1 \cdot 4! \cdot 1 = 24$

c) $1 \cdot \frac{4!}{2!} \cdot 1 = 12$

d) $4 \cdot 3! = 24$

Aufgabe 6 **17 Punkte**

Eine Hochschule interessiert sich für das Einkommen ihrer Absolventen. Dazu werden 25 berufstätige Alumni 10 Jahre nach dem Abschluss zu ihrem aktuellen Einkommen (Merkmal X, in Tausend Euro pro Jahr) befragt. Die Beobachtungen können als Ergebnis einer einfachen Stichprobe aus einer normalverteilten Grundgesamtheit angesehen werden. Es ergeben sich für die Ausprägungen a_i bzw. für die Häufigkeiten h_i in der Stichprobe:

a_i	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	85	90	95
h_i	1	3	2	1	1	2	3	3	1	3	3	1	1

a) Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall für den Mittelwert der Einkommen in der Grundgesamtheit (unabhängig vom Studiengang) zu einem Konfidenzniveau von 90 %.

b) Wie müsste die Nullhypothese H_0 und die Gegenhypothese H_1 lauten, wenn die Hochschulleitung mit einem Test statistisch bestätigen möchte, dass das durchschnittliche Einkommen in der Grundgesamtheit (Gehalt aller Absolventen 10 Jahre nach dem Abschluss) höher als 40.000 € ist?

c) Würden Sie eher ein hohes oder ein niedriges Signifikanzniveau wählen, wenn Sie diese Vermutung statistisch bestätigen wollen?

d) Was bedeutet der Fehler 1. Art hier?

Lösungshinweis:

a) $c = x_{0,95} = 1{,}711, \overline{x} = 53{,}2, s = 22{,}215 \quad \Rightarrow \quad \left[\overline{x} \pm \frac{sc}{\sqrt{n}}\right] = [45{,}599, 60{,}801]$

b) $H_0 : \mu = 40$ gegen $H_1 : \mu > 40$.

c) Je größer α, desto eher wird H_0 abgelehnt, also sollte ein hohes Signifikanzniveau gewählt werden (dafür: höheres Risiko für Fehler 1. Art)

d) Fehler 1. Art: Die Stichprobe führt zu einer Ablehnung der Nullhypothese ($\mu = 40$), obwohl H_0 stimmt.