Wiederholungsklausur Wirtschaftsmathematik
Lösungshinweise

Prüfungsdatum: 19. September 2015 – Prüfer: Etschberger
Studiengang: Wirtschaftsingenieurwesen

Aufgabe 1 — 15 Punkte

Karl möchte heute, am 1.1.2015, ein Auto kaufen. Dazu eröffnet er ein Kreditkonto (Kontostand bei Eröffnung des Kontos 0 €), von dem er heute 30 000 € für sein Auto abhebt. Der Jahressollzinssatz für das Konto beträgt 4 %.

a) Welchen Betrag müsste Karl ab heute 4 mal jährlich vorschüssig auf das Konto einzahlen, um den entnommen Betrag wieder auszugleichen?

b) Wären die Raten bei nachschüssiger Zahlung höher oder niedriger, wenn das Konto auch nach 4 Jahren ausgeglichen sein soll (Begründen Sie Ihre Antwort)?

c) Welchen Betrag müsste Karl ab heute monatlich vorschüssig einzahlen, um das Konto nach 4 Jahren ausgeglichen zu haben

Lösungshinweis:

a) $R_0 = r \cdot \dfrac{q^n - 1}{q-1} \cdot q \cdot q^{-n} \quad \Leftrightarrow \quad r = R_0 \cdot \dfrac{1-\frac{1}{q}}{1-q^{-n}} = 30\,000 \cdot \dfrac{1-\frac{1}{1{,}04}}{1-1{,}04^{-4}} = 7946{,}83$

b) Höher, weil später eingezahlt wird und damit mehr Zinsen fällig sind.
Alternativ ausrechnen: $r = R_0 \cdot \dfrac{q-1}{1-q^{-n}} = 30000 \cdot \dfrac{1{,}04-1}{1-1{,}04^{-4}} = 8264{,}7$

c)
- Nach ICMA: $q_{\text{Monat}} = \sqrt[12]{1{,}04} \approx 1{,}0032737$. Mit $n = 4 \cdot 12 = 48$ folgt:
  $$r = R_0 \cdot \frac{1-\frac{1}{q_{\text{Monat}}}}{1-q_{\text{Monat}}^{-n}} = 3 \times 10^4 \cdot \frac{1-\frac{1}{q_{\text{Monat}}}}{1-q_{\text{Monat}}^{-48}} \approx 674{,}2$$
- Exakt: Für die Rentenersatzrate gilt: $r_e = R_0 \cdot \dfrac{q-1}{1-q^{-n}}$

  $R_0 = r \dfrac{q^n-1}{q-1} \cdot q^{-n} = r \dfrac{1-q^{-n}}{q-1}$

  Damit ergibt sich:
  $$\begin{aligned} r &= \left(12 + i \cdot \tfrac{13}{2}\right)^{-1} \cdot r_e \\ &= \left(12 + 0{,}04 \cdot \tfrac{13}{2}\right)^{-1} \cdot 30\,000 \cdot \frac{1{,}04-1}{1-1{,}04^{-4}} \\ &\approx 674{,}12 \end{aligned}$$

Aufgabe 2 **15 Punkte**

Gegeben ist das folgende lineare Optimierungsproblem mit den Strukturvariablen $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}_+$, der Zielfunktion Z und den Nebenbedingungen N_1, N_2 und N_3 mit

Z	$3x_1 + 2x_2 + 2x_3$	$\rightarrow$	max
N_1	$x_1 + x_3$	$\leqq$	8
N_2	$x_1 + x_2$	$\leqq$	7
N_3	$x_1 + 2x_2$	$\leqq$	12

Lösen Sie das Problem rechnerisch mittels Simplex-Algorithmus.

Lösungshinweis:

Simplex mit Z $= 3x_1 + 2x_2 + 2x_3$:

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3		
(1)	-3	-2	-2	0	0	0	0	
(2)	1	0	1	1	0	0	8	
(3)	1	1	0	0	1	0	7	
(4)	1	2	0	0	0	1	12	
(5)	0	1	-2	0	3	0	21	(1) + 3 · (3)
(6)	0	-1	1	1	-1	0	1	(2) − (3)
(7)	1	1	0	0	1	0	7	(3)
(8)	0	1	0	0	-1	1	5	(4) − (3)
(9)	0	-1	0	2	1	0	23	(2) + 2 · (6)
(10)	0	-1	1	1	-1	0	1	(6)
(11)	1	1	0	0	1	0	7	(7)
(12)	0	1	0	0	-1	1	5	(8)
(13)	0	0	0	2	0	1	28	(9) + (12)
(14)	0	0	1	1	-2	1	6	(10) + (12)
(15)	1	0	0	0	2	-1	2	(11) − (12)
(16)	0	1	0	0	-1	1	5	(12)

$\Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 5,\ x_3 = 6$ ist optimal mit dem Zielfunktionswert $Z = 28$.

Aufgabe 3 **14 Punkte**

Bestimmen Sie für $x > 0$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$x + y = xy' - 1, \quad y(1) = 0\,.$$

Lösungshinweis:

DGL:	$y' = \frac{1}{x} \cdot y + \frac{1}{x} + 1$
allgemeine homogene Lösung:	$y_{\text{hom.}} = C \cdot \mathrm{e}^{\int x^{-1}\,\mathrm{d}x} = C \cdot x$
mit	$C(x) = \int \frac{\frac{1}{x} + 1}{x} \mathrm{d}x = \int x^{-2} + x^{-1} \mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + \ln x$
folgt die partikuläre Lösung	$y_p = x \cdot \left(-\frac{1}{x} + \ln x\right) = x\ln(x) - 1$
Und damit die Gesamtlösung	$y(x) = C \cdot x + x\ln(x) - 1$
Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt:	$y(1) = C - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = 1$
Ergebnis:	$y = x(1 + \ln x) - 1$

Aufgabe 4 — 17 Punkte

Ein Freund von Ihnen hat über einen Teil seiner Daten, die er für seine Bachelorarbeit erhoben hat, Kaffee geschüttet. Die bereits sortierte Urliste wurde dadurch zum Teil unleserlich. Einige Einträge sowie einige Eigenschaften des kompletten Datensatzes sind aber noch zu entziffern:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\cdots$
1	1	2	4	4	4	$\cdots$

5 5 5 5 10
8/9

Sie können erkennen, dass

- das arithmetische Mittel $\overline{x} = 4{,}5$,
- der Modus gleich 5 ist,
- die Spannweite 9 beträgt
- und $F(5) = F(7) = \frac{10}{12}$ ist.

a) Rekonstruieren Sie die Urliste aus den Ihnen zur Verfügung stehenden Informationen.

Für die Teilaufgaben b), c), d) ist eine zweite Urliste eines anderen Merkmals mittels Ausprägung a_i und absoluter Häufigkeit h_i gegeben:

Ausprägung a_i	0	25	35	40	45	50	60	70	75	85
Häufigkeit h_i	1	1	4	1	5	3	1	1	2	1

b) Bestimmen Sie das arithmetische Mittel und den Median der Daten.

c) Berechnen Sie auch die mittlere quadratische Abweichung, die Standardabweichung sowie die Spannweite der Daten.

d) Zeichnen Sie ein Histogramm der Daten gemäß folgender Klasseneinteilung:

Klasse	K_1	K_2	K_3	K_4
Intervall	$[0, 17)$	$[17, 42)$	$[42, 68)$	$[68, 90]$
h	1	6	9	4
B	17	25	26	22

Höhe

Lösungshinweis:

a) 5 kommt mind. 4 mal vor, kein Wert bei $x \in (5; 7]$, höchster Wert ist 10. Nimmt man einen Wert bei 8 noch dazu kommt man auf $\overline{x} = 4{,}5$. Damit ist Urliste 1, 1, 2, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 8, 10.

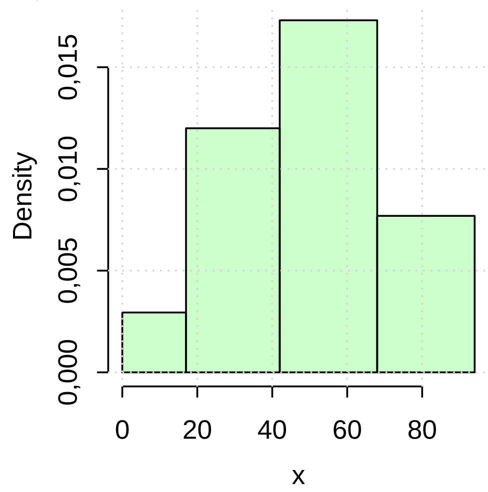
b) , c), d):

$\overline{x} = 47{,}25$ $\quad x_{\text{med}} = 45$

$s^2 = 353{,}6875$ $\quad s = 18{,}8065813$

SP $= 85$

Histogramm:



Aufgabe 5 **12 Punkte**

Beim Mensch-Ärgere-Dich-Nicht muss man erst eine Sechs würfeln, um mit einer Spielfigur in's eigentliche Spiel starten zu dürfen. Dazu hat man pro Runde maximal drei Versuche.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass...

a) der erste Spieler bereits in der ersten Runde (also nach spätestens 3 Würfen) eine Sechs gewürfelt hat?

b) der erste Spieler auch nach zwei Runden (also insgesamt nach 6 Würfen) noch keine Sechs gewürfelt hat?

c) zwei der vier Spieler nach der ersten Runde mit einer Spielfigur starten dürfen?

d) mindestens einer der vier Spieler nach der ersten Runde mit einer Spielfigur starten darf?

Lösungshinweis:

a)
```
p = 1- (5/6)^3
p
## [1] 0,4212963
# oder
1/6 + (1/6)*5/6 + (1/6)*(5/6)^2
## [1] 0,4212963
```

b)
```
(5/6)^6
## [1] 0,334898
```

c)
```
dbinom(2, size=4, prob=p)
## [1] 0,3566474
```

X = „Anzahl der 4, die ‚rauskommen' "

$X \sim B(n=4,\ p = \underset{0.4213}{\text{siehe a)}})$

$P(X=2) = \binom{4}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^2 \approx 0.3566$

d)
```
1- (5/6)^(3*4)
## [1] 0,8878433
```

$1 - P(X=0) = 1 - \underbrace{\binom{4}{0} \cdot p^0}_{=1} \cdot (1-p)^4 = 1 - \left(\left(\frac{5}{6}\right)^3\right)^4$

Aufgabe 6 **17 Punkte**

Die Personalabteilung eines Unternehmens möchte untersuchen, wieviel die Konkurrenzunternehmen der gleichen Branche jährlich an Vertriebsmitarbeiter im Außendienst zahlen. Dazu werden 20 Mitarbeiter dieser Gruppe zu Ihrer letzten Prämie (Merkmal X, in Tausend Euro pro Jahr) befragt. Die Beobachtungen können als Ergebnis einer einfachen Stichprobe aus einer normalverteilten Grundgesamtheit angesehen werden. Es ergeben sich für die Ausprägungen a_i des Merkmals bzw. für die Häufigkeiten h_i in der Stichprobe:

a_i	0	15	20	25	30	35	40	50	55
h_i	1	1	2	2	5	2	4	2	1

a) Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall für den Mittelwert der Prämien in der Grundgesamtheit zu einem Konfidenzniveau von 90 %.

Lösungshinweis:

a) $c = x_{0,95} = 1{,}729, \overline{x} = 32, s = 12{,}917 \quad \Rightarrow \quad \left[\overline{x} \pm \frac{sc}{\sqrt{n}}\right] = [27{,}006, 36{,}994]$