

Nachholklausur Wirtschaftsmathematik

Lösungshinweise

Prüfungsdatum: 12. März 2016 – Prüfer: Etschberger

Studiengang: Wirtschaftsingenieurwesen

Punkte: 15, 20, 14, 21, 12, 8 ; Summe der Punkte: 90

Aufgabe 1

15 Punkte

Michael hat in der Fernsehshow Jungel-Camp 100 000 € gewonnen. Von diesem Gewinn möchte er sein Leben möglichst lange finanzieren. Nehmen Sie für die Aufgaben a) und b) an, dass Michael sein Leben ausschließlich aus dem Gewinn finanziert und von einem konstanten, jährlichen Zins von 8 % ausgegangen werden kann.

- Wie lange könnte Michael von dem Geld leben, wenn er sparsam nur jährlich nachschüssig 10 000 € entnimmt?
- Michael fällt auf, dass er das Geld eigentlich monatlich vorschüssig benötigt, aber mit 650 € monatlich auskommt. Wie lang könnte er unter diesen Annahmen von dem Gewinn leben?

Nach 10 Jahren ist das Geld ausgegeben und Michael bekommt einen Brief vom Finanzamt. Michael muss 50 % der gewonnenen Summe als Steuern bezahlen. Da Michael pleite ist und das auch zugibt, bietet ihm das Finanzamt an, die Steuerschulden zu einem Zinssatz von 12 % jährlich mit konstanten Annuitäten innerhalb von 5 Jahren zurückzuzahlen.

- Wie hoch ist die Annuität?
- Stellen Sie den Tilgungsplan der letzten beiden Jahre auf.

Lösungshinweis:

$$\text{a) } R_0 = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q^{-n} \Leftrightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{r}{r-i \cdot R_0}\right)}{\ln q} \Leftrightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{10}{10-0,08 \cdot 100000}\right)}{\ln 1,08} = 20,9123719.$$

Das Geld reicht 20 Jahre.

$$\text{b) } r_e = 650 \cdot \left(12 + 0,08 \cdot \frac{13}{2}\right) = 8138$$

Dann wie bei a): $n = 52,9754533$ das Geld reicht also in diesem Fall 52 Jahre und 11 Monate.

$$\text{c) Annuität: } A = \frac{S \cdot i}{1 - q^{-n}} = \frac{50000 \cdot 0,12}{1 - 1,12^{-5}} = 13870,49.$$

d)

k	R_k	Z_k	T_k
4	23441,83	2813,02	11057,47
5	12384,36	1486,12	12384,37

Aufgabe 2

20 Punkte

Gegeben ist das folgende lineare Optimierungsproblem mit den Strukturvariablen $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}_+$, der Zielfunktion Z und den Nebenbedingungen N_1, N_2 und N_3 mit

Z	$30x_1 + 20x_2 + 5x_3$	\rightarrow	\max
N_1	$2x_1 + x_2 + x_3$	\leq	60
N_2	$2x_1 + 4x_2 + 4x_3$	\leq	100
N_3	$4x_1 + 2x_2 + 6x_3$	\leq	160

- a) Stellen Sie das Start-Tableau des Simplex-Algorithmus auf.
- b) Nach einer Iteration des Simplex-Algorithmus ergibt sich folgendes Tableau (mit der Zielfunktion in Zeile ⑤):

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3		Operation
⑤	0	-5	10	15	0	0	900	① + 15 · ②
⑥	1	1/2	1/2	1/2	0	0	30	+1/2 · ②
⑦	0	3	3	-1	1	0	40	③ - 1 · ②
⑧	0	0	4	-2	0	1	40	④ - 2 · ②

Vervollständigen Sie den Simplexalgorithmus bis zum Erreichen einer optimalen Lösung.

- c) Geben Sie im Optimum jeweils den Wert aller 3 Struktur- und aller 3 Schlupfvariablen sowie den Wert der Zielfunktion an.

Lösungshinweis:

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3		Operation
①	-30	-20	-5	0	0	0	0	
②	2	1	1	1	0	0	60	
③	2	4	4	0	1	0	100	
④	4	2	6	0	0	1	160	
⑤	0	-5	10	15	0	0	900	① + 15 · ②
⑥	1	1/2	1/2	1/2	0	0	30	+1/2 · ②
⑦	0	3	3	-1	1	0	40	③ - 1 · ②
⑧	0	0	4	-2	0	1	40	④ - 2 · ②
⑨	0	0	15	40/3	5/3	0	2900/3	⑤ + 5/3 · ⑦
⑩	1	0	0	2/3	-1/6	0	70/3	⑥ - 1/6 · ⑦
⑪	0	1	1	-1/3	1/3	0	40/3	+1/3 · ⑦
⑫	0	0	4	-2	0	1	40	⑧ + 0 · ⑦

Aufgabe 3

14 Punkte

Bestimmen Sie für $x > 0$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$x + y + 1 = 2xy', \quad y(1) = 2.$$

Lösungshinweis:

\Leftrightarrow

allgemeine homogene Lösung:

mit

folgt die partikuläre Lösung

Und damit die Gesamtlösung

Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt:

Ergebnis:

$$y' = \frac{1}{2x} \cdot y + \frac{1}{2}(1 + x^{-1})$$

$$y_{\text{hom.}} = C \cdot e^{\frac{1}{2} \int x^{-1} dx} = C \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

$$C(x) = \int \frac{\frac{1}{2}(1 + x^{-1})}{x^{\frac{1}{2}}} dx = x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y_p = x^{\frac{1}{2}} \cdot (x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}) = x - 1$$

$$y(x) = C \cdot x^{\frac{1}{2}} + x - 1$$

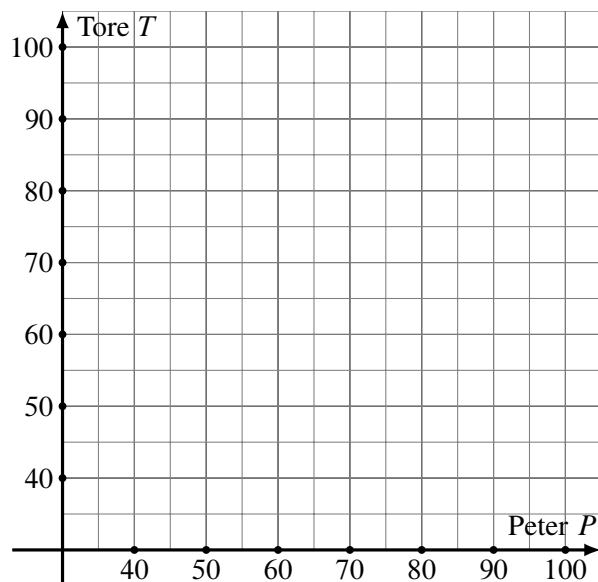
$$y(1) = C \sqrt{1} + 1 - 1 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad C = 2$$

$$y = 2\sqrt{x} + x - 1$$

Boris interessiert sich eigentlich nicht für Fußball. Er hat aber neulich Barbara kennengelernt, die leidenschaftlich gerne Fußball kuckt. Um bei Ihr nicht als total ahnungslos dazustehen, möchte Boris das Wissen seines WG-Kumpels Peter nutzen, der sich als Fachmann bezeichnet. Peter hatte schon in der Vergangenheit immer Tipps über die Anzahl der Tore abgegeben, die ein bestimmter Verein in der kommenden Saison insgesamt erzielen wird.

Boris findet eine Tabelle zur vergangenen Saison mit Peters damaligen Prognosen und den dann tatsächlich gefallenen Toren von 10 Vereinen. Er liest:

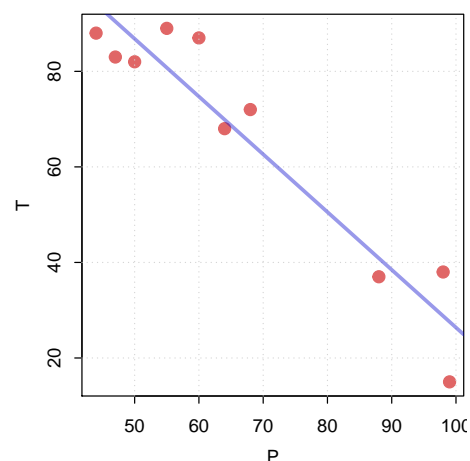
Verein	Peters Prognose	tatsächliche Tore
1	99	15
2	64	68
3	47	83
4	44	88
5	55	89
6	88	37
7	60	87
8	98	38
9	50	82
10	68	72



- Tragen Sie die beiden Merkmale Peters Prognose P und die tatsächlich gefallenen Tore T als Streuplot in das nebenstehende Koordinatensystem ein.
- Berechnen Sie einen geeigneten Korrelationskoeffizienten der beiden Variablen.
- Die Prognosen von Peter scheinen ziemlich schlecht zu sein. Warum kann man basierend auf diesen Daten trotzdem Peters Prognosen vermutlich als Ausgangspunkt einer neuen, eigenen Prognose nutzen?
- Boris möchte das „Wissen“ von Peter ausnutzen und berechnet zu diesem Zweck ein lineares Regressionsmodell der Toranzahl in Abhängigkeit von Peters Prognosewerten. Berechnen Sie auch dieses Modell und geben Sie die Modellgleichung an.
- Zeichnen Sie die Regressionsgerade des Modells in den Streuplot ein.
- Angenommen Peter prognostiziert für einen Verein in der kommenden Saison 45 Tore: Wieviel Tore würde Boris (basierend auf dem Regressionsmodell) schätzen?

Lösungshinweis:

- Streuplot: siehe rechts
- Bravais-Pearson: $r = -0,9472346$
- Auch die negative Korrelation kann man ausnutzen, vorausgesetzt, sie setzt sich in der Zukunft so fort...
- $T(P) = 147,2615897 - 1,2089389 \cdot P$
- $T(45) = 147,2615897 - 1,2089389 \cdot 45 \approx 92,859338$



Aufgabe 5

12 Punkte

- Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen Permutationen, die aus allen Buchstaben des Wortes ERDBEERE gebildet werden können.
- Wie viele von den Wörtern beginnen und enden mit einem E?
- In wie vielen Wörtern stehen alle vier E hintereinander?

Lösungshinweis:

a) $\frac{8!}{4! \cdot 2!} = 840$

b) $1 \cdot \frac{6!}{2! \cdot 2!} \cdot 1 = 180$

c) Der 4er-Block „E“s hat 5 mögliche Positionen. $5 \cdot \frac{4!}{2!} = 60$

Aufgabe 6

8 Punkte

Eine Hochschule interessiert sich für das Einkommen ihrer Absolventen. Dazu werden 25 berufstätige Alumni 10 Jahre nach dem Abschluss zu ihrem aktuellen Einkommen (Merkmal X , in Tausend Euro pro Jahr) befragt. Die Beobachtungen können als Ergebnis einer einfachen Stichprobe aus einer normalverteilten Grundgesamtheit angesehen werden. Es ergeben sich für die Ausprägungen a_i bzw. für die Häufigkeiten h_i in der Stichprobe:

a_i	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	85	90	95
h_i	1	3	2	1	1	2	3	3	1	3	3	1	1

- Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall für den Mittelwert der Einkommen in der Grundgesamtheit (unabhängig vom Studiengang) zu einem Konfidenzniveau von 90 %.
- Wie müsste die Nullhypothese H_0 und die Gegenhypothese H_1 lauten, wenn die Hochschulleitung mit einem Test statistisch bestätigen möchte, dass das durchschnittliche Einkommen in der Grundgesamtheit (Gehalt aller Absolventen 10 Jahre nach dem Abschluss) höher als 40.000 € ist?
- Würden Sie eher ein hohes oder ein niedriges Signifikanzniveau wählen, wenn Sie diese Vermutung statistisch bestätigen wollen?
- Führen Sie den Test zu einem Signifikanzniveau von $\alpha = 1\%$ durch.
- Was bedeutet der Fehler 1. Art hier?

Lösungshinweis:

- $c = x_{0,95} = 1,711, \bar{x} = 53,2, s = 22,215 \Rightarrow \left[\bar{x} \pm \frac{sc}{\sqrt{n}} \right] = [45,599, 60,801]$
- $H_0 : \mu = 40$ gegen $H_1 : \mu > 40$.
- Je größer α , desto eher wird H_0 abgelehnt, also sollte ein hohes Signifikanzniveau gewählt werden (dafür: höheres Risiko für Fehler 1. Art)

- d) `t.test(x, mu=40, alternative = "greater")`

```
##
## One Sample t-test
##
## data: x
## t = 2,97, df = 24, p-value = 0,003324
## alternative hypothesis: true mean is greater than 40
## 95 percent confidence interval:
## 45,6 Inf
## sample estimates:
## mean of x
## 53,2
```

- Fehler 1. Art: Die Stichprobe führt zu einer Ablehnung der Nullhypothese ($\mu = 40$), obwohl H_0 stimmt.