

Wirtschaftsmathematik Aufgabensammlung

Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Stefan Etschberger – Hochschule Augsburg

Anmerkungen zu den Übungsaufgaben:

- ▶ Nach der Vorlesung finden Sie jeweils auf der Homepage die für die jeweilige Woche zu bearbeitenden Aufgaben angemerkt; besprochen und gelöst werden die Aufgaben in der darauf folgenden Woche in den Übungsgruppen.
- ▶ Die Lösungshilfen haben teilweise nur den Charakter von Kontrollergebnissen und sind kein Ersatz für eine vollständige Lösung.
- ▶ Grundlagen in \mathbb{R} sind ein wichtiger, obligatorisch zu erlernender Bestandteil des Kurses; alle in den Übungsaufgaben behandelten Lösungen in \mathbb{R} sind prüfungsrelevant und müssen auch bei veränderter Aufgabenstellung (ohne Rechner) gelöst werden können.
- ▶ Es gibt für die Klausur keine Einschränkung auf nur eine Aufgabe mit \mathbb{R} . Klausuraufgaben mit \mathbb{R} könnten in der Prüfung bei verschiedenen Themen als Teilaufgabe oder als separate Aufgabe eingebaut sein. \mathbb{R} -Teile in der Klausur können, müssen aber nicht als single choice formuliert sein.
- ▶ Es gibt *kein* vorgefertigtes „cheat-sheet“ mit den wichtigsten Funktionen in \mathbb{R} für die Klausur; bitte schreiben Sie sich die wichtigsten Funktionen inkl. Parametern auf Ihre selbsterstellte Formelsammlung. Vorausgesetzt werden für die Klausur alle in den Lösungshinweisen der Übungsaufgaben verwendeten Funktionen.
- ▶ (Teil)aufgaben, deren Lösungen (auch) in \mathbb{R} erarbeitet werden sollen, sind am rechten Rand mit dem Symbol \mathbb{R} gekennzeichnet.

Inhalt

R kennen lernen	3
Aufgabe 1: Installation und erste Schritte	4
Aufgabe 2: Variablen und Zuweisungen	6
Aufgabe 3: Vektoren in R	10
Aufgabe 4: R als Logbuch	12
Aufgabe 5: Funktionen einer reellen Variablen	14
Aufgabe 6: Funktionsplots	17
Grundlagen	18
Aufgabe 7: Zusammenfassung	18
Aufgabe 8: Binomische Formeln	19
Aufgabe 9: Wurzeln und Potenzen	20
Aufgabe 10: Logarithmen	21
Aufgabe 11: Summen ausrechnen	22
Aufgabe 12: Notation von Summen	23
Aufgabe 13: Summen: Indexverschiebung . .	24
Aufgabe 14: Summe mit Trick	25
Aufgabe 15: Mitternachtsformel	26
Aussagen	27
Aufgabe 16: Implikation verbal	27
Aufgabe 17: Formulieren von Aussagen	28
Aufgabe 18: Wahrheitstabelle	29
Aufgabe 19: Eine Tautologie	30
Aufgabe 20: All- und Existenzaussagen . . .	31
Aufgabe 21: Direkter Beweis	32
Aufgabe 22: Verknüpfung: Wahr oder falsch?	34
Aufgabe 23: Beweise	35
Aufgabe 24: Vollständige Induktion	37
Aufgabe 25: Vollständige Induktion: Strecken	38
Aufgabe 26: Vollständige Induktion: Fibonacci	40
Mengen und Relationen	41
Aufgabe 27: Teilmengen?	41
Aufgabe 28: Schnitt, Vereinigung, Differenz .	42
Aufgabe 29: Einschluss und Ausschluss . . .	43
Aufgabe 30: Potenzmengen	44
Aufgabe 31: Relationen	45
Aufgabe 32: Relationen und Abbildungen . .	46
Aufgabe 33: Komposition	47
Aufgabe 34: Injektivität und Surjektivität . .	48
Folgen	49
Aufgabe 35: Rekursiv definierte Folge	49
Aufgabe 36: Grenzwertsätze	51
Aufgabe 37: Reihenkonvergenz	52
Aufgabe 38: Arithmetisch und Geometrisch .	54
Aufgabe 39: Verknüpfte Folgen	55
Aufgabe 40: Konvergenz durch Abschätzen .	56
Aufgabe 41: Quotientenkriterium	57

Reelle Funktionen	58
Aufgabe 42: Kurvendiskussion ohne Ableitung	59
Aufgabe 43: Definitionsbereich, Extremwerte	60
Aufgabe 44: Parameter bestimmen	61
Aufgabe 45: Stetigkeit	62
Aufgabe 46: Parameter und Stetigkeit	63
Differentialrechnung	64
Aufgabe 47: Elementare Ableitungsregeln . .	64
Aufgabe 48: Quotientenregel	65
Aufgabe 49: Kettenregel	66
Aufgabe 50: noch mehr Ableitungen	67
Aufgabe 51: Preiselastizität 1	68
Aufgabe 52: Preiselastizität 2	69
Aufgabe 53: Differenzierbarkeit	70
Aufgabe 54: Verpackung optimieren	71
Aufgabe 55: Minimale Kosten	72
Aufgabe 56: Gompertzfunktion	74
Aufgabe 57: Optimales Produktionsniveau . .	75
Aufgabe 58: Monotonie und Konvexität . . .	76
Aufgabe 59: Kurvendiskussion	77
Aufgabe 60: Graph deuten	78
Aufgabe 61: Grenzumsatz, Grenzkosten	79
Integralrechnung	80
Aufgabe 62: Fläche zwischen Kurven	80
Aufgabe 63: Nochmal Flächen	81
Aufgabe 64: Grenzkosten	82
Aufgabe 65: Produktlebenszyklus	83
Aufgabe 66: Umsatz, Kosten und Gewinn . .	85
Aufgabe 67: Absatzverlauf	86
Aufgabe 68: Gamma ganz groß	87
Aufgabe 69: Ableiten und Integrieren	88
Finanzmathematik	89
Aufgabe 70: Einfach	89
Aufgabe 71: Girokonto: Quartalsabrechnung .	90
Aufgabe 72: Gemischt	91
Aufgabe 73: Unterjährig	92
Aufgabe 74: Durchschnittlicher Zins	93
Aufgabe 75: Durchschnittliche Inflation . . .	94
Aufgabe 76: Kaufkraft und Realwert	95
Aufgabe 77: Doppelt so viel	96
Aufgabe 78: Wie lange?	97
Aufgabe 79: Waldwert	98
Aufgabe 80: effektiv und nominal	99
Aufgabe 81: Maschine	100
Aufgabe 82: Rente auf einmal	101
Aufgabe 83: Bausparer	102
Aufgabe 84: Einholen mit Vorsprung	103
Aufgabe 85: Sparen für die Rente	104
Aufgabe 86: Achtung: unterjährige Zinsen . .	105
Aufgabe 87: Betriebsrente: Rückstellungen .	106

Aufgabe 88: Ratentilgung	107
Aufgabe 89: Ratentilgung punktuell	108
Aufgabe 90: Ratentilgung: Effektivzins	109
Aufgabe 91: Annuitätentilgung	110
Aufgabe 92: Wertpapier	111
Aufgabe 93: Wertpapier: Duration	112
Aufgabe 94: Wertpapier: Kupon bestimmen	113
Aufgabe 95: Finanzierung Studium	115
Aufgabe 96: Wieviel kostet Manhattan?	116
Aufgabe 97: Sparplan von Susi	117
Aufgabe 98: Sven Sonneohr	118

Lineare Algebra 119

Aufgabe 99: Rechnen mit Matrizen	119
Aufgabe 100: Produktion: Zwischenprodukt	121
Aufgabe 101: Punktmengen	122
Aufgabe 102: Homogenes Wachstum	123
Aufgabe 103: Determinanten	125
Aufgabe 104: Eigenwerte	127
Aufgabe 105: Eigenwerte rückwärts	128

Lineare Gleichungssysteme 129

Aufgabe 106: Gozintograph	129
Aufgabe 107: Allgemeines zu LGS	131
Aufgabe 108: Neue Kostenstellen	132
Aufgabe 109: Zwei LGS	133
Aufgabe 110: Marktentwicklung	134
Aufgabe 111: Tee	135
Aufgabe 112: Bier	136
Aufgabe 113: Investieren	137

R kennen lernen

Aufgabe 1

R: Installation und erste Schritte (1)

Installation und Kennenlernen von R und RStudio

(Sofern Sie über keinen eigenen Rechner verfügen, können Sie im Rechnerraum im W-Gebäude arbeiten; dort sind R und Rstudio installiert)

- a) Installieren Sie R von <http://goo.gl/ALaUXu> (für Windows) bzw. von <http://cran.r-project.org/bin/> für andere Plattformen.

R ist das Programm, das in der Vorlesung verwendet wird, um Daten zu verarbeiten und Ergebnisse als Text oder Grafik auszugeben; es ist in der Rohfassung nicht sehr komfortabel zu bedienen. Deswegen arbeiten wir in diesem Kurs mit RStudio, einer sehr komfortablen und mächtigen integrierten Entwicklungsumgebung.

- b) Installieren Sie RStudio von <http://goo.gl/RX11dj>.
c) Öffnen Sie RStudio. Klicken Sie in den linken unteren Bereich des Fensters („Console“), tippen Sie

```
1 + 2
```

und schließen Sie die Eingabe mit Enter ab.

In der Kommandozeile der Konsole werden alle Anweisungen eingegeben und Textrückmeldungen des Programms ausgegeben; dazu gehören Ergebnisse, aber auch Hinweise, Warnungen und Fehlermeldungen, falls etwas nicht geklappt hat. Die Kommandozeile eignet sich auch prima als Taschenrechner. Kennt man die Bedeutung einer Funktion nicht, kann man ein Fragezeichen voranstellen und bekommt eine Erklärung (rechts im Hilfebereich).

Bei Rechenoperationen gelten die Vorrangregeln der Mathematik (Potenz vor Punkt vor Strich). Der Dezimaltrenner ist ein Punkt (kein Komma). Exponential-, Logarithmus- bzw. Quadratwurzeln berechnet man über Funktionsaufrufe, das Argument steht in runden Klammern. Groß- und Kleinschreibung macht einen Unterschied. Stellt man einer Zeile ein #-Zeichen voran, wird die Zeile von R nicht ausgeführt.

- d) Geben Sie folgende Ausdrücke ein und erklären Sie jeweils das Ergebnis

```
2 + 3 * 4
(2 + 3) * 4
0.2 * 3 - 1.1
0,2 * 3
2^3^2
(2^3)^2
exp(1)
?exp
```

```
log(exp(1))
sqrt(16)
16^(1/2)
Sqrt(16)
# Das ist ein Kommentar.
```

e) Suchen Sie die Hilfsfunktionen zu den verwendeten Operationen und lesen Sie diese.

Lösungshinweis:

```
2 + 3 * 4
## [1] 14

(2 + 3) * 4
## [1] 20

0.2 * 3 - 1.1
## [1] -0,5

# 0,2 * 3 # Fehler, ',' wird nicht als Dezimalkomma
# akzeptiert
2^3^2
## [1] 512

(2^3)^2
## [1] 64

exp(1)
## [1] 2,7183

log(exp(1))
## [1] 1

sqrt(16)
## [1] 4

16^(1/2)
## [1] 4

Sqrt(16) # Fehler, sqrt() schreibt man mit kleinem 's'

## Error in Sqrt(16): konnte Funktion "Sqrt" nicht finden
```

Aufgabe 2

Variablen, Zuweisungen und Funktionen

Zahlen (und andere Objekte) können in R in Variablen gespeichert werden. Dazu kann der Zuweisungsoperator = oder alternativ <- beispielsweise folgendermaßen verwendet werden:

```
x = 3.5
x2 <- 1.5 # funktioniert genauso mit x2 = 1.5
```

Mit diesen Variablen kann dann weitergerechnet werden. In Variablennamen dürfen Buchstaben, Ziffern (nicht als erstes Zeichen), Punkte und Unterstriche (_) vorkommen. Diese Bezeichner dürfen keine Leerzeichen enthalten. Auch hier ist Groß- und Kleinschreibung zu beachten.

- a) Weisen Sie der Variablen x den Wert 4 zu. Weisen Sie dann der Variablen x.2 den folgenden Wert zu:

$$\sqrt{3x^2 + \ln\left(\frac{1}{e^x}\right) + 5}.$$

Funktionsaufrufe schreibt man in R mit einem Funktionsbezeichner, auf den direkt (keine Leerstelle!) ein Paar runder Klammern folgt. Innerhalb der runden Klammern können ein oder mehrere Argumente oder Parameter der Funktion stehen. Funktionen kann man auch verschachtelt aufrufen.

Die Funktion ls() gibt die in der aktuellen Sitzung definierten Objekte aus. Mit rm(<Var>) kann man eine Variable löschen, wenn man ihren Bezeichner anstatt <Var> in die runden Klammern schreibt.

- b) Überlegen Sie was folgende Zeilen ausgeben und führen Sie diese dann in R aus, um Ihr Ergebnis zu überprüfen.

```
x
x.2
X
x + x.2
x.Produkt = x * x.2
x.Produkt
x.Produkt = x.Produkt * x
ls()
rm(x)
x
ls()
```

Außer Zahlen kann R auch mit Zeichenketten umgehen. Diese können in Objekten gespeichert werden, indem man die Zeichenkette in Anführungsstriche setzt. Zeichenketten, die Zahlen beinhalten werden nicht als Zahlen interpretiert. Man kann mit ihnen also nicht rechnen.

- c) Welche Ausgabe bewirken folgende Zeilen? Überlegen Sie, bevor Sie die Eingabe in R ausprobieren.

```
tubby.1 = "Tinky-Winky"
tubby.2 = "Dipsy"
Zahl = 10
keine.Zahl = "10"
Zahl + 1
keine.Zahl + 1
```

Tricks zur Ein- und Ausgabe:

- ▶ Ist eine Eingabe in einer Zeile nicht vollständig, kann R das mit einem „+“-Zeichen anzeigen; die Eingabe kann dann vervollständigt werden.
- ▶ Sofortige Hilfe bei der Eingabe einer Funktion erhält man, wenn man nach Eingabe der ersten Buchstaben des Funktionsbezeichners die Tabulator-Taste betätigt. Die möglichen Funktionen werden dann zur Auswahl aufgelistet und können dann ausgewählt werden.
- ▶ Mit der ↑-Taste auf der Tastatur kann der letzte (oder bei zweimaligem Drücken der vorletzte usw.) Befehl wieder sichtbar gemacht und dann nochmals ausgeführt oder verändert werden.
- ▶ Im RStudio-Fenster finden Sie (meistens rechts oben) einen Reiter History. Auch dort werden alle eingegebenen Befehle abgespeichert.
- ▶ Im Reiter Environment werden alle Objekte der aktuellen Sitzung aufgelistet.

d) Probieren Sie die angesprochenen Tricks zur Ein- und Ausgabe aus.

Lösungshinweis:

```
x = 4
x.2 = sqrt(3 * x^2 + log(1/exp(x)) + 5)
x.2
## [1] 7
X
## Error in eval(expr, envir, enclos): Objekt 'X' nicht gefunden
x + x.2
## [1] 11
x.Produkt = x * x.2
x.Produkt
## [1] 28
x.Produkt = x.Produkt * x
rm(x)
x # Fehler: x gibt's ja nicht mehr, kann deswegen auch nicht ausgegeben werden
## Error in eval(expr, envir, enclos): Objekt 'x' nicht gefunden
```

```
tubby.1 = "Tinky-Winky"
tubby.2 = "Dipsy"
Zahl = 10
keine.Zahl = "10"
Zahl + 1 # Ergebnis: 11
## [1] 11
keine.Zahl + 1 # Fehler: das geht nicht...
## Error in keine.Zahl + 1: nicht-numerisches Argument für binären Operator
```

Aufgabe 3

R: Vektoren in R (3)

Daten: Vektoren

Eine Urliste von Daten eines Merkmals wird in R durch einen Vektor repräsentiert. Zur Erzeugung eines Vektors dient die Funktion `c()`. die Einträge der Urliste werden dann zum Beispiel als Argumente von `c()` durch Kommata getrennt angegeben. Als Ausprägungen sind Zahlen oder Zeichenketten möglich. R versucht dann durch die Art der Argumente automatisch zu entscheiden, ob es sich um ein nominales oder ein metrisches Merkmal handelt.

- a) Legen Sie eine Urliste für das Merkmal `x` an, das die Werte 1, 4, 2, 1.5 enthält. Geben Sie `x` aus. Legen Sie ein weiteres Merkmal `Geschlecht` mit den Werten Mann, Frau, Frau, Frau an. Geben Sie auch `Geschlecht` aus. Das dritte Merkmal `z` soll die Werte 1, 2, 1, "1" enthalten. Ist `z` für R nominal oder metrisch? Überprüfen Sie Ihre Entscheidung.

Vektoren aufeinanderfolgender ganzer Zahlen werden mit dem Doppelpunkt-Operator gebildet. `2:5` steht zum Beispiel für den Vektor mit den Zahlen 2, 3, 4, 5. Mit der Funktion `seq()` kann man genauer Vektoren als Folgen von Zahlen erzeugen. `seq(from=2, to=3, by=0.2)` erzeugt zum Beispiel den Vektor (2, 2.2, 2.4, 2.6, 2.8, 3). Mit `rep()` werden Werte oder ganze Vektoren vervielfacht als Vektor ausgegeben. Zum Beispiel ergibt `rep(c(1,2), 3)` den Vektor (1,2,1,2,1,2). Die Hilfe-Seiten (Aufruf über `?seq` bzw. `?rep`) erklären die Details.

- b) Erzeugen Sie folgende Vektoren in R:

```
## [1] 5 6 7 8 9
## [1] 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
## [1] -0,10 -0,08 -0,06 -0,04 -0,02 0,00
## [1] 10000 12500 15000 17500 20000
## [1] -3 -2 -1 0 1 2 -3 -2 -1 0 1 2 -3 -2 -1 0 1
## [18] 2
## [1] 5,0 6,0 7,0 8,0 9,0 10,0 10,1 10,2 10,3 10,4
## [11] 10,5
```

Rechenoperationen können zwischen (numerischen) Vektoren elementweise ausgeführt werden. Hat ein Vektor weniger Elemente als ein anderer, werden die Elemente vom Beginn des kürzeren Vektors einfach solange wiederholt, bis die Länge der beiden Vektoren gleich ist. Die Länge eines Vektors kann mir der Funktion `length()` ausgelesen werden. Die Summe aller Elemente eines Vektors wird mit `sum()` errechnet. Beispielsweise ergibt mit `x=1:5` und `y = c(10.1, 10.5)` die Summe `x+y` den Vektor (11.1, 12.5, 13.1, 14.5, 15.1). Analog funktioniert `-`, `*`, `/`.

- c) Gegeben sind die Vektoren

```
x = 4:2
y = seq(from = 0.1, to = 0.5, by = 0.1)
```

Erklären Sie, was folgende Ausdrücke ergeben und überprüfen Sie Ihr Ergebnis in R:

```
x + y
x * y
x^3 + 1
2 * x - 3 * y
n = length(x + y)
sum(x + y)/n
```


Teile oder einzelne Elemente eines Vektors können mit der Angabe der Indexwerte in eckigen Klammern ausgegeben werden. Auch Bedingungen mit Vergleichsoperatoren (z.B. < für kleiner als oder == für ist gleich) sind möglich in eckigen Klammern. Verknüpfungen zwischen Vergleichen sind mit logisch UND (&) beziehungsweise ODER (|) möglich.

d) Gegeben sind die Vektoren

```
x = seq(from = 0, to = 100, by = 2)
y = 100:1
```

Schreiben Sie die Ergebnisse folgender Ausdrücke auf und überprüfen Sie anschließend Ihr Ergebnis in R:

```
x[3]
y[c(1, 3, 10)]
x[1:4]
x[x > 91]
x[x > 20 & x <= 30]
y[y == 5 | y > 95 | y < 3]
```

Anmerkung: Die Ausgabe von Relationen wie $x < y$ auf Vektoren in R sind Vektoren mit den Ausprägungen TRUE beziehungsweise FALSE. Diese sogenannten logischen Vektoren können zur Indizierung von Vektoren verwendet werden; Elemente mit einem Index von TRUE werden ausgewählt, die mit Wert FALSE werden übergangen.

e) Was ergeben folgende Zeilen in R:

```
x = seq(from = 0.2, to = 2, by = 0.3)
y = -3:3
x < y
x^2 < x
Index = x^2 < x
x[Index]
y[Index]
```

Lösungshinweis:

```
a) x = c(1, 4, 2, 1.5) # Anlegen eines metrischen Merkmals x
# mit Ausprägungen für 4 Objekte
x # Ausgabe

## [1] 1,0 4,0 2,0 1,5

Geschlecht = c("Mann", "Frau", "Frau", "Frau")
Geschlecht # nominales Merkmal, auch von 4 Objekten

## [1] "Mann" "Frau" "Frau" "Frau"

z = c(1, 2, 1, "1") # z ist für R nominal, da der letzte Wert
# als Zeichenkette eingegeben wurde
```

```
z
## [1] "1" "2" "1" "1"
```

b) 5:9

```
## [1] 5 6 7 8 9
10:1
## [1] 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
seq(from = -0.1, to = 0, by = 0.02)
## [1] -0,10 -0,08 -0,06 -0,04 -0,02 0,00
seq(from = 10000, to = 20000, length.out = 5)
## [1] 10000 12500 15000 17500 20000
rep(-3:2, 3)
## [1] -3 -2 -1 0 1 2 -3 -2 -1 0 1 2 -3 -2 -1 0 1
## [18] 2
c(5:10, seq(from = 10.1, by = 0.1, to = 10.5))
## [1] 5,0 6,0 7,0 8,0 9,0 10,0 10,1 10,2 10,3 10,4
## [11] 10,5
```

c) $x = 4:2$
 $y = \text{seq}(\text{from} = 0.1, \text{to} = 0.5, \text{by} = 0.1)$

```
x + y
## [1] 4,1 3,2 2,3 4,4 3,5
x * y
## [1] 0,4 0,6 0,6 1,6 1,5
x^3 + 1
## [1] 65 28 9
2 * x - 3 * y
## [1] 7,7 5,4 3,1 6,8 4,5
n = length(x + y)
sum(x + y)/n
## [1] 3,5
```

d) $x = \text{seq}(\text{from} = 0, \text{to} = 100, \text{by} = 2)$
 $y = 100:1$

```
x[3]
## [1] 4
y[c(1, 3, 10)]
```

```

## [1] 100 98 91
x[1:4]
## [1] 0 2 4 6
x[x > 91]
## [1] 92 94 96 98 100
x[x > 20 & x <= 30]
## [1] 22 24 26 28 30
y[y == 5 | y > 95 | y < 3]
## [1] 100 99 98 97 96 5 2 1

```

e)

```

x = seq(from = 0.2, to = 2, by = 0.3)
y = -3:3
x < y
## [1] FALSE FALSE FALSE FALSE FALSE TRUE TRUE
x^2 < x
## [1] TRUE TRUE TRUE FALSE FALSE FALSE FALSE
Index = x^2 < x
x[Index]
## [1] 0,2 0,5 0,8
y[Index]
## [1] -3 -2 -1

```

R-Skripten: Führen eines Logbuches der eigenen Analysen

In vielen Fällen besteht eine statistische Untersuchung aus mehr als einem Schritt. Meistens werden Daten eingelesen, bereinigt, aufbereitet, verdichtet, graphisch dargestellt usw. Um diesen Ablauf zu dokumentieren kann man eine Textdatei mit der Endung .R, ein sogenanntes R-Skript erstellen und alle Kommandos dort ablegen, mit Kommentaren dokumentieren und für spätere Wiederverwendung abspeichern.

- Legen Sie eine .R-Datei mit dem Bezeichner Statistik-Uebung.R an (in RStudio über File -> New -> R-Script) und schreiben Sie in diese Datei in die ersten Zeilen als Kommentar (#-Zeichen voranstellen) Ihren Namen, das Datum sowie eine Anmerkung, dass diese Datei alle R-Lösungen der Übungsaufgaben enthält.
- Fügen Sie für jede bis hierher bearbeitete Aufgabe nach einem entsprechenden Kommentar den jeweiligen R-Code in diese Datei ein und schreiben Sie zu möglichst vielen Zeilen einen Kommentar, in dem Sie eine Anmerkung schreiben was die Zeile bewirkt.

Um eine Zeile aus einem R-Skript in R auszuführen, kann der Cursor in die entsprechende Zeile platziert werden; durch die Tastenkombination Strg-Enter (auf englischsprachigen Tastaturen Ctrl-Enter) wird die Zeile in die Console kopiert und ausgeführt; danach springt der Cursor in die nächste Zeile des Skripts. Wiederholt man das mehrmals, werden der Reihe nach alle Zeilen ausgeführt (Kommentarzeilen werden übergangen). Möchte man mehr als eine Zeile ausführen, kann man den entsprechenden Teil des Skripts mit der Maus markieren und mit Strg-Enter ausführen.

- Führen Sie die Befehle der ersten R-Aufgabe zunächst zeilenweise aus und beobachten Sie die Ein- und Ausgaben in der Console, danach markieren Sie die komplette Aufgabe und wiederholen die Ausführung.

Lösungshinweis:

```
a) # ----- 22.3.2016,
# Max Maier R-Skript zur Statistik Übung im SS 2016
# -----
```

```
b) # ----- 22.3.2016,
# Max Maier R-Skript zur Statistik Übung im SS 2016
# -----

# Aufgabe 1
2 + 3 * 4 # hier gilt Punkt vor Strich
(2 + 3) * 4 # Klammer zuerst
0.2 * 3 - 1.1
# 0,2 * 3 # Fehler, ',' wird nicht als Dezimalkomma akzeptiert
```

```

2^3^2 # entspricht 2^(3^2)
(2^3)^2
exp(1) # das ist e^1
log(exp(1)) # log() entspricht dem ln; e^x und ln heben sich auf
sqrt(16) # Quadratwurzel
16^(1/2) # auch QW
# Sqrt(16) # Fehler, sqrt() schreibt man mit kleinem 's'

# Aufgabe 2 ...

```

```

c) # ----- 22.3.2016,
# Max Maier R-Skript zur Statistik Übung im SS 2016
# -----

# Aufgabe 1
2 + 3 * 4 # hier gilt Punkt vor Strich
## [1] 14

(2 + 3) * 4 # Klammer zuerst
## [1] 20

0.2 * 3 - 1.1
## [1] -0,5

# 0,2 * 3 # Fehler, ',' wird nicht als Dezimalkomma akzeptiert
2^3^2 # entspricht 2^(3^2)
## [1] 512

(2^3)^2
## [1] 64

exp(1) # das ist e^1
## [1] 2,7183

log(exp(1)) # log() entspricht dem ln; e^x und ln heben sich auf
## [1] 1

sqrt(16) # Quadratwurzel
## [1] 4

16^(1/2) # auch QW
## [1] 4

# Sqrt(16) # Fehler, sqrt() schreibt man mit kleinem 's'

# Aufgabe 2 ...

```

Aufgabe 5

Funktionen einer reellen Variablen

In R können Funktionen einer reellen Variable mit dem Aufruf `function(Variable) {Funktionsterm}` definiert werden. Diese Funktionen können beliebigen Bezeichnern zugewiesen werden. Soll beispielsweise die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = \frac{x}{2} + 1$$

definiert werden, kann man schreiben:

```
f = function(x) { x/2 + 1 }
```

Die Funktion kann dann mit Konstanten sowie Variablen Skalaren bzw. Vektoren aufgerufen werden. Der Funktionswert wird zurückgegeben bzw. am Bildschirm ausgegeben:

```
f(2)
## [1] 2
x = 3.2
y = f(x) # Funktionswert von f(3.2) wird in Variable y abgespeichert.
y
## [1] 2,6
x = -2:2 # Mehr als ein x-Wert
x
## [1] -2 -1 0 1 2
f(x)
## [1] 0,0 0,5 1,0 1,5 2,0
```

Wertetabellen können über die Funktion `data.frame()` generiert bzw. ausgegeben werden.

```
Tabelle = data.frame(x, f(x)) # f(x) wird zu f.x., Spaltenname damit Bezeichner
Tabelle # Standardausgabe, durchnummerierte Zeilen
##   x f.x.
## 1 -2 0,0
## 2 -1 0,5
## 3  0 1,0
## 4  1 1,5
## 5  2 2,0
```

Mit `print()` als Wrapper können beispielsweise die Zeilennummern unterdrückt werden.

```
print(Tabelle, row.names=FALSE) # Ausgabe ohne Zeilennummern
##   x f.x.
## -2 0,0
## -1 0,5
##  0 1,0
##  1 1,5
##  2 2,0
```

Führen Sie folgende Aufgaben in R aus:

a) Definieren Sie die Funktion $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(t) = \frac{100}{1 + 20 \cdot e^{-4t}}$$

b) Berechnen Sie die Funktionswerte für Werte von $t \in \{0, 0.1, 1, 10\}$.

c) Generieren Sie einen Vektor t , der die Zahlen von 0 bis 2 in Schrittweiten von 0.2 enthält.

d) Geben Sie eine Wertetabelle der Werte von t und $g(t)$ ohne Angabe der Zeilennummer aus.

Lösungshinweis:

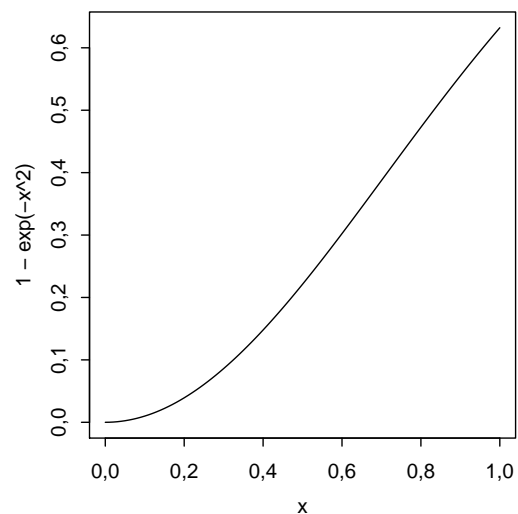
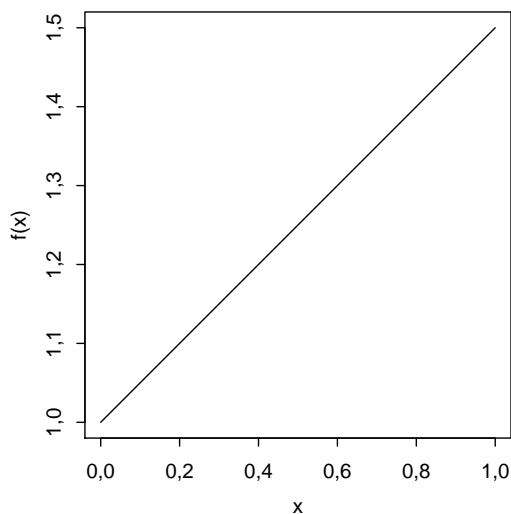
```
g = function(t) {100/(1+20*exp(-4*t))} # a)
g( c(0, 0.1, 1, 10) ) # b)
## [1] 4,7619 6,9414 73,1897 100,0000
t = seq(from=0, to=2, by=0.2) # c)
print(data.frame(t, g=g(t)), row.names=FALSE) # d)
##      t      g
## 0,0 4,7619
## 0,2 10,0134
## 0,4 19,8494
## 0,6 35,5321
## 0,8 55,0890
## 1,0 73,1897
## 1,2 85,8668
## 1,4 93,1136
## 1,6 96,7838
## 1,8 98,5288
## 2,0 99,3335
```

Aufgabe 6

Graphen von Funktionen einer reellen Variablen

Mit der Funktion `curve()` kann in R sehr komfortabel der Graph einer Funktion einer reellen Variablen gezeichnet werden. Als Argument wird eine selbstdefinierte Funktion oder ein Text eines Funktionsterms (in Abhängigkeit von x) akzeptiert.

```
f = function(x) { x/2 + 1 }  
curve(f)  
curve(1 - exp(-x^2))
```

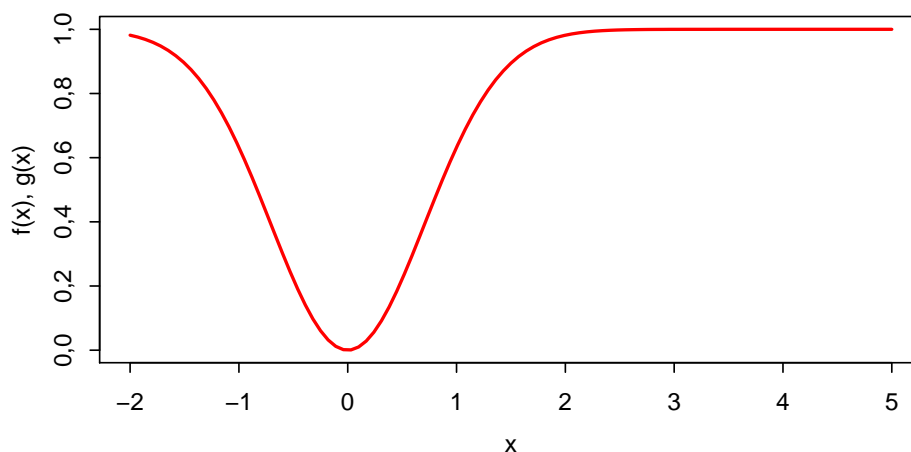


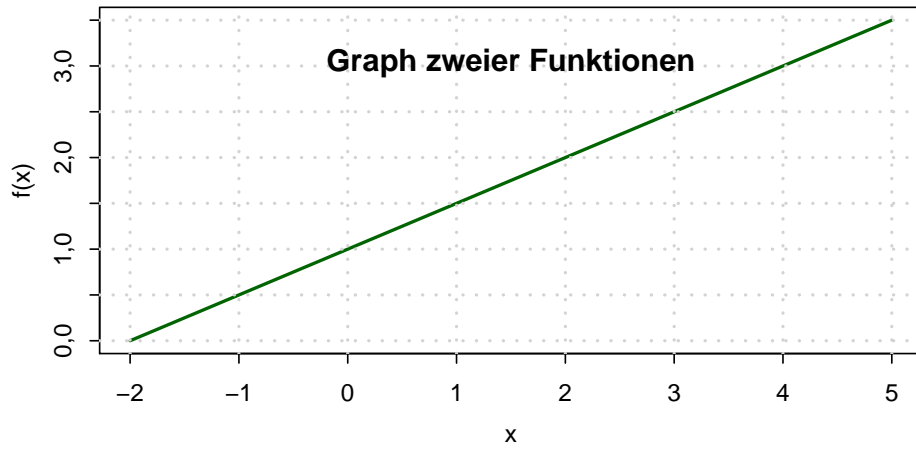
`curve()` hat einige nützliche Parameter:

- ▶ `from`, `to` für den Definitionsbereich,
- ▶ `add` für die Überlagerung mehrerer Kurven,
- ▶ `col` für die Farbe der Kurve,
- ▶ `xlab`, `ylab`, `main` für die Beschriftung der Abszisse, Ordinate, der Überschrift
- ▶ `lwd` für die Strichdicke der Kurve

Mit `grid()` kann man ein Gitter in den Graphen einzeichnen.

```
curve(1 - exp(-x^2), from = -2, to = 5, lwd = 2, col = "red", xlab = "x",  
      ylab = "f(x), g(x)", main = "Graph zweier Funktionen")  
curve(f, add = TRUE, col = "green", lwd = 2)  
grid(lwd = 2)
```





Führen Sie folgende Aufgaben in R aus:

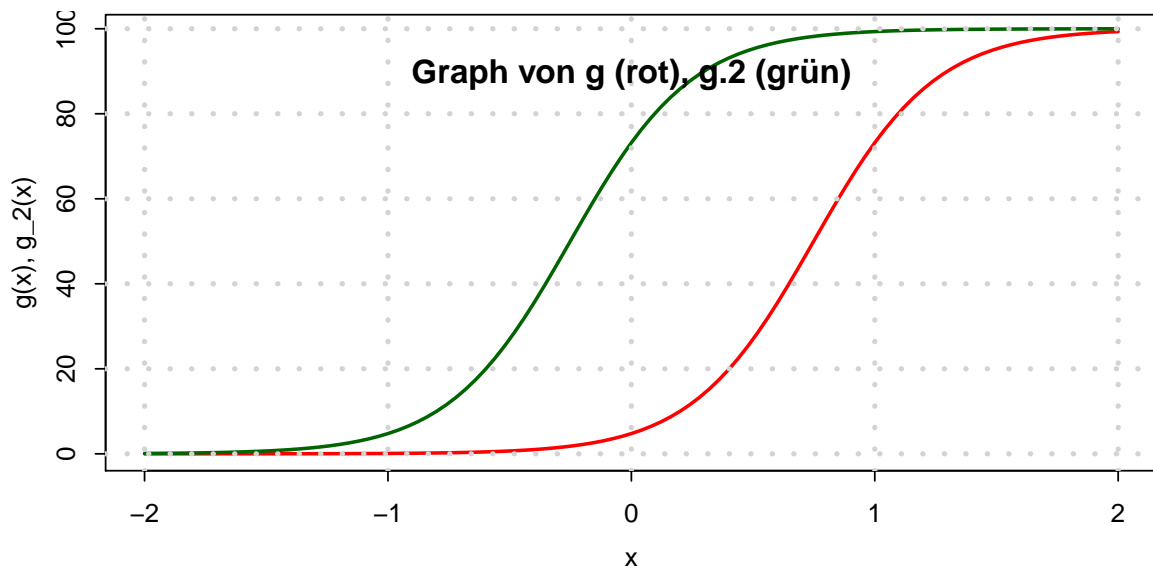
a) Definieren Sie die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(t) = \frac{100}{1 + 20 \cdot e^{-4t}}$$

- b) Zeichnen Sie den Graphen von g mit einem sinnvollen Definitionsbereich $D_g \subset \mathbb{R}$, mit Beschriftung der Achsen sowie einer geeigneten Überschrift.
- c) Definieren Sie eine Funktion g_2 , die identisch zu g ist, nur um eine Einheit gemäß $g_2(t - 1) = g(t)$ verschoben.
- d) Zeichnen Sie in den Graphen aus Teilaufgabe a) zusätzlich den Graphen von g_2 ein.
- e) Zeichnen Sie ein Gitter in das Koordinatensystem.

Lösungshinweis:

```
g = function(t) {100/(1+20*exp(-4*t))}      # a)
curve(g, from=-2, to=2, lwd=2, col="red",
      xlab="x", ylab="g(x), g_2(x)", main="Graph von g und g_2")
g.2 = function(x) {g(x+1)}
curve(g.2, add=TRUE, col="darkgreen", lwd=2)
grid()
```



Grundlagen

Aufgabe 7

Grundlagen: Zusammenfassung (A1.1)

Lösen Sie in den nachstehenden Aufgaben die Klammern auf und fassen Sie soweit wie möglich zusammen:

a) $(3s + 2t)(4s - 3t)(5s - 7t)$

b) $\frac{(5a - 2b)(5a + 2b)}{25a^2 - 4b^2} - \frac{(7a - 3b)(7a - 3b)}{49a^2 + 9b^2 - 42ab}$

c) $8x - (x + ((3x - 2y) - (5x + 3y)) - ((-x + 6y)))$

$$= 8x - (x + 3x - 2y - 5x - 3y + x - 6y)$$
$$= 8x - x - 3x + 2y + 5x + 3y - x + 6y = 8x + 11y$$

Lösungshinweis:

a) $60s^3 - 89s^2t - 23st^2 + 42t^3$

b) $1 - 1 = 0$

c) $8x + 11y$

Aufgabe 8

$$2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

Grundlagen: Binomische Formeln (A1.2)

Wenden Sie die binomischen Formeln zur Vereinfachung folgender Ausdrücke an:

$$a) \frac{9a^2 - 2b^2}{3\sqrt{2}a - 2b} = \frac{(3a)^2 - (\sqrt{2}b)^2}{\sqrt{2}(3a - \sqrt{2}b)} = \frac{\cancel{(3a - \sqrt{2}b)}(3a + \sqrt{2}b)}{\sqrt{2} \cdot \cancel{(3a - \sqrt{2}b)}} = \frac{3}{\sqrt{2}}a + b$$

$$b) \frac{2s^2 + 4st + 2t^2}{s^2 - t^2}$$

$$c) a^2x^4 - 2axyx^2b^2 + b^4y^2 = (ax^2)^2 - 2 \cdot ax^2 \cdot yb^2 + (yb^2)^2 = (ax^2 - yb^2)^2$$

$$d) (\sqrt{xy} - 1)(-1 - \sqrt{xy}) = -(\sqrt{xy} - 1)(\sqrt{xy} + 1) = -[xy - 1] = 1 - xy$$

$$e) 4a + 12\sqrt{ab} + 9b \quad \begin{aligned} &= (-1 + \sqrt{xy})(-1 - \sqrt{xy}) \\ &= 1 - xy \end{aligned}$$

Lösungshinweis:

$$a) \frac{3a}{\sqrt{2}} + b$$

$$b) \frac{2(s+t)}{2(s+t)}$$

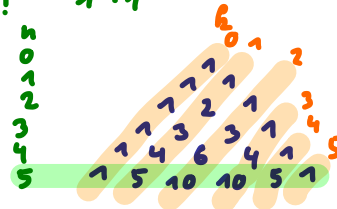
$$c) (ax^2 - yb^2)^2$$

$$d) 1 - xy$$

$$e) (2\sqrt{a} + 3\sqrt{b})^2$$

$$\binom{2}{1}$$

$$\frac{2!}{1! \cdot (2-1)!} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 1} = 2$$



Aufgabe 9

Grundlagen: Wurzeln und Potenzen (A1.3)

Vereinfachen Sie unter Anwendung der Rechengesetze für Wurzeln bzw. Potenzen:

a) $\sqrt{(xy^2)^2}$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

b) $\sqrt[3]{16xy^4} \sqrt[3]{4x^2y^2}$

$$\sqrt{(-4)^2} = 4$$

c) $\sqrt[5]{\frac{x^3}{32}}$

d) $\sqrt{\sqrt{4a^2x^2} \cdot \sqrt{a^3x}}$

Lösungshinweis:

a) $|x|y^2$

b) $4xy^2$

c) $\frac{1}{2}x^{\frac{3}{5}}$

d) $\sqrt{2a^2|x|}$

Aufgabe 10

Grundlagen: Logarithmen (A1.4)

Berechnen Sie x aus den folgenden Beziehungen:

a) $3 \cdot \log x = \log 1024 - \log 16 \Leftrightarrow \log x^3 = \log \frac{1024}{16} \Leftrightarrow x^3 = 64 \Leftrightarrow x = 4$

b) $\log x = \frac{1}{3}(\log 250 + \log 15 - \log 30)$

c) $\frac{\ln(x^2) - 2 \ln x}{\ln(x+1)} = e \Leftrightarrow \frac{0}{\ln(x+1)} = e \Leftrightarrow 0 = e$
↳ keine Lsg.

d) $e^x = e^{2x} \cdot 50000$

↳ $e^{-x} = 50000 \Leftrightarrow -x = \ln 50000$

$x = -\ln 50000 \approx -10.82$

alternativ:

$\log x = \frac{\log 1024 - \log 16}{3} \approx 0.6\dots$
 $x = 10^{0.6\dots} = 4$

Lösungshinweis:

a) $x = 4$

b) $x = 5$

c) Aussage falsch für alle $x \in \mathbb{R}$: Keine Lösung in \mathbb{R}

d) $x = -\ln 50000 \Rightarrow x \approx -10,8198$

$\frac{1}{3} \log \left(\frac{250 \cdot 15}{30} \right) = \log 125^{\frac{1}{3}} = \log 5$

Aufgabe 11

Grundlagen: Summen ausrechnen (A1.5)

Gegeben sind die Zahlen

i	1	2	3	4	5
x_i	5	3	2	1	6
y_i	2	3	4	1	0

$$\sum_{k=2}^4 y_k = y_2 + y_3 + y_4$$

$$\sum_{\text{Hugo}=1}^2 y_{\text{Hugo}} = y_1 + y_2$$

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $\sum_{i=1}^5 x_i$ b) $\sum_{i=1}^5 (x_i + y_i)$ c) $\sum_{i=1}^5 (x_i y_i)$ d) $\left(\sum_{i=1}^5 x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^5 y_i\right)$ e) $\sum_{i=1}^5 \left(i x_i \sum_{j=1}^5 (j y_j) \right)$

$$e) \sum_{i=1}^5 \left(i x_i \cdot (1 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 3 \cdot y_3 + 4 \cdot y_4 + 5 \cdot y_5) \right)$$

$$= (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0) \cdot 24$$

$$= 24$$

Lösungshinweis:

- a) $\sum_{i=1}^5 x_i = 17$
 b) $\sum_{i=1}^5 (x_i + y_i) = 27$
 c) $\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 28$
 d) $\sum_{i=1}^5 x_i \sum_{i=1}^5 y_i = 170$

$$= (1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 + 5 \cdot x_5) \cdot 24$$

$$= (1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 6) \cdot 24$$

$$= 57 \cdot 24 = 1224$$

Aufgabe 12

Schreiben Sie die folgenden Summen unter Verwendung des Summenzeichens:

a) $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12$

b) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \frac{7}{8}$

c) $4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25 + 28$

$\sum_{i=1}^7 \frac{i}{i+1} \quad \left(= \sum_{i=2}^8 \frac{i-1}{i} \right)$

$\left(= \sum_{i=3}^9 \frac{i-2}{i-1} \right)$

Lösungshinweis:

a) $\sum_{i=1}^6 2i$

b) $\sum_{i=1}^7 \frac{i}{i+1}$

c) $\sum_{i=1}^9 (1 + 3i)$

Aufgabe 13

Grundlagen: Summen: Indexverschiebung (A1.7)

Gegeben sei der Ausdruck $\sum_{i=1}^n a_i$. Die Indizierung des Ausdrucks soll nun so verändert werden, dass die untere Summationsgrenze $i = k$ lautet, und trotzdem die gleichen Summanden addiert werden.

Lösungshinweis:

$$\sum_{i=k}^{n+k-1} a_{i+1-k}$$

$$\sum_{i=3}^{5+7-1} a_{i-7+1}$$
$$\sum_{i=k}^{n+k-1} a_{i-k+1}$$

Bsp.: $n=5, k=7$

$$\sum_{i=1}^5 a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$$= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

Aufgabe 14

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k - (k-1)}{(k-1)k} = \frac{1}{(k-1)k} \quad \text{Grundlagen: Summe mit Trick (A1.7b)}$$

Berechnen Sie die Summe

$$\text{z.B. } \sum_{k=2}^7 \frac{1}{(k-1)k} \quad \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k} = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

$$= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} = \frac{6}{7}$$

Hinweis: $\frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \quad (k=2)$$

$$+ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \quad (k=3)$$

$$+ \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$= 1 - \frac{1}{n}$$

Lösungshinweis:

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k} \tag{1}$$

$$= \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \tag{2}$$

$$= \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \tag{3}$$

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) \tag{4}$$

$$= 1 - \frac{1}{n} \tag{5}$$

Aufgabe 15

Grundlagen: Mitternachtsformel (A1.8)

Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $-5x^2 + 3x + 9 = 0$

b) $2x^2 - 4x + 10 = 0$

c) $x^2 + 7x + 12,25 = 0$

Lösungshinweis:

a) $x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 180}}{-10} \approx \begin{cases} -1,075 \\ 1,675 \end{cases}$

b) $x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 80}}{4} \notin \mathbb{R}$ (Diskriminante negativ)

c) $x_{1/2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 12,25}}{2} = -3,5$ (nur eine Lösung)

Aussagen

Aufgabe 16

Aussagen: Implikation verbal (A1.9)

Gegeben seien die Aussagen

A : Das Auftragsvolumen im privaten Wohnungsbau steigt

B : Der Hypothekenzins fällt.

Bringen Sie die Aussage $B \Rightarrow A$ verbal auf die Form

- a) Wenn, dann
- b) folgt aus
- c) impliziert
- d) ist notwendig für
- e) ist hinreichend für

Lösungshinweis:

- a) Wenn der Hypothekenzins fällt, dann steigt das Auftragsvolumen im privaten Wohnungsbau
- b) Steigendes Auftragsvolumen im privaten Wohnungsbau folgt aus fallendem Hypothekenzins
- c) Fallender Hypothekenzins impliziert steigendes Auftragsvolumen im privaten Wohnungsbau
- d) Steigendes Auftragsvolumen im privaten Wohnungsbau ist notwendig für fallende Hypothekenzins
- e) Fallende Hypothekenzins sind hinreichend für steigende Auftragsvolumen im privaten Wohnungsbau

Aufgabe 17

Gegeben sind die Aussagen:

A_1 : Die Löhne steigen.

A_2 : Die Preise steigen.

Formulieren Sie die Aussagen:

$$A : A_1 \Rightarrow A_2$$

$$B_1 : A_1 \wedge A_2$$

$$B_2 : \overline{A_1} \wedge \overline{A_2}$$

$$B_3 : \overline{A_1} \wedge A_2$$

$$B_4 : \overline{A_1} \vee A_2$$

Lösungshinweis:

A : „Wenn die Löhne steigen, dann steigen die Preise“

B_1 : „Die Löhne und die Preise steigen“

B_2 : „Die Löhne steigen, aber die Preise nicht“

B_3 : „Weder die Löhne noch die Preise steigen“

B_4 : „Die Löhne steigen nicht oder die Preise steigen“

Aufgabe 18

Aussagen: Wahrheitstabelle (A2.0b)

Gegeben sind die Aussagen aus Aufgabe 17:

Überprüfen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, welche der Aussagen

$$A \Rightarrow B_i, B_i \Rightarrow A, A \Leftrightarrow B_i, (i = 1, 2, 3, 4)$$

stets (also unabhängig von den Wahrheitswerten der A_i) wahr sind.

Lösungshinweis:

Tautologien sind: $A \Rightarrow B_4, B_1 \Rightarrow A,$
 $B_3 \Rightarrow A, B_4 \Rightarrow A, A \Leftrightarrow B_4$

Aufgabe 17

Aussagen

Gegeben sind die Aussagen:

A_1 : Die Löhne steigen.
 A_2 : Die Preise steigen.

Formulieren Sie die Aussagen:

A : $A_1 \Rightarrow A_2$
 B_1 : $A_1 \wedge A_2$
 B_2 : $\overline{A_1} \wedge \overline{A_2}$
 B_3 : $\overline{A_1} \wedge A_2$
 B_4 : $\overline{A_1} \vee A_2$

Aufgabe 18

Aussagen: Wahrheitstabelle (A2.0b)

Gegeben sind die Aussagen aus Aufgabe 17:

Überprüfen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, welche der Aussagen

$$A \Rightarrow B_i, B_i \Rightarrow A, A \Leftrightarrow B_i, (i = 1, 2, 3, 4)$$

stets (also unabhängig von den Wahrheitswerten der A_i) wahr sind.

A_1	A_2	w	w	f	f
-------	-------	---	---	---	---

$A: A_1 \Rightarrow A_2$	w	f	w	w	w
$B_1: A_1 \wedge A_2$	w	f	f	f	f
$B_2: A_1 \wedge \overline{A_2}$	f	w	f	f	f
$B_3: \overline{A_1} \wedge \overline{A_2}$	f	f	f	w	w
$B_4: \overline{A_1} \vee A_2$	w	f	w	w	w

$A \Rightarrow B_1$	w	w	f	f	f
$A \Rightarrow B_2$	f	w	f	f	f
$A \Rightarrow B_3$	f	w	f	w	w
$A \Rightarrow B_4$	w	w	w	w	w

Tautologie

$B_1 \Rightarrow A$	w	w	w	w	w
$B_2 \Rightarrow A$	w	f	w	w	w
$B_3 \Rightarrow A$	w	w	w	w	w
$B_4 \Rightarrow A$	w	w	w	w	w

Tautologie

Tautologie

Tautologie

$A \Leftrightarrow B_1$	w	w	f	f	f
$A \Leftrightarrow B_2$	f	f	f	f	f
$A \Leftrightarrow B_3$	f	w	f	w	w
$A \Leftrightarrow B_4$	w	w	w	w	w

Kontradiktion

Tautologie

Aufgabe 19

Gegeben seien die Aussagen A , B , deren Negationen mit \bar{A} , \bar{B} bezeichnet werden. Zeigen Sie, dass die verknüpfte Aussage

$$(A \vee B) \wedge (\overline{A \wedge B}) \Leftrightarrow (A \wedge \bar{B}) \vee (B \wedge \bar{A})$$

stets wahr ist.

Lösungshinweis:

	A	w	w	f	f
	B	w	f	w	f
① : $A \vee B$		w	w	w	f
② : $\overline{A \wedge B}$		f	w	w	w
③ : $A \wedge \bar{B}$		f	w	f	f
④ : $B \wedge \bar{A}$		f	f	w	f
① \wedge ②		f	w	w	f
③ \vee ④		f	w	w	f
„ \Leftrightarrow “		w	w	w	w

Also: Tautologie.

- a) Gegeben sei die Aussage $P(x)$: „Der Angestellte x einer bestimmten Firma ist mit seiner Position zufrieden.“

Interpretieren Sie die Aussagen

$$\begin{aligned} & \bigwedge_x P(x), \quad \bigvee_x P(x), \quad \bigwedge_x \overline{P(x)}, \\ & \bigvee_x \overline{P(x)}, \quad \overline{\bigwedge_x P(x)}, \quad \overline{\bigvee_x P(x)} \end{aligned}$$

- b) Gegeben sei die Aussage $A(x)$: „Die reelle Zahl x erfüllt die Gleichung $x^4 + 1 = 0$.“
Welche der All- und Existenzaussagen

$$\begin{aligned} & \bigwedge_x A(x), \quad \bigwedge_x \overline{A(x)}, \quad \overline{\bigwedge_x A(x)}, \\ & \bigvee_x A(x), \quad \bigvee_x \overline{A(x)}, \quad \overline{\bigvee_x A(x)} \end{aligned}$$

sind wahr?

Lösungshinweis:

- a) $\bigwedge_x P(x)$: Alle Angestellten einer bestimmten Firma sind mit ihrer Position zufrieden
- $\bigvee_x P(x)$: Mindestens ein Angestellter einer bestimmten Firma ist mit seiner Position zufrieden
- $\bigwedge_x \overline{P(x)}$: Alle Angestellten einer bestimmten Firma sind mit ihrer Position unzufrieden
- $\bigvee_x \overline{P(x)}$: Mindestens ein Angestellter einer bestimmten Firma ist mit seiner Position unzufrieden
- $\overline{\bigwedge_x P(x)}$: Nicht alle Angestellten einer bestimmten Firma sind mit ihrer Position zufrieden
- $\overline{\bigvee_x P(x)}$: Kein Angestellter einer bestimmten Firma ist mit seiner Position zufrieden

- b) $A(x) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ gilt: $x^4 \geq 0 \Rightarrow x^4 + 1 > 0 \Rightarrow A(x)$ ist immer falsch und $\overline{A(x)}$ ist immer wahr.

\Rightarrow

$\bigwedge_x \overline{A(x)}$	Alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllen $x^4 + 1 \neq 0$	(w)
$\overline{\bigwedge_x A(x)}$	Nicht alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllen $x^4 + 1 = 0$	(w)
$\bigvee_x \overline{A(x)}$	Mindestens ein $x \in \mathbb{R}$ erfüllt $x^4 + 1 \neq 0$	(w)
$\overline{\bigvee_x A(x)}$	Kein $x \in \mathbb{R}$ erfüllt $x^4 + 1 = 0$	(w)
$\bigwedge_x A(x)$	Alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllen $x^4 + 1 = 0$	(f)
$\bigvee_x A(x)$	Mindestens ein $x \in \mathbb{R}$ erfüllt $x^4 + 1 = 0$	(f)

Aufgabe 21

Aussagen: Direkter Beweis (A2.3)

Führen Sie zur Bestätigung der Aussage

$$(a + b)^2 = 4ab \Rightarrow a = b$$

einen direkten Beweis.

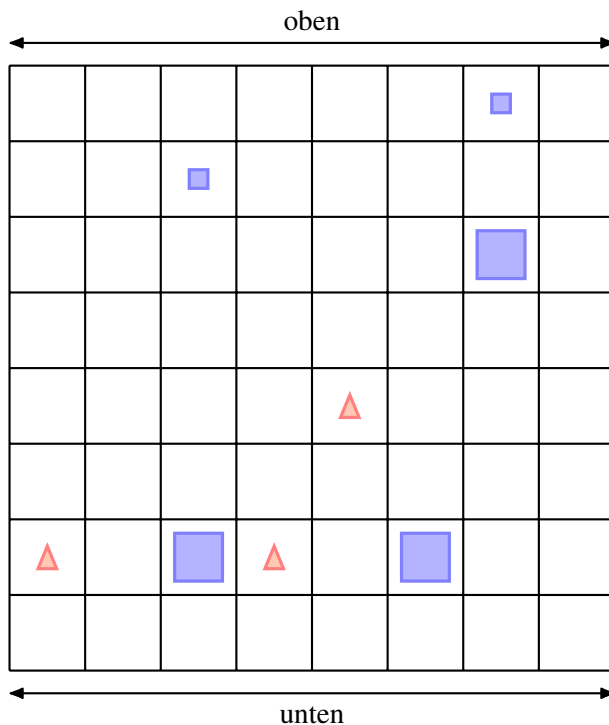
Lösungshinweis:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= 4ab \\ \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 &= 4ab \\ \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 &= 0 \\ \Rightarrow (a - b)^2 &= 0 \\ \Rightarrow a - b &= 0 \\ \Rightarrow a &= b\end{aligned}$$

Aufgabe 22

Aussagen: Verknüpfung: Wahr oder falsch? (A2.4)

Auf einem quadratischen Spielfeld mit 8×8 Feldern wurden geometrische Elemente in Form von kleinen und großen Quadraten und kleinen Dreiecken folgendermaßen angeordnet:



Außerdem sind für geometrische Elemente x, y, z auf dem Spielfeld folgende Aussagen definiert:

$Q(x)$: „ x ist ein Quadrat“

$K(x)$: „ x ist klein“

$U(x, y)$: „ x liegt unterhalb von y “

$V(x, y, z)$: „ x liegt auf der Verbindungsstrecke der Mittelpunkte von y und z “

Entscheiden und begründen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

a) $\bigvee_x Q(x)$

b) $\bigvee_x (\overline{Q(x)} \wedge K(x))$

c) $\bigwedge_x (\overline{Q(x)} \Rightarrow K(x))$

d) $\bigwedge_{x,y} (\overline{Q(x)} \wedge Q(y)) \Rightarrow \bigvee_z (V(z,x,y) \wedge \overline{Q(z)})$

e) $\bigwedge_x \left[(Q(x) \wedge K(x)) \Rightarrow \left(\bigwedge_y (\overline{K(y)} \Rightarrow U(y,x)) \right) \right]$

Aufgabe 22

Außerdem sind für geometrische Elemente x, y, z auf dem Spielfeld folgende Aussagen definiert:

$Q(x)$: „ x ist ein Quadrat“

$K(x)$: „ x ist klein“

$U(x, y)$: „ x liegt unterhalb von y “

$V(x, y, z)$: „ x liegt auf der Verbindungsstrecke der Mittelpunkte von y und z “

Entscheiden und begründen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

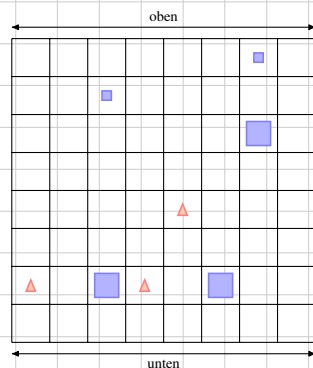
a) $\bigvee_x Q(x)$

b) $\bigvee_x (\overline{Q(x)} \wedge K(x))$

c) $\bigwedge_x (\overline{Q(x)} \Rightarrow K(x))$

d) $\bigwedge_{x,y} (\overline{Q(x)} \wedge Q(y)) \Rightarrow \bigvee_z (V(z, x, y) \wedge \overline{Q(z)})$

e) $\bigwedge_x \left[(Q(x) \wedge K(x)) \Rightarrow \left(\bigwedge_y (\overline{K(y)} \Rightarrow U(y, x)) \right) \right]$



a) Mindestens eines der Objekte ist ein Quadrat. **wahr**

b) Mindestens eines ist klein und kein Quadrat. **wahr**

c) Für alle Objekte gilt: Wenn es kein Quadrat ist, ist es klein. **wahr**

d) Wenn ein Paar von Objekten aus einem Quadrat und einem Dreieck (Nicht-Quadrat) besteht dann gibt es ein Dreieck auf der Verbindungsline

(Kurz: Zwischen einem Dreieck und einem Quadrat liegt immer ein Dreieck) **falsch**

e) Für alle kleinen Quadrate gilt, dass alle großen Objekte darunter liegen. **wahr**

Aufgabe 23

Aussagen: Beweise (A2.6)

Beweisen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussagen:

a) Von 450 Teilnehmern einer Mathematik-Klausur haben 300 Teilnehmer regelmäßig die Übungen besucht. Insgesamt haben 20% der Klausurteilnehmer die Klausur nicht bestanden. Bei den Besuchern der Übungen betrug die Durchfallquote nur 10%. Daraus folgt, dass die Durchfallquote der Teilnehmer der Mathematik-Klausur, die die Übungen nicht besucht haben, 40% beträgt.

b) $x + 2 \sqrt[3]{x} = 3 \Rightarrow x = 1$ ist die einzige reelle Lösung

c) $x^5 + x^3 + x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

a) Nicht bestanden: $450 \cdot 0.2 = 90$
 „ in Übung: $300 \cdot 0.1 = 30$
 Nicht in Übung 150
 davon nicht bestanden: $90 - 30 = 60$
 Anteil: $60/150 = 0.4$ **alles hoch 3**

b) $x + 2 \sqrt[3]{x} = 3 \Leftrightarrow 2 \sqrt[3]{x} = 3 - x \Leftrightarrow 8x = (3-x)^3$

$\Leftrightarrow 8x = 27 - 3 \cdot 9 \cdot x + 3 \cdot 3x^2 - x^3$

$\Leftrightarrow x^3 - 9x^2 + 35x - 27 = 0$

damit klar: $x = 1$ ist Lsg. des Gl.

Noch zu überprüfen: Gibt es weitere Lösungen
 → Polynomdivision

$(x^3 - 9x^2 + 35x - 27) : (x - 1) = x^2 - 8x + 27$

$-(x^3 - x^2)$
 $-8x^2 + 35x - 27$

$-(-8x^2 + 8x)$

$27x - 27$

$-(27x - 27)$

-

Diskriminante

$D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 27$
 < 0

⇒ keine weitere Nullstelle

⇒ $x = 1$ ist einzige Lösung

$$c) x^5 + x^3 + x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{"}\Leftarrow\text{"}: x = 0 \Rightarrow 0^5 + 0^3 + 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$\text{"}\Rightarrow\text{"} \quad x^5 + x^3 + x = 0 \Rightarrow x \underbrace{(x^4 + x^2 + 1)}_{> 0} = 0$$
$$\Rightarrow x = 0$$

Lösungshinweis:

- a) Es existiert mind. ein Quadrat (w)
- b) Es gibt mind. ein kleines Nicht-Quadrat (w)
- c) Alle Nicht-Quadrate sind klein (w)
- d) Zwischen jedem Paar aus Quadrat und Dreieck (Nicht-Quadrat) liegt mind. ein Dreieck (Nicht-Quadrat) (f)
- e) Alle nicht-kleinen Elemente liegen unter allen kleinen Quadraten (w)

Beweisen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussagen:

- a) Von 450 Teilnehmern einer Mathematik-Klausur haben 300 Teilnehmer regelmäßig die Übungen besucht. Insgesamt haben 20 % der Klausurteilnehmer die Klausur nicht bestanden. Bei den Besuchern der Übungen betrug die Durchfallquote nur 10 %. Daraus folgt, dass die Durchfallquote der Teilnehmer der Mathematik-Klausur, die die Übungen nicht besucht haben, 40 % beträgt.
- b) $x + 2 \sqrt[3]{x} = 3 \Rightarrow x = 1$ ist die einzige reelle Lösung
- c) $x^5 + x^3 + x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Lösungshinweis:

- a) Anteil Übungsverweigerer = $450 - 300 = 150$
 Anzahl nicht bestanden = $0.2 \cdot 450 = 90$
 Anzahl durchgefallene Übungsbesucher = $0.1 \cdot 300 = 30$
 Damit Anzahl durchgefallene Übungsverweigerer = $90 - 30 = 60$
 Also: Durchfallquote der Übungsverweigerer = $60/150 = 2/5 = 0.4 = 40\%$
- b) $x = 1$ ist Lösung, denn $1 + 2 \sqrt[3]{1} = 3$ ist wahr.
 Es gibt keine andere reelle Lösung, denn falls $x \neq 1$, gilt:

$$\begin{aligned} x + 2 \sqrt[3]{x} &= 3 \\ \Leftrightarrow 2 \sqrt[3]{x} &= 3 - x \\ \Leftrightarrow 8x &= (3 - x)^3 \\ \Leftrightarrow 27 - 27x + 9x^2 - x^3 - 8x &= 0 \\ \Leftrightarrow -x^3 + 9x^2 - 35x + 27 &= 0 \\ \Leftrightarrow (-x^3 + 9x^2 - 35x + 27) / (x - 1) &= -x^2 + 8x - 27 = 0 \end{aligned}$$

hat keine reelle Lösung, denn Diskriminante $D = 8^2 - 4 \cdot 27 < 0$.

- c) $x^5 + x^3 + x = 0$
 $x(x^4 + x^2 + 1) = 0$
 $x = 0 \vee x^4 + x^2 + 1 = 0$ - keine Lösung
 $\Rightarrow x = 0$ - die einzige Lösung

Aufgabe 24

Aussagen: Vollständige Induktion (A2.7)

Überprüfen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, für welche $n \in \mathbb{N}$ die Aussagen

$$A_1(n) : \sum_{i=1}^n i \cdot i! = (n+1)! - 1$$

$$A_2(n) : \sum_{i=1}^n 2^{i-1} = 2^n - 1$$

$$A_3(n) : n\sqrt{n} > n + \sqrt{n}$$

$$A_4(n) : n! > 2^n$$

richtig sind. Dabei gilt $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ und analog $i!$ beziehungsweise $(n+1)!$.

Lösungshinweis:

$A_1(n)$:

Beh.: $A_1(n) : \sum_{i=1}^n i \cdot i! = (n+1)! - 1$

Ind.-Anfang: $A_1(1) : \sum_{i=1}^1 i \cdot i! = 1 \cdot 1! = (1+1)! - 1$ (wahr)

Zu zg.: $A_1(n) : \sum_{i=1}^n i \cdot i! = (n+1)! - 1 \Rightarrow A_1(n+1) : \sum_{i=1}^{n+1} i \cdot i! = (n+2)! - 1$

Beweis: $\sum_{i=1}^{n+1} i \cdot i! = (n+1)(n+1)! + \sum_{i=1}^n i \cdot i!$
 $= (n+1)(n+1)! + (n+1)! - 1$
 $= (n+1+1)(n+1)! - 1$
 $= (n+2)(n+1)! - 1$
 $= (n+2)! - 1$

$A_2(n)$:

Ind.-Anfang: $A_2(1) : \sum_{i=1}^1 2^{i-1} = 2^0 = 1 = 2^1 - 1$

Zu zg.: $\sum_{i=1}^n 2^{i-1} = 2^n - 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} 2^{i-1} = 2^{n+1} - 1$

Beweis: $\sum_{i=1}^{n+1} 2^{i-1} = \sum_{i=1}^n 2^{i-1} + 2^{n+1-1}$
 $= 2^n - 1 + 2^n$
 $= 2 \cdot 2^n - 1$
 $= 2^{n+1} - 1$

$A_3(n)$:

Ind.-Anf.: Erstes mal wahr für $n = 3$:

$$A_3(3) : 3\sqrt{3} \approx 5,2 > 3 + \sqrt{3} \approx 4,7$$

Zu zg.: $n\sqrt{n} > n + \sqrt{n} \Rightarrow (n+1)\sqrt{n+1} > (n+1) + \sqrt{n+1}$ für $n \geq 3$

Aufgabe 24

Aussagen: Vollständige Induktion (A2.7)

Überprüfen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, für welche $n \in \mathbb{N}$ die Aussagen

$$A_1(n) : \sum_{i=1}^n i \cdot i! = (n+1)! - 1$$

$$A_2(n) : \sum_{i=1}^n 2^{i-1} = 2^n - 1$$

$$A_3(n) : n\sqrt{n} > n + \sqrt{n}$$

$$A_4(n) : n! > 2^n$$

richtig sind. Dabei gilt $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ und analog $i!$ beziehungsweise $(n+1)!$.

$$A_1(n) : \sum_{i=1}^n i \cdot i! = (n+1)! - 1$$

$A_1 : \sum_{i=1}^1 i \cdot i! = 1 \cdot 1! = 1 = (1+1)! - 1 \quad \checkmark$

Schritt $n \rightarrow n+1 : A_1(n+1) : \sum_{i=1}^{n+1} i \cdot i! = (n+2)! - 1$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i \cdot i! = \sum_{i=1}^n i \cdot i! + (n+1)(n+1)!$$

$$1 \cdot (n+1)! + (n+1)(n+1)! = (n+1)! [1 + (n+1)]$$

$$= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)!$$

$$= (n+1)! \cdot (1 + n + 1) - 1$$

$$= (n+1)! \cdot (n+2) - 1$$

$$A_2(n) : \sum_{i=1}^n 2^{i-1} = 2^n - 1 \quad = (n+2)! - 1$$

$A_2(1) : \sum_{i=1}^1 2^{i-1} = 2^{1-1} = 2^0 = 1 = 2^1 - 1 \quad \checkmark$

$n \rightarrow n+1 : A_2(n+1) = \sum_{i=1}^{n+1} 2^{i-1} = \sum_{i=1}^n 2^{i-1} + 2^{n+1-1}$
 $= 2^n - 1 + 2^n = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$

$A_3(n) : n\sqrt{n} > n + \sqrt{n}$

$n=1 : 1 \cdot \sqrt{1} > 1 + \sqrt{1}$

$n=2 : 2\sqrt{2} \approx 2.8 > 3.4 \approx 2 + \sqrt{2}$

$n=3 : 3\sqrt{3} \approx 5.1 > 4.7 \approx 3 + \sqrt{3} \quad \checkmark$

$n \rightarrow n+1 : (n+1)\sqrt{n+1} \stackrel{\text{ausmultipliz.}}{=} n\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}$
 $\stackrel{\text{ind. Voraussetzung}}{>} n\sqrt{n} + \sqrt{n+1} > n + \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$
 $\stackrel{\text{für } n \geq 3}{>} n+1 + \sqrt{n+1} = (n+1) + \sqrt{n+1}$

<https://goo.gl/lhV3hv>

$A_4(n) : n! > 2^n$

$n=1 : 1! > 2^1$, $n=2 : 2! > 2^2$
 $n=3 : 3! > 2^3$, $n=4 : 4! = 24 > 16 = 2^4 \quad \checkmark$

$n \rightarrow n+1 : (n+1)! = n! \cdot (n+1)$
 $\stackrel{\text{ind. vor. einsetzen}}{>} 2^n \cdot (n+1)$
 $> 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$
 für $n \geq 4$

$$\begin{aligned}
\text{Beweis: } (n+1)\sqrt{n+1} &= n\sqrt{n+1} + 1\sqrt{n+1} \\
&> n\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \\
&> n + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \\
&> n+1 + \sqrt{n+1}
\end{aligned}$$

$A_4(n)$:

Ind.-Anf.: Erstes mal wahr für $n = 4$:

$$A_4(4) : 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 > 16 = 2^4$$

Zu zg.: $n! > 2^n \Rightarrow (n+1)! > 2^{n+1}$ für $n \geq 4$

$$\text{Beweis: } (n+1)! = (n+1) \cdot n! > (n+1) \cdot 2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Aufgabe 25

Aussagen: Vollständige Induktion: Strecken (A2.8)

n verschiedene Punkte einer Ebene sind paarweise durch Strecken verbunden. Dazu wird die Aussage

$$(*) \quad A(n) : \quad \text{Die Anzahl der Strecken beträgt } \frac{1}{2} n (n - 1)$$

formuliert.

- Beweisen Sie graphisch die Aussagen $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$.
- Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass $(*)$ für $n \geq 2$ richtig ist.

Lösungshinweis:

a) $A(2) = \frac{1}{2} 2(2 - 1) = 1$

$$A(3) = \frac{1}{2} 3(3 - 1) = 3$$

$$A(4) = \frac{1}{2} 4(4 - 1) = 6$$

- b) Induktionsanfang siehe Teilaufgabe a)

Beweisidee: Beim Übergang vom n - zum $n + 1$ -Eck kommen n Verbindungslinien dazu.

Beweis:

$$\begin{aligned} A(k + 1) &= A(k) && + k \\ &= \frac{1}{2} k(k - 1) && + k \\ &= \frac{1}{2} k^2 - \frac{1}{2} k && + k \\ &= \frac{1}{2} k^2 + \frac{1}{2} k \\ &= \frac{1}{2} (k + 1) k \\ &= \frac{1}{2} (k + 1) ((k + 1) - 1) \end{aligned}$$

Aufgabe 26

Aussagen: Vollständige Induktion: Fibonacci (A2.8b)

Die Fibonacci-Zahlen sind gemäß der folgenden rekursiven Beziehung gegeben:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \text{für } n \geq 2 \quad \text{mit } a_0 = 0 \text{ und } a_1 = 1$$

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$ die explizite Darstellung von a_n :

$$a_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$$

Lösungshinweis:

Induktionsanfang: Probiere explizite Darstellung für $n = 0$:

$$a_0 = \frac{(1 + \sqrt{5})^0 - (1 - \sqrt{5})^0}{2^0 \sqrt{5}} = \frac{1 - 1}{1 \cdot \sqrt{5}} = 0$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + a_{n-1} \\ &= \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}} + \frac{(1 + \sqrt{5})^{n-1} - (1 - \sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1} \sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{2^{n+1} \sqrt{5}} \left[2(1 + \sqrt{5})^n - 2(1 - \sqrt{5})^n + 4(1 + \sqrt{5})^{n-1} - 4(1 - \sqrt{5})^{n-1} \right] \\ &= \frac{1}{2^{n+1} \sqrt{5}} \left[(1 + \sqrt{5})^{n-1} (2 + 2\sqrt{5} + 4) - (1 - \sqrt{5})^{n-1} (2 - 2\sqrt{5} + 4) \right] \\ &= \frac{1}{2^{n+1} \sqrt{5}} \left[(1 + \sqrt{5})^{n-1} (1 + 2\sqrt{5} + 5) - (1 - \sqrt{5})^{n-1} (1 - 2\sqrt{5} + 5) \right] \\ &= \frac{1}{2^{n+1} \sqrt{5}} \left[(1 + \sqrt{5})^{n-1} (1 + \sqrt{5})^2 - (1 - \sqrt{5})^{n-1} (1 - \sqrt{5})^2 \right] \\ &= \frac{(1 + \sqrt{5})^{n+1} - (1 - \sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1} \sqrt{5}} \end{aligned}$$

Mengen und Relationen

Aufgabe 27

Mengen und Relationen: Teilmengen? (M1)

Gegeben sei die Menge $M = \{x \in \mathbb{R}_+ : x < 10\}$. Welche der folgenden Mengen ist Teilmenge von M ?

$$M_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$M_2 = \{x \in \mathbb{R}_+ : x^2 = 1 \wedge x < 10\}$$

$$M_3 = \{x \in \mathbb{R}_+ : x > 5 \vee x < 10\}$$

$$M_4 = \{x \in \mathbb{R}_+ : x^2 = 9 \vee x = 1\}$$

$$M_5 = \{x \in \mathbb{R}_+ : x < 10 \Rightarrow x = 1\}$$

$$M_6 = \{x \in \mathbb{R}_+ : (x < 10 \vee x > 10) \Rightarrow x = 1\}$$

$$M_7 = \{x \in \mathbb{N}_0 : x \geq 10 \Rightarrow x = 1\}$$

[Hinweis: $0 \in \mathbb{R}_+$]

Lösungshinweis:

$$M_2 = \{1\}$$

$$M_3 = \mathbb{R}_+$$

$$M_4 = \{1, 3\}$$

$$M_5 = \{1\} \cup (10; \infty)$$

$$M_6 = \{x \in \mathbb{R}_+ : x \neq 10 \Rightarrow x = 1\} = \{1, 10\}$$

$$M_7 = M_1$$

Teilmengen von M sind M_1, M_2, M_4, M_7 . Keine Teilmengen von M sind M_3, M_5, M_6 .

Aufgabe 28

Eine Unternehmung produziert 8 Produkte a_1, a_2, \dots, a_8 auf drei Maschinen. Dabei werden die Maschinen folgendermaßen in der Produktion eingesetzt:

die erste Maschine zur Produktion von a_1, a_2, a_3, a_4, a_5

die zweite Maschine zur Produktion von a_1, a_3, a_4, a_6, a_7

die dritte Maschine zur Produktion von a_1, a_4, a_6, a_7, a_8

Geben Sie die Menge aller Produkte, die

- auf allen drei Maschinen bearbeitet werden müssen,
- nur auf der ersten Maschine bearbeitet werden,
- auf der zweiten und dritten Maschine bearbeitet werden,
- nicht auf der dritten Maschine bearbeitet werden,
- auf Maschine 1 und 2 oder auf Maschine 3 bearbeitet werden,

durch geeignete Durchschnitts-, Vereinigungs- und Differenzbildung der Mengen A, B, C an. Dabei gilt:

$$A = \{x : x \text{ wird auf der ersten Maschine produziert}\}$$

$$B = \{x : x \text{ wird auf der zweiten Maschine produziert}\}$$

$$C = \{x : x \text{ wird auf der dritten Maschine produziert}\}$$

Lösungshinweis:

$$M = A \cup B \cup C$$

$$\text{a) } \{x : x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C\} = A \cap B \cap C = \{a_1, a_4\}$$

$$\text{b) } \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C\} = (A \setminus B) \setminus C = \{a_2, a_5\}$$

$$\text{c) } \{x : x \in B \wedge x \in C\} = B \cap C = \{a_1, a_4, a_6, a_7\}$$

$$\text{d) } \{x : x \notin C\} = \overline{C}_M = \{a_2, a_3, a_5\}$$

$$\text{e) } \{x : (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C\} = (A \cap B) \cup C = \{a_1, a_3, a_4, a_6, a_7, a_8\}$$

Aufgabe 29

70 Touristen wurden an einem Urlaubsort befragt, welche der Verkehrsmittel Auto (A), Bahn (B), Flugzeug (F) sie zur Anreise benutzt haben. Dabei ergaben sich folgende Aussagen:

- 20 Touristen benutzten (mindestens) das Auto.
- 30 Touristen benutzten (mindestens) die Bahn.
- 40 Touristen benutzten (mindestens) das Flugzeug.
- 16 Touristen benutzten (mindestens) Bahn und Flugzeug.
- 4 Touristen benutzten (mindestens) Bahn und Auto.
- 1 Tourist reiste mit Auto, Bahn und Flugzeug an.
- 12 Touristen reisten nur mit dem Auto.

- a) Wie viele Touristen benutzten genau 2 der 3 Verkehrsmittel?
- b) Wie viele Touristen benutzten keines der genannten Verkehrsmittel?

Lösungshinweis:

A : Menge aller Touristen, die mindestens das Auto benutzen. Analog B : Bahnbenutzer und F Flugzeugbenutzer.

Menge	Anzahl der Elemente
A	20
B	30
F	40
$B \cap F$	16
$B \cap A$	4
$A \cap B \cap F$	1
$A \setminus (B \cup F)$	12

- a) Genau 2 Verkehrsmittel:
 $| (A \cap B) \setminus F | + | (A \cap F) \setminus B | + | (B \cap F) \setminus A | = 3 + 4 + 15 = 22$
- b) Kein Verkehrsmittel: $70 - (22 + 43 + 1) = 4$

Aufgabe 30

Zu den Mengen $A = \{0, a\}$, $B = \{\emptyset, \{\emptyset, b\}\}$ bestimme man die Potenzmengen $P(A)$, $P(P(A))$, $P(B)$.

Annahme: „ \subset “ : echte Teilmenge

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

$$\emptyset \subset A, \emptyset \in A, 0 \subset A, \{0, a\} \subset A,$$

$$\emptyset \subset P(A), 0 \in P(A), A \in P(A), \{a\} \subset P(A), \{0\} \in P(P(A)),$$

$$\emptyset \in B, \emptyset \subset B, \{\emptyset, b\} \subset B, \{\emptyset\} \subset B, \{\{\emptyset, b\}\} \in P(B)$$

Lösungshinweis:

$$P(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{a\}, A\}$$

$$|P(A)| = 2^{|A|} = 4$$

$$P(P(A)) = \{ \emptyset, \{0\}, \{\{0\}\}, \{\{a\}\}, \{A\}, \{\emptyset, \{0\}\}, \{\emptyset, \{a\}\}, \{\emptyset, A\}, \{\{0\}, \{a\}\}, \{\{0\}, A\}, \{\{a\}, A\}, \{\emptyset, \{0\}, \{a\}\}, \{\emptyset, \{0\}, A\}, \{\emptyset, \{a\}, A\}, \{\{0\}, \{a\}, A\}, P(A) \}$$

$$P(B) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset, b\}\}, B\}$$

Aufgabe 30

Zu den Mengen $A = \{0, a\}$, $B = \{\emptyset, \{\emptyset, b\}\}$ bestimme man die Potenzmengen $P(A)$, $P(P(A))$, $P(B)$.

Annahme: " \subset " : echte Teilmenge

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

- $\overset{w}{\emptyset} \subset A$, $\overset{f}{\emptyset} \in A$, $\overset{f}{0} \subset A$, $\overset{f}{\{0, a\}} \subset A$, (falls $C \hat{=} \subseteq$, dann wahr)
- $\overset{w}{\emptyset} \subset P(A)$, $\overset{f}{0} \in P(A)$, $\overset{w}{A} \in P(A)$, $\overset{f}{\{a\}} \subset P(A)$, $\overset{f}{\{0\}} \in P(P(A))$,
- $\overset{w}{\emptyset} \in B$, $\overset{w}{\emptyset} \subset B$, $\overset{f}{\{\emptyset, b\}} \subset B$, $\overset{w}{\{\emptyset\}} \subset B$, $\overset{w}{\{\{\emptyset, b\}\}} \in P(B)$

$$P(A) = \{ \overset{A}{\{0, a\}}, \{0\}, \{a\}, \{\} \}$$

$$P(P(A)) = \{ \{ \{0, a\}, \{0\}, \{a\}, \{\} \}, \{ \{0\}, \{a\}, \{\} \}, \{ \{0, a\}, \{a\}, \{\} \}, \{ \{0, a\}, \{0\}, \{\} \}, \{ \{0, a\}, \{0\}, \{a\}, \{\} \}, \{ \{a\}, \{\} \}, \{ \{0\}, \{\} \}, \{ \{0\}, \{a\}, \{\} \}, \{ \{0, a\}, \{\} \}, \{ \{0, a\}, \{a\}, \{\} \}, \{ \{0, a\}, \{0\}, \{\} \}, \{ \{0, a\} \} \}$$

$$\{ \{0\}, \{\}, \{ \{a\} \}, \{ \{\} \}, \{ \{\} \} \}$$

$$B = \{\emptyset, \{\emptyset, b\}\}$$

$$P(B) = \{ \{ \{\}, \{ \{\}, b \} \}, \{ \{ \{\}, b \} \}, \{ \{\} \}, \{ \} \}$$

Aufgabe 31

Gegeben seien die Mengen $A = \{1,2\}$ und $B = A \cup \{0\}$ sowie die Relationen von A in B

$$R_1 = \{(a,b) \in A \times B : a \geq b\}$$

$$R_2 = \{(a,b) \in A \times B : a + b \in A\}$$

$$R_3 = \{(a,b) \in A \times B : a \cdot b \geq b^2\}$$

Charakterisieren Sie die Relationen durch Aufzählen ihrer Elemente.

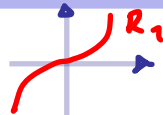
Lösungshinweis:

$$A = \{1, 2\}, B = \{0, 1, 2\}$$

- ▶ $R_1 = \{(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$
- ▶ $R_2 = \{(1, 0), (1, 1), (2, 0)\}$
- ▶ $R_3 = \{(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 2), (2, 1)\}$

Aufgabe 32

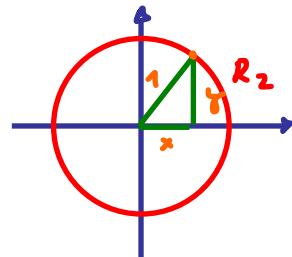
Gegeben seien die Relationen



$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^3\},$$

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},$$

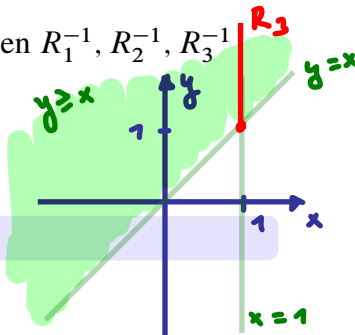
$$R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x = 1\}.$$



a) Man stelle die Relationen R_1, R_2, R_3 sowie die inversen Relationen $R_1^{-1}, R_2^{-1}, R_3^{-1}$ graphisch dar.

b) Welche der Relationen R_1, R_2, R_3 stellt eine Abbildung dar?

nur R_1 ist Abbildung



Lösungshinweis:

a)

b) nur R_1 ist Abbildung: Zuordnung $y = x^3$ ist sogar bijektiv ($x = \sqrt[3]{y}$)

R_2 keine Abbildung, denn z.B. $(0, 1)$ und $(0, -1) \in R_2$

R_3 keine Abbildung, denn z.B. $(1, 1)$ und $(1, 2) \in R_3$

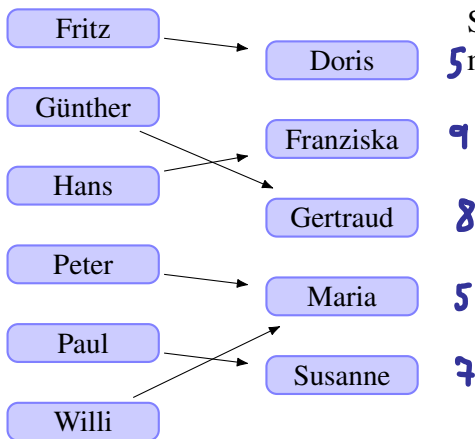
Aufgabe 33

Gegeben seien die Mengen

$$A = \{\text{Fritz, Günther, Hans, Peter, Paul, Willi}\}$$

$$B = \{\text{Doris, Franziska, Gertraud, Maria, Susanne}\}$$

von Vornamen, sowie die Abbildung $f : A \rightarrow B$ mit:



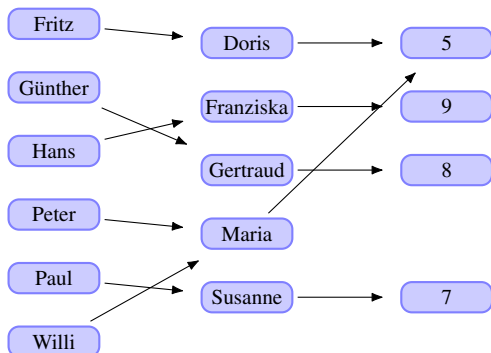
Sei ferner $g : B \rightarrow \mathbb{N}$ eine Abbildung, die jedem Namen aus B die Anzahl seiner Buchstaben zuordnet.

5
9
8
5
7

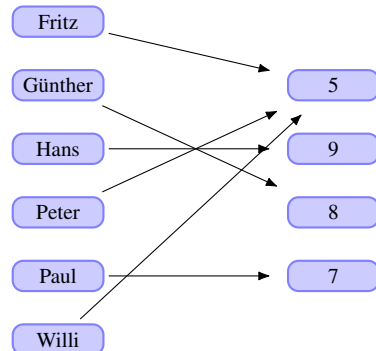
- a) Sind die Abbildungen f, g surjektiv, injektiv, bijektiv?
- b) Konstruieren Sie - falls möglich - die Abbildungen $f \circ g$ und $g \circ f$.
- c) Man gebe die Bildbereiche von $\{\text{Peter, Paul, Willi}\}$ bzgl. $f, g \circ f$ und die Urbildbereiche von $\{2, 3, 4\}$ bzgl. $g, g \circ f$ an.
- d) Begründen Sie, warum f^{-1} nicht existiert.

Lösungshinweis:

- a) f ist surjektiv, jedes $b \in B$ hat Urbild
 g ist nicht surjektiv, 3 hat z.B. kein Urbild
 f und g sind nicht injektiv, denn
 $f(\text{Peter}) = f(\text{Willi}) = \text{Maria}$
 bzw. $g(\text{Doris}) = g(\text{Maria}) = 5$
 \Rightarrow Weder f noch g sind bijektiv



- b) $f \circ g$ existiert nicht, denn f müsste $\mathbb{N} \rightarrow B$ abbilden
 $g \circ f$:



- c) $f(\{\text{Peter, Paul, Willi}\}) = \{\text{Maria, Susanne}\}$
 $g \circ f(\{\text{Peter, Paul, Willi}\}) = \{5, 7\}$
 Urbild von $\{2, 3, 4\}$
 - bzgl. g : $\{\}$ (leere Menge)
 - bzgl. $g \circ f$: $\{\}$
- d) f ist nicht bijektiv

f_1 nicht injektiv: $y=0.2$ führt zu zwei versch. $x_{1/2}$ mit $f(x_1) = f(x_2) = 0.2$

Aufgabe 34

Mengen und Relationen: Injektivität und Surjektivität (M9)

Gegeben seien die Abbildungen:

$$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f_1(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f_2(x) = x^3 - 1$$

Verm. für nicht surj.
Gegenbsp. $y=1 = \frac{x}{x^2+1}$
($\Rightarrow x^2 - x + 1 = 0$)
Diskr.: $1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0$
 \Rightarrow kein x Wert zu $y=1$
 \Rightarrow nicht surj.

- Untersuchen Sie die Abbildungen f_1, f_2 auf Surjektivität, Injektivität und Bijektivität.
- Ermitteln Sie gegebenenfalls $f_1 \circ f_2, f_2 \circ f_1, f_1^{-1}, f_2^{-1}$ sowie $f_2 \circ f_2$ und $(f_2 \circ f_2)^{-1}$.
- Skizzieren Sie den Verlauf der Graphen von f_1, f_2 mit Bleistift und Papier sowie mit R.

Lösungshinweis:

a)

- $f_1: x \rightarrow \frac{x}{x^2+1}$
Gegeben: $y \in \mathbb{R}$ beliebig
Gesucht: $x \in \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = y$

$$\text{Dazu: } y(x^2+1) = x \Leftrightarrow yx^2 - x + y = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{2y} \Rightarrow$$

$$\text{Für } 1 - 4y^2 < 0 \Leftrightarrow y \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup$$

$$(\frac{1}{2}; +\infty) \text{ gibt es so ein } x \text{ nicht}$$

$\Rightarrow f_1$ ist nicht surjektiv

- Suche x mit $f_1(x) = 1/8$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} = 1/8$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-4}}{2} = 4 \pm \sqrt{15}$$

$\Rightarrow f_1$ ist nicht injektiv

$\Rightarrow f_1$ ist nicht bijektiv

- $f_2: x \rightarrow x^3 - 1$

$$y = x^3 - 1 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y+1}$$

$\Rightarrow f_2$ ist surjektiv

$$\text{Annahme: } x_1 \neq x_2 \text{ mit } f_2(x_1) = f_2(x_2)$$

$$\Rightarrow x_1^3 - 1 = x_2^3 - 1$$

$$\Rightarrow x_1^3 = x_2^3$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

$\Rightarrow f_2$ ist injektiv

$\Rightarrow f_2$ ist bijektiv

b)

$$f_1 \circ f_2(x) = \frac{x^3-1}{(x^3-1)^2+1}$$

$$f_2 \circ f_1(x) = \left[\frac{x}{x^2+1} \right]^3 - 1$$

f_1^{-1} existiert nicht

$$f_2^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

$$f_2 \circ f_2(x) = (x^3 - 1)^3 - 1$$

$$(f_2 \circ f_2)^{-1}(x) = \sqrt[3]{\sqrt[3]{x+1} + 1}$$

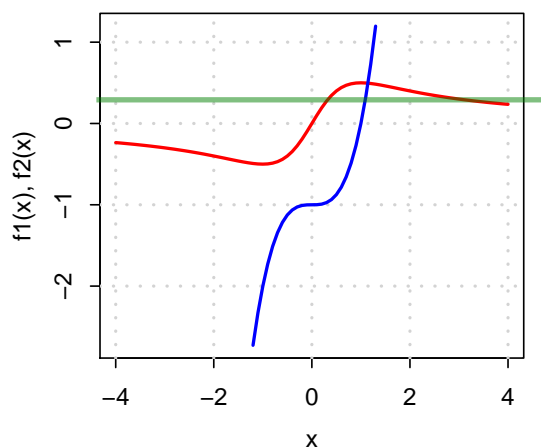
c)

Skizze mit R

```
x = seq(from=-4, to=4, by=0.1)
f1 = function(x) { x/(x^2 + 1) }
f2 = function(x) { x^3 - 1 }
```

```
curve(f1, from = -3, to = 3)
```

```
curve(f2, from = -2, to = 2)
```



Folgen

Aufgabe 35

Folgen und Reihen: Rekursiv definierte Folge (A6.1)

Geben Sie die rekursiv definierten Folgen (a_n) und (b_n) mit

$$a_{n+1} = \frac{2}{n+1}a_n \quad \text{mit} \quad (a_0 = \frac{1}{2})$$

$$b_{n+1} = \sqrt{b_n} \quad \text{mit} \quad (b_1 = 2)$$

in expliziter Form an.

Definieren Sie auch eine R-Funktion für jede der beiden Folgen und generieren Sie jeweils eine Wertetabelle. R

[*Hinweis:* Die R-Funktion für die Fakultät $n!$ heißt `factorial(n)`]

Lösungshinweis:

$$a_n = \frac{2^{n-1}}{n!}, \quad b_n = 2^{2^{1-n}}$$

```
a.n = function(n) {2^(n-1)/(factorial(n))}
b.n = function(n) {2^(2^(1-n))}
n=0:15
data.frame(n, a=a.n(n), b=b.n(n))

##      n      a      b
## 1  0 0,500000000000 4,0000
## 2  1 1,000000000000 2,0000
## 3  2 1,000000000000 1,4142
## 4  3 0,666666666667 1,1892
## 5  4 0,333333333333 1,0905
## 6  5 0,133333333333 1,0443
## 7  6 0,044444444444 1,0219
## 8  7 0,012698412698 1,0109
## 9  8 0,003174603175 1,0054
## 10 9 0,000705467372 1,0027
## 11 10 0,000141093474 1,0014
## 12 11 0,000025653359 1,0007
## 13 12 0,000004275560 1,0003
## 14 13 0,000000657778 1,0002
## 15 14 0,000000093968 1,0001
## 16 15 0,000000012529 1,0000
```

Aufgabe 36

Berechnen Sie für die Folgen $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und

$$a_n = \frac{(-1)^n \binom{n}{3} + (n+3)^2}{1+n^2+4n^3}, \quad b_n = \frac{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^3}}{\sqrt{n} \left(\frac{3}{n^2} - \frac{4}{n^4} \right)},$$

$$c_n = (-1)^n \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n}{n+1}} \left(\frac{n}{n^2+1} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad d_n = \frac{\sqrt{n} - n}{\sqrt{n} + n + 1}, \quad e_n = \frac{3n\sqrt{n} - \frac{1}{n}}{n(2 + \sqrt{n})}$$

die Grenzwerte. $(-1)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot 0^{\frac{1}{2}} = 0$

Definieren Sie auch eine R-Funktion für jede der Folgen, generieren Sie jeweils eine Wertetafel und zeichnen Sie die Graphen der Folgen mit R an.

[Hinweis: Die R-Funktion für den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ heißt `choose(n, k)`]

Lösungshinweis:

a_n : Kein Grenzwert; Häufungspunkte: $\pm \frac{1}{24}$

b_n : Kein Grenzwert; $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \rightarrow \infty \notin \mathbb{R}$

c_n : $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$

d_n : $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = -1$

e_n : $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 3$

Skizze mit R

```
n = c(1:10, 30, 40, 50, 100, 1000, 100000)
an = function(n) { ( (-1)^n * choose(n, 3) + (n+3)^2 ) / ( 1 + n^2 + 4*n^3 ) }
bn = function(n) { ( 2/n - 1/n^3 ) / ( sqrt(n)*(3/n^2 - 4/n^4) ) }
cn = function(n) { (-1)^n * 0.5^(n/(n+1)) * (n/(n^2+1))^(1/2) }
dn = function(n) { (sqrt(n) - n) / (sqrt(n) + n + 1) }
en = function(n) { (3*n*sqrt(n) - 1/n) / (n*(2+sqrt(n))) }

data.frame(n, an(n), bn(n), cn(n), dn(n), en(n))
```

##	n	a	b	c	d	e
##	1	2,6667	-1,0000	-0,5000	0,0000	0,6667
##	2	0,6757	1,2374	0,3984	-0,1327	1,1694
##	3	0,2966	1,2802	-0,3257	-0,2212	1,3625
##	4	0,1941	1,4091	0,2786	-0,2857	1,4844
##	5	0,1027	1,5432	-0,2461	-0,3356	1,5741
##	6	0,1121	1,6722	0,2223	-0,3757	1,6453
##	7	0,0457	1,7947	-0,2040	-0,4090	1,7041
##	8	0,0838	1,9107	0,1895	-0,4372	1,7541
##	9	0,0200	2,0209	-0,1775	-0,4615	1,7975
##	10	0,0705	2,1260	0,1676	-0,4828	1,8358
##	30	0,0473	3,6549	0,0933	-0,6723	2,1974
##	40	0,0455	4,2186	0,0804	-0,7116	2,2792
##	50	0,0446	4,7156	0,0717	-0,7392	2,3385
##	100	0,0430	6,6672	0,0503	-0,8108	2,5000
##	1000	0,0418	21,0819	0,0158	-0,9378	2,8215
##	100000	0,0417	666,6667	0,0005	-0,9980	2,9940

$$a_n = \frac{(-1)^n \binom{n}{3} + (n+3)^2}{1+n^2+4n^3}$$

$$= \frac{(-1)^n \cdot \frac{1}{6} (n^3 - 3n^2 + 2n) + n^2 + 6n + 9}{1+n^2+4n^3}$$

$$= \frac{(-1)^n \cdot \frac{1}{6} (1 - 3 \cdot \frac{1}{n} + 2 \cdot \frac{1}{n^2}) + \frac{1}{n^3} + 6 \cdot \frac{1}{n^2} + 9 \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n} + 4} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \cdot \frac{1}{6} (1 - 0 + 0) + 0 + 0 + 0}{0 + 0 + 4}$$

erweitere alles mit $\frac{1}{n^3}$

$$= (-1)^n \cdot \frac{1}{6} = (-1)^n \cdot \frac{1}{24}$$

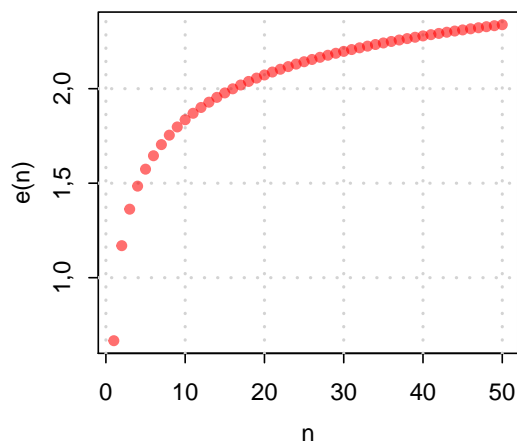
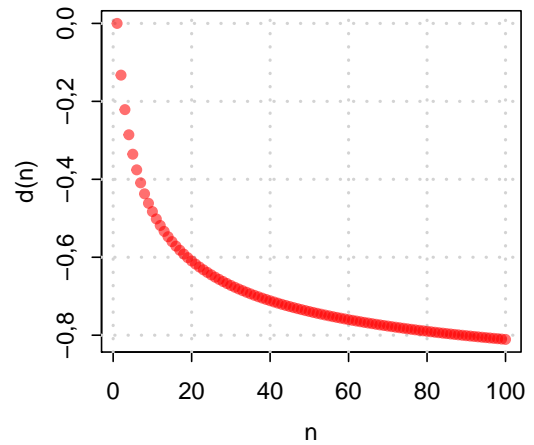
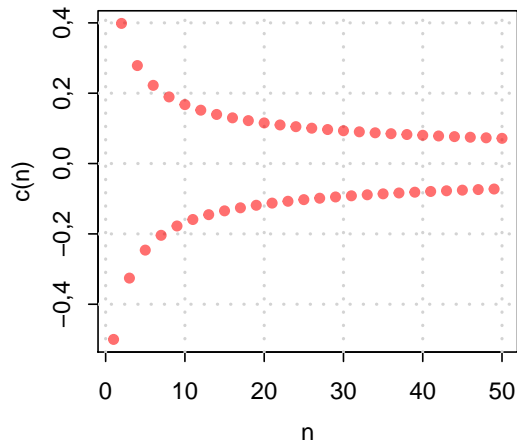
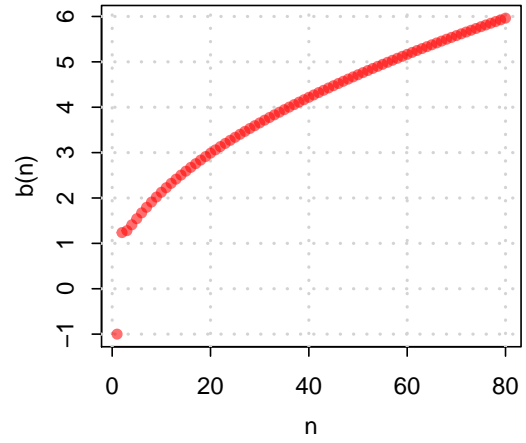
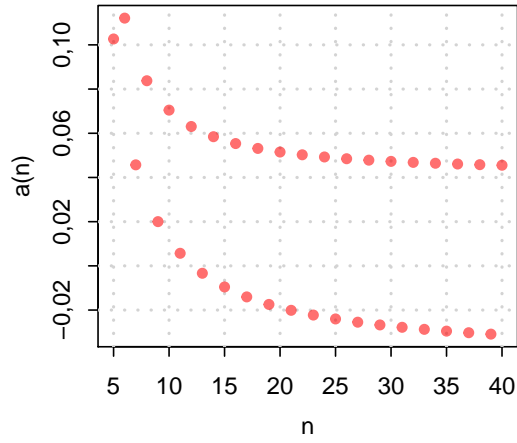
=> kein Grenzwert
(zwei Häufungspunkte)

$$\binom{n}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!}$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cancel{(n-3)} \cdot \cancel{(n-4)} \cdot \dots}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{(n-3)} \cdot \cancel{(n-4)} \cdot \dots}$$

$$= \frac{1}{6} (n^3 - n^2 - 2n^2 + 2n)$$

```
plot(n, an(n))
plot(n, bn(n))
plot(n, cn(n))
plot(n, dn(n))
plot(n, en(n))
```



a) Überprüfen Sie die Reihen $(r_n), (s_n), (t_n), (u_n)$ mit

$$r_n = \sum_{i=1}^n \frac{2i}{5i + 21}, \quad s_n = \sum_{i=1}^n \frac{3^{i+1}}{5^{i-1}}, \quad t_n = \sum_{i=1}^n \frac{3^{2i}}{5^i}, \quad u_n = \sum_{i=1}^n \frac{2(i!)}{(2i)!}$$

auf ihre Konvergenz.

b) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n)$.

Lösungshinweis:

a) ▶ $r_n = \sum_{i=1}^n \frac{2i}{5i + 21} = \sum_{i=1}^n a_i.$

Da a_i keine Nullfolge $\Rightarrow r_n$ konvergiert nicht.

▶ $s_n = 9 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{3}{5}\right)^i.$

Das ist eine geometrische Reihe mit $q < 1 \Rightarrow s_n$ konvergiert.

▶ $t_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{9}{5}\right)^i.$

Das ist eine geometrische Reihe mit $q > 1 \Rightarrow t_n$ divergiert.

▶ $u_n = \sum_{i=1}^n a_i \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 0 \Rightarrow u_n$ konvergiert.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 9 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}{1 - \frac{3}{5}} = 22,5$

Aufgabe 37

$$u_n = \sum_{i=1}^n \frac{2(i!)}{(2i)!} \rightarrow a_i$$

$$\frac{2(101!)}{202!} = \frac{2 \cdot 101! \cdot 200!}{2 \cdot 100! \cdot 202!}$$

$$\frac{2 \cdot (100!)}{200!} = \frac{101}{201 \cdot 202}$$

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{2((k+1)!)}{(2 \cdot (k+1))!} = \frac{2 \cdot (k+1)! \cdot (2k)!}{2 \cdot k! \cdot (2k+2)!}$$

$$= \frac{k+1}{(2k+2)(2k+1)} = \frac{k+1}{4k^2+6k+2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 < 1$$

Nennergrad größer Zählergrad

$\Rightarrow u_n$ ist konvergent

Aufgabe 38

Folgen und Reihen: Arithmetisch und Geometrisch (A6.4)

Eine Schätzung der gesamten Öl- und Gasreserven im norwegischen Festlandssockel zu Beginn des Jahres 2003 betrug 13 Milliarden Tonnen. Die Förderung im selben Jahr lag bei 250 Millionen Tonnen.

- a) Wann sind die Reserven erschöpft, wenn die Förderung auf demselben Niveau wie im Jahr 2003 fortgesetzt wird?
- b) Nehmen Sie an, dass die Förderung jedes Jahr um 2% im Vergleich zum vorangegangenen Jahr reduziert wird, beginnend im Jahr 2004.
Wie lange werden die Reserven in diesem Fall reichen?
- c) Wie ändert sich die Situation, wenn die jährliche Förderung um jeweils 10 Millionen Tonnen gegenüber dem Vorjahr steigt, beginnend im Jahr 2004.
Wie lange werden die Reserven in diesem Fall reichen?

n	Jahr	Fördermenge im Jahr	Fördermenge gesamt
0	2003	250	250
1	2004	250+10	250 + (250+10)
2	2005	250+2·10	250 + (250+10) + (250+2·10)
⋮	⋮	⋮	
10	2013	250+10·10	250 + (250+1·10) + ... + (250+10·10)
			= (10+1)·250 + 10·(1+...+10)
			= (10+1)·[250 + 10· $\frac{10}{2}$]
⋮			
n	2003+n	250 + n·10	(n+1)·[250 + 10· $\frac{n}{2}$]

oder (schneller) mit Formel der arithmetischen Reihe mit $s = 250, d = 10$

$$S_n = \sum_{i=0}^n s + d \cdot i = (n+1) \cdot \left[s + d \cdot \frac{n}{2} \right]$$

arithmetische Reihe

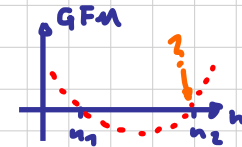
Wann ist Gesamtförderung größer 13 Mrd ?

$$(n+1) \cdot \left[250 + 10 \cdot \frac{n}{2} \right] > 13000$$

geteilt durch s

$$\Leftrightarrow (n+1)[50 + n] > 2600$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 51n - 2550 > 0$$



$$n_{1/2} = \frac{1}{2} (-51 \pm \sqrt{51^2 + 4 \cdot 2550}) = \left\{ \begin{array}{l} 31.07 \\ (- \dots) \end{array} \right.$$

Die Reserven reichen gerade noch für das Jahr 2003 + 31 = 2034, zu Beginn des Jahres 2035 sind die Reserven erschöpft

Aufgabe 38

Eine Schätzung der gesamten Öl- und Gasreserven im norwegischen Festlandsockel zu Beginn des Jahres 2003 betrug 13 Milliarden Tonnen. Die Förderung im selben Jahr lag bei 250 Millionen Tonnen.

- Wann sind die Reserven erschöpft, wenn die Förderung auf demselben Niveau wie im Jahr 2003 fortgesetzt wird?
- Nehmen Sie an, dass die Förderung jedes Jahr um 2% im Vergleich zum vorangegangenen Jahr reduziert wird, beginnend im Jahr 2004.

Wie lange werden die Reserven in diesem Fall reichen?

- Wie ändert sich die Situation, wenn die jährliche Förderung um jeweils 10 Millionen Tonnen gegenüber dem Vorjahr steigt, beginnend im Jahr 2004.

Wie lange werden die Reserven in diesem Fall reichen?

Lösungshinweis:

- Reserven in Abhängigkeit der Zeit

$$t : [2003; \infty)$$

$$13 \cdot 10^9 - 250 \cdot 10^6(t - 2002) = 0$$

$$\Rightarrow t = 2054$$

- Gesamt geförderte Menge bis zum n -ten Jahr nach 2003:

$$\sum_{i=0}^n 250 \cdot 10^6 \cdot 0,98^i$$

Damit gilt für den Zeitpunkt n , bis zu dem die Reserven maximal genügen:

$$\sum_{i=0}^n 250 \cdot 10^6 \cdot 0,98^i \leq 13 \cdot 10^9$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^n 0,98^i \leq 52$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - 0,98^{n+1}}{1 - 0,98} \leq 52$$

$$\Leftrightarrow 1 - 0,98^{n+1} \leq 1,04$$

Und das gilt für alle n . Die Reserven würden in diesem Fall unendlich lang reichen.

Alternative Lösung: Grenzwert der insgesamt geförderten Menge:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n 250 \cdot 10^6 \cdot 0,98^i &= \lim_{n \rightarrow \infty} 250 \cdot 10^6 \frac{1 - 0,98^{n+1}}{1 - 0,98} \\ &= 250 \cdot 10^6 \frac{1 - 0}{1 - 0,98} \\ &= 12,5 \cdot 10^9 < 13 \cdot 10^9\end{aligned}$$

c) Reserven 2003

$$1300 - (25n + 25 + \frac{1}{2}(n^2 + n)) = 0$$

$$\Leftrightarrow n \approx 31,03$$

\Rightarrow Nach dem Jahr 2034 sind die Vorräte erschöpft

Aufgabe 39

Für welche $k \in \mathbb{N}$ konvergieren die Folgen (a_n) , (b_n) , (c_n) mit

$$a_n = \frac{3(n^{10}-1)}{2(n+1)^k}, \quad b_n = a_n^{-1}, \quad c_n = a_n^2 ?$$

Geben Sie gegebenenfalls die entsprechenden Grenzwerte an.

Lösungshinweis:

- a) $k=10$: $\frac{3}{2}$
 $k > 10$: (Höchste Zählerpotenz ist kleiner als höchste Nennerpotenz \Rightarrow Grenzwert=0)
 $k < 10$: ∞ (Höchste Zählerpotenz ist größer als höchste Nennerpotenz \Rightarrow Folge ist divergent)
- b) $k=10$: $\frac{2}{3}$
 $k < 10$: Grenzwert=0
 $k > 10$: Folge ist divergent
- c) $k=10$: $\frac{9}{4}$
 $k < 10$: Folge ist divergent
 $k > 10$: Grenzwert=0

Aufgabe 40

Zeigen Sie, dass die Reihe (s_n) mit

$$s_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}$$

konvergiert.

[Hinweis: Benutzen Sie das Ergebnis von Aufgabe 14, um die Summanden von s_n abzuschätzen]

Lösungshinweis:

Gegebene Reihe:
$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} = \frac{1}{1 \cdot 1} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot n}$$

Reihe aus Aufgabe 14:
$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \cdot (k-1)} = \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n-1)} = 1 - \frac{1}{n}$$

Damit ergibt sich:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \cdot (k-1)} = 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} &\leq 1 + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n-1)} \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 41

Überprüfen Sie mit Hilfe des Quotientenkriteriums, für welche $a \in \mathbb{R}$ die Reihen $(r_n), (s_n)$ mit

$$r_n = \sum_{i=0}^n a^{-i}, \quad s_n = \sum_{i=0}^n \frac{(a-1)^i}{a(i+1)}$$

konvergieren.

Lösungshinweis:

- a) $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$
- b) $a \in (0; 2)$

Reelle Funktionen

Aufgabe 42

Reelle Funktionen: Kurvendiskussion ohne Ableitung (A7.1)

Gegeben sind die Funktionen f_1, f_2 von einer reellen Variablen mit

$$f_1(x) = \frac{4x + 1}{2x - 1}, \quad f_2(x) = \frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x - 1}$$

Beantworten Sie die folgenden Teilaufgaben *ohne* Differentialrechnung:

- Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die Funktionen f_1, f_2 definiert?
- Zerlegen Sie f_1 additiv in ein Polynom und eine echt-gebrochen-rationale Funktion und zeigen Sie damit, dass f_1 für $x > \frac{1}{2}$ streng monoton fällt.
- Zeigen Sie, dass f_2 für alle $x \geq 2$ streng monoton wächst.
- Zeigen Sie, dass weder f_1 noch f_2 eine globale Extremalstelle besitzt.

Lösungshinweis:

a) $D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}, D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) Polynomdivision mit Rest:
$$\begin{array}{r} 4x + 1 \\ -4x + 2 \\ \hline 3 \end{array} \div (2x - 1) = 2 + \frac{3}{2x - 1}$$

Damit: $\frac{1}{2} < x_1 < x_2 \Rightarrow 0 < 2x_1 - 1 < 2x_2 - 1 \Rightarrow \frac{1}{2x_1 - 1} > \frac{1}{2x_2 - 1}$

$$\Rightarrow 2 + \frac{3}{2x_1 - 1} > 2 + \frac{3}{2x_2 - 1} \Rightarrow f_1(x_1) > f_1(x_2)$$

Also: f_1 str. monoton fallend für $x > \frac{1}{2}$.

c)
$$\begin{array}{r} x^4 - 3x^3 + 2x^2 \\ -x^4 + x^3 \\ \hline -2x^3 + 2x^2 \\ 2x^3 - 2x^2 \\ \hline 0 \end{array} \div (x - 1) = x^3 - 2x^2$$

d) $2 < x_1 < x_2 \Rightarrow (x_1^2 < x_2^2 \text{ und } (x_1 - 2) < (x_2 - 2))$

$$\Rightarrow x_1^2(x_1 - 2) < x_2^2(x_2 - 2) \Rightarrow f_2(x_1) < f_2(x_2)$$

Also: f_2 str. mon. steigend für $x > 2$.

e) $\lim_{x \nearrow \frac{1}{2}} f_1(x) = -\infty,$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_2(x) = \infty,$$

also keine globale Nullstellen

Aufgabe 43

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \sqrt{(x+1)(1-\sqrt{x})}.$$

- Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist f definiert?
- Zeigen Sie ohne Differentialrechnung, dass f für $x = 1$ minimal und für $x = 0$ maximal wird.

Lösungshinweis:

Aufgabe 44

Reelle Funktionen: Parameter bestimmen (A7.4)

Bei der Produktion eines Gutes wirken sich die mit steigenden Stückzahlen gewonnenen Produktionserfahrungen kostensenkend aus. Die für eine Mengeneinheit (ME) des Produkts anfallenden Stückkosten k (in €/ME) hängen von der Gesamtproduktionsmenge x folgendermaßen ab:

$$k(x) = a \cdot x^b \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}, x \geq 1$$

Es wird nun folgendes beobachtet:

1. Die erste produzierte Einheit verursacht Kosten in Höhe von 160 €.
 2. Verdoppelt man die Produktionsmenge ausgehend von einer beliebigen Stückzahl, so sinken die Stückkosten um 20% gegenüber dem Wert vor der Stückzahlverdoppelung.
- a) Bestimmen Sie die Parameter a und b der Funktion k .
- b) Wie hoch muß die Gesamtproduktionsmenge sein, damit die gesamten Produktionskosten 80.000 € betragen?

Lösungshinweis:

- a) Aus 1. folgt:

$$k(1) = 160 = a \cdot 1^b = a \quad \Rightarrow \quad a = 160$$

aus 2. folgt:

$$k(2) = 0,8 \cdot k(1) = 0,8 \cdot 160 = 160 \cdot 2^b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\ln 0,8}{\ln 2} \approx -0,321$$

- b) $8000 = K(x) = k(x) \cdot x = 160 \cdot x^{b+1}$

$$\Rightarrow 500 = x^{1 + \frac{\ln 0,8}{\ln 2}} = x^{\frac{\ln(2 \cdot 0,8)}{\ln 2}} \quad \Rightarrow \quad x = 500^{\frac{\ln 0,8}{\ln 1,6}} \approx 9557,8$$

Aufgabe 45

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x+3} & \text{für } x < -3 \\ 3 & \text{für } x = -3 \\ (x+2)^2 - 2 & \text{für } -3 < x \leq 0 \\ \ln(e^{x+2}) & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

auf Stetigkeit.

Aufgabe 46

Für welche Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot e \cdot |x| & \text{für } x \geq -1 \\ \frac{|x|}{b \cdot e^x} & \text{für } x < -1 \end{cases}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig?

Lösungshinweis:

f stetig bei $x = -1$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \nearrow -1} f(x) = \lim_{x \searrow -1} f(x) = f(-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{|-1|}{b \cdot e^{-1}} = a \cdot e \cdot |-1|$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b} = a \text{ oder } ab = 1.$$

Differentialrechnung

Aufgabe 47

Differentialrechnung: Elementare Ableitungsregeln (DIFF0.1)

Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionsterme für die Funktionen

$$f_i : D \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad D \subseteq \mathbb{R} :$$

- a) $f_1(x) = 4x^3 + 6x^2$
- b) $f_2(x) = 10e^x + 4x^{2.5}$
- c) $f_3(x) = (x + 2)x$
- d) $f_4(x) = (x^2 + x^3) \cdot e^x$
- e) $f_5(x) = x^2 e^x \ln x$

Lösungshinweis:

- a) $f_1'(x) = 12x^2 + 12x$
- b) $f_2'(x) = 10e^x + 10x^{1.5}$
- c) $f_3'(x) = 2x + 2$
- d) $f_4'(x) = e^x \cdot x(2 + 4x + x^2)$
- e) $f_5'(x) = e^x \cdot x((2 + x) \ln x + 1)$

Aufgabe 48

Differentialrechnung: Quotientenregel (DIFF0.2)

Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionsterme für Funktionen

$$g_i : D \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad D \subseteq \mathbb{R} :$$

$$\text{a) } g_1(x) = \frac{4x^2}{\ln x}$$

$$\text{d) } g_4(x) = \frac{10e^x + 4x^{2.5}}{\sqrt{x}}$$

$$\text{b) } g_2(x) = \frac{10e^x}{\sqrt{x}}$$

$$\text{e) } g_5(x) = \frac{x+2}{x^{-1}}$$

$$\text{c) } g_3(x) = \frac{4x^3 + 6x^2}{\ln x}$$

$$\text{f) } g_6(x) = \frac{x^2 + x^3}{e^{-x}}$$

Lösungshinweis:

$$\text{a) } g_1'(x) = \frac{4x(2 \ln x - 1)}{\ln^2 x}$$

$$\text{b) } g_2'(x) = 10e^x (x^{-0.5} - 0.5x^{-1.5})$$

$$\text{c) } g_3'(x) = \frac{(12x^2 + 12x) \ln x - 4x^2 - 6x}{\ln^2 x}$$

$$\text{d) } g_4'(x) = [10e^x \cdot x^{-0.5} + 4x^2]' = \underbrace{10e^x (x^{-0.5} - 0.5x^{-1.5})}_{\text{siehe b)}} + 8x$$

$$\text{e) } g_5'(x) = [x^2 + 2x]' = 2x + 2$$

$$\text{f) } g_6'(x) = e^x \cdot x (2 + 4x + x^2) \text{ siehe 47, d)}$$

Aufgabe 49

Berechnen Sie die Ableitung folgender Funktionsterme für Funktionen

$$h_i : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } D \in \mathbb{R} :$$

a) $h_1(x) = (4x + 1)^5$

b) $h_2(x) = (3x^{-1} + 2)^{-2}$

c) $h_3(x) = e^{2x^2+3x^{-2}}$

d) $h_4(x) = \ln(\sqrt[3]{x})$

e) $h_5(x) = \sqrt[4]{4x^2 - 1}$

f) $h_6(x) = \sqrt[4]{\frac{16x^{101}}{\sqrt{x^2}}}$

Lösungshinweis:

a) $h'_1(x) = 5 \cdot (4x + 1)^4 \cdot 4 = 20(4x + 1)^4$

b) $h'_2(x) = -2 \cdot (3x^{-1} + 2)^{-3} \cdot 3 \cdot (-1) \cdot x^{-2} = \frac{6}{x^2} (3x^{-1} + 2)^{-3}$

c) $h'_3(x) = e^{2x^2+3x^{-2}} \cdot (4x - 6x^{-3})$

d) $h'_4(x) = \frac{1}{3} (\ln x)' = \frac{1}{3x}$

e) $h'_5(x) = \frac{1}{4} \cdot (4x^2 - 1)^{-\frac{3}{4}} \cdot 8x = 2x \cdot (4x^2 - 1)^{-\frac{3}{4}}$

f) Definitionsbereich $D_{h_6} = (0; \infty)$

Damit: $h'_6(x) = \left(\sqrt[4]{\frac{16x^{101}}{\sqrt{x^2}}} \right)' = 2 (x^{25})' = 2 \cdot 25x^{24} = 50x^{24}$

Aufgabe 50

Differentialrechnung: noch mehr Ableitungen (DIFF2.1)

Bestimmen Sie die 1. Ableitungen folgender Funktionen

- a) $f_a(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$
b) $f_b(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$
c) $f_c(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
d) $f_d(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$
e) $f_e(x) = x^x$
f) $f_f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

(Hinweis zu Teilaufgabe e) und f): Logarithmieren und differenzieren Sie beide Seiten der Funktionsgleichung.)

Lösungshinweis:

- a) $f'_a(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$
alternativ (ohne Quotientenregel):
 $f'_a(x) = [(1 + x^{-2})^{-1}]' = -(1 + x^{-2})^{-2} \cdot (-2x^{-3}) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$
- b) $f'_b(x) = [(x - 1)(x - 2)(x - 3)]' = [x^3 - 6x^2 + 11x - 6]' = 3x^2 - 12x + 11$
- c) $f'_c(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
- d) $f'_d(x) = -1 \cdot (1 + e^{-x})^{-2} \cdot e^{-x} \cdot (-1) =$
- e) $[\ln(f_e(x))] = [\ln(x^x)]'$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{f_e(x)} \cdot f'_e(x) = [x \cdot \ln(x)]'$
 $\Leftrightarrow \frac{f'_e(x)}{f_e(x)} = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}$
 $\Leftrightarrow f'_e(x) = x^x \cdot (\ln(x) + 1)$
- f) $\frac{1}{f_f(x)} \cdot f'_f(x) = \left[x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right]'$
 $\Leftrightarrow \frac{f'_f(x)}{f_f(x)} = 1 \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot (-x^{-2})$
 $\Leftrightarrow f'_f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x + 1}\right)$

Aufgabe 51

Differentialrechnung: Preiselastizität 1 (DIFF0.4)

Gegeben ist die Preis-Absatz-Funktion

$$p : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{mit} \quad p(x) = 20 - 2x .$$

Dabei steht $x \in \mathbb{R}_+$ für die nachgefragte Menge und $p \in \mathbb{R}_+$ für den Preis. Bestimmen Sie die Preiselastizität der Nachfrage an der Stelle $p_1 = 5$.

Lösungshinweis:

Aufgabe 52

Bestimmen Sie für die folgenden Preis-Absatz-Funktionen $p_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ jeweils die Elastizität des Preises in Abhängigkeit von der Nachfrage:

a) $p_1(x) = \frac{1}{x}$

b) $p_2(x) = e^{-x}$

c) $p_3(x) = -\ln\left(\frac{x}{100}\right)$

d) $p_4(x) = \frac{2}{x^2}$

e) $p_5(x) = \frac{1}{x^n}$ mit $n \in \mathbb{N}$

Lösungshinweis:

Aufgabe 52

Differentialrechnung: Preiselastizität 2 (DIFF0.5)

Bestimmen Sie für die folgenden Preis-Absatz-Funktionen $p_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ jeweils die Elastizität des Preises in Abhängigkeit von der Nachfrage:

a) $p_1(x) = \frac{1}{x}$

b) $p_2(x) = e^{-x}$

c) $p_3(x) = -\ln\left(\frac{x}{100}\right)$

d) $p_4(x) = \frac{2}{x^2}$

e) $p_5(x) = \frac{1}{x^n}$ mit $n \in \mathbb{N}$

$p_5(x) = x^{-n}$

e) $\varepsilon_p(x) = \frac{p'}{p} \cdot x = \frac{-n x^{-n-1}}{x^{-n}} \cdot x = -n \cdot \frac{x^{-n}}{x^{-n}} = -n$

Aufgabe 53

Differentialrechnung: Differenzierbarkeit (DIFF1.1)

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit:

$f_1(x) = x^3 \sqrt{x^2 + 1}$

$f_2(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + x + 1} & \text{für } x \geq 0 \\ x & \text{für } x < 0 \end{cases}$

$f_3(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & \text{für } x \geq 1 \\ e^{x-1} & \text{für } x < 1 \end{cases}$

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die Funktionen differenzierbar?

b) Berechnen Sie gegebenenfalls die Differentialquotienten.

$f_1'(x) = 3x^2 \cdot (x^2 + 1)^{1/2} + x^3 \cdot \frac{1}{2} (x^2 + 1)^{-1/2} \cdot 2x$
 $= x^2 \cdot (3 \cdot (x^2 + 1)^{1/2} + x^2 \cdot (x^2 + 1)^{-1/2})$

$f_1'(x) = 3x^2 \sqrt{x^2 + 1} + x^3 \cdot \frac{1}{2} (x^2 + 1)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{3x^4 + 3x^2 + x^4}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{4x^4 + 3x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Aufgabe 53

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^3 \sqrt{x^2 + 1} \\ f_2(x) &= \begin{cases} \sqrt{x^2 + x + 1} & \text{für } x \geq 0 \\ x & \text{für } x < 0 \end{cases} \\ f_3(x) &= \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & \text{für } x \geq 1 \\ e^{x-1} & \text{für } x < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

- Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die Funktionen differenzierbar?
- Berechnen Sie gegebenenfalls die Differentialquotienten.

Lösungshinweis:

$f_1(x) = x^3 \cdot \sqrt{x^2 + 1}$ ist differenzierbar $\forall x \in \mathbb{R}$, da Komposition elementarer differenzierbarer Funktionen.

$$f_1'(x) = 3x^2 \sqrt{x^2 + 1} + x^3 \cdot \frac{1}{2} (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{3x^4 + 3x^2 + x^4}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{4x^4 + 3x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + x + 1} & \text{für } x \geq 0 \\ x & \text{für } x < 0 \end{cases} \text{ ist stetig differenzierbar für } x \neq 0$$

$$\Rightarrow f_2'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2 + x + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 1) & \text{für } x > 0 \\ 1 & \text{für } x < 0 \end{cases} \text{ ist stetig differenzierbar für } x \neq 0$$

Noch zu betrachten: $x = 0$. Für Differenzierbarkeit ist Stetigkeit von f_2 Voraussetzung:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \nearrow 0} f_2(x) &= 0 \\ \lim_{x \searrow 0} f_2(x) = \sqrt{0^2 + 0 + 1} &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f_2(x) \text{ ist nicht stetig für } x = 0$$

$\Rightarrow f_2(x)$ ist nicht differenzierbar für $x = 0$

Analoge Überlegung bei $f_3(x)$ führt zu stetiger Differenzierbarkeit für $x \neq 1$

$$\Rightarrow f_3'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{für } x > 1 \\ e^{x-1} & \text{für } x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Zur Stetigkeit bei } x = 1 \left. \begin{aligned} \lim_{x \nearrow 1} f_3(x) = e^{1-1} &= 1 \\ \lim_{x \searrow 1} f_3(x) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f_3(x) \text{ ist stetig für } x = 1$$

$$\text{Diff.barkeit : } \left. \begin{aligned} \lim_{x \nearrow 1} f_3'(x) = e^{1-1} &= 1 \\ \lim_{x \searrow 1} f_3'(x) = 2 \cdot 1 - 2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f_3(x) \text{ ist nicht diff.bar für } x = 1$$

Aufgabe 54

Eine quaderförmige Kiste, deren oberes Ende geöffnet ist, soll aus einem quadratischen Blech mit der Seitenlänge a hergestellt werden. Dazu werden an den 4 Ecken des Blechs jeweils gleich große Quadrate mit Seitenlänge x ausgestanzt und die so entstandenen 4 Seitenrechtecke hochgeklappt um die Kiste zu formen. Wie groß muss x sein, so dass das Volumen der entstandenen Kiste maximal wird?

Lösungshinweis:

Für das Volumen in Abhängigkeit von x ergibt sich:

$$V(x) = (a - 2x)^2 \cdot x = a^2x - 4ax^2 + 4x^3$$

Zum Maximieren bildet man die erste und zweite Ableitung:

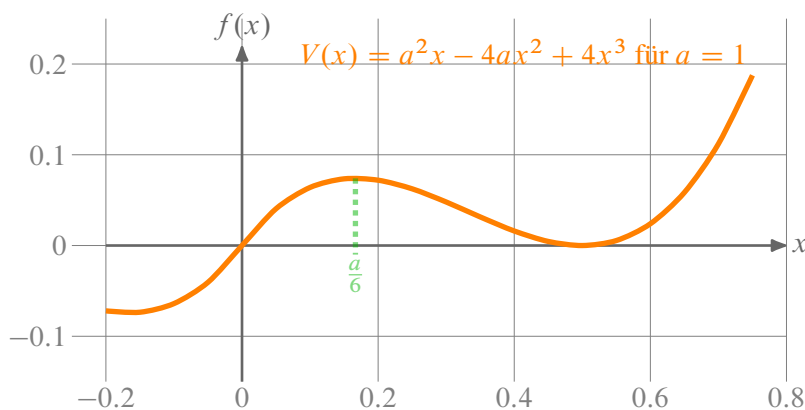
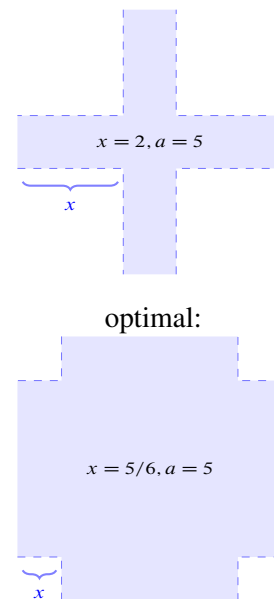
$$V'(x) = a^2 - 8ax + 12x^2 \quad \text{und} \quad V''(x) = -8a + 24x$$

Nullstelle der ersten Ableitung:

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= \frac{1}{24} \left(8a \pm \sqrt{64a^2 - 48a^2} \right) \\ &= a \cdot \begin{cases} 1/2 \\ 1/6 \end{cases} \end{aligned}$$

$= -8a + 24 \cdot \frac{a}{6} = -4a < 0$

Damit ist $x = \frac{a}{6}$ optimal, denn $V''(\frac{a}{6}) < 0$.



Aufgabe 55

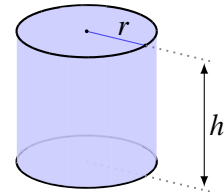
Differentialrechnung: Minimale Kosten (DIFF2.5)

Ein zylinderförmiger Ölbehälter soll einen Liter Flüssigkeit fassen. Der Behälter ist oben und unten komplett geschlossen. Wie müssen Höhe und Radius dimensioniert sein, so dass möglichst wenig Material verbraucht wird?

Lösungshinweis:

Mit r für den Radius des Deckels und h für die Höhe der Dose ergibt sich für das Volumen

$$V = r^2 \pi h = 1 \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{1}{r^2 \pi}$$



Als Materialbedarf in Abhängigkeit von r ergibt sich durch Einsetzen der Volumen Nebenbedingung:

$$M(r) = 2r\pi h + 2r^2\pi = \frac{2}{r} + 2\pi r^2$$

Deckel, Boden (Kreisfläche)

Mit der Nullstelle der Ableitung

$$M'(r) = -\frac{2}{r^2} + 4\pi r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$$

↳ Mantelfläche (ausgerollt)
 $h \cdot \boxed{2r\pi}$

hat man ein Minimum der Materialmenge gefunden, denn die zweite Ableitung

$$M''(x) = \frac{4}{r^3} + 4\pi$$

ist für alle $r > 0$ positiv. Damit ergibt sich für die optimale Dose in Dezimeter (dm)

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} \approx 0,542 \text{ dm} \quad \text{und} \quad h = \frac{1}{r^2 \pi} = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \approx 1,084 \text{ dm}.$$

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{r^2 \pi} \quad , \quad M(r, h(r)) = 2r\pi h + 2r^2\pi \\ &= 2r\pi \cdot \frac{1}{r^2 \pi} + 2r^2\pi \\ &= \frac{2}{r} + 2r^2\pi \end{aligned}$$

Aufgabe 56

Die kumulierte Nachfrage y nach Videorecordern in Abhängigkeit der Zeit $t \geq 1$ wird durch die sogenannte Gompertz-Funktionsgleichung

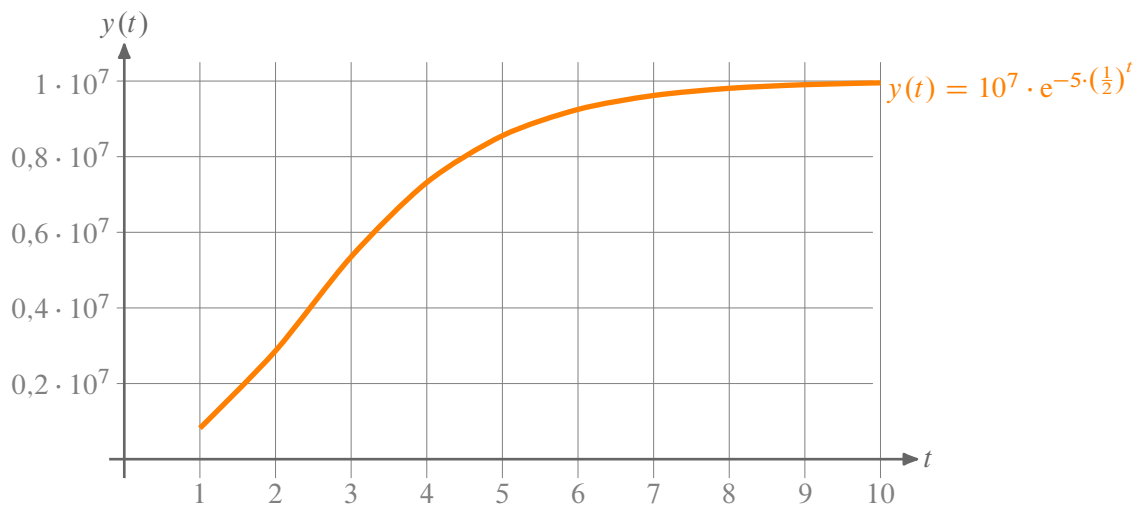
$$y(t) = 10^7 e^{-5(0,5)^t}$$

prognostiziert.

- Skizzieren Sie die Funktion und geben Sie eine Interpretation.
- Berechnen Sie die Sättigungsgrenze $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$.
- Zeigen Sie, dass die Änderungsrate der Nachfrage für alle $t \geq 1$ positiv und monoton fallend ist.
- Zeigen Sie auch, dass die Nachfrage für $t \leq 3$ elastisch und für $t \geq 4$ unelastisch ist.

Lösungshinweis:

a)



b) $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} 10^7 \cdot e^{-5 \cdot (\frac{1}{2})^t} = 10^7 \cdot e^{-5 \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} (\frac{1}{2})^t} = 10^7 \cdot e^{-5 \cdot 0} = 10^7$

c)

$$\varrho_y(t) = \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{10^7 \cdot e^{-5 \cdot (\frac{1}{2})^t} \cdot (-5 \cdot (\frac{1}{2})^t \cdot \ln \frac{1}{2})}{10^7 \cdot e^{-5 \cdot (\frac{1}{2})^t}} = +5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t \cdot \ln 2 > 0$$

$\Rightarrow \varrho_y(t)$ ist monoton fallend, denn $(\frac{1}{2})^t$ ist monoton fallend.

d) $\varepsilon_y(t) = t \cdot \varrho_y(t) = t \cdot 5 \cdot \ln 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$.

Aufgabe 56

Differentialrechnung: Gompertzfunktion (DIFF1.2)

Die kumulierte Nachfrage y nach Videorecordern in Abhängigkeit der Zeit $t \geq 1$ wird durch die sogenannte Gompertz-Funktionsgleichung

$$y(t) = 10^7 e^{-5(0,5)^t}$$

prognostiziert.

- Skizzieren Sie die Funktion und geben Sie eine Interpretation.
- Berechnen Sie die Sättigungsgrenze $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$.
- Zeigen Sie, dass die Änderungsrate der Nachfrage für alle $t \geq 1$ positiv und monoton fallend ist.
- Zeigen Sie auch, dass die Nachfrage für $t \leq 3$ elastisch und für $t \geq 4$ unelastisch ist.

b) $\lim_{t \rightarrow \infty} 10^7 \cdot e^{-5 \cdot (\frac{1}{2})^t} = 10^7 \cdot e^{-5 \cdot 0} = 10^7 \cdot 1 = 10^7$

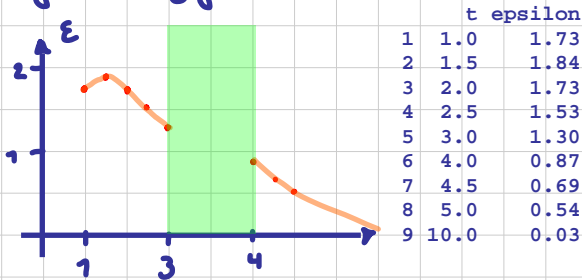
$$\ln \frac{1}{2} = \ln(2^{-1}) = -\ln 2$$

c) $\rho_y(t) = \frac{y'}{y} = \frac{10^7 e^{-5 \cdot (\frac{1}{2})^t} \cdot (-5 \cdot (\frac{1}{2})^t \cdot \ln(\frac{1}{2}))}{10^7 \cdot e^{-5 \cdot (\frac{1}{2})^t}}$

$$= 5 \cdot \ln(2) \cdot (\frac{1}{2})^t = 5 \cdot \ln(2) \cdot 2^{-t}$$

$y'(t) = 5 \cdot \ln(2) \cdot 2^{-t} \cdot \ln(2) \cdot (-1) < 0 \Rightarrow$ Änderungsrate ist streng monoton fallend

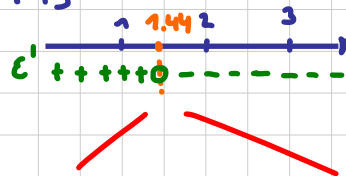
d) $\epsilon_y(t) = \rho_y(t) \cdot t = 5 \cdot \ln(2) \cdot 2^{-t} \cdot t$



$$\epsilon'_y(t) = 5 \cdot \ln(2) \cdot [2^{-t} \cdot \ln(2) \cdot (-1) \cdot t + 2^{-t} \cdot 1]$$

$$= 2^{-t} \cdot 5 \cdot \ln(2) \cdot [-\ln(2) \cdot t + 1]$$

$$-\ln(2) \cdot t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\ln(2)} \approx 1.44$$



Bereich $1 \leq t \leq 3$:

$\epsilon(1) > 1, \epsilon(3) > 1$
 und ϵ steigt streng monoton von $1 \leq t \leq 1.44$
 und ϵ fällt streng mon. für $t > 1.44$
 $\Rightarrow \epsilon$ kann nicht ≤ 1 werden
 $\Rightarrow y$ ist elastisch für $1 \leq t \leq 3$

Bereich $t \geq 4$:

$\epsilon(4) < 1$ und ϵ fällt st. mon für $t \geq 4$
 $\Rightarrow y$ ist unelastisch für $t \geq 4$.

Damit ist $\varepsilon_y(3) = 3 \cdot 5 \cdot \ln 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \approx 1,299$ und $\varepsilon_y(4) = 4 \cdot 5 \cdot \ln 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \approx 0,866$.

Außerdem gilt für die Ableitung: $\varepsilon'_y(t) = \underbrace{5 \cdot \ln 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t}_{\text{immer } > 0} \cdot (1 - t \ln 2) = 5 \ln^2 2 \left(\frac{1}{2}\right)^t \cdot \left(\frac{1}{\ln 2} - t\right)$

$\frac{1}{\ln 2} \approx 1,44$, damit ist $\varepsilon'_y(t) > 0$ (streng monoton steigend) für $t < 1,44$ und $\varepsilon'_y(t) < 0$ (streng monoton fallend) für $t > 1,44$. Damit gilt, da $\varepsilon_y(1) \approx 1,7 > 1$ und $\varepsilon_y(t)$ für $1 < t < 1,44$ steigt, dann bis $t = 3$ fällt mit $\varepsilon_y(3) \approx 1,299 > 1$, dass $y(t)$ im Bereich von $1 \leq t \leq 3$ elastisch sein muss.

Andererseits ist $\varepsilon_y(4) \approx 0,866 < 1$ und $\varepsilon_y(t)$ fällt für $t > 4$. Damit ist $y(t)$ unelastisch für $t > 4$.

Aufgabe 57

Für eine Einproduktunternehmung wurden in Abhängigkeit des Produktionsniveaus $x > 0$ die Kosten durch $c(x) = 6x + 40$ und die Preis-Absatz-Beziehung gemäß $p(x) = 30 - 2x$ geschätzt.

- Geben Sie die Gewinnfunktion g mit $g(x) = x \cdot p(x) - c(x)$ an und untersuchen Sie diese Funktion auf Monotonie und Konvexität.
- Berechnen Sie den Bereich positiver Gewinne sowie das gewinnmaximale Produktionsniveau.
- Bestimmen Sie das Produktionsniveau mit maximalem Stückgewinn.

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\hspace{10em}}_x \quad SG(x) &= \frac{g(x)}{x} = p(x) - \frac{c(x)}{x} \\
 &= 30 - 2x - 6 - \frac{40}{x} \\
 &= 24 - 2x - \frac{40}{x}
 \end{aligned}$$

Lösungshinweis:

Allgemein gilt:

- ▶ Das Produktionsniveau ist nicht negativ: $x \geq 0$
- ▶ Für die Kosten gilt: $c(x) = 6x + 40$
- ▶ Für den Preis gilt: $p(x) = 30 - 2x$

$$\begin{aligned}
 SG' &= -2 + 40 \cdot x^{-2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 20 \Leftrightarrow x = \sqrt{20} \\
 SG'' &= -80x^{-3} \\
 \text{in } SG'': \quad SG''(\sqrt{20}) &< 0 \\
 \Rightarrow \text{Max. bei } \sqrt{20} &\approx 4,472
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } g(x) &= x \cdot p(x) - c(x) = x \cdot (30 - 2x) - (6x + 40) = -2x^2 + 24x - 40 \\
 \Rightarrow g'(x) &= -4x + 24 = 4(6 - x) \quad \begin{cases} > 0 & \text{für } x < 6 & \text{str. mon. steigend} \\ < 0 & \text{für } x > 6 & \text{str. mon. fallend} \end{cases} \\
 \Rightarrow g''(x) &= -4 \Rightarrow g(x) \text{ konkav } \forall x > 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } g(x) = 0 &\Leftrightarrow x_{1/2} = +6 \pm \sqrt{36 - 20} = 6 \pm 4 = \begin{cases} 2 \\ 10 \end{cases} \\
 \Rightarrow \text{wegen str. Konkavität: } &g(x) > 0 \text{ für } 2 < x < 10. \\
 \text{Maximaler Gewinn: } g'(x) = 0 &\Leftrightarrow x = 6 \text{ und } g''(x) = -4 < 0 \\
 \Rightarrow g(6) = -2 \cdot 6^2 + 24 \cdot 6 - 40 &= -72 + 144 - 40 = 32
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) Für den Stückgewinn gilt: } h(x) &= g(x)/x = -2x + 24 - 40/x \\
 \text{Damit: } h'(x) &= -2 + \frac{40}{x^2}. \text{ Extremum bei } x \text{ wenn } h'(x) = 0, \text{ also} \\
 -2 + 40x^{-2} = 0 &\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{20} \approx \pm 4,5 \\
 h''(x) = -2 \cdot \frac{40}{x^3} &= -80x^{-3} < 0 \text{ (für } x > 0), \text{ also streng konkav. Damit ist } h(\sqrt{20}) \approx 6,1 \\
 \text{globales Stückgewinnmaximum.} &
 \end{aligned}$$

Aufgabe 58

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = 5 \left(e^{-\frac{x}{2}} \cdot (x-1) - 1 \right)$$

auf Monotonie und Konvexität.

$$f'(x) = 5 \cdot \left(e^{-\frac{x}{2}} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (x-1) + e^{-\frac{x}{2}} \cdot 1 \right)$$

Bestimmen Sie außerdem alle Extremalstellen und Wendepunkte und skizzieren Sie den Verlauf der Funktion für $x \geq 0$.

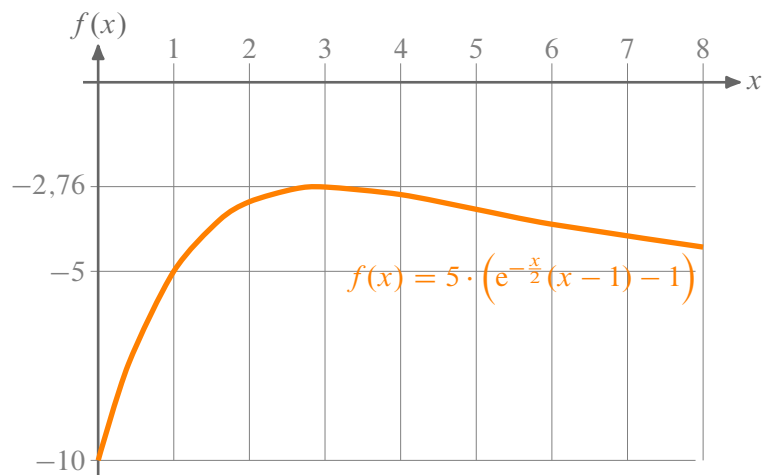
$$\begin{aligned} &= 5 \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 1 \right) \\ &= 5 \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot (3-x) \end{aligned}$$

Lösungshinweis:

$f'(x) = \frac{5}{2}e^{-\frac{x}{2}}(3-x)$. Damit ist $f'(x) > 0$ (f str. mon. steigend) für $x < 3$ und $f'(x) < 0$ (f str. mon. fallend) für $x > 3$. Also ist $x = 3$ ein globales Maximum mit $f(3) = 5(e^{-1,5} \cdot 2 - 1) \approx -2,77$.

$f''(x) = \frac{5}{4}e^{-\frac{x}{2}}(x-5)$. Damit ist $f''(x) > 0$ (f streng konvex) für $x > 5$ und $f''(x) < 0$ (f streng konkav) für $x < 5$.

Wertetabelle	
x	$f(x)$
0	-10
1	-5
2	-3,16
3	-2,77
5	-3,36
$\rightarrow \infty$	-5



Aufgabe 59

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 1.$$

- Berechnen Sie alle Extremalstellen und Wendepunkte.
- Berechnen Sie die Funktion für $x = -1, 0, 0.5, 1, 2$ und skizzieren Sie $f(x)$.
- Beschreiben Sie mit Hilfe von a) und b) das Monotonie- und das Konvexitätsverhalten der Funktion.

Lösungshinweis:

a) und c)

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 4x^2(x - 3/2)$$

und damit

$$f''(x) = 12x(x - 1)$$

Also gilt für das Monotonieverhalten:

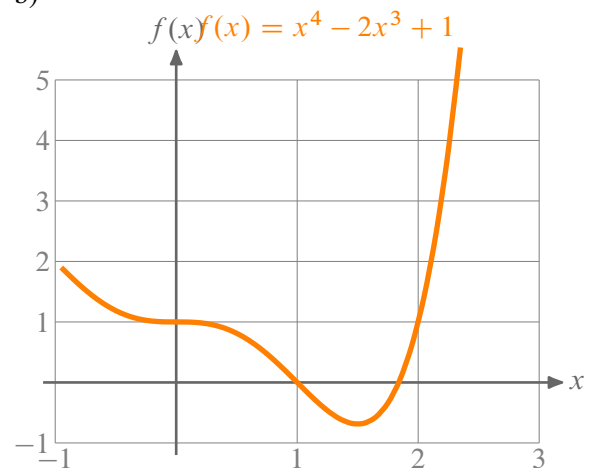
$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & \text{für } x > 3/2 \\ & \text{str. mon. steigend} \\ = 0 & \text{für } x \in \{0, \frac{3}{2}\} \\ < 0 & \text{für } x \in (-\infty; \frac{3}{2}) \setminus \{0\} \\ & \text{str. mon. fallend} \end{cases}$$

Für das Krümmungsverhalten gilt:

$$f''(x) = \begin{cases} > 0 & \text{für } x > 1 \vee x < 0 & \text{str. konvex} \\ < 0 & \text{für } 0 < x < 1 & \text{str. konkav} \end{cases}$$

Damit ist $f(3/2) \approx -0,6875$ ein globales Minimum, $f(0) = 1$ eine Terrasse und $f(1) = 0$ ein Wendepunkt.

b)



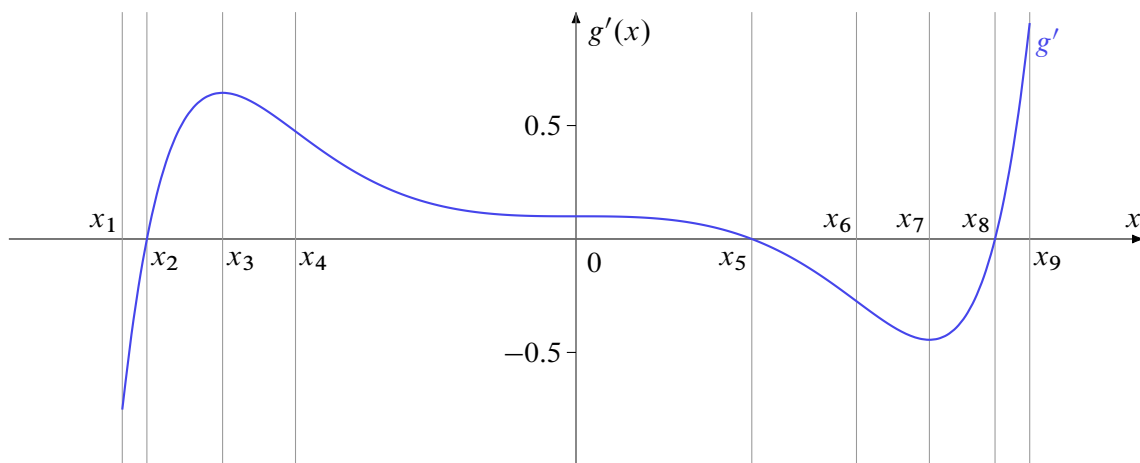
Aufgabe 60

Gegeben sei die Funktion f mit folgender Funktionsgleichung:

$$f(x) = e^{-x} \cdot \ln(x^2)$$

- Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $D_f \subset \mathbb{R}$ von f an.
- Berechnen Sie die Nullstellen von f .
- Bestimmen Sie die erste Ableitung f' und fassen Sie Ihr Ergebnis so weit wie möglich zusammen.
- Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten von f für $x \rightarrow -\infty$.

Für eine andere Funktion, die stetige und zweimal stetig differenzierbare Funktion $g : [x_1, x_9] \rightarrow \mathbb{R}$, ist lediglich der Graph ihrer *ersten Ableitung* g' gegeben:



Die folgenden Teilaufgaben beziehen sich auf die der Ableitung g' zugrundeliegenden Funktion g .

- Geben Sie die x -Werte der lokalen Minima von g an.
- Geben Sie die x -Werte der lokalen Maxima von g an.
- In welchem (bzw. welchen) Intervall(en) ist g monoton wachsend?
- In welchem (bzw. welchen) Intervall(en) ist g monoton fallend?
- In welchem (bzw. welchen) Intervall(en) ist g konvex?
- In welchem (bzw. welchen) Intervall(en) ist g konkav?

Lösungshinweis:

- | | |
|--|---|
| a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ | e) Minimalstellen: x_2, x_8 |
| b) $f(x) = e^{-x} \cdot \ln(x^2) = 0$ für $\ln(x^2) = 0$
$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$ | f) Maximalstellen: x_1, x_5, x_9 |
| c) $f'(x) = e^{-x} \cdot (-1) \cdot \ln(x^2) + e^{-x} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x$
$= -e^{-x} \cdot \ln(x^2) + e^{-x} \cdot \frac{2}{x}$
$= e^{-x} \left(\frac{2}{x} - \ln(x^2) \right)$ | g) g monoton wachsend für
$x \in [x_2, x_5] \cup [x_8, x_9]$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\underbrace{e^{-x}}_{\rightarrow +\infty} \cdot \underbrace{\ln(x^2)}_{\rightarrow +\infty} \right] = +\infty$ | h) g monoton fallend für
$x \in [x_1, x_2] \cup [x_5, x_8]$ |
| | i) g konvex für $x \in [x_1, x_3] \cup [x_7, x_9]$ |
| | j) g konkav für $x \in [x_3, x_7]$ |

Aufgabe 61

Im Folgenden bedeutet $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ den Umsatz $u(x)$ in Abhängigkeit von der verkauften Stückzahl x und $k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ die Produktionskosten $k(x)$. Umsatz und Produktionskosten seien stetig differenzierbar. Daraus leitet sich die Gewinnfunktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = u(x) - k(x)$ ab. Die Ausdrücke $\frac{du}{dx}$ und $\frac{dk}{dx}$ bezeichnet man als den *Grenzumsatz* beziehungsweise die *Grenzkosten* beim Produktionsniveau x . Beweisen Sie folgende Aussagen:

- Maximaler Gewinn entsteht (sofern er existiert) bei einem Produktionsniveau x , bei dem Grenzumsatz und Grenzkosten übereinstimmen.
- Beim Produktionsniveau x mit den niedrigsten Stückkosten (sofern es existiert) sind die Stückkosten und die Grenzkosten gleich hoch.

Lösungshinweis:

a) Maximaler Gewinn existiert $\Rightarrow g'(x) = u'(x) - k'(x) = 0 \Rightarrow u'(x) = k'(x)$

b) Produktionsniveau $x > 0$ mit den niedrigsten Stückkosten existiert

$$\Rightarrow \left(\frac{g(x)}{x} \right)' = \frac{g'(x) \cdot x - g(x) \cdot 1}{x^2} = 0 \Rightarrow g'(x) \cdot x = g(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{g(x)}{x}$$

Also: Stückkosten gleich Grenzkosten.

Integralrechnung

Aufgabe 62

Integralrechnung: Fläche zwischen Kurven (Fläche2)

Gegeben seien die beiden Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = -2x + 10 \quad \text{sowie} \quad g(x) = x^2 + 2.$$

- Bestimmen Sie die Schnittpunkte von f und g .
- Berechnen Sie die Fläche, die durch die Graphen von f und g eingeschlossen wird.

Lösungshinweis:

- Schnittpunkte bei $x = -4$ und $x = 2$.
-

$$\int_{-4}^2 f(x) - g(x) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 8x \right]_{-4}^2 = -\frac{8}{3} - 4 + 16 - \left(\frac{64}{3} - 16 - 32 \right) = 36$$

Aufgabe 63

a) Man berechne das bestimmte Integral:

$$I(y) = \int_1^y \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} dx \quad (\text{für } y > 1)$$

Zeigen Sie außerdem, dass $I(y)$ streng monoton wächst, und berechnen Sie $I(2)$.

b) Berechnen Sie die Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g mit

$$f(x) = 5 - \frac{1}{2}x^2$$
$$g(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{2}$$

eingeschlossen wird.

(*Hinweis*: Die Integrationsgrenzen ergeben sich aus den Schnittpunkten der Graphen.)

Lösungshinweis:

a) Substitutionsregel: Mit $z = (x^3 + 1) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dz = 3x^2 dx$ folgt:

$$\int \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} dx = \frac{1}{2} \int z^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} z^{-\frac{1}{2}+1} + C = (x^3+1)^{\frac{1}{2}} + C$$
$$\Rightarrow I(y) = \left[(x^3+1)^{\frac{1}{2}} \right]_1^y = \sqrt{y^3+1} - \sqrt{2}$$

b) Schnittpunkte: $f(x) = g(x) \iff 5 - \frac{1}{2}x^2 = x^2 + 3x + \frac{1}{2}$

$$\iff -\frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2} = 0$$
$$\iff x_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-2 \pm \sqrt{4+12} \right) = -1 \pm 2 = \begin{cases} +1 \\ -3 \end{cases}$$

Fläche zwischen den Graphen:

$$\int_{-3}^1 f(x) - g(x) dx = \int_{-3}^1 -\frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2} dx$$
$$= \left[-\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x \right]_{-3}^1$$
$$= \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{9}{2} \right) - \left(\frac{27}{2} - \frac{27}{2} - \frac{27}{2} \right) = \frac{32}{2} = 16$$

Aufgabe 64

Gegeben sei eine Grenzkostenfunktion

$$c'(x) = \begin{cases} 3 \cdot \sqrt{x} & \text{für } x \in [0, 100] \\ 30 & \text{für } x \in [100, 400] \\ \frac{600}{\sqrt{x}} & \text{für } x \in [400, 900] \end{cases} .$$

Die fixen Kosten betragen $c(0) = 1000$.

Bestimmen Sie dazu eine stetige Gesamtkostenfunktion $c(x)$ und berechnen Sie die Gesamtkosten für $x = 100$, $x = 150$ und $x = 625$.

Lösungshinweis:

$$c(x) = \begin{cases} 2x^{\frac{3}{2}} + 1.000 & \text{für } x \in [0; 100] \\ 30x & \text{für } x \in [100; 400] \\ 1.200\sqrt{x} - 12.000 & \text{für } x \in [400; 900] \end{cases}$$

Damit:

$$c(100) = 2 \cdot 1.000 + 1.000 = 3.000$$

$$c(150) = 30 \cdot 150 = 4.500$$

$$c(625) = 1.200 \cdot \sqrt{625} - 12.000 = 18.000$$

Aufgabe 65

Der momentane Umsatz eines Produktes zum Zeitpunkt t sei durch die Funktion $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit

$$u(t) = 1000(t + 1) e^{-\frac{t}{2}}$$

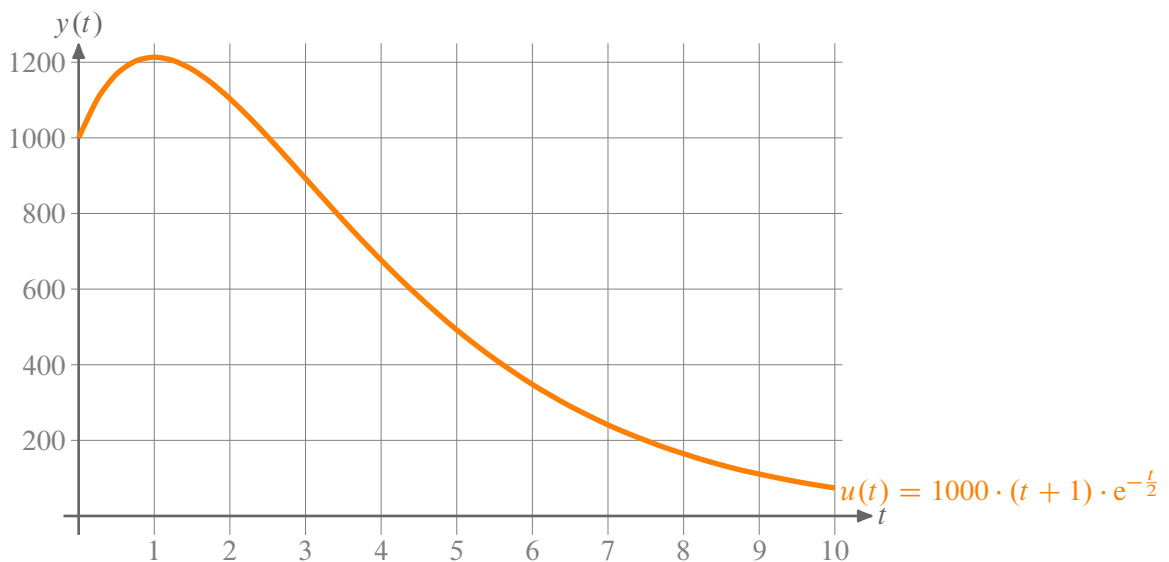
gegeben.

- Skizzieren Sie die Funktion u im Planungszeitraum $[0,10]$ und berechnen Sie den Gesamtumsatz in $[0, T]$.
- Ermitteln Sie den Gesamtumsatz für $T = 10$ und $T \rightarrow \infty$.

Lösungshinweis:

a)

$$\text{GU}(T) = \int_0^T 1000 \cdot (t + 1) \cdot e^{-\frac{t}{2}} dt = 1000 \cdot \left(6 - (2T + 6) \cdot e^{-\frac{T}{2}}\right)$$



b)

$$\text{GU}(10) = 1000 \cdot \left(6 - 26 \cdot e^{-5}\right) \approx 5.825,8$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{GU}(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} 1000 \cdot \left(6 - \frac{2T + 6}{e^{\frac{T}{2}}}\right) = 1000 \cdot \left(6 - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{\frac{1}{2}e^{\frac{T}{2}}}\right) = 6.000$$

Aufgabe 66

Für ein Produkt sollen die Kosten- und Umsatzentwicklungen in Abhängigkeit der Zeit $t \geq 0$ betrachtet werden. Dabei wurden für die Veränderung der Kosten $k(t)$ bzw. des Umsatzes $u(t)$ die Beziehungen folgendermaßen ermittelt:

$$k'(t) = \frac{dk(t)}{dt} = \frac{100}{t+1} \quad \text{bzw.} \quad u'(t) = \frac{du(t)}{dt} = \frac{1000}{(t+1)^2} \quad \text{für alle } t \geq 0$$

- a) Zeigen Sie, dass die Kosten $k(t)$ und der Umsatz $u(t)$ für $t \geq 0$ monoton wachsen, während der Gewinn $g(t) = u(t) - k(t)$ für $t \leq 9$ monoton wächst und für $t \geq 9$ monoton fällt.
- b) Berechnen Sie die bestimmten Integrale

$$k_9 = \int_0^9 k'(t) dt, \quad u_9 = \int_0^9 u'(t) dt, \quad g_9 = u_9 - k_9$$

und interpretieren Sie diese Ergebnisse.

- c) Zeigen Sie, dass es eine obere Integrationsgrenze $z \geq 9$ mit $g_z = 0$ gibt (keine Berechnung erforderlich).

Lösungshinweis:

- a) $k'(t)$ und $u'(t)$ sind jeweils die Ableitung von $k(t)$ bzw. $u(t)$. Da $k'(t)$ und $u'(t)$ positiv sind für alle $t > 0$ müssen $k(t)$ bzw. $u(t)$ streng monoton steigen.

$$g'(t) = u'(t) - k'(t) = \frac{1000}{(t+1)^2} - \frac{100}{t+1} = \frac{100}{(t+1)^2} \cdot (9-t) \Rightarrow g'(t) > 0$$

und damit $g(t)$ streng mon. steigend für $0 < t < 9$ und $g'(t) < 0$ sowie $g(t)$ streng monoton fallend für $t > 9$.

$$\text{b) } k_9 = \int_0^9 k'(t) dt = 100 \cdot \left[\ln|t+1| \right]_0^9 = 100 \cdot \ln 10$$

$$u_9 = \int_0^9 u'(t) dt = 1000 \cdot \left[\frac{-1}{t+1} \right]_0^9 = 1000 \cdot \left(-\frac{1}{10} + \frac{1}{1} \right) = 900$$

$$g_9 = u_9 - k_9 = 900 - 100 \cdot \ln 10 \approx 669,74$$

$$\begin{aligned} \text{c) } g_z &= 1000 \cdot \left(-\frac{1}{z+1} + 1 \right) - 100 \cdot \ln(z+1) \\ &= 100 \cdot \left[10 - \frac{10}{z+1} - \ln(z+1) \right] \end{aligned}$$

Beispielsweise gilt für $z = e^{10}$ für

$$g_{e^{10}} = 100 \cdot \left(\underbrace{10 - \frac{10}{e^{10}+1}}_{<0} - \underbrace{\ln(e^{10}+1)}_{< -\ln e^{10} = -10} \right) < 0$$

Weil g_z stetig muss damit mind. ein $9 \leq z \leq e^{10}$ mit $g_z = 0$ existieren (Zwischenwertsatz)

Aufgabe 67

Für den Verlauf des Absatzes $y(t)$ eines Produktes in Abhängigkeit der Zeit $t \geq 0$ wird die folgende Beziehung angenommen:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{c}{a} \cdot y(t) \cdot (a - y(t)) \quad \text{mit } y(t) \in \langle 0, a \rangle \forall t \quad (6)$$

- a) Formen Sie diese Gleichung in eine Integralgleichung der Form

$$\int g(y) dy = \int f(t) dt$$

um und berechnen Sie daraus eine Funktion $y(t)$, die Gleichung (6) erfüllt.

- b) Bestimmen Sie $y(t)$, wenn $a = 100$, $c = 1$ und $y(0) = 50$ gilt.
c) Skizzieren Sie die in b) erhaltene Funktion und interpretieren Sie Gleichung (6) mit Hilfe Ihrer Skizze.

Lösungshinweis:

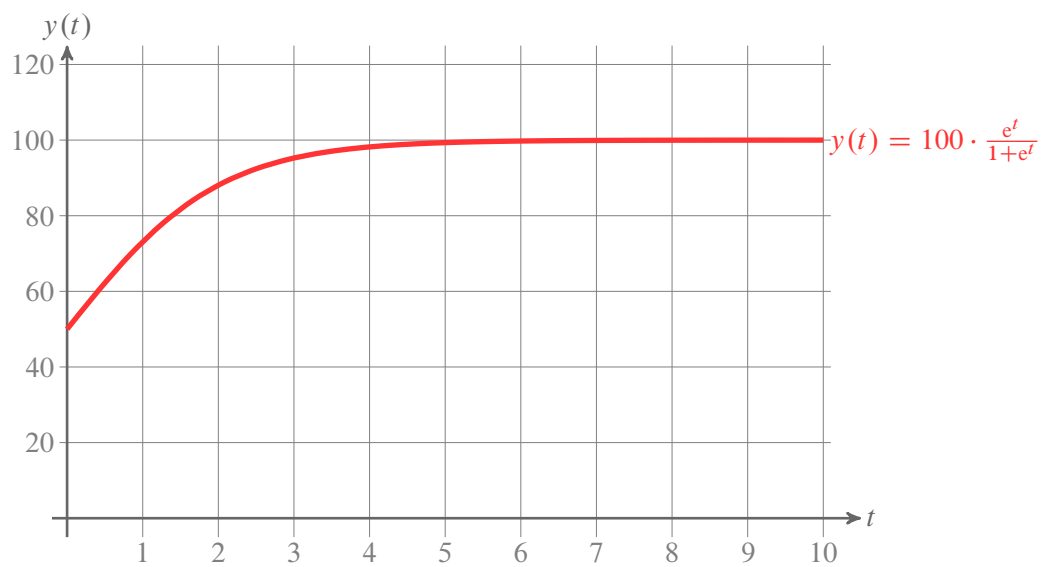
- a)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{c}{a} y(a - y) \Rightarrow \int \frac{a}{y(a - y)} dy = \int c dt \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{a - y} = \int c dt \\ &\Rightarrow \ln y - \ln(a - y) = c \cdot t + k \\ &\Rightarrow \ln \frac{y}{a - y} = ct + k \\ &\Rightarrow \frac{y}{a - y} = e^{ct} + K \\ &\Rightarrow y(t) = \frac{ae^{ct}}{1 + e^{ct}} + K \end{aligned}$$

- b)

$$y(0) = \frac{100 \cdot e^0}{1 + 1} + K = 50 \Rightarrow K = 0 \Rightarrow y(t) = 100 \cdot \frac{e^t}{1 + e^t}$$

- c) Zeichnung für $t \in [0; 10]$



$y(t)$ startet mit Steigung $\frac{1}{100}y(0) \cdot (100 - y(0)) = \frac{1}{100} \cdot 50 \cdot (100 - 50) = 25$ und sättigt für $t \rightarrow \infty$ gegen 100.

Aufgabe 68

Integralrechnung: Gamma ganz groß (partielle.Int1)

Die Gammafunktion $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

kann für $n \in \mathbb{N}$ zur Berechnung der Fakultät $n!$ genutzt werden. Im Folgenden soll mit Hilfe vollständiger Induktion gezeigt werden, dass $\Gamma(n) = (n-1)!$ gilt.

- Zeigen Sie, dass $\Gamma(1) = 1$ ist.
- Zeigen Sie, dass $\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n)$ gilt!

Tipps für b):

- ▶ Verwenden Sie partielle Integration
- ▶ Sie dürfen verwenden, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} -t^n e^{-t} = 0$.

Lösungshinweis:

a)

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} \underbrace{t^{1-1}}_{=1} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{\infty} = 0 - (-1) = 1$$

b)

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= \int_0^{\infty} t^{n+1-1} e^{-t} dt \\ &= [-t^n \cdot e^{-t}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} n t^{n-1} e^{-t} dt \\ &= 0 + n \cdot \Gamma(n) \end{aligned}$$

Aufgabe 69

Die Funktion $f: \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben mit

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^3}.$$

- Bestimmen Sie alle Extremwerte der Funktion, falls es welche gibt.
- Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x)$.

Lösungshinweis:

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x) &= \frac{x^2 - \ln(x) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{1 - 3 \ln(x)}{x^4} = 0 \iff \ln(x) = \frac{1}{3} \iff x = e^{\frac{1}{3}} \\ f''(x) &= \frac{12 \ln(x) - 7}{x^5} \Rightarrow f''\left(e^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{4 - 7}{e^{\frac{5}{3}}} < 0 \end{aligned}$$

Damit ist $x = e^{\frac{1}{3}}$ das einzige Extremum, ein globales Maximum.

$$\begin{aligned} \text{b) } \int f(x) dx &= \int x^{-3} \cdot \ln(x) dx = \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} \cdot \ln(x) - \int -\frac{1}{2} x^{-2} \frac{1}{x} dx \\ &= -\frac{\ln(x)}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C = -\frac{1 + 2 \ln(x)}{4x^2} \end{aligned}$$

Finanzmathematik

Aufgabe 70

Finanzmathematik: Einfach (FIMA.1)

Eine Rechnung über 3.250 € wird nicht sofort bezahlt. Daher sind Verzugszinsen in Höhe von 144,45 € zu bezahlen. Für welche Zeitspanne wurden Verzugszinsen berechnet falls der Zinsfuß 8% beträgt.

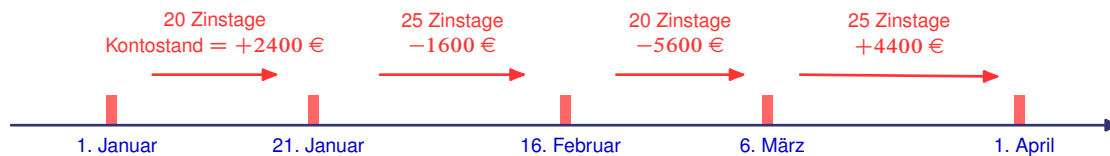
Lösungshinweis:

$$K_n = K_0(1 + n \cdot i) \quad \Rightarrow \quad n = \frac{K_n - K_0}{K_0 \cdot i} = \frac{144,45}{3250 \cdot 0,08} \approx 0,5556 \text{ Jahre} \hat{=} 200 \text{ Tage}$$

Aufgabe 71

Ein Girokonto weist am Jahresanfang ein Guthaben von 2.400 € auf. Am 6. März werden auf das Konto 10.000 € überwiesen; am 21. Januar und am 16. Februar werden jeweils 4.000 € abgebucht. Die Bank berechnet 12% Sollzins und 0,5% Habenzins. Stellen Sie die Zinsabrechnung zum 1. April auf.

Lösungshinweis:



$$\frac{20}{360} \cdot 0,005 \cdot 2400 - \frac{25}{360} \cdot 0,12 \cdot 1600 - \frac{20}{360} \cdot 0,12 \cdot 5600 + \frac{25}{360} \cdot 0,005 \cdot 4400 = -48,46 \text{ €}$$

Aufgabe 72

Finanzmathematik: Gemischt (FIMA.3)

Jemand zahlt am 2. Juli 1999 auf sein Sparkonto 1000 € ein. Wie hoch ist der Kontostand am 2. April 2008 bei 3% Zins, falls das Konto zu diesem Zeitpunkt abgerechnet wird.

Lösungshinweis:

$$K = 1000 \left(1 + \frac{179}{360} \cdot 0,03\right) \left(1 + \frac{3}{100}\right)^8 \left(1 + \frac{91}{360} \cdot 0,03\right) \approx 1295,42$$

Aufgabe 73

Jemand legt 20.000 € zu 6% zinseszinslich an. Auf welche Summe wächst das Kapital in 5 Jahren an bei

- a) jährlicher,
- b) halbjährlicher,
- c) monatlicher,
- d) täglicher oder
- e) stetiger Verzinsung?

Lösungshinweis:

- a) $\cdot 1,06^5 \approx 26.764,51$
- b) $\cdot 1,03^{10} \approx 26.878,33$
- c) $\cdot 1,005^{60} \approx 26.977,00$
- d) $\cdot \left(1 + \frac{0,06}{360}\right)^{360 \cdot 5} \approx 26.996,50$
- e) $\cdot e^{0,06 \cdot 5} \approx 26.997,18$

Aufgabe 74

Finanzmathematik: Durchschnittlicher Zins (FIMA.5)

Eine Kapitalanlage hat sich in 10 Jahren verdoppelt. In der ersten Hälfte der Laufzeit betrug der Zinssatz 4%. Wie hoch war er in der zweiten Hälfte?

Lösungshinweis:

$$\begin{aligned}K_{10} &= 2K_0 = K_0 \cdot 1,04^5 \cdot q^5 \\ \Rightarrow 2 &= 1,04^5 \cdot q^5 \\ \Rightarrow q &= \frac{\sqrt[5]{2}}{1,04} \approx 1,1045 \hat{=} 10,45\%\end{aligned}$$

Aufgabe 75

Finanzmathematik: Durchschnittliche Inflation (FIMA.28)

Zu welchem konstanten jährlichen Zins muss ein Betrag K_0 am 1.1.2008 angelegt werden damit am 31.12.2011 die Inflation ausgeglichen wurde? Die jährliche Inflationsraten der betreffenden Jahre seien dabei

Jahr	2008	2009	2010	2011
Inflation in %	3	2	4	5

Lösungshinweis:

$$q_{\text{infl}} = \sqrt[4]{1,03 \cdot 1,02 \cdot 1,04 \cdot 1,05} \approx 1,03494 \quad \Leftrightarrow \quad i_{\text{infl}} \approx 3,494 \%$$

Aufgabe 76

Finanzmathematik: Kaufkraft und Realwert (FIMA.29)

Am 1.1. diesen Jahres wurde ein Betrag von 2000 € zu 8 % jährlich für 15 Jahre angelegt. Die durchschnittliche Inflationsrate für diese 15 Jahre wird als 2,8 % angenommen.

- Welche Kaufkraft hat der Betrag nach genau 5 Jahren Anlagedauer?
- Welcher Realwert steht dem Anleger am Ende der Laufzeit zur Verfügung?
- Welche Realverzinsung erzielt der Anleger durchschnittlich pro Jahr?

Lösungshinweis:

- Kaufkraft nach 5 Jahren: $2000 \cdot \left(\frac{1,08}{1,028}\right)^5 \approx 2559,665$
- Realwert am Ende der Laufzeit: $2000 \cdot \left(\frac{1,08}{1,028}\right)^{15} \approx 4192,66$
- Realverzinsung: $\frac{1,08}{1,028} \approx 1,050584 \Rightarrow i \approx 5,0584 \%$

Aufgabe 77

Finanzmathematik: Doppelt so viel (FIMA.6)

- In welcher Zeit verdoppelt sich bei Zinseszinsrechnung jedes beliebige Anfangskapital K bei einem jährlichen Zinssatz von $p = 5\%$?
- Wie muss der jährliche Zinssatz bei Zinseszinsrechnung aussehen, wenn sich das Anfangskapital in 10 Jahren verdoppeln soll?

Lösungshinweis:

$$\text{a) } 2K_0 = K_0 \cdot 1,05^n \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\ln 2}{\ln 1,05} \approx 14,2$$

$$\text{b) } 2K_0 = K_0 \cdot q^{10} \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt[10]{2} = 1,0718$$

Aufgabe 78

Finanzmathematik: Wie lange? (FIMA.7)

Wie lange müssen 10.000 € angelegt werden, damit sie bei einer jährlichen Verzinsung von 7% ein Endkapital von 25.000 € erbringen?

Lösungshinweis:

$$10.000 \cdot 1,07^n = 25.000 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\ln 0,25}{\ln 1,07} \approx 13,54 \text{ Jahre}$$

Aufgabe 79

Ein Waldbestand hat einen Tageswert von 1 Mio. €. Aufgrund von Abholzung und Umweltschäden, nimmt der mengenmäßige Bestand jährlich um 10% stetig ab; der Preis des Holzes steigt halbjährlich um 4%.

- Welchen Tageswert hat der Wald in 10 Jahren?
- Nach wie viel Jahren hat sich der Wert des Waldes halbiert?

Lösungshinweis:

$$\text{a) } K_0 = p_0 \cdot x_0 = 1.000.000 \quad \Rightarrow \quad K_{10} = \underbrace{p_0 \cdot (1,04^2)^{10}}_{\text{Preis in 10 J.}} \cdot \underbrace{x_0 \cdot e^{-0,1 \cdot 10}}_{\text{Waldbestand in 10 J.}} \approx 806.069$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} K_0 &= K_0 \cdot 1,04^{2 \cdot n} \cdot e^{-0,1 \cdot n} \\ \Rightarrow \ln \frac{1}{2} &= 2 \cdot n \cdot \ln 1,04 - 0,1 \cdot n \\ \Rightarrow n &\approx 32,15 \text{ Jahre} \end{aligned}$$

Aufgabe 80

Finanzmathematik: effektiv und nominal (FIMA.9)

Die Effektivverzinsung einer Anlage, die vierteljährlich verzinst wird, ist 6,14%. Wie hoch ist der (nominale) Jahreszinsfuß?

Lösungshinweis:

$$\left(1 + \frac{i}{4}\right)^4 = 1,0614 \quad \Rightarrow \quad i = \left(\sqrt[4]{1,0614} - 1\right) \cdot 4 = 0,06 = 6\%$$

Aufgabe 81

Für den Kauf einer Maschine stehen folgende Zahlungsalternativen zur Auswahl:

- a) 8.000 € sofort, 4 jährliche Raten zu je 2.000 €, zahlbar am Ende eines jeden Jahres
- b) vier jährliche Raten zu je 4.000 €, zahlbar am Ende eines jeden Jahres
- c) 5.000 € sofort, je 3.000 € am Ende des 2. und 3. Jahres und 5.000 € am Ende des 4. Jahres.

Für welche Zahlungsalternative (Barwertvergleich) soll man sich bei einem Zinssatz von 10% entscheiden?

Lösungshinweis:

$$\text{a) Kapitalwert: } 8000 + 2000 \frac{1}{1,1^4} \frac{1,1^4 - 1}{0,1} \approx 14.339,73$$

$$\text{b) Rentenbarwert: } 4000 \cdot \frac{1}{1,1^4} \cdot \frac{1,1^4 - 1}{0,1} \approx 12.679,40$$

$$\text{c) Kapitalwert: } 5000 + \frac{3000}{1,1^2} + \frac{3000}{1,1^3} + \frac{5000}{1,1^4} \approx 13.148,35$$

Also: Variante (2) ist am günstigsten

Aufgabe 82

Finanzmathematik: Rente auf einmal (FIMA.12)

Ein heute 55-jähriger Arbeitnehmer hat in 10 Jahren einen Anspruch auf eine monatliche Betriebsrente von 500 €, die vorschüssig bezahlt wird. Durch welche Gegenleistung kann sie heute bei einem Zinssatz von 6% abgelöst werden, wenn die Lebenserwartung von 77 Jahren angenommen wird.

Lösungshinweis:

$$r_e = 500 \left(12 + 0,06 \cdot \frac{13}{2} \right) = 6195,00 \text{ €}$$
$$\text{Rente ab 65: } R_0 = r_e \cdot \frac{q^{12} - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^{12}} \approx 51.937,91 \text{ €}$$
$$\text{heute: } \frac{R_0}{q^{10}} \approx 29.001,86 \text{ €}$$

Ein Bausparer hat einen Bausparvertrag über 50.000 € Bausparsumme abgeschlossen. Der Habenzins beträgt 3%. Der Bausparvertrag ist zuteilungsreif, wenn 40% der Bausparsumme eingezahlt sind.

- a) Nach wieviel Jahren ist der Bausparvertrag zuteilungsreif, wenn
- ▶ 3.000 € jährlich nachschüssig
 - ▶ 3.000 € jährlich vorschüssig
 - ▶ 300 € monatlich nachschüssig einbezahlt werden?
- b) Welche Sparrate muß der Bausparer
- ▶ jährlich nachschüssig
 - ▶ jährlich vorschüssig
 - ▶ monatlich nachschüssig
- leisten, damit der Vertrag in vier Jahren zuteilungsreif ist?

Lösungshinweis:

- a) ▶ 3000 € jährlich nachschüssig:

$$20.000 = 3000 \frac{1,03^n - 1}{0,03} \Rightarrow 1,03^n = 1,2 \Rightarrow n \approx 6,17 \text{ Jahre}$$

- ▶ 3000 € jährlich vorschüssig:

$$20.000 = 3000 \cdot 1,03 \cdot \frac{1,03^n - 1}{0,03} \Rightarrow n = \frac{\ln 1,194}{\ln 1,03} \approx 6 \text{ Jahre}$$

- ▶ 300 € monatlich nachschüssig:

$$r_e = 300 \left(12 + 0,03 \cdot \frac{11}{2} \right) = 3649,50 \Rightarrow n = 5,15 \text{ Jahre}$$

- b) wie a), jetzt r gesucht

- ▶ jährlich nachschüssig: $r = 4780,54 \text{ €}$
- ▶ jährlich vorschüssig: $r = 4641,30 \text{ €}$
- ▶ monatlich nachschüssig: $r_e = 4780,54 \Rightarrow r = 392,97 \text{ €}$

Aufgabe 84

Finanzmathematik: Einholen mit Vorsprung (FIMA.14)

Das Vermögen von A ist mit 100.000 € doppelt so hoch wie das Vermögen von B. A spart jährlich 4.000 € nachschüssig, während B 8.000 € spart. Die jährliche Verzinsung ist 6%.

- Nach wie vielen Jahren sind die Vermögen von A und B gleich hoch?
- Wie hoch muss die jährliche Sparleistung von B sein, damit er in 10 Jahren das gleiche Vermögen wie A hat?

Lösungshinweis:

$$\text{a) } 100.000 \cdot 1,06^n + 4000 \frac{1,06^n - 1}{0,06} = 50.000 \cdot 1,06^n + 8000 \frac{1,06^n - 1}{0,06} \Rightarrow n \approx 23,79$$

$$\text{b) } \underbrace{50.000 \cdot 1,06^{10}}_{\text{Vorsprung von A}} = (r_b - \underbrace{4000}_{\text{Sparrate von A}}) \cdot \frac{1,06^{10} - 1}{0,06} \Rightarrow r_B = 10.793,40 \text{ €}$$

Aufgabe 85

Jemand möchte von seinem 63. Geburtstag an 20 Jahre lang eine jährliche nachschüssige Rente in Höhe von 20.000 € ausbezahlt bekommen. Welchen Betrag muß er dafür 30 Jahre lang bis zu seinem 63. Geburtstag monatlich vorschüssig einbezahlen? Der Zinsfuß betrage 5,5% jährlich.

Lösungshinweis:

$$\begin{aligned} R_0 &= 20.000 \cdot \frac{1,05^{20} - 1}{0,055} \cdot \frac{1}{1,055^{20}} \\ &= 239.007,65 \text{ €} \\ &= r \left(12 + 0,055 \frac{13}{2} \right) \cdot \frac{1,055^{30} - 1}{0,055} \\ \Rightarrow r &= 267,01 \text{ €} \end{aligned}$$

Aufgabe 86

Finanzmathematik: Achtung: unterjährige Zinsen (FIMA.17)

Welches Kapital benötigt man heute, wenn daraus 5 Jahre lang zu jedem Quartalsbeginn eine Spende von 1000 € überwiesen werden soll? Die vierteljährliche Verzinsung ist 1%.

Lösungshinweis:

$$R_0 = 1000 \cdot \frac{1,01^{20} - 1}{0,01} \cdot 1,01 \cdot \frac{1}{1,01^{20}} \approx 18.226,00 \text{ €}$$

Aufgabe 87

In einer Pensionszusage wird eine Rente über 5000 € zu Beginn eines Quartals 10 Jahre lang bezahlt. Welchen Betrag muss die Firma bei einem Jahreszinssatz von 5% am Anfang der Rentenzahlungen für die Pensionsrückstellung (Barwert) einsetzen?

Lösungshinweis:

$$r_e = 5000 \cdot \left(4 + 0,05 \cdot \frac{5}{2}\right) = 20.625 \quad \Rightarrow \quad R_0 = 159.260,77 \text{ €}$$

Aufgabe 88

Ein Unternehmen nimmt einen Kredit über 500.000 € zu 7% Zins auf. Der Kredit ist in fünf Jahren mit gleichbleibenden Tilgungsraten zu tilgen. Erstellen Sie den Tilgungsplan.

Lösungshinweis:

$$T = \frac{1}{5} \cdot 500.000 = 100.000$$

Jahr	R_k	Z_k	T	A_k
1	500.000	35.000	100.000	135.000
2	400.000	28.000	100.000	128.000
3	300.000	21.000	100.000	121.000
4	200.000	14.000	100.000	114.000
5	100.000	7.000	100.000	107.000
6	0	0	0	0

Aufgabe 89

Finanzmathematik: Ratentilgung punktuell (FIMA.21)

Eine GmbH nimmt einen Kredit über 2.000.000 € zu 10% Zins auf, der mit gleichbleibenden Tilgungsraten in 20 Jahren zu tilgen ist. Berechnen Sie

- die Restschuld am Anfang des 10. Jahres,
- die Restschuld nach 15 Jahren,
- den Zinsbetrag im 12. Jahr und
- die Aufwendungen im 18. Jahr.

Lösungshinweis:

- $R_{10} = 100.000 \cdot (20 - 10 + 1) = 1.100.000$
- $R_{15} = 100.000 \cdot (20 - 16 + 1) = 500.000$
- $Z_{12} = 100.000(20 - 12 + 1) \cdot 0,1 = 90.000$
- $A_{18} = t + Z_{18} = 130.000$

Aufgabe 90

Ein Auto, das 57.000 € kostet, soll durch einen Kredit finanziert werden. Die Hausbank bietet einen Kredit, der in zwei gleich hohen jährlichen Tilgungsraten zurückzuzahlen ist, mit folgenden Konditionen an: Zins p.a. 8%, Auszahlung 90%. Wie hoch ist der Effektivzinsfuß für den Kredit?

Lösungshinweis:

$$\begin{aligned} S &= \frac{57.000}{0,9} \quad \text{und} \quad T = \frac{S}{2} \quad \text{und} \quad 57.000 = S \cdot 0,9 = \frac{A_1}{q} + \frac{A_2}{q^2} \\ \Rightarrow A_1 &= S \cdot 1/2 + S \cdot 0,08 = S \cdot 0,58 \\ \text{und} \quad A_2 &= S \cdot 1/2 + S \cdot 1/2 \cdot 0,08 = S \cdot 0,54 \\ \Rightarrow S \cdot 0,9 &= \frac{S \cdot 0,58}{q} + \frac{S \cdot 0,54}{q^2} \\ \Rightarrow q^2 &= \frac{0,58}{0,9} \cdot q + \frac{0,54}{0,9} \\ \Rightarrow q_{1/2} &= \frac{58 \pm \sqrt{58^2 + 4 \cdot 90 \cdot 54}}{2 \cdot 90} \approx \begin{cases} 1,1612 & (> 0 \rightarrow \text{OK}) \\ \dots & (< 0) \end{cases} \\ \Rightarrow i &\approx 0,1612 = 16,12\% \end{aligned}$$

Aufgabe 91

Eine Anleihe von 1.000.000 € soll mittels gleichbleibender Annuität zu 7% verzinst und innerhalb der nächsten 5 Jahre getilgt werden. Wie gestaltet sich der Tilgungsplan?

Lösungshinweis:

$$A = 1.000.000 \cdot \frac{1,07^5 \cdot 0,07}{1,07^5 - 1} \approx 243.890,69$$

Jahr	R_k	Z_k	T_k	A
1	1.000.000,00	70.000,00	173.890,69	243.890,69
2	826.109,31	57.827,65	186.063,04	243.890,69
3	640.046,26	44.803,24	199.087,46	243.890,69
4	440.958,81	30.867,12	213.023,58	243.890,69
5	227.935,23	15.955,47	227.935,23	243.890,69

Aufgabe 92

Ein festverzinsliches Wertpapier ist mit einem Kupon von 8 % p.a. und einem Rücknahmekurs von 103 % nach 15 Jahren ausgestattet. Welches ist der Preis (Kurs) des Wertpapiers bei einer Restlaufzeit von 7 Jahren unmittelbar nach der 8. Zinszahlung, wenn dem Erwerber eine dem dann herrschenden Marktzinsniveau entsprechende Umlaufrendite von 9 % garantiert wird?

Lösungshinweis:

$$C_8 = 1,09^{-7} \cdot \left(8 \cdot \frac{1,09^7 - 1}{1,09 - 1} + 103 \right) \approx 96,608$$

Aufgabe 93

Ein festverzinsliches Wertpapier ist mit einem Kupon von 7 % p.a. und einem Rücknahmekurs von 102 % nach 15 Jahren ausgestattet.

- Welches ist der Emissionskurs, wenn das herrschende Marktzinsniveau bei 8 % liegt?
- Die Steigung des Emissionskurses bei diesem Marktzins beträgt $C'_0(0,08) = -812,441$. Welches ist die modifizierte Duration?
- Welches ist die Elastizität des Emissionskurses bezüglich des Marktzinsniveaus?
- Wenn der Marktzins um $\Delta i = 0,001$ steigt: Auf welchen Wert sinkt C_0 näherungsweise?

Lösungshinweis:

- $C_0 = 1,08^{-15} \cdot \left(7 \cdot \frac{1,08^{15}-1}{1,08-1} + 102 \right) \approx 92,071$
- $MD = -\frac{C'_0}{C_0} \approx -\frac{-812,441}{92,071} \approx 8,82407$
- $\varepsilon_{C_0, 0,08} = -MD \cdot 0,08 \approx -8,82407 \cdot 0,08 \approx -0,7059$
- $C_0(0,08 + 0,001) \approx 92,071 \cdot (1 - 8,82407 \cdot 0,001) \approx 91,26$

Aufgabe 94

Finanzmathematik: Wertpapier: Kupon bestimmen (FIMA.26)

Eine Unternehmung will ein festverzinsliches Wertpapier emittieren, das dem Erwerber während der 15-jährigen Laufzeit einen Effektivzins von 9 % garantiert. Der Emissionskurs ist 96 %, der Rücknahmekurs 101%.

Mit welchem nominellen Zinssatz muss die Unternehmung das Papier ausstatten?

Lösungshinweis:

$$96 = 1,09^{-15} \cdot \left(p^* \cdot \frac{1,09^{15} - 1}{0,09} + 101 \right)$$
$$\Leftrightarrow p^* = (96 \cdot 1,09^{15} - 101) \cdot \frac{0,09}{1,09^{15} - 1} \approx 8,470$$

Anton Arglos hat von seiner Großmutter 30 000 € geschenkt bekommen, um sein Studium zu finanzieren. Nehmen Sie für die Aufgaben a) und b) an, dass Anton sein Studium ausschließlich aus dem Geldgeschenk finanziert und von einem konstanten, jährlichen Zins von 7 % ausgegangen werden kann. Stellen Sie Ihren Rechenweg jeweils ausführlich und nachvollziehbar dar!

- Wie lang darf Antons Studium dauern, wenn er jährlich nachschüssig 7000 € entnimmt?
- Anton fällt auf, dass er das Geld eigentlich jährlich vorschüssig benötigt, aber mit 5000 € jährlich auskommt. Wie lang kann sein Studium unter diesen Annahmen dauern?

Am Ende seines Studiums bemerkt der geschäftstüchtige Anton, dass er nun insgesamt ein Vermögen von 50 000 € besitzt. Anton bekommt ein Angebot seiner Hausbank, das Geld als Festgeld zum jährlichen Zinssatz von i_{Haus} anzulegen. Anton freut sich, da er nun weiß, dass er in 12 Jahren ein Endvermögen von 100 000 € besitzen wird.

- Wie hoch ist der Zinssatz i_{Haus} , den Anton von seiner Hausbank angeboten bekommt?
- Die Onlinebank Fastmoney bietet ihm eine Anlage zu einem monatlichen Zins (mit monatlicher Zinsausschüttung) von 0,5 % an. Soll er das Angebot von Fastmoney gegenüber dem Angebot seiner Hausbank bevorzugen? Nehmen Sie (unabhängig von Ihrer Lösung unter Aufgabe c) an, dass die Hausbank Anton einen jährlichen Zins von 6 % anbietet) Begründen Sie Ihre Empfehlung rechnerisch!

Anton entschließt sich, anstatt das Geld anzulegen ein Haus zu kaufen. Hierfür nimmt er zusätzlich einen Kredit von 200 000 € zu einem konstanten Zins von 8 % auf. Der Kredit ist mit gleichbleibenden Tilgungsraten in 20 Jahren zu tilgen.

- Wieviel Zinsen muss Anton im 15. Jahr bezahlen?

Lösungshinweis:

$$a) R_0 = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q^{-n} \Leftrightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{r}{r-i \cdot R_0}\right)}{\ln q} \Leftrightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{7000}{7000 - 0,07 \cdot 30000}\right)}{\ln 1,07} = 5,2716.$$

Das Geld reicht 5 Jahre.

$$b) R_n = r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} q^{-n} \Leftrightarrow 30000 = 5000 \cdot 1,07 \cdot \frac{1 - 1,07^{-n}}{0,07}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6 \cdot 0,07}{1,07} = 1,07^n - 1 \Leftrightarrow n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{6 \cdot 0,07}{1,07}\right)}{\ln 1,07} \approx 7,367.$$

das Geld reicht also in diesem Fall 7 Jahre.

c) $K_n = K_0(1 + i_{\text{Haus}})^n \Leftrightarrow i_{\text{Haus}} = \sqrt[12]{\frac{100000}{50000}} - 1 = \sqrt[12]{2} - 1 = 0,05946 \approx 5,95 \%$

d) Alternative 1: Über effektiven Jahreszins:

$$q_{\text{eff, Onlinebank}} = (1 + 0,005)^{12} \approx 1,0617 > 1,06 = q_{\text{eff, Hausbank}}.$$

Alternative 2: Über Endbetrag:

$$K_{n, \text{Onlinebank}} = 50\,000 \cdot (1 + 0,005)^{12 \cdot 12} = 102\,537,54$$

$$K_{n, \text{Hausbank}} = 50\,000 \cdot (1 + 0,06)^{12} = 100\,609,82$$

In jedem Fall: Anton sollte das Angebot der Fastmoney-Bank bevorzugen.

e) Restschuld zu Beginn des 15. Jahres: $200\,000 - 14 \cdot 10\,000 = 60\,000$. Damit ist der Zins im 15. Jahr: $60\,000 \cdot 0,08 = 4800$.

Aufgabe 96

Finanzmathematik: Wieviel kostet Manhattan? (FIMA_Manhattan)

Am 1. Januar des Jahres 1626 hat Peter Minuit, der damalige Gouverneur von Neu-Holland, die Insel Manhattan von indigenen Ureinwohnern gegen Glasperlen, Kleidung und Modeschmuck im Wert von 24 Dollar eingetauscht.

Wie hoch wäre der Wert dieser Summe am 1.1.2014 bei einem angenommenen nominalen jährlichen Zinssatz von 5% bei

- jährlicher (zinseszinslicher),
- monatlich anteilig unterjähriger bzw.
- stetiger Verzinsung?
- Wieviel hätte der durchschnittliche jährliche Zinssatz bei jährlich exponentieller Verzinsung betragen müssen, wenn der Wert von Manhattan heute bei 13 Billionen Dollar (Schätzung von New Yorker Immobilienmaklern für den reinen unbebauten Grundstückswert in 2014) liegen würde ?
- Wie lange hätten die Indianer mit dem Verkauf warten müssen, wenn sich der Wert von Manhattan von den 24 Dollar jährlich (exponentiell) um 15 % bis zu einem Wert von 1 Milliarde Dollar gesteigert hätte?

Lösungshinweis:

- $24 \cdot 1,05^{2014-1626} \approx 3996311022,2$
- $24 \cdot (1 + 0,05/12)^{12 \cdot (2014-1626)} \approx 6137903568,98$
- $24 \cdot e^{(2014-1626) \cdot 0,05} \approx 6390343312,05$
- $\left(\frac{13.000.000.000.000}{24}\right)^{(1/(2014-1626))} \approx 1,0721$
- $\frac{\ln\left(\frac{1.000.000.000}{24}\right)}{\ln 1,15} \approx 125,5$

Aufgabe 97

Die Eltern von Susi Sorglos möchten ihr ein Studium finanzieren. Dazu schenken sie ihr an ihrem sechsten Geburtstag, dem 1. Januar 2003, eine Kapitalversicherung. Die Eltern verpflichten sich dabei, jährlich vorschüssig ab diesem Datum und an jedem der folgenden Geburtstage einen Betrag von 312 € auf das Versicherungskonto einzuzahlen. Die letzte Einzahlung erfolgt an Susis 18. Geburtstag.

(Gehen Sie im Folgenden von Ein- und Auszahlungen auf ein Konto mit einem konstanten jährlichen Zinssatz von 6% aus.)

- Über welchen Betrag kann Susi nach der letzten Einzahlung am 1. Januar 2015 verfügen?
- Susi rechnet damit, dass sie ab dem 1. Januar 2015 bis zum Bachelor 3 Jahre studieren wird. Über welchen Betrag könnte sie monatlich nachschüssig verfügen, wenn Ihr Vermögen zum Beginn Ihres Studiums 10 000 € beträgt?
- Susi entschließt sich an Ihrem 18. Geburtstag auf die Zuwendung ihrer Eltern zu verzichten, nicht zu studieren und gleich mit ehrlicher Arbeit Geld zu verdienen. Sie möchte erst einige Jahre sparen, dabei rechnet sie damit, pro Jahr 3000 € nachschüssig zurücklegen zu können. Von dem angesparten Geld und den Zinsen (6 % p.a.) möchte sie vor Ihrem 40. Geburtstag eine mehrjährige Weltreise unternehmen.
Wie viele Jahre muss sie arbeiten, bis sie von dem angesparten Geld bis zu Ihrem 40. Geburtstag jährlich nachschüssig 30 000 € entnehmen kann?
(Hinweise: Überlegen Sie wie lange das Projekt insgesamt dauert und setzen sie den Endwert der Ansparphase gleich dem Barwert der Weltreisephase.)

Lösungshinweis:

- a) Vorschüssige Rente plus die letzte Zahlung am 18. Geburtstag:

$$R_n = 312 \cdot \frac{1,06^{12}-1}{1,06-1} \cdot 1,06 + 312 = 5891,23 \text{ €}$$

- b) $r_e = r \cdot (12 + 0,06 \cdot \frac{11}{2}) = r \cdot 12,33$ und $R_0 = 10.000 = r_e \cdot \frac{1,06^3-1}{1,06-1} \cdot 1,06^{-3}$; damit:

$$r = 10000 \cdot \frac{0,06}{12,33 \cdot (1 - 1,06^{-3})} = 303,41 \text{ €}$$

- c) Endwert Ansparphase ist gleich Barwert Weltreisephase. Gesamtdauer Projekt: 22 Jahre, x Jahre ansparen, $22 - x$ Jahre entnehmen:

$$3000 \cdot \frac{1,06^x - 1}{1,06 - 1} = 30\,000 \frac{1,06^{22-x} - 1}{1,06 - 1} \cdot 1,06^{x-22}$$

$$1,06^x - 1 = 10 \cdot (1 - 1,06^{x-22})$$

$$1,06^x + 10 \cdot 1,06^x \cdot 1,06^{-22} = 11$$

$$1,06^x = \frac{11}{1 + 10 \cdot 1,06^{-22}}$$

$$x = \ln\left(\frac{11}{1+10 \cdot 1,06^{-22}}\right) / \ln 1,06 \approx 18,3542377$$

Die Weltreise kann nach der 19. Ansparzahlung, also am 37. Geburtstag starten, Susi kann bis zum 40. Geburtstag damit 3 Jahre auf Weltreise bleiben, bis das Konto vollständig geplündert ist.

Aufgabe 98

Sven Sonnehr hat sich mit einer Spaßpartei als Kandidat für das Europaparlament aufstellen lassen und nach dem Wegfall der 3 %-Hürde tatsächlich ein Mandat als Abgeordneter ergattert.

Sein Plan sieht folgendermaßen aus: Er möchte auf keinen Fall sinnvoll am politischen Geschehen teilnehmen, sondern nur von seinen Privilegien als Parlamentarier profitieren. Er freut sich neben dem monatlichen (steuerfreien) Gehalt auch auf eine zusätzliche Pauschale (ebenfalls steuerfrei), die er erhält, ohne über deren Verwendung Rechenschaft ablegen zu müssen. Daneben bekommt er weitere Zulagen, Sitzungsgelder, Erstattungen für Fahrten und Geld für abrechenbare Sachaufwendungen sowie Übergangsgeld nach dem Ausscheiden.

Er schätzt, dass er dadurch ab dem 1.1.2015 nach Abzug seiner Kosten 5 Jahre lang jährlich nachschüssig Netto 180 000 € auf ein mit 3 % verzinstes Konto einzahlen kann.

- a) Welche Summe hätte er auf diese Weise bis zum 1.1.2020 angespart?

Anschließend möchte er von diesem Konto monatlich Geld entnehmen.

- b) Welchen konstanten Betrag könnte er pro Monat ab dem 1.1.2020 vorschüssig entnehmen, wenn das Kapital 55 Jahre lang (bis zu seinem 90. Lebensjahr) reichen soll?
c) Wie lange würde das angesparte Kapital ab dem 1.1.2020 reichen, wenn Sven pro Monat vorschüssig 4000 € entnimmt?
d) Wie lange würde es reichen, wenn er pro Monat vorschüssig 2300 € entnimmt?

Lösungshinweis:

- a) Nachschüssiger Rentenendwert: $R_n = 180000 \cdot \frac{1,03^5 - 1}{1,03 - 1} \approx 955644,45 \text{ €}$.

- b) Rentenendwert Ansparphase = (monatlich vorschüssiger) Rentenbarwert Entnahmephase;
gesucht: monatliche Rate r :

$$R_n = r \cdot \underbrace{\left(12 + i \cdot \frac{13}{2}\right)}_{r_e} \cdot q^{-55} \cdot \frac{q^{55} - 1}{q - 1} \Leftrightarrow r = R_n \frac{q - 1}{(1 - q^{-55}) \cdot \left(12 + i \cdot \frac{13}{2}\right)} \approx 2926,81 \text{ €}$$

- c) Wie b), jetzt Laufzeit n unbekannt und $r = 4000$:

$$\begin{aligned} R_n &= 4000 \cdot \left(12 + i \cdot \frac{13}{2}\right) \cdot q^{-n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \Leftrightarrow R_n = 4000 \cdot \left(12 + i \cdot \frac{13}{2}\right) \cdot \frac{1 - q^{-n}}{q - 1} \\ \Leftrightarrow q^{-n} &= 1 - \frac{R_n \cdot i}{4000 \cdot \left(12 + i \cdot \frac{13}{2}\right)} \\ \Leftrightarrow n &= -\frac{1}{\ln q} \cdot \ln \left[1 - \frac{R_n \cdot i}{4000 \cdot \left(12 + i \cdot \frac{13}{2}\right)} \right] \approx 29,97652 \approx 30 \text{ Jahre} \end{aligned}$$

- d) $2300 \cdot \left(12 + i \cdot \frac{13}{2}\right) / R_n \approx 0,029 < 3\%$. Damit reicht das Kapital ewig. (Alternativ: Argument des Logarithmus in Formel negativ, deswegen reicht Kapital ewig)

Lineare Algebra

Aufgabe 99

Lineare Algebra: Rechnen mit Matrizen (A4.2)

Gegeben sind die Matrizen A, B, C sowie die Vektoren a, b mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Prüfen Sie, welche der folgenden Ausdrücke berechenbar sind, und berechnen Sie sie gegebenenfalls.

- | | |
|-------------------|-------------------|
| a) $(A + B)a$, | e) $ab^T A$, |
| b) ABb , | f) $(a + b)b^T$, |
| c) $(B + C^T)a$, | g) CAB , |
| d) $BA(a + b)$, | h) $a^T B^T C b$ |

Lösungshinweis:

- ▶ $(A + B)a$: Nicht möglich,
- ▶ ABb : Nicht möglich,
- ▶ $(B + C^T)a = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$,
- ▶ $BA(a + b)$: Nicht möglich,
- ▶ $ab^T A = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -4 & -8 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$,
- ▶ $(a + b)b^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,
- ▶ CAB : Nicht möglich,
- ▶ $a^T B^T C b = -8$

Aufgabe 100

Eine Unternehmung produziert mit Hilfe von fünf Produktionsfaktoren F_1, \dots, F_5 zwei Zwischenprodukte Z_1, Z_2 , sowie mit diesen Zwischenprodukten und den Faktoren F_1, F_2, F_3 drei Endprodukte P_1, P_2, P_3 .

In den Matrizen $A = (a_{ij})_{5,2}$, $B = (b_{ik})_{5,3}$, $C = (c_{jk})_{2,3}$ bedeute

a_{ij} = Anzahl der Einheiten von F_i zur Herstellung einer Einheit von Z_j ,

b_{ik} = Anzahl der Einheiten von F_i zur Herstellung einer Einheit von P_k ,

c_{jk} = Anzahl der Einheiten von Z_j zur Herstellung einer Einheit von P_k .

a) Bestimmen Sie mit den Daten

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

den Vektor $y \in \mathbb{R}_+^5$ von Produktionsfaktoren, der erforderlich ist, um eine Einheit von P_k zu fertigen (für $k = 1, 2, 3$).

b) Welche Faktormengen braucht man, um den Endproduktvektor $(30, 20, 30)$ zu realisieren?

c) Berechnen Sie mit den Vektoren

$c^T = (1, 1, 2, 3, 1)$ für die Beschaffungskosten der Faktoren,

$q^T = (15, 20, 10)$ für die Produktionskosten der Produkte,

$p^T = (40, 50, 40)$ für die Verkaufspreise der Produkte,

die Gesamtkosten, den Umsatz und den Gewinn des Endproduktvektors $(30, 20, 30)$.

Lösungshinweis:

- Produktion seriell: AC , Produktion parallel: $B + AC$

- Damit: Faktorenbedarf $y \in \mathbb{R}_+^5$ für Endproduktvektor $x \in \mathbb{R}_+^3$:

$$y = (B + AC)x$$

a) $AC + B = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 \\ 7 & 8 & 10 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = D$

Damit benötigt man für jede Einheit von P_1, P_2, P_3 :

$$y^1 = D \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad y^2 = D \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad y^3 = D \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

b) $y = D \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 \\ 670 \\ 270 \\ 160 \\ 240 \end{pmatrix}$

c) Kosten: $c^t y + q^t x = 2350 + 1150 = 3500$

Umsatz: $p^t x = 3400$

Gewinn: $p^t x - c^t y - q^t x = -100$

Gegeben sind die folgenden Punkt Mengen $\in \mathbb{R}^2$:

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{N}, x_2^2 = x_1 \right\}$$

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in (0,1), x_2 \geq 0 \right\}$$

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0, x_1 x_2 = 1 \right\}$$

$$M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq x_2^3, x_2 \geq 0 \right\}$$

$$M_5 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \geq 1, (1, -1)x = 0\}$$

- a) Man stelle alle Mengen graphisch dar und prüfe mit Hilfe der Zeichnung, welche der Mengen offen, abgeschlossen, beschränkt, konvex ist.
- b) Welche der paarweisen Durchschnitte sind leer?

Lösungshinweis:

a) $M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{N}, x_2^2 = x_1 \right\}$

M_1 : abgeschlossen, nicht offen, nicht konvex, nicht beschränkt

$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in (0,1), x_2 \geq 0 \right\}$

M_2 : nicht abgeschlossen, nicht offen, konvex, nach unten beschränkt

$M_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0, x_1 x_2 = 1\}$

$M_3 = \emptyset$: offen, abgeschlossen, konvex, beschränkt

$M_4 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq x_2^3, x_2 \geq 0\}$

M_4 : nicht offen, abgeschlossen, konvex, nicht beschränkt, aber nach unten beschränkt

$M_5 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| > 1, x_1 - x_2 = 0\}$

M_5 : abgeschlossen, nicht offen, nicht konvex, nicht beschränkt

b) $M_1 \cap M_2 = \emptyset$

$M_1 \cap M_3 = \emptyset$

$M_2 \cap M_3 = \emptyset$

$M_3 \cap M_4 = \emptyset$

$M_3 \cap M_5 = \emptyset$

Aufgabe 102

Eine Unternehmung bietet zwei Güter an. Zwischen den Absatzquantitäten x_t, y_t zum Zeitpunkt t und x_{t+1}, y_{t+1} zum Zeitpunkt $t + 1$ wird folgende Verbundbeziehung angenommen:

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= 1.2 x_t - 0.2 y_t \\y_{t+1} &= 0.05 x_t + y_t\end{aligned}$$

Es soll untersucht werden, ob ein für beide Güter gleichförmiges Absatzwachstum möglich ist.

- Man formuliere das Problem als Eigenwertproblem.
- Man berechne Eigenwerte und Eigenvektoren und interpretiere die Ergebnisse.
- Wie viele Zeitperioden benötigt man bei gleichförmigem Wachstum in jeder Periode, um eine Steigerung der Absatzquantitäten um mindestens 100 % zu erreichen?
- Wie könnte ein Ergebnis interpretiert werden, das keine reellen Eigenwerte enthält?

Lösungshinweis:

Es gilt:

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 & -0.2 \\ 0.05 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$$

a) Gleichförmiges Wachstum: $A \cdot \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$

b) $\det(A - \lambda E) = (1.2 - \lambda)(1 - \lambda) + 0.2 \cdot 0.05$
 $= \lambda^2 - 2.2\lambda + 1.21 = 0 \iff \lambda = 1.1$

EV: $(A - 1.1 \cdot E) \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_t = 2y_t \Rightarrow EV = a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a \neq 0$

Bedeutung: Gleichförmiges Wachstum um 10 % pro Periode bei doppelter Absatzmenge von x_t in Relation zu y_t

c) $1.1^n \geq 2 \Rightarrow n = \log_{1.1}(2) \approx 7.27 \Rightarrow$ mind. 8 Perioden

Aufgabe 103

Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$
$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

nach dem Entwicklungssatz und der Sarrus-Regel. Was ergibt sich aus den Ergebnissen für die Ränge der Matrizen A, B, C, D ?

Lösungshinweis:

A) $\det(A) = -55$

B) $\det(B) = 0$

C) Entwicklung nach 3. Spalte:

$$\begin{aligned} \det(C) &= (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &\quad + (-1)^{3+3} \cdot 0 + (-1)^{4+3} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (1) \cdot 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \cdot 0 \\ &\quad + (1) \cdot 0 + (-1) \cdot 2 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

D) Entwicklung nach 3. Spalte:

$$\begin{aligned} \det(D) &= (-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 0 \\ &\quad + (-1)^{3+3} \cdot 0 + (-1)^{4+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad + (-1)^{5+3} \cdot 0 \\ &= (1) \cdot 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 \\ &\quad + (1) \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \cdot -16 \\ &\quad + (1) \cdot 0 \\ &= 24 \end{aligned}$$

Dabei ist (mit Entwicklung nach der dritten Spalte)

$$\begin{aligned}
\det(D_{13}) &= (-1)^{1+4} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\quad + (-1)^{2+4} \cdot 0 + (-1)^{3+4} \cdot 0 \\
&\quad + (-1)^{4+4} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= (-1) \cdot 1 \cdot 9 \\
&\quad + (1) \cdot 0 + (-1) \cdot 0 \\
&\quad + (1) \cdot 1 \cdot 13 \\
&= 4
\end{aligned}$$

bzw. (mit Entwicklung nach der ersten Zeile)

$$\begin{aligned}
\det(D_{43}^T) &= (-1)^{1+1} \cdot 0 + (-1)^{2+1} \cdot -1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\quad + (-1)^{3+1} \cdot 0 + (-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (1) \cdot 0 + (-1) \cdot -1 \cdot -6 \\
&\quad + (1) \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \cdot 10 \\
&= -16
\end{aligned}$$

Damit sind die Ränge von A , D voll, die von B , C nicht, also
 $\text{rang}(A) = 3$, $\text{rang}(D) = 5$, aber
 $\text{rang}(B) < 3$, $\text{rang}(C) < 4$

Man berechne alle reellen Eigenwerte und die dazu gehörenden Eigenvektoren der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Lösungshinweis:

$$\begin{aligned} \text{A) } \det(A - \lambda E) &= (1 - \lambda)^3 - (-3(1 - \lambda)) \\ &= (1 - \lambda)((1 - \lambda)^2 + 3) \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 4) = 0 \end{aligned}$$

Also einziger reeller Eigenwert $\lambda = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Eigenvektor: } (A - \lambda E)x = 0 &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff x_3 = -x_1, x_2 = \frac{1}{3}x_1 \\ &\Rightarrow EV = \begin{pmatrix} 3a \\ a \\ -3a \end{pmatrix}, a \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{B) } \det(B - \lambda E) &= (2 - \lambda)^2 \cdot (1 - \lambda) - (1 - \lambda) = -(1 - \lambda)^2(\lambda - 3) \\ &\text{doppelte Nullstelle bei } \lambda_{1,2} = 1 \Rightarrow 2 \text{ Eigenvektoren zu diesem Eigenwert:} \end{aligned}$$

Eigenvektor zu $\lambda_{1,2} = 1$:

$$\begin{aligned} (B - \lambda_{1,2}E)x = 0 &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff x_1 = -x_2, x_3 \text{ beliebig} \\ &\Rightarrow EV_1 = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, a \neq 0, \Rightarrow EV_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, b \neq 0 \end{aligned}$$

Eigenvektor zu $\lambda_3 = 3$:

$$\begin{aligned} (B - \lambda_3 E)x = 0 &\iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff x_1 = x_2, x_3 = 0 \\ &\Rightarrow EV_3 = \begin{pmatrix} c \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, c \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{C) } \det(C - \lambda E) &= (1 - \lambda)^2(-2 - \lambda) - 2 - 2 - (1 - \lambda + 1 - \lambda + 4(-2 - \lambda)) \\ &= -\lambda^3 + 9\lambda = \lambda(9 - \lambda^2) = \lambda(3 - \lambda)(3 + \lambda) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -3:$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 0$

$$\begin{aligned}(C - \lambda_1 E)x = 0 &\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \text{(mit Gau\ss-Alg.) } x_1 = x_3, x_2 = -x_3 \\ &\Rightarrow EV_1 = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a \end{pmatrix}, a \neq 0\end{aligned}$$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = 3$

$$\begin{aligned}(C - \lambda_2 E)x = 0 &\iff \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \text{(mit Gau\ss-Alg.) } x_1 = x_2, x_3 = 0 \\ &\Rightarrow EV_2 = \begin{pmatrix} b \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, b \neq 0\end{aligned}$$

Eigenvektor zu $\lambda_3 = -3$

$$\begin{aligned}(C - \lambda_3 E)x = 0 &\iff \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \text{(mit Gau\ss-Alg.) } x_1 = -\frac{1}{2}x_2, x_2 = \frac{1}{2}x_3 \\ &\Rightarrow EV_3 = \begin{pmatrix} -c \\ c \\ 2c \end{pmatrix}, c \neq 0\end{aligned}$$

Aufgabe 105

Man bestimme eine symmetrische 3×3 -Matrix, deren Eigenwerte und entsprechende Eigenvektoren wie folgt gegeben sind:

Eigenwert	zugehöriger Eigenvektor
$\lambda_1 = 1$	$(1, 1, 0)$
$\lambda_2 = -1$	$(1, -1, 0)$
$\lambda_3 = 0$	$(0, 0, 1)$

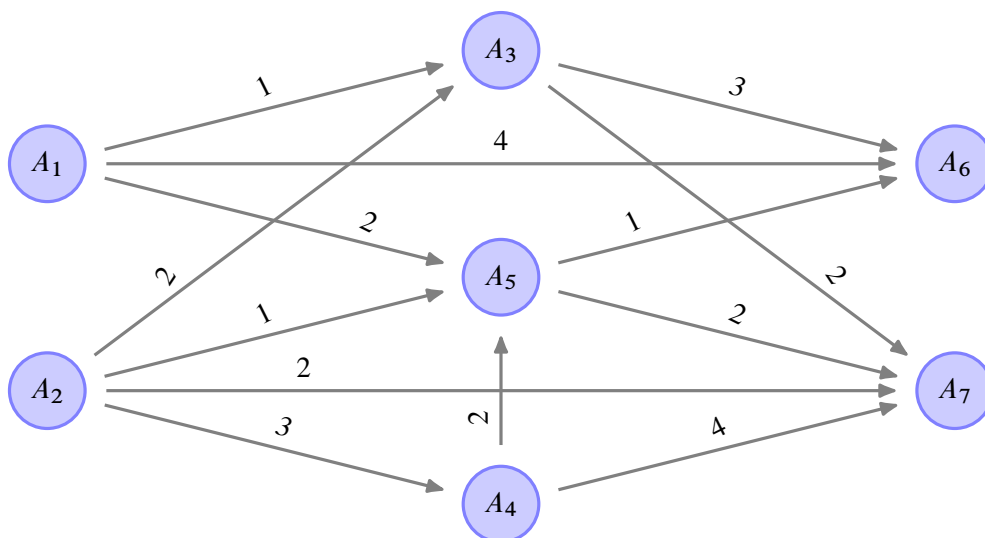
Lösungshinweis:

Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 106

Lineare Gleichungssysteme: Gozintograph (A4.7)

Aus den Werkstoffen A_1, A_2 werden Zwischenprodukte A_3, A_4, A_5 und Endprodukte A_6, A_7 hergestellt. Die nachfolgende Graphik stellt die Verknüpfungen dar.



Die Pfeilbewertung a_{ij} mit $A_i \xrightarrow{a_{ij}} A_j$ gibt an, wie viele Mengeneinheiten von A_i zur Herstellung einer Einheit A_j benötigt werden.

Wie viele Einheiten von A_1, A_2, A_3, A_4 werden benötigt, wenn von A_5, A_6, A_7 genau 50, 200, 120 Einheiten verkauft werden können?

Lösungshinweis:

Sei x_i ($i = 1, \dots, 7$) der Gesamtbedarf (+ Verkauf) von A_i .

Dann ergibt sich der Reihe nach:

$$x_7 = 120, x_6 = 200, x_5 = 490,$$

$$x_4 = 1460, x_3 = 840, x_2 = 6790, x_1 = 2620$$

Aufgabe 107

- a) Welche der folgenden Aussagen über lineare Gleichungssysteme sind wahr bzw. falsch? (Begründen Sie Ihre Antwort!)
- Ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Variablen ist stets lösbar.
 - Ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Variablen ist nicht immer lösbar.
 - Wenn ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Variablen lösbar ist, dann ist die Lösung eindeutig.
 - Ein lineares Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Variablen ist nicht lösbar.
 - Ein lineares Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Variablen kann eindeutig lösbar sein.
- b) Für ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ sei die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ durch

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}$$

gegeben.

- Geben Sie die allgemeine Lösung des homogenen Systems ($b = 0$) sowie eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems an.
- Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das gegebene Gleichungssystem lösbar?
- Gibt es ein $a \in \mathbb{R}$, so dass $x^T = (1, -1, 2, 1, 0)$ das Gleichungssystem $Ax = b$ löst?

Lösungshinweis:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$x_3 = x_4 = 0, x_5 = 1, x_1 = -2, x_2 = -1, x_1, x_2$ -Basis, x_3, x_4, x_5 -Nicht-Basis

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
(1)	1	1	2	0	4	a
(2)	0	1	1	0	2	1
	1	0	1	0	2	$a - 1$ (1) - (2)
	0	1	1	0	2	1 (2)

- ▶ Spezielle Lösung des inhomogenen Systems (Startpunkt)
 $x_3 = x_4 = x_5 = 0 \Rightarrow x_s^T = (a - 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$
- ▶ Allgemeine Lösung des homogenen Systems (Richtungsvektoren):
 $x_3=1, x_4=0, x_5=0 \Rightarrow x_k^T = (-1 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0)$
 $x_3=0, x_4=1, x_5=0 \Rightarrow x_e^T = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)$
 $x_3=0, x_4=0, x_5=1 \Rightarrow x_m^T = (-2 \ -2 \ 0 \ 0 \ 1)$

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 : \begin{pmatrix} a-1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

\Rightarrow LGS ist für alle $a \in \mathbb{R}$ lösbar.

b.3) $x^T = (1 \ -1 \ 2 \ 1 \ 0)$

$$x_5 = 0 + 0 \cdot t_1 + 0 \cdot t_2 + 1 \cdot t_3 = 0 \quad \Rightarrow t_3 = 0$$

$$x_4 = 0 + 0 \cdot t_1 + 1 \cdot t_2 + 0 \cdot t_3 = 1 \quad \Rightarrow t_2 = 1$$

$$x_3 = 0 + 1 \cdot t_1 + 0 \cdot t_2 + 0 \cdot t_3 = 2 \quad \Rightarrow t_1 = 2$$

\Rightarrow Lösungsvektor: $a - 1 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) = 1 \Rightarrow a - 1 + (-2) = 1 \Rightarrow a = 4$

$$1 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) = -1$$

$$0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 2$$

$$0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$$

$$0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

Aufgabe 108

Die Abteilungen A_1, A_2, A_3 eines Betriebes sind durch mengenmäßige Leistungen a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) von A_i nach A_j gegenseitig verbunden. Jede der Abteilungen gibt ferner Leistungen b_i ($i = 1, 2, 3$) an den Markt ab und hat sogenannte Primärkosten c_i ($i = 1, 2, 3$) zu tragen. Gegeben seien folgende Daten:

$$A = (a_{ij})_{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 10 \\ 20 & 0 & 10 \\ 30 & 10 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 70 \\ 60 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 170 \\ 60 \end{pmatrix}$$

- Formulieren Sie mit den Variablen x_1, x_2, x_3 für die innerbetrieblichen Verrechnungspreise ein lineares Gleichungssystem für ein innerbetriebliches Kostengleichgewicht der Abteilungen A_1, A_2, A_3 .
- Lösen Sie das Gleichungssystem von a) und interpretieren Sie das Ergebnis.

Lösungshinweis:

a)

Abteilung	Sek.kost. für abgegebene Leistungen	Sekundärkosten für erhaltene Leistg. + Primärkosten
A_1	$x_1(40 + 10 + 10)$	$= 50 + 20x_2 + 30x_3$
A_2	$x_2(70 + 20 + 10)$	$= 170 + 10x_1 + 10x_3$
A_3	$x_3(60 + 30 + 10)$	$= 60 + 10x_1 + 10x_2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 60x_1 - 20x_2 - 30x_3 &= 50 \\ -10x_1 + 100x_2 - 10x_3 &= 170 \\ -10x_1 - 10x_2 + 100x_3 &= 60 \end{aligned}$$

- b) Gaußalgorithmus liefert:
- $x_3 = 1$ (Verrechnungspreis Abteilung A_1),
 - $x_2 = 2$ (V.P. Abt. A_2),
 - $x_1 = 2$ (A_3)

Aufgabe 109

Gegeben sind die beiden folgenden Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{l} (G_1) \quad x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ \quad \quad x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ \quad \quad x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} (G_2) \quad 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ \quad \quad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ \quad \quad 2x_1 \quad \quad + x_3 = 1 \end{array}$$

- Welches der beiden Gleichungssysteme besitzt keine Lösung, eine eindeutige Lösung, unendlich viele Lösungen?
- Wie verändert sich die Lösungsmenge von (G_1) , wenn die Gleichung $-x_1 + x_2 + x_3 = 2$ zusätzlich berücksichtigt werden soll?
- Wie verändert sich die Lösungsmenge von (G_2) , wenn die Gleichung $2x_1 + x_3 = 1$ entfallen soll?
- Bestimmen Sie für (G_1) und (G_2) , falls möglich, eine Lösung mit $x_3 = 1$.

Lösungshinweis:

- G_1 : eindeutige Lösung mit $x_3 = 2, x_2 = 1, x_1 = 1$
 G_2 : unendlich viele Lösungen, z.B. der Form:
 $x_3 \in \mathbb{R}$ bel., $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3, x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_3$
- Einsetzen: $-x_1 + x_2 + x_3 = -1 + 1 + 2 = 2 \Rightarrow$ keine Veränderung der Lösung
3. Gleichung entfällt \Rightarrow Keine Veränderung der Lösungsmenge
- G_1 : $x_3 = 1 \Rightarrow$ Widerspruch, damit G_1 nicht lösbar.
- G_2 : $x_3 = 1 \Rightarrow X_1 = 0, x_2 = 1$. Damit ist G_2 eindeutig lösbar.

Aufgabe 110

Ein regionaler Markt wird von drei konkurrierenden Produkten P_1, P_2, P_3 beherrscht. Bezeichnet man mit $a_{ij} \in [0, 1]$ den Anteil von P_i -Käufern zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}$, der zum Zeitpunkt $t + 1 \in \mathbb{N}$ das Produkt P_j kauft, so charakterisiert die Matrix

$$A = (a_{ij})_{3,3} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

die anteiligen Käuferfluktuationen zwischen den Produkten. Ferner beschreibt der Vektor

$$x_1^T = (0,5, 0,5, 0)$$

die Marktanteile der Produkte P_1, P_2, P_3 zum Zeitpunkt $t = 1$.

- Interpretieren Sie die in A und x_1 enthaltenen Nullen.
- Berechnen Sie die Marktanteile der Produkte zu den Zeitpunkten $t = 2, 3$ und begründen Sie die Marktanteilszuwächse von P_3 mit Hilfe von A .
- Geben Sie eine stationäre Marktverteilung an, das heißt, für beliebiges $t \in \mathbb{N}$ sind x_t^T und $x_{t+1}^T = x_t^T A$ identisch.

Lösungshinweis:

- $a_{13} = a_{31} = 0$: Der Käuferanteil, der im Zeitpunkt $t + 1$ gegenüber t von P_1 nach P_3 bzw. von P_3 nach P_1 wechselt, ist 0.
 $x_{13} = 0$: Zum Zeitpunkt $t = 1$ ist der Marktanteil von P_3 gleich 0.
- $x_2^T = x_1^T A = (0,4, 0,5, 0,1)$
 $x_3^T = x_2^T A = (0,34, 0,48, 0,18)$
Wachsende Marktanteile von P_3 :
 $a_{23} = a_{32} = 0,2$: P_2 gibt an P_3 20% seines Marktanteils ab, ebenso P_3 an P_2 .
Andererseits ist der Marktanteil von P_3 für $t = 1, 2$ jeweils kleiner als der Marktanteil von P_2 .
Wegen $a_{13} = a_{31} = 0$ spielt dabei P_1 keine Rolle.
- $y = x_t = x_{t+1} \Rightarrow y^T = y^T A \Rightarrow y^T (E - A) = 0^T$ mit $y_1 + y_2 + y_3 = 1$
 \Rightarrow stationäre Marktverteilung
 $y^T = (0,2, 0,4, 0,4)$

Aufgabe 111

Ein Teegroßhändler führt drei Sorten Tee: *Darjeeling*, *Nepal* und *Java* mit den Anfangsbeständen x_1, x_2, x_3 .

Der Lagerbestand zu Beginn der ersten Woche beträgt 32 Tonnen. Nach der ersten (zweiten) Woche hat er 25 % (50 %) des Bestandes an Darjeeling und jeweils 20 % (40 %) des Bestandes an Nepal bzw. Java verkauft. Der Lagerbestand beträgt nach der ersten (zweiten) Woche 25 (18) Tonnen. Nach der dritten Woche hat er bei einem Gesamtlagerbestand von 5,2 Tonnen noch Vorräte von 10 % Darjeeling und jeweils 20 % Nepal bzw. Java (im Vergleich zu deren Anfangsbeständen).

- Formulieren Sie ein lineares Gleichungssystem mit den unbekannt Variablen x_1, x_2, x_3 , das alle gegebenen Informationen angemessen wiedergibt.
- Ermitteln Sie alle ökonomisch sinnvollen Lösungen des Gleichungssystems.
- Verwerten Sie – falls möglich – die zusätzliche Information, dass zu Beginn der ersten Woche der Vorrat an Darjeeling um 20 % höher war als der Vorrat an Nepal. Wie verändert sich damit die Lösung von b)?

Lösungshinweis:

- Lagerbestand zu Beginn: $x_1 + x_2 + x_3 = 32$
Lagerbestand nach der 1. Woche:
 $0,75x_1 + 0,8x_2 + 0,8x_3 = 25$
Lagerbestand nach der 2. Woche:
 $0,5x_1 + 0,6x_2 + 0,6x_3 = 18$
Lagerbestand nach der 3. Woche:
 $0,1x_1 + 0,2x_2 + 0,2x_3 = 5,2$
- Gaußalgorithmus liefert:
 $L = \{x \in \mathbb{R}_+^3 : x_1 = 12, x_2 + x_3 = 20\}$
- $x_1 = 1,2 \cdot x_2 = 12 \Rightarrow x_2 = 10 \Rightarrow x_3 = 10$

Aufgabe 112

Eine Brauerei stellt 3 Biersorten her: Hell, Pils und Bock. Die Herstellung erfordert eine Arbeitszeit von 2 Stunden für 1 hl Hell, 4 Stunden für 1 hl Pils und 5 Stunden für 1 hl Bock, wobei insgesamt genau Z Arbeitsstunden zu leisten sind. Das für Werbung bewilligte Budget beträgt 35.000 €, wobei die Werbekosten je hl Hell und Bock 1 € und bei Pils 2 € betragen. Der Gewinn pro hl beträgt 10 € bei Hell, 20 € bei Pils und 30 € bei Bock. Insgesamt soll ein Gewinn von 550.000 € erzielt werden.

- Formulieren Sie das gegebene Gleichungssystem.
- Ermitteln Sie die ökonomisch sinnvolle Lösungsmenge. (Hinweis: die zu produzierenden Einheiten an hl Bier sind nicht negativ). Für welchen Arbeitseinsatz Z gibt es keine Lösung, genau eine Lösung, mehrere Lösungen?
- Skizzieren Sie das in b) erhaltene Ergebnis.

Lösungshinweis:

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}_+$: Biermenge in hl für Hell (x_1), Pils (x_2) und Bock (x_3)

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= Z && \text{(Arbeitszeit)} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 35000 && \text{(Werbung)} \\ 10x_1 + 20x_2 + 30x_3 &= 550000 && \text{(Gewinn)} \end{aligned}$$

- a) Gaußalgorithmus liefert:
Keine Lösung für $Z \neq 100$;
für $Z = 100$: $\Rightarrow x_3 = 10000$ und $x_1 + 2x_2 = 25000$. Damit Lösungsmenge:

$$L = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^3 : x = \begin{pmatrix} 25000 \\ 0 \\ 10000 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Ökonomisch sinnvolle Lösungen für $x_1, x_2 > 0$. Damit: $0 \leq \lambda \leq 12500$

Aufgabe 113

Gegeben sind die Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Zeigen Sie, dass $\frac{1}{2}A$ orthogonal ist.
- Berechnen Sie B^{-1} .
- Lösen Sie das Gleichungssystem $ABx = c$ mit

$$x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4), \quad c^T = (1, 2, 3, 4)$$

unter Verwendung von b).

Lösungshinweis:

- Ausmultiplizieren liefert:

$$A \cdot \frac{1}{4}A = E \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}A$$

$$\text{b) } B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Von links (!) mit $B^{-1}A^{-1}$ multiplizieren ergibt: $x = B^{-1}A^{-1}c = \begin{pmatrix} -2,0 \\ 1,0 \\ 1,5 \\ 2,0 \end{pmatrix}$