

# Wirtschafts- und Finanzmathematik

## für Betriebswirtschaft und International Management

Wintersemester 2017/18

---

04.10.2017	Einführung, R, Grundlagen	1
11.10.2017	Grundlagen, Aussagen	2
18.10.2017	Aussagen	3
25.10.2017	Mengen, Folgen, Reihen	4
01.11.2017	Allerheiligen	
08.11.2017	Reelle Funktionen einer Variablen, Stetigkeit	5
15.11.2017	Differentialrechnung	6
22.11.2017	Differentialrechnung	7
29.11.2017	Integration	8
06.12.2017	Finanzmathematik	9
13.12.2017	Matrizen, Vektoren, Lineare Gleichungssysteme	10
20.12.2017	Determinanten, Eigenwerte	11
29.12.2017	Weihnachten	
05.01.2018	Weihnachten	
10.01.2018	Puffer, Wiederholung	12
19.01.2018	Beginn der Prüfungszeit	

---

Prof. Dr. Stefan Etschberger  
HSA

# Vorlesungsbegleitende Unterlagen

- ▶ **Arbeitsmaterial:** Foliensatz, Aufgabenskript, Mitschrift auf Wunsch
- ▶ **Bücher** (unterstützend):



Arens, Tilo, Frank Hettlich, Christian Karpfinger, Ulrich Kockelkorn, Klaus Lichtenegger und Hellmuth Stachel (2015). **Mathematik**. 3. Aufl. Springer Spektrum.



Cramer, Erhard und Johanna Nešlehová (2015). **Vorkurs Mathematik: Arbeitsbuch zum Studienbeginn in Bachelor-Studiengängen**. 6. Aufl. Springer Spektrum.



Opitz, Otto, Stefan Etschberger, Wolfgang R. Burkart und Robert Klein (2017). **Mathematik**. München: De Gruyter Oldenbourg.



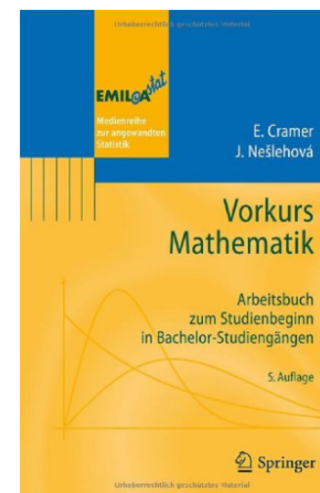
Purkert, Walter (2014). **Brückenkurs Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler**. 8. Aufl. Springer Gabler.



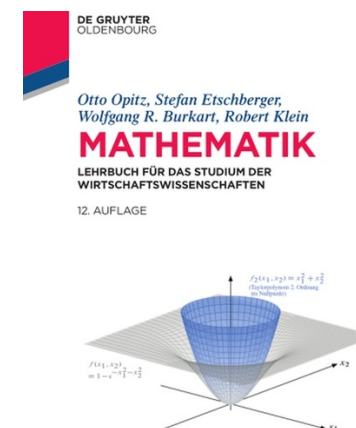
Tietze, Jürgen (2013). **Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik**. 17. Aufl. Springer Spektrum.



Tietze, Jürgen (2015). **Einführung in die Finanzmathematik**. 12. Aufl. Springer Spektrum.



<http://goo.gl/qHwN7X>  
(als E-Book innerhalb des Hochschulnetzwerks kostenlos)



<https://goo.gl/uajWmQ>  
(ab Mitte Oktober 2017)

- ▶ **Mitschrift** empfohlen!
- ▶ Folien sind **nur ergänzendes** Material zur Mitschrift
- ▶ Aufteilung in Vorlesung (Plenum) und Übungsgruppen (kleinere Gruppen)
- ▶ Viele Aufgaben als Hausaufgabe, Besprechung in Übungsgruppen
- ▶ Ohne **selbständiges Rechnen** der Übungsaufgaben ist Nutzen der Veranstaltung sehr gering
- ▶ **Fragenstellen** ist jederzeit erwünscht
- ▶ Bei Fragen oder Problemen: E-Mail an Team
- ▶ Informations-Backbone für Unterlagen und mehr:  
<https://goo.gl/JU3qmz>



## Klausur:

- ▶ **Klausur** am Ende des Semesters
- ▶ Bearbeitungszeit:  
**90 Minuten**
- ▶ Erreichbare Punktzahl: 90
- ▶ Aufgaben mit R sind Prüfungsbestandteil
- ▶ Hilfsmittel:
  - **Schreibzeug**,
  - **Taschenrechner**, der nicht 70! berechnen kann,
  - **ein Blatt** (DIN-A4, vorne und hinten beschrieben) mit handgeschriebenen Notizen (keine Kopien oder Ausdrücke)



- 1 Grundlegende Bausteine
- 2 Aussagenlogik
- 3 Mengen
- 4 Folgen und Reihen
- 5 Reelle Funktionen

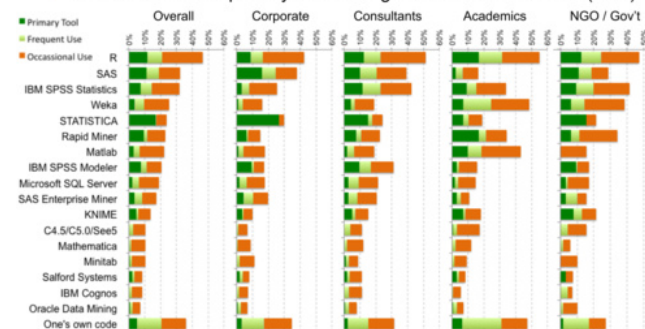
- 6 Differentialrechnung
- 7 Integration
- 8 Finanzmathematik
- 9 Lineare Algebra

# Was ist R und warum sollte man es benutzen?

- ▶ R ist ein **freies** Softwarepaket zu Mathematik, Statistik und Datenanalyse
- ▶ R ist sehr mächtig und **weit verbreitet** in Wissenschaft und Industrie (sogar von mehr Leuten benutzt als z.B. SPSS)
- ▶ Ursprung von R: **1993** an der Universität Auckland von Ross Ihaka and Robert Gentleman entwickelt
- ▶ Seitdem: Viele Leute haben R verbessert mit **tausenden von Paketen** für viele Anwendungen
- ▶ Nachteil (auf den ersten Blick): Kein point and click tool
- ▶ Großer Vorteil (auf den zweiten Blick): Kein point and click tool



- The average data miner reports using 4 software tools.
- R is used by the most data miners (47%).
- STATISTICA is the primary data mining tool chosen most often (17%).



graphics source: <http://goo.gl/W70kms>

source: <http://goo.gl/axhGhh>

Download: [R-project.org](http://R-project.org)

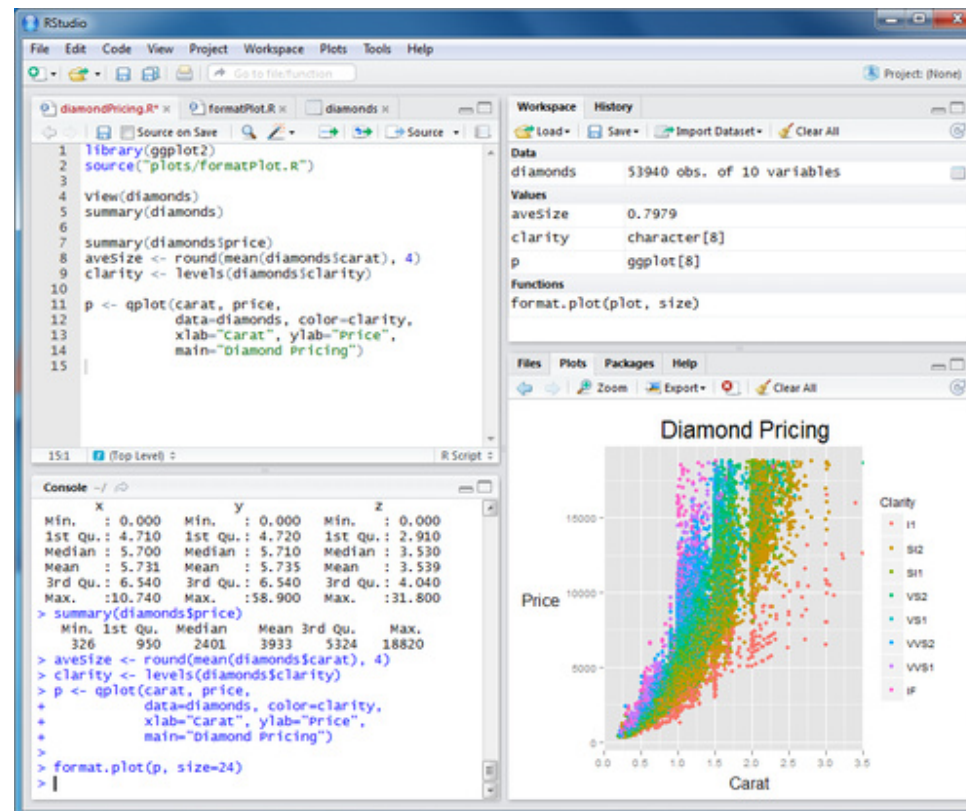


# Was ist RStudio?

- ▶ RStudio ist ein **Integrated Development Environment** (IDE) um R leichter benutzen zu können.
- ▶ Gibt's für OSX, Linux und Windows
- ▶ Ist auch frei
- ▶ Trotzdem: Sie müssen Kommandos schreiben
- ▶ Aber: RStudio unterstützt Sie dabei
- ▶ [Download: RStudio.com](http://Download:RStudio.com)



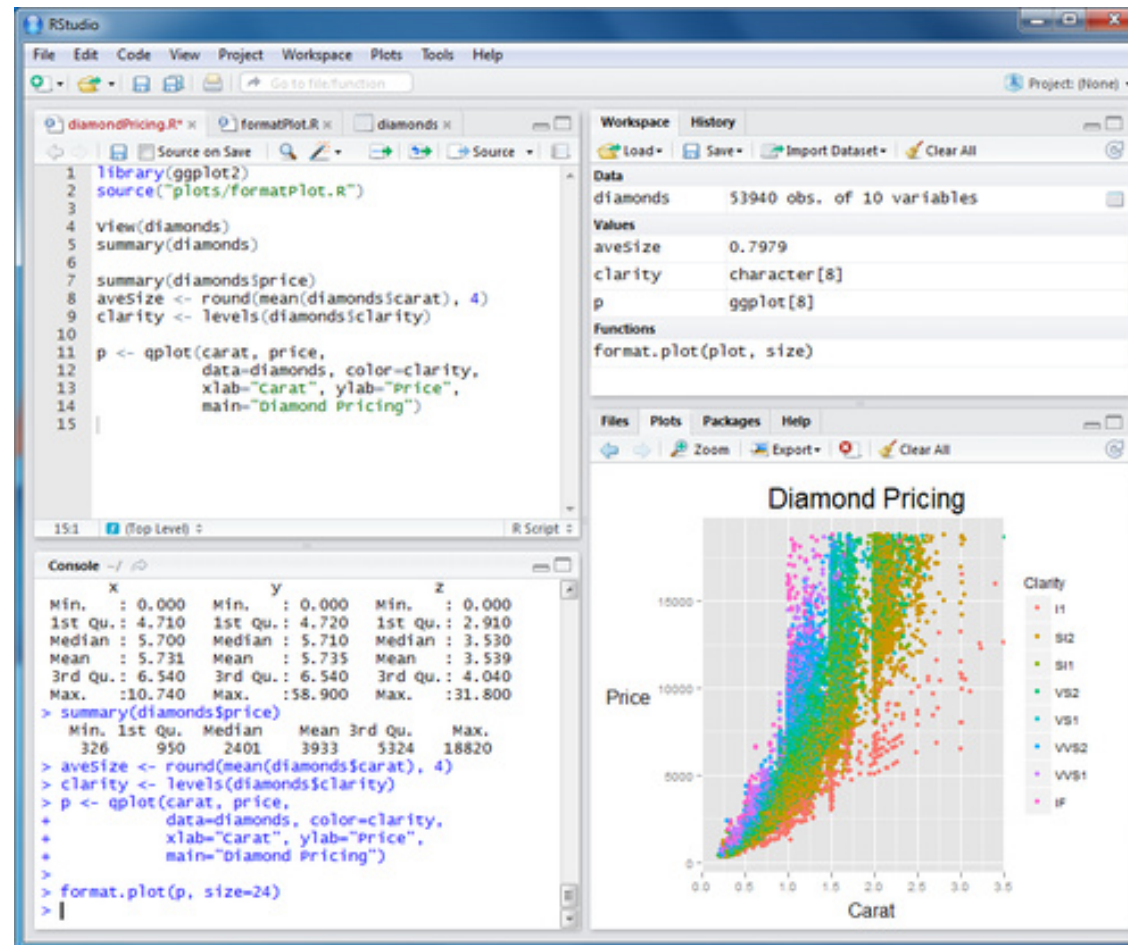
Free & Open-Source IDE for R



# Erste Schritte

## RStudio Kennenlernen

- ▶ Code
- ▶ Console
- ▶ Workspace
- ▶ History
- ▶ Files
- ▶ Plots
- ▶ Packages
- ▶ Help
- ▶ Auto-Completion
- ▶ Data Import





# Erste Schritte in R

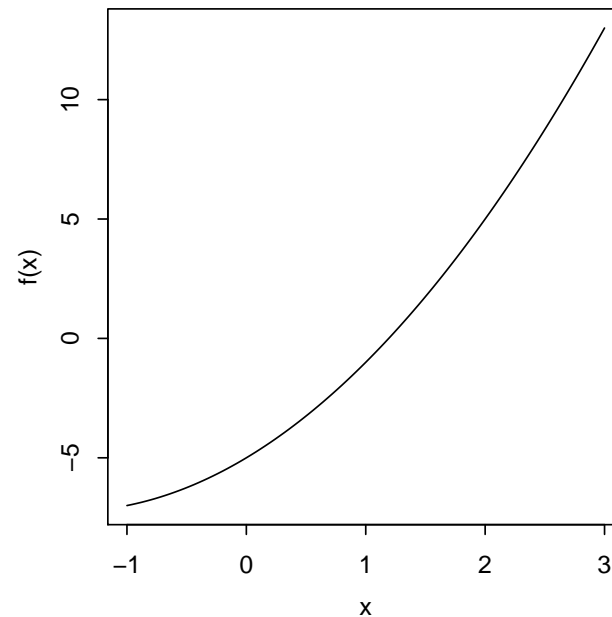
```
# -----  
# R als Taschenrechner  
# -----  
1 + 1  
  
## [1] 2  
0.2 * 4 + 1 # Dezimaltrenner ".", Punkt vor Strich gilt  
  
## [1] 1.8  
(3 - 2/5)^2 # runde Klammern zum Gruppieren, Potenzen mit "^"  
  
## [1] 6.76  
x = 2^10     # Ergebnisse in Variablen abgespeichert  
x           # und anschließend weiterverwendet  
  
## [1] 1024  
x - 1  
  
## [1] 1023  
f = function(x) {x^2 + 3*x - 5} # Funktionsterm  
f(0)                          # ein Funktionswert  
  
## [1] -5  
f(-1:3)                        # mehrere Funktionswerte  
  
## [1] -7 -5 -1  5 13
```

# Erste Schritte in R

```
x = seq(from=-1, to=3, by=0.5) # x-Werte
data.frame(x, f(x))           # Wertetabelle

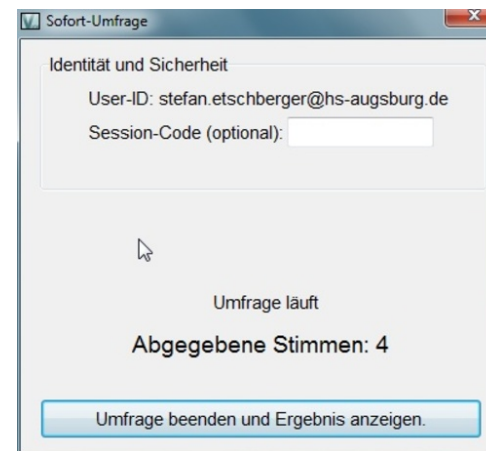
##      x  f.x.
## 1 -1.0 -7.00
## 2 -0.5 -6.25
## 3  0.0 -5.00
## 4  0.5 -3.25
## 5  1.0 -1.00
## 6  1.5  1.75
## 7  2.0  5.00
## 8  2.5  8.75
## 9  3.0 13.00

curve(f, from = -1, to = 3)   # Funktionsgraph
```



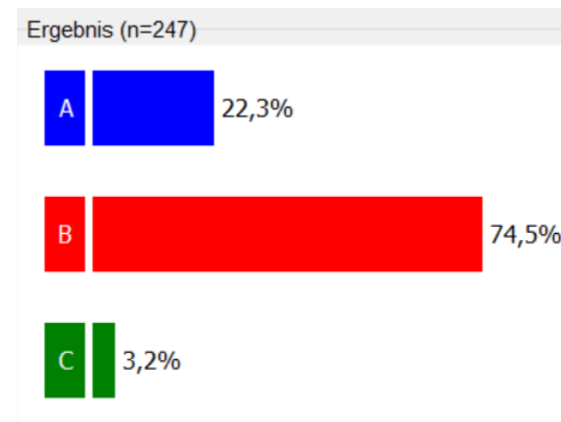
## Umfragen in Vorlesung mit EduVote:

- ▶ System zur Abstimmung im Hörsaal
- ▶ App herunterladen oder direkt benutzen unter [eduvote.de](http://eduvote.de)
- ▶ User-Id: [Etschberger](#), kein Session-Code



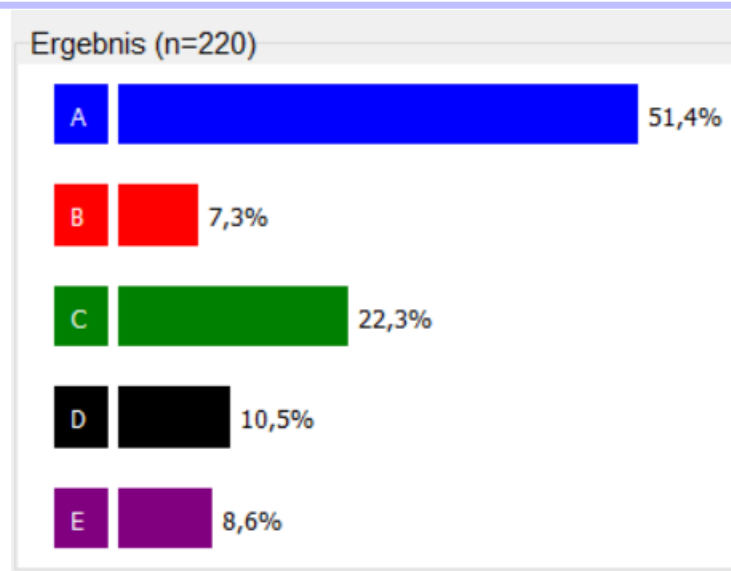
Testfrage: Was ist ein Veterinär?

- A) Ein ehemaliger Soldat
- B) Ein Tierarzt
- C) Jemand, der kein Fleisch isst



Wie viel Zeit ist seit Ihrer letzten Mathestunde vergangen?  
(ohne Startklar oder Vorkurs an der Hochschule zu zählen)

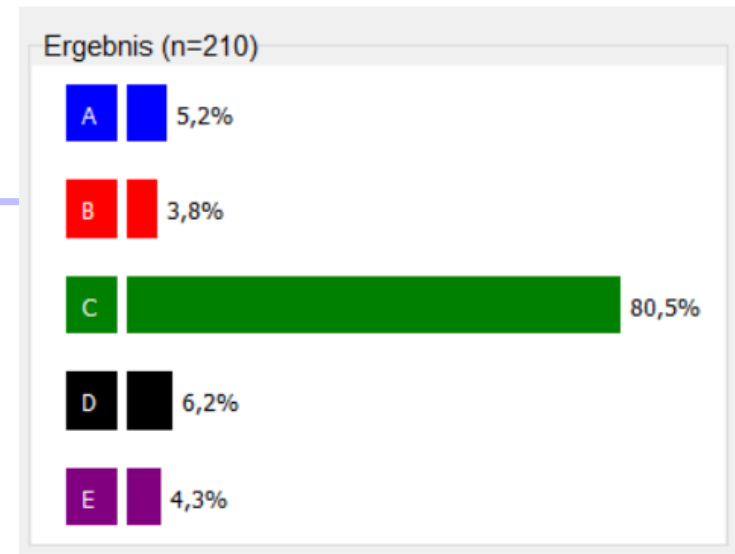
- A 0 bis 6 Monate
- B mehr als 6 Monate bis 1 Jahr
- C mehr als 1 Jahr bis 2 Jahre
- D mehr als 2 Jahre bis 4 Jahre
- E mehr als 4 Jahre



## Testfrage: Griechische Buchstaben

Wie spricht man die Buchstaben  $\gamma$ ,  $\lambda$ ,  $\psi$ ,  $\sigma$ ,  $\Theta$  aus?

- A alpha, lambda, phi, delta, Omega
- B beta, lambda, psi, delta, Theta
- C gamma, lambda, psi, sigma, Theta
- D der zweite heißt lambda, bei den anderen bin ich mir nicht sicher
- E ich kenne keinen der Buchstaben genau



## Testfrage: Griechische Buchstaben

Wie spricht man die Buchstaben  $\gamma$ ,  $\lambda$ ,  $\psi$ ,  $\sigma$ ,  $\Theta$  aus?

- 
- A alpha, lambda, phi, delta, Omega
  - B beta, lambda, psi, delta, Theta
  - C gamma, lambda, psi, sigma, Theta
  - D der zweite heißt lambda, bei den anderen bin ich mir nicht sicher
  - E ich kenne keinen der Buchstaben genau
- 

Richtig:  C



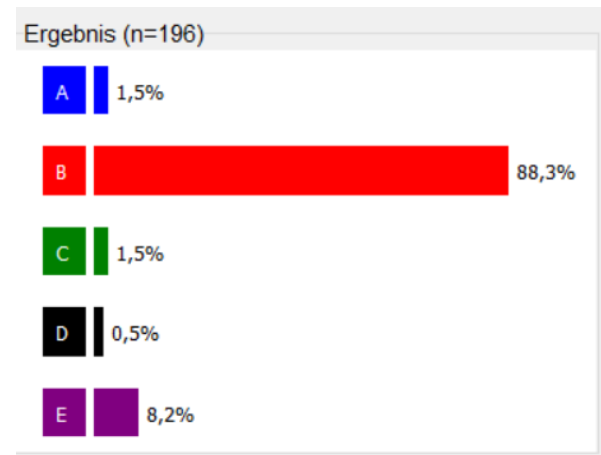
# Grundlagentest Bruchrechnen!

## Testfrage: Bruchrechnung 1

Wie lautet das Ergebnis des folgenden Ausdrucks  
(Rechnung ohne Taschenrechner)?

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}{\frac{5}{6} - \frac{2}{3}}$$

- A  $\frac{3}{5}$
- B 7
- C  $\frac{5}{36}$
- D  $\frac{9}{15}$
- E Keine Ahnung / Keine der Lösungen oben!



Richtig: B

## Testfrage: Bruchrechnung 2

Erni, Bert und das Krümelmonster essen Kekse. Ernie isst  $\frac{3}{2}$  Kekse, Bert ist  $\frac{4}{3}$  der Menge die Ernie isst, und das Krümelmonster isst  $\frac{6}{7}$  der Menge, die Bert und Ernie zusammen essen.

Wieviele Kekse essen alle zusammen (Rechnung ohne Taschenrechner)?

$$\begin{aligned} & E + B \\ & \frac{3}{2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 3,5 = \frac{7}{2} \\ & \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{2} = 3 \rightarrow \text{KM} \\ & 3,5 + 3 = 6,5 = \frac{13}{2} \end{aligned}$$

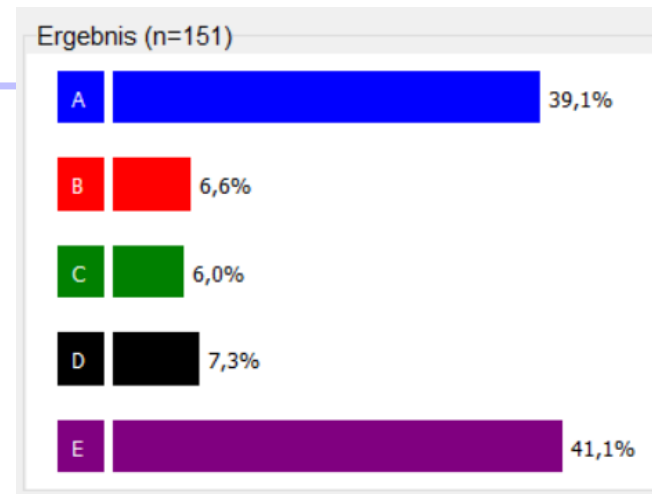
A  $\frac{13}{2}$

B 6

C  $\frac{57}{14}$

D  $\frac{54}{7}$

E Ich habe ein anderes Ergebnis oder ich weiß nicht wie das geht.



Richtig: A

## Testfrage: Bruchrechnung 3

Falls  $x, y \neq -1$  und  $x \neq \pm y$  gilt: Wie kann man den folgenden Ausdruck noch schreiben?

$$\frac{\frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1}}{\frac{x-y}{x+y}}$$

- 
- A  $\frac{x+y}{xy+x+y+1}$
- B  $\frac{x+y}{x-y}$
- C  $x + y$
- D  $\frac{(x+1)(y+1)}{x+y}$
- E Ich habe ein anderes Ergebnis oder ich weiß nicht wie das geht.
-

## Testfrage: Bruchrechnung 3

Falls  $x, y \neq -1$  und  $x \neq \pm y$  gilt: Wie kann man den folgenden Ausdruck noch schreiben?

$$\frac{\frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1}}{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{x(y+1) - y(x+1)}{(x+1)(y+1)} : \frac{x-y}{x+y}$$
$$= \frac{(xy + x - yx - y) \cdot (x+y)}{(x+1)(y+1) \cdot (x-y)}$$
$$= \frac{x+y}{xy + y + x + 1}$$

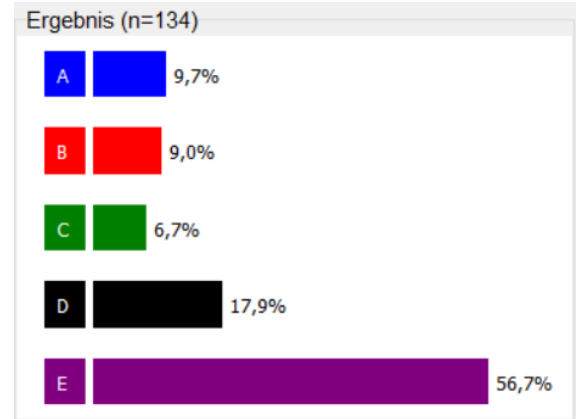
A  $\frac{x+y}{xy+x+y+1}$

B  $\frac{x+y}{x-y}$

C  $x + y$

D  $\frac{(x+1)(y+1)}{x+y}$

E Ich habe ein anderes Ergebnis oder ich weiß nicht wie das geht.



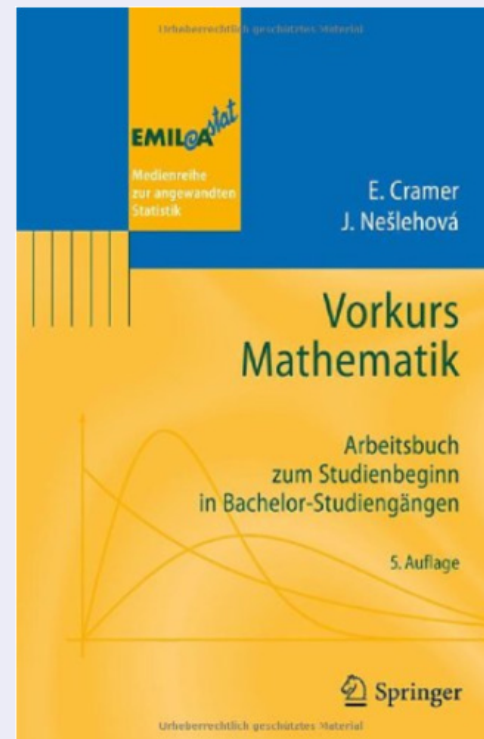
Richtig: A

## Ihr Ergebnis:

- ▶ 3 Antworten richtig: Sie können Bruchrechnen!
- ▶ 2 Antworten richtig: Rechnen Sie mindestens die Hälfte der Aufgaben!
- ▶ Nur 1 Antwort richtig: Rechnen Sie alle Aufgaben!
- ▶ Keine Antwort richtig: Rechnen Sie alle Aufgaben und suchen Sie noch nach weiterem Übungsmaterial zu diesem Thema!

## Übungsmaterial

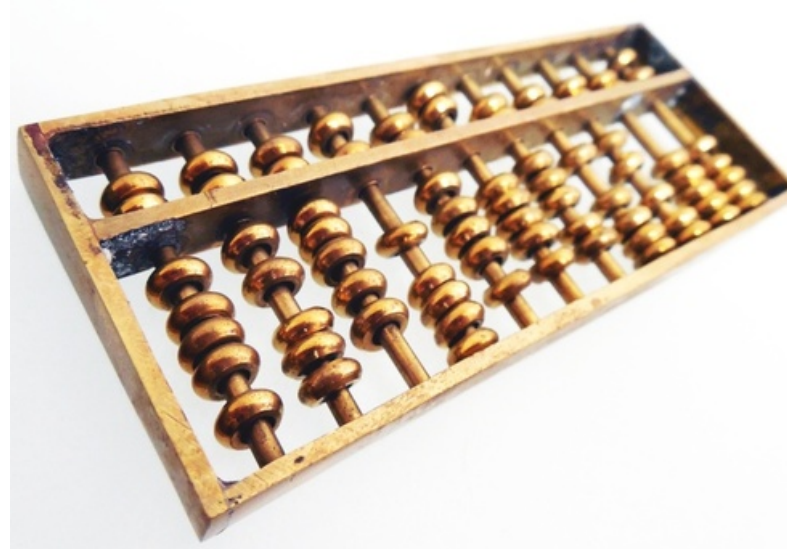
Zu diesem Thema:  
**Aufgaben 3.1 - 3.7**  
aus



<http://goo.gl/qHwN7X>



- 1 Grundlegende Bausteine
- 2 Aussagenlogik
- 3 Mengen
- 4 Folgen und Reihen
- 5 Reelle Funktionen
- 6 Differentialrechnung
- 7 Integration
- 8 Finanzmathematik
- 9 Lineare Algebra



Opitz u. a., 2017, Kapitel 1.1–1.3, 1.5, 1.6

- 1 Grundlegende Bausteine
  - Reelle Zahlen
  - Ganzzahlige Potenzen
  - Algebraische Umformungen
  - Brüche
  - Nichtganzzahlige Potenzen
  - Logarithmen
  - Notation von Summen



## „Vernünftige“ Zahlen

- ▶ **Natürliche** Zahlen:  $\mathbb{N}$
- ▶ **Ganze** Zahlen;  $\mathbb{Z}$
- ▶ **Rationale** Zahlen:  $\mathbb{Q}$
- ▶ Rationale Zahlen liegen unendlich dicht auf dem Zahlenstrahl

## Aber

- ▶ Aber: Lösungen von Gleichungen wie

$$x^2 = 2$$

haben keine rationale Lösung

- ▶ Folge: Es gibt auch **irrationale Zahlen**: Z.B.  $\sqrt{2}$

### 1. Grundlagen

- 1.1. Reelle Zahlen
- 1.2. Ganzzahlige Potenzen
- 1.3. Algebraische Umformungen
- 1.4. Brüche
- 1.5. Nichtganzzahlige Potenzen
- 1.6. Logarithmen
- 1.7. Notation von Summen

### 2. Aussagenlogik

### 3. Mengen

### 4. Folgen und Reihen

### 5. Reelle Funktionen

### 6. Differenzieren

### 7. Integration

### 8. Finanzmathematik

### 9. Lineare Algebra



## Zahldarstellung über Vielfache von 10

- ▶ Die meisten Leute schreiben Zahlen heute im **Dezimalsystem**
- ▶ Damit möglich: Schreiben jeder natürlichen Zahl mit Kombinationen der Ziffern  $0, 1, \dots, 9$
- ▶ z.B.:  $2009 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$
- ▶ Mit Dezimalkomma: Schreiben rationaler Zahlen möglich
- ▶ z.B.:  $2,36 = 2 \cdot 10^0 + 3 \cdot \frac{1}{10^1} + 6 \cdot \frac{1}{10^2}$  (**endlicher Dezimalbruch**)
- ▶ z.B.:  $\frac{10}{3} = 3,333\dots = 3 + 3 \cdot \frac{1}{10^1} + 3 \cdot \frac{1}{10^2} + 3 \cdot \frac{1}{10^3} + \dots$  (**unendlicher Dezimalbruch**)
- ▶ Jede rationale Zahl kann man über einen **periodischen** Dezimalbruch darstellen

### 1. Grundlagen

- 1.1. Reelle Zahlen
- 1.2. Ganzzahlige Potenzen
- 1.3. Algebraische Umformungen
- 1.4. Brüche
- 1.5. Nichtganzzahlige Potenzen
- 1.6. Logarithmen
- 1.7. Notation von Summen

### 2. Aussagenlogik

### 3. Mengen

### 4. Folgen und Reihen

### 5. Reelle Funktionen

### 6. Differenzieren

### 7. Integration

### 8. Finanzmathematik

### 9. Lineare Algebra



## 1. Grundlagen

- 1.1. Reelle Zahlen
- 1.2. Ganzzahlige Potenzen
- 1.3. Algebraische Umformungen
- 1.4. Brüche
- 1.5. Nichtganzzahlige Potenzen
- 1.6. Logarithmen
- 1.7. Notation von Summen

## 2. Aussagenlogik

## 3. Mengen

## 4. Folgen und Reihen

## 5. Reelle Funktionen

## 6. Differenzieren

## 7. Integration

## 8. Finanzmathematik

## 9. Lineare Algebra

- ▶ Eine **reelle Zahl** hat die Form

$$x = m, a_1 a_2 a_3 \dots$$

- ▶ Dabei:  $m$ : Ganze Zahl
- ▶ und  $a_i$  (mit  $i = 1, 2, \dots$ ) ist unendliche Folge von Ziffern von 0 bis 9
- ▶ Damit: Nichtperiodische Dezimalbrüche heißen **irrationale Zahlen**
- ▶ Beispiele:

$$\sqrt{2}, \quad -\sqrt{17}, \quad \pi, \quad 0,1121121112\dots$$

- ▶ Rechenoperationen  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$ ,  $:$  mit reellen Zahlen ergeben wieder reelle Zahlen
- ▶ Einzige Ausnahme:  $\frac{p}{0}$  ist keine reelle Zahl



- ▶ Abkürzung:  $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$  oder  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$
- ▶ Allgemein:

$$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$$

- ▶ Rechenregeln:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

- ▶ Achtung: im allgemeinen

$$(a + b)^r \neq a^r + b^r$$

## 1. Grundlagen

- 1.1. Reelle Zahlen
- 1.2. Ganzzahlige Potenzen
- 1.3. Algebraische Umformungen
- 1.4. Brüche
- 1.5. Nichtganzzahlige Potenzen
- 1.6. Logarithmen
- 1.7. Notation von Summen

## 2. Aussagenlogik

## 3. Mengen

## 4. Folgen und Reihen

## 5. Reelle Funktionen

## 6. Differenzieren

## 7. Integration

## 8. Finanzmathematik

## 9. Lineare Algebra



Es gilt für beliebige Zahlen  $a$ ,  $b$ ,  $c$ :

1.  $a + b = b + a$
2.  $(a + b) + c = a + (b + c)$
3.  $a + 0 = a$
4.  $a + (-a) = 0$
5.  $ab = ba$
6.  $(ab)c = a(bc)$
7.  $1 \cdot a = a$
8.  $aa^{-1} = 1$  (für  $a \neq 0$ )
9.  $(-a)b = a(-b) = -ab$
10.  $(-a)(-b) = ab$
11.  $a(b + c) = ab + ac$
12.  $(a + b)c = ac + bc$

## 1. Grundlagen

- 1.1. Reelle Zahlen
- 1.2. Ganzzahlige Potenzen
- 1.3. Algebraische Umformungen
- 1.4. Brüche
- 1.5. Nichtganzzahlige Potenzen
- 1.6. Logarithmen
- 1.7. Notation von Summen

## 2. Aussagenlogik

## 3. Mengen

## 4. Folgen und Reihen

## 5. Reelle Funktionen

## 6. Differenzieren

## 7. Integration

## 8. Finanzmathematik

## 9. Lineare Algebra





## Algebraische Ausdrücke

- ▶ Beispiel für einen **algebraischen Ausdruck**:

$$4x^2y^2 + 7y^4x - 9xy + 11xy^4$$

- ▶ Die einzelnen Summanden ( $4x^2y^2$ ,  $-9xy$ , usw.) heißen **Terme** des Ausdrucks
- ▶ Faktoren vor den Buchstaben (4, 7,  $-9$ , 11): **Koeffizienten**
- ▶ Terme, die sich maximal durch Koeffizienten unterscheiden, genannt **Koeffizienten von der gleichen Art**, können zusammengefasst werden:

$$7y^4x + 11xy^4 = 18xy^4$$

## Binomische Formeln

- ▶  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- ▶  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- ▶  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

### 1. Grundlagen

- 1.1. Reelle Zahlen
- 1.2. Ganzzahlige Potenzen
- 1.3. Algebraische Umformungen
- 1.4. Brüche
- 1.5. Nichtganzzahlige Potenzen
- 1.6. Logarithmen
- 1.7. Notation von Summen

### 2. Aussagenlogik

### 3. Mengen

### 4. Folgen und Reihen

### 5. Reelle Funktionen

### 6. Differenzieren

### 7. Integration

### 8. Finanzmathematik

### 9. Lineare Algebra



## Primfaktorzerlegung

- ▶ Zahlen können multiplikativ in **Primfaktoren** zerlegt werden,
- ▶ Beispiel

$$64 = 8 \cdot 8 \quad \text{oder} \quad 1848 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$$

## Faktorisierung algebraischer Ausdrücke

- ▶ Analog bei algebraischen Ausdrücken:  
Zerlegung in **irreduzible Faktoren**
- ▶ Beispiele:

$$5a^2b^3 - 15ab^2 = 5 \cdot a \cdot b^2 \cdot (ab - 3)$$

$$16a^4b^2 - 9b^4 = b^2 \cdot (4a^2 - 3b) \cdot (4a^2 + 3b)$$

### 1. Grundlagen

- 1.1. Reelle Zahlen
- 1.2. Ganzzahlige Potenzen
- 1.3. Algebraische Umformungen
- 1.4. Brüche
- 1.5. Nichtganzzahlige Potenzen
- 1.6. Logarithmen
- 1.7. Notation von Summen

### 2. Aussagenlogik

### 3. Mengen

### 4. Folgen und Reihen

### 5. Reelle Funktionen

### 6. Differenzieren

### 7. Integration

### 8. Finanzmathematik

### 9. Lineare Algebra



- ▶ Division zweier Zahlen ( $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ ) kann durch **Bruch** geschrieben werden

$$a : b = \frac{a}{b} = a/b$$

- ▶ Rechenregeln ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ):

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b} \quad (b, c \neq 0)$$

$$\frac{-a}{-b} = \frac{(-a) \cdot (-1)}{(-b) \cdot (-1)} = \frac{a}{b}$$

$$-\frac{a}{b} = (-1) \frac{a}{b} = \frac{(-1)a}{b} = \frac{-a}{b}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$$

$$a + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$$

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

## 1. Grundlagen

- 1.1. Reelle Zahlen
- 1.2. Ganzzahlige Potenzen
- 1.3. Algebraische Umformungen
- 1.4. Brüche
- 1.5. Nichtganzzahlige Potenzen
- 1.6. Logarithmen
- 1.7. Notation von Summen

## 2. Aussagenlogik

## 3. Mengen

## 4. Folgen und Reihen

## 5. Reelle Funktionen

## 6. Differenzieren

## 7. Integration

## 8. Finanzmathematik

## 9. Lineare Algebra