Wirtschafts- und Finanzmathematik

für Betriebswirtschaft und International Management

Wintersemester 2017/18

04.10.2017	Einführung, R, Grundlagen	1
11.10.2017	Grundlagen, Aussagen	2
18.10.2017	Aussagen	3
25.10.2017	Mengen, Folgen, Reihen	4
01.11.2017	Allerheiligen	
08.11.2017	Reelle Funktionen einer Variablen, Stetigkeit	5
15.11.2017	Differentialrechnung	6
22.11.2017	Differentialrechnung	7
29.11.2017	Integration	8
06.12.2017	Finanzmathematik	9
13.12.2017	Matrizen, Vektoren, Lineare Gleichungssysteme	10
20.12.2017	Determinanten, Eigenwerte	11
29.12.2017	Weihnachten	
05.01.2018	Weihnachten	
10.01.2018	Puffer, Wiederholung	12
19.01.2018	Beginn der Prüfungszeit	

Prof. Dr. Stefan Etschberger
HSA

Organisation

Veranstaltungen zur Mathematik für BW/IM Wintersemester 2017/18

Was?	Wer?	Tag	Uhrzeit	Wo?	Ab wann?
Vorlesung Mathematik	Etschberger	Mi	14.00-17.00	B2.14	04.10.2017
Übung Mathematik	Jansen	Di	11.30-13.00	W1.19	09.10.2017
Übung Mathematik	Jansen	Mi	11.30-13.00	W3.20	10.10.2017
Übung Mathematik	Jansen	Do	11.30-13.00	W1.19	11.10.2017
Übung Mathematik	Etschberger	Mi	17.00-18.30	B4.05	11.10.2017
Übung Mathematik	Henle	Mi	11.30-13.00	W1.06	08.11.2017
Übung Mathematik	Henle	Do	11.30-13.00	J4.13	02.11.2017
Übung Mathematik	Henle	Do	13.15-14.45	J4.13	02.11.2017
Übung Mathematik	Burkart	Do	13.00-14.30	W1.01	19.10.2017
Übung Mathematik	Burkart	Do	14.30-16.00	W1.01	19.10.2017
Offener Matheraum	?/Wesp	Mo	13.30-16.00	B3.05	09.10.2017
Offener Matheraum	?/Wesp	Di	13.00-16.00	B3.05	10.10.2017
Offener Matheraum	?/Wesp	Mi	11.30-16.00	B3.05	11.10.2017
Offener Matheraum	?/Jansen	Do	11.30-15.00	B3.05	12.10.2017
Offener Matheraum	?/Etschberger	Fr	11.30-14.30	B3.05	13.10.2017

Veranstaltungen für Teilnehmer der Statistik-Klausur im Januar 2018

Was?	Wer?		Wann?	Wo?	Ab wann?
Vorlesung Statistik	Wins	Di	14.00-17.00	W3.02	10.10.2017
Offener Statistikraum	?/Wesp	Mo	11.30-14.00	B3.05	09.10.2017
Offener Statistikraum	?/Wesp	Di	13.00-16.00	B3.05	10.10.2017
Offener Statistikraum	?/Wesp	Mi	11.30-16.30	B3.05	11.10.2017
Offener Statistikraum	?/Jansen	Do	12.00-15.00	B3.05	12.10.2017
Offener Statistikraum	?/Etschberger	Fr	11.30-14.30	B3.05	13.10.2017
Statistik Übung	Ivanov	Do	14.00-15.30	J3.19	12.10.2017
Statistik Übung	Ivanov	Do	15.40-17.10	J3.19	12.10.2017

Potenzieren $\quad a \in \mathbb{R}, \; n \in \mathbb{N}$

↳ „ist Element von"

$$x = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}} = a^n$$

Exponent: „n-te Potenz von a", „a hoch n"

Basis: a

Beispiele: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, $\quad 10^{12} = 1$ Billion

$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$

Rechenregeln: $\quad a, b \in \mathbb{R}, \quad n, m \in \mathbb{N}$

① $$\boxed{a^n \cdot b^n = (ab)^n}$$

Achtung: $a^n + b^n \neq (a+b)^n$

(z.B. $3^2 + 4^2 = 25 \neq 49 = (3+4)^2$)

② $$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$$

③ $(a \neq 0)$ $$\boxed{a^n : a^m = a^{n-m}}$$

z.B. $2^5 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{5+3} = 2^8$

$3^9 : 3^5 = \dfrac{\cancel{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}} = 3^{9-5} = 3^4$

Beobachtungen: $(a \neq 0)$:

- $a^0 = a^{n-n} = \dfrac{a^n}{a^n} = 1$ $\qquad \boxed{a^0 = 1}$
- $a^{-n} = a^{0-n} = \dfrac{a^0}{a^n} = \dfrac{1}{a^n}$ $\qquad \boxed{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$

④ $$\boxed{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$$

$(2^3)^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12} = 4096$

Achtung: $a^{n^m} = a^{(n^m)} \neq (a^n)^m$

$2^{3^2} = 2^{(3^2)} = 2^9 = 512$

$(2^3)^2 = 8^2 = 64$

Radizieren (Wurzelziehen) $\quad (a > 0, \; n \in \mathbb{N})$

Gesucht: x mit $x^n = a$

$\Rightarrow \quad x = \sqrt[n]{a}$ $\quad$ „n-te Wurzel aus a"

Wurzelexponent: n; Radikand: a

Überführen in Potenzschreibweise

$$x = \sqrt[n]{a} \Rightarrow x^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Was wäre, wenn $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ und alle Potenzrechenregeln auch mit nicht ganzzahligen Exponenten gültig wären

$$x^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(a^{1/n}\right)^n \overset{④}{=} a^{1/n \cdot n} = a^1 = a$$

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{1/n}}$$

Beispiel: $\sqrt[3]{8} = 8^{1/3} = (2^3)^{1/3} = 2$

Achtung: Unterscheide: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

Beispiele: $(a, b > 0)$

- $\sqrt[m]{a^n} = (a^n)^{1/m} \overset{④}{=} a^{n \cdot 1/m} = a^{\frac{n}{m}}$
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{1/n} \cdot b^{1/n} = (ab)^{1/n} = \sqrt[n]{ab}$
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{1/n} \cdot a^{1/m} = a^{1/n + 1/m} = a^{\frac{m+n}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{m+n}}$

Achtung: $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a+b}$

(z.B. $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$
$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$)

Schreibweise: $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ „(Quadrat)-wurzel von a"

Beobachtung: geg. $x^n = a$ $(n \in \mathbb{N})$

$a > 0$: n gerade $\Rightarrow x = \pm\sqrt[n]{a}$ $[x^4 = 16 \Rightarrow x = \pm 2]$
n ungerade $\Rightarrow x = +\sqrt[n]{a}$ $[x^3 = 8 \Rightarrow x = 2]$

$a < 0$: n gerade $\Rightarrow$ Keine Lsg. $[x^2 = -4 \Rightarrow$ Keine Lsg.
n ungerade $\Rightarrow x = +\sqrt[n]{a}$ $[x^3 = -8 \Rightarrow x = -2$

Logarithmen $(a, b > 0)$

Gesucht: x mit $a^x = b$ „a hoch wieviel ist b?"

Beispiele: $2^x = 8 \Leftrightarrow x = 3$

$10^x = 1$ Billion $\Leftrightarrow x = 12$

$5^x = 25 \Leftrightarrow x = 2$
$5^x = 125 \Leftrightarrow x = 3$
$5^x = 124 \Leftrightarrow x =$ keine Ahnung, vermutlich bisschen weniger als 3

$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ „Logarithmus von b zur Basis a"
„a hoch wieviel ist b?"
a: Basis

Beispiel: $\log_2 8 = 3$

$\log_{10} 1\,\text{Billion} = 12$

$\log_{10} 0.001 = -3$

$\log_8 2 = 1/3$

$\log_5 124 \approx 2.995$

Rechenregeln:
$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$
$$\log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b)$$
$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

Spezielle Logarithmen: $\log_e a = \ln a$ Logarithmus naturalis „natürlicher Log."
e: Eulersche Zahl $(\approx 2.71828\ldots)$

$\log_{10} a = \log a$ dekadischer Logarithmus „10er Log."

Beliebige Logarithmen mit „ln"

z.B. $5^x = 124 \Leftrightarrow \ln(5^x) = \ln 124$
$\Leftrightarrow x \cdot \ln 5 = \ln 124$
$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 124}{\ln 5} \approx 2.9905$

allgemein: $\boxed{\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}}$ z.B. $\log_2 8 = \frac{\ln 8}{\ln 2} = 3$

Indizierung und Summen

Beispiel : Umsatzzahlen eines Jahres

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{12}$

Index

Gesamtumsatz : $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{11} + a_{12}$

Kurzschreibweise : $= \sum_{i=1}^{12} a_i$

allgemein $\sum_{i=m}^{n} a_i$

Zielwert, obere Grenze

„Summe von i gleich m bis n über a_i"

Startwert

zu summierender Ausdruck

Laufvariable
Index variable

Beispiele : $\sum_{i=1}^{5}(2\cdot i+3) = (2\cdot 1+3)+(2\cdot 2+3)+(2\cdot 3+3)+(2\cdot 4+3)+(2\cdot 5+3)$

$= 45$

$$\sum_{j=-2}^{1} \frac{1}{(j+3)(j+4)} = \frac{1}{(-2+3)(-2+4)} + \frac{1}{(-1+3)(-1+4)} + \frac{1}{(0+3)(0+4)} + \frac{1}{(1+3)(1+4)}$$

$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{20} = \frac{30+10+5+3}{60} = \frac{48}{60}$$

$$= \tfrac{4}{5} = 0.8$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

allgemeine binomische Formel

„k aus n" (Binomialkoeffizient)

$\left[\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} , \quad n! = 1\cdot 2\cdot 3 \cdots n, \quad 0! = 1 \right]$

TR : $\binom{7}{3} = 7$ nCr $3 =$

$= \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35$

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^k b^{2-k}$$

$$= \binom{2}{0}\cdot a^0\cdot b^{2-0} + \binom{2}{1}\cdot a^1\cdot b^{2-1} + \binom{2}{2}\cdot a^2\cdot b^{2-2}$$

$$= 1\cdot 1\cdot b^2 + 2\cdot a^1 b^1 + 1\cdot a^2\cdot 1 = b^2 + 2ab + a^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0} a^0 b^5 + \binom{5}{1} a^1 b^4 + \binom{5}{2} a^2 b^3 + \dots$$

$$= b^5 + 5ab^4 + 10a^2b^3 + 10a^3b^2 + 5a^4b + a^5$$

Grundlagentest Potenzen und Wurzeln!

Testfrage: Klammern 2

Welches Ergebnis liefert Ausmultiplizieren des Ausdrucks

$$(2x - 2y)(2x - 2y)(x - y)?$$

- (A) $x^3 - y^3$
- (B) $4x^3 - 12x^2y + 12xy^2 - 4y^3$
- (C) $16x^3 - 16y^3$
- (D) $4x^3 - 4y^3$
- (E) Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

Richtig: (B)

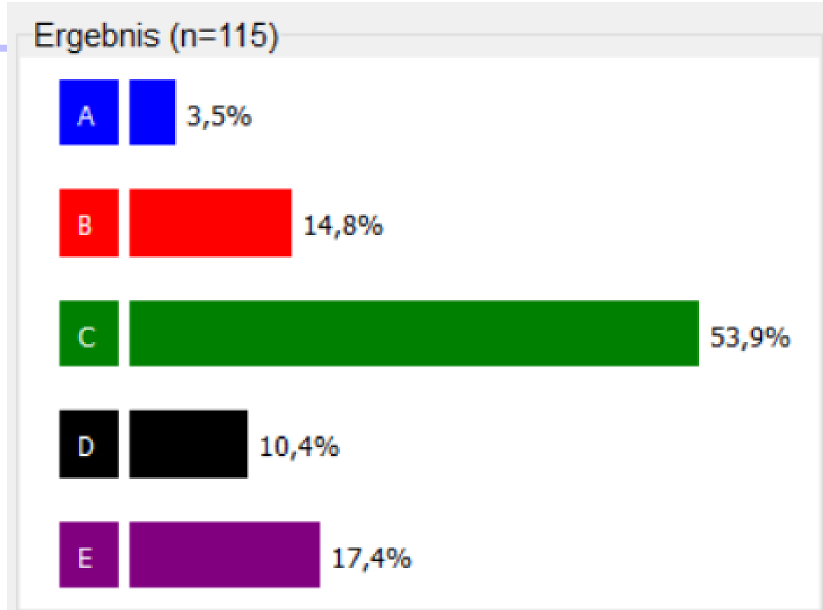
Testfrage: Potenzen 1

Fassen Sie den folgenden Ausdruck für $a \neq 0$ zusammen:

$$-121ab^3 - (11a^2b)^2 \cdot (-2a^{-3}b)$$

$= -121\,ab^3 + 121\,a^4b^2 \cdot 2\,a^{-3}b$

$= 121 \cdot (-ab^3 + 2ab^3) = 121\,ab^3$



A $-134ab^3$

B $-121ab^3 + 22\frac{b^3}{a}$

C $121ab^3$

D $-99ab^3$

E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

Richtig: C

Testfrage: Wurzeln 1

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$2(x^2+2xy+y^2) = 2\cdot(x+y)^2$

Fassen Sie den folgenden Ausdruck für $x + y \neq 0$ zusammen:

$y^{a+1}\cdot y$

$$\frac{3y^{a+2}}{\sqrt{2x^2+4xy+2y^2}} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{xy^{a+1}}{x+y}$$

$$= \frac{3y^{a+2}}{\sqrt{2}\cdot(x+y)} + \frac{3\cdot x y^{a+1}}{\sqrt{2}\cdot(x+y)} = \frac{3y^{a+1}}{\sqrt{2}\cancel{(x+y)}}\cdot[\cancel{y+x}] = \frac{3}{\sqrt{2}}y^{a+1}$$

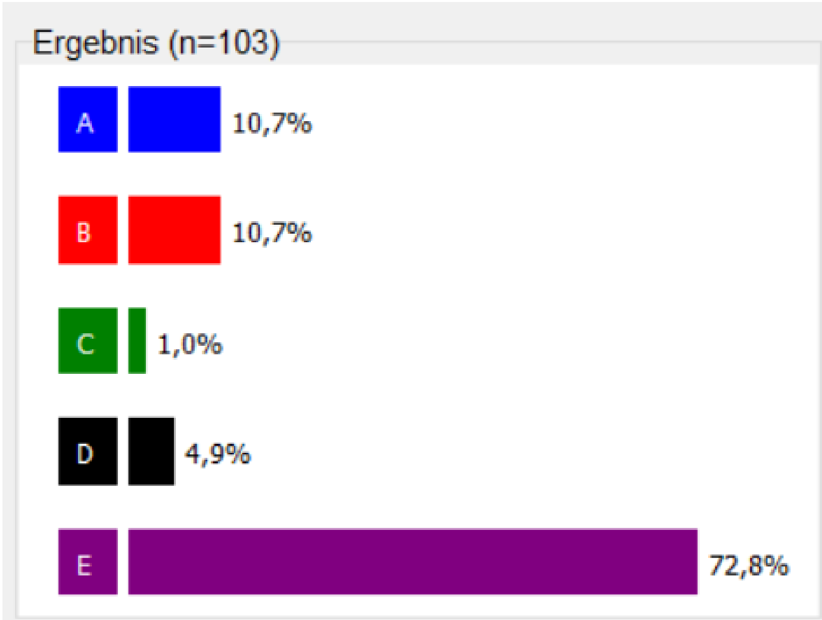
A $\dfrac{3y^{a}+3\sqrt{2}x}{x+y}$

B $\dfrac{3\sqrt{2}\cdot y^{a+1}}{x+y}$

C $\dfrac{3y}{\sqrt{2}}$

D $\dfrac{3y^{a+1}}{\sqrt{2}}$

E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.



Richtig: D

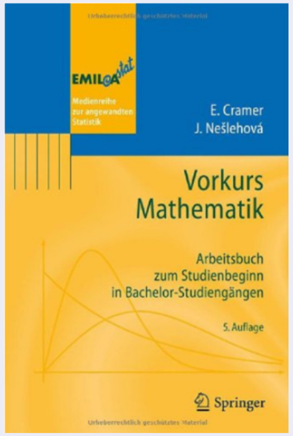
Testauswertung:

Ihr Ergebnis:

- 3 Antworten richtig: Alles im Lot mit Potenzen und Wurzeln!
- 2 Antworten richtig: Rechnen Sie mindestens die Hälfte der Aufgaben aus einem der beiden Bücher!
- Nur 1 Antwort richtig: Rechnen Sie mindestens alle Aufgaben aus einem der Bücher
- Keine Antwort richtig: Rechnen Sie alle Aufgaben aus beiden Büchern!

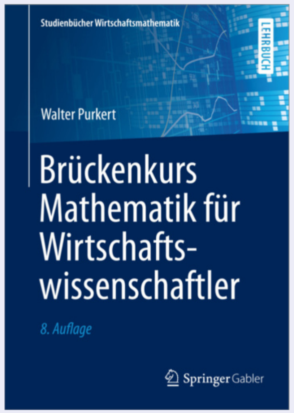
Übungsmaterial

Aufgaben 3.9 - 3.14 aus



http://goo.gl/qHwN7X

S. 98ff: Aufg. zu Kapitel 2: 1-8, 14-21 aus



http://goo.gl/2D1oYo

Ganzzahlige Potenzen

- Abkürzung: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$ oder $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$
- Allgemein:

$$a^n = a \cdot a \cdot \ldots a$$

- Rechenregeln:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

- Achtung: im allgemeinen

$$(a+b)^r \neq a^r + b^r$$

Anwendungsbeispiel für Potenzen

Zinseszinsen

- Anlage von 1000 € auf Bankkonto
- Verzinsung jeweils am Jahresende 2,5 %
- Zinsen nach einem Jahr: $1000 \cdot 2{,}5\ \% = 25$
- Kontostand am Jahresende:

$$1000 + 1000 \cdot 2{,}5\ \% = 1000 \cdot (1 + 0{,}025) = 1000 \cdot 1{,}025$$

- Kontostand am Ende des zweiten Jahres:

$$\begin{aligned}&(1000 \cdot 1{,}025) + (1000 \cdot 1{,}025) \cdot 0{,}025\\ &= 1000 \cdot 1{,}025 \cdot (1 + 0{,}025)\\ &= 1000 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}025 = 1000 \cdot 1{,}025^2\end{aligned}$$

- Allgemein: Kontostand ist bei Anfangskapital K und einem Zinssatz von i nach n Jahren

$$K_n = K \cdot (1 + i)^n$$

Algebraische Ausdrücke

- Beispiel für einen algebraischen Ausdruck:

$$4x^2y^2 + 7y^4x - 9xy + 11xy^4$$

- Die einzelnen Summanden ($4x^2y^2$, $-9xy$, usw.) heißen Terme des Ausdrucks
- Faktoren vor den Buchstaben (4, 7, -9, 11): Koeffizienten
- Terme, die sich maximal durch Koeffizienten unterscheiden, genannt Koeffizienten von der gleichen Art, können zusammengefasst werden:

$$7y^4x + 11xy^4 = 18xy^4$$

Binomische Formeln

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Primfaktorzerlegung

- Zahlen können multiplikativ in Primfaktoren zerlegt werden,
- Beispiel

$$64 = 8 \cdot 8 \quad \text{oder} \quad 1848 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$$

Faktorisierung algebraischer Ausdrücke

- Analog bei algebraischen Ausdrücken:
  Zerlegung in irreduzible Faktoren
- Beispiele:

$$5a^2b^3 - 15ab^2 = 5 \cdot a \cdot b^2 \cdot (ab - 3)$$

$$16a^4b^2 - 9b^4 = b^2 \cdot (4a^2 - 3b) \cdot (4a^2 + 3b)$$

Brüche

- Division zweier Zahlen ($a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$) kann durch Bruch geschrieben werden

$$a : b = \frac{a}{b} = a/b$$

- Rechenregeln ($a, b, c \in \mathbb{R}$):

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b} \quad (b, c \neq 0)$$

$$\frac{-a}{-b} = \frac{(-a) \cdot (-1)}{(-b) \cdot (-1)} = \frac{a}{b}$$

$$-\frac{a}{b} = (-1)\frac{a}{b} = \frac{(-1)a}{b} = \frac{-a}{b}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$$

$$a + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$$

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Quadratwurzel

- Potenz mit a^x, wenn $a \geqslant 0$ und $x = 1/2$: Quadratwurzel
- Schreibweise:

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \qquad \text{wenn } a \geqslant 0$$

- Rechenregeln für $a \neq 0$ und $b > 0$:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

- Achtung: Im allgemeinen:

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

N-te Wurzeln

- Problem: Was bedeutet z.B. $5^{\frac{1}{3}}$?
- Damit Rechenregeln gültig bleiben: $5^{\frac{1}{3}}$ ist Lösung der Gleichung $x^3 = 5$
- Also Allgemein ($a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$):

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^1 = a$$

- Schreibweise:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

- Allgemeine rationale Exponenten ($a \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$):

$$a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

- Wie löst man die Gleichung $a^x = b$ nach x auf?
(dabei soll gelten $a, b > 0$ und $a \neq 1$)
- Neues Symbol: Der Logarithmus von b zur Basis a:

$$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a b$$

- Beobachtungen:
  - $\log_a a = 1$
  - $\log_a 1 = 0$
  - $\log_a (a^n) = n$
- Rechenregeln:

$$\log_a(c \cdot d) = \log_a c + \log_a d$$

$$\log_a \frac{c}{d} = \log_a c - \log_a d$$

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

Logarithmen

Spezielle Logarithmen:

- $\log_2 x = \operatorname{ld} x$ Logarithmus dualis
- $\log_{10} x = \log x$ Dekadischer Logarithmus
- $\log_e x = \ln x$ Logarithmus naturalis

Umrechnung von Basen

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

Beispiel

- Nach wieviel Jahren verdoppelt sich ein Anfangskapital K mit einem jährlichen Zins von 5%?
- Lösung:

$$\begin{aligned}
& 2K = K \cdot (1 + 5\%)^n = K \cdot 1{,}05^n \\
\Leftrightarrow \quad & 1{,}05^n = 2 \\
\Leftrightarrow \quad & n = \log_{1{,}05} 2 = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}05} \approx 14{,}2
\end{aligned}$$

Summenzeichen

- Oft sinnvoll: Abkürzen von längeren Summen durch das Summenzeichen $\sum$ (Großes griechisches Sigma)
- Beispiel: Summe von 6 durchnumerierten Zahlen:

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 = \sum_{i=1}^{6} N_i$$

Sprechweise: „Summe von i gleich 1 bis 6 über N_i“

- Obere und untere Summationsgrenze kann variieren, z.B.

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = a_p + a_{p+1} + \ldots + a_q$$

- Auch konkrete Berechnungsvorschriften sind möglich, z.B.

$$\sum_{i=3}^{8} i^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2$$

Rechenregeln für das Summenzeichen

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad \text{Additivität}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \text{Homogenität}$$

- Damit leicht zu zeigen (Setze $\mu_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$):

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - \mu_x) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - \mu_x)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) - n \cdot \mu_x^2$$

- Analog zum Summenzeichen:
  Das Produktzeichen $\prod$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot$$

- Zum Beispiel:

$$\prod_{i=1}^{2} \left(x + (-1)^i\right) = (x-1)(x+1)$$

- Spezielle Abkürzung:

$$\prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n! \qquad \text{„n Fakultät"}$$

Binomialkoeffizient

- Man definiert den **Binomialkoeffizienten** als:

$$\binom{m}{k} = \frac{\prod\limits_{i=(m-k+1)}^{m} i}{\prod\limits_{j=1}^{k} j} = \frac{m!}{k! \cdot (m-k)!}$$

- Wobei $0! = 1$ gesetzt wird. Also: $\binom{m}{0} = 1$
- Beispiel:

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$$

- Rechenregeln:

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k} \qquad \text{und} \qquad \binom{m+1}{k+1} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k+1}$$

Binomische Formel

- Newtons binomische Formel

$$(a+b)^m = \binom{m}{0} a^m + \binom{m}{1} a^{m-1} b + \cdots + \binom{m}{m-1} a b^{m-1} + \binom{m}{m} b^m$$

- Kurzform:

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k$$

- Zum Beispiel:

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Doppelsummen

- Beispielsituation: Daten in Tabellenform in n Spalten und m Zeilen
- Einzelne Einträge: a_{ij} mit $i \in 1, \ldots, m$ und $j \in 1, \ldots, n$
- Summe über alle Zahlen mit Doppelsummen:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1} + \sum_{i=1}^{m} a_{i2} + \ldots + \sum_{i=1}^{m} a_{in} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \right)$$

- Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$