Wirtschafts- und Finanzmathematik

für Betriebswirtschaft und International Management

Wintersemester 2017/18

04.10.2017	Einführung, R, Grundlagen	1
11.10.2017	Grundlagen, Aussagen	2
18.10.2017	Aussagen	3
25.10.2017	Mengen, Folgen, Reihen	4
01.11.2017	Allerheiligen	
08.11.2017	Reelle Funktionen einer Variablen, Stetigkeit	5
15.11.2017	Differentialrechnung	6
22.11.2017	Differentialrechnung	7
29.11.2017	Integration	8
06.12.2017	Finanzmathematik	9
13.12.2017	Matrizen, Vektoren, Lineare Gleichungssysteme	10
20.12.2017	Determinanten, Eigenwerte	11
29.12.2017	Weihnachten	
05.01.2018	Weihnachten	
10.01.2018	Puffer, Wiederholung	12
19.01.2018	Beginn der Prüfungszeit	

Prof. Dr. Stefan Etschberger
HSA

Organisation

pingo.upb.de/252598

Veranstaltungen zur Mathematik für BW/IM Winterseme						
Was?	Wer?	Tag	Uhrzeit	Wo?	Ab wann?	
Vorlesung Mathematik	Etschberger	Mi	14.00-17.00	B2.14	04.10.2017	
Übung Mathematik	Jansen	Di	11.30-13.00	W1.19	09.10.2017	A
Übung Mathematik	Jansen	Mi	11.30-13.00	W3.20	10.10.2017	B
Übung Mathematik	Jansen	Do	11.30-13.00	W1.19	11.10.2017	C
Übung Mathematik	Etschberger	Mi	17.00-18.30	B4.05	11.10.2017	D
Übung Mathematik	Henle	Mi	11.30-13.00	W1.06	08.11.2017	
Übung Mathematik	Henle	Do	11.30-13.00	J4.13	02.11.2017	
Übung Mathematik	Henle	Do	13.15-14.45	J4.13	02.11.2017	
Übung Mathematik	Burkart	Do	13.00-14.30	W1.01	19.10.2017	E
Übung Mathematik	Burkart	Do	14.30-16.00	W1.01	19.10.2017	F
Offener Matheraum	?/Wesp	Mo	13.30-16.00	B3.05	09.10.2017	
Offener Matheraum	?/Wesp	Di	13.00-16.00	B3.05	10.10.2017	
Offener Matheraum	?/Wesp	Mi	11.30-16.00	B3.05	11.10.2017	
Offener Matheraum	?/Jansen	Do	11.30-15.00	B3.05	12.10.2017	
Offener Matheraum	?/Etschberger	Fr	11.30-14.30	B3.05	13.10.2017	
Veranstaltungen für Teilnehmer der Statistik-Klausur im Januar 2018						
Was?	Wer?		Wann?	Wo?	Ab wann?	
Vorlesung Statistik	Wins	Di	14.00-17.00	W3.02	10.10.2017	
Offener Statistikraum	?/Wesp	Mo	11.30-14.00	B3.05	09.10.2017	
Offener Statistikraum	?/Wesp	Di	13.00-16.00	B3.05	10.10.2017	
Offener Statistikraum	?/Wesp	Mi	11.30-16.30	B3.05	11.10.2017	
Offener Statistikraum	?/Jansen	Do	12.00-15.00	B3.05	12.10.2017	
Offener Statistikraum	?/Etschberger	Fr	11.30-14.30	B3.05	13.10.2017	
Statistik Übung	Ivanov	Do	14.00-15.30	J3.19	12.10.2017	
Statistik Übung	Ivanov	Do	15.40-17.10	J3.19	12.10.2017	

Grundlagentest Logarithmus!

Testfrage: Logarithmen 1

Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

$$\log_2(8) + \frac{\log_4(64)}{\log_{64}(4)} + \log_{\frac{1}{2}}\left(32^2\right)$$

pingo.upb.de/252598

Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

$$\log_2(8) + \frac{\log_4(64)}{\log_{64}(4)} + \log_{\frac{1}{2}}\left(32^2\right)$$

$3 + \frac{3}{1/3} + 2 \cdot (-5) = 3 + 9 - 10 = 2$

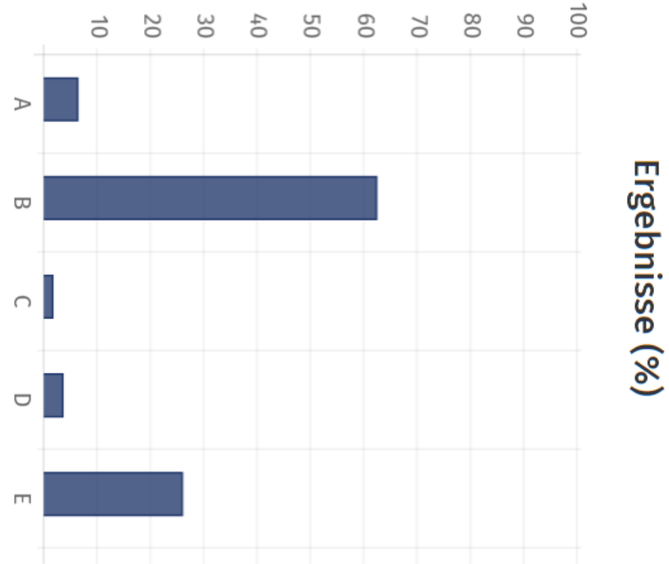
A 36

B 2

C -5

D -6

E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.



Testfrage: Logarithmen 1

Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

$$\log_2(8) + \frac{\log_4(64)}{\log_{64}(4)} + \log_{\frac{1}{2}}\left(32^2\right)$$

A 36

B 2

C -5

D -6

E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

Richtig: B

Testfrage: Logarithmen 2

pingo.upb.de/252598

Fassen Sie folgende Ausdrücke für $x > 0$ zusammen.

$$2\log_a(3x) + \log_a(3x) + 4\log_a(2x) - \frac{1}{2}\log_a\left(64x^2\right)$$

Testfrage: Logarithmen 2

Fassen Sie folgende Ausdrücke für $x > 0$ zusammen.

$$2\log_a(3x) + \log_a(3x) + 4\log_a(2x) - \frac{1}{2}\log_a\left(64x^2\right)$$

$$= \log_a \frac{9x^2 \cdot 3x \cdot 16x^4}{8x} = \log_a 54x^6$$

A $\log_a x$

B $\log_a\left(54x^6\right)$

C $\log_a\left(17x - 32x^2\right)$

D $6{,}5 \cdot \log_a\left(8x - 64x^2\right)$

E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

Testfrage: Logarithmen 2

Fassen Sie folgende Ausdrücke für $x > 0$ zusammen.

$$2\log_a(3x) + \log_a(3x) + 4\log_a(2x) - \frac{1}{2}\log_a(64x^2)$$

$$= \log_a \frac{9x^2 \cdot 3x \cdot 16x^4}{8x} = \log_a 54x^6$$

A $\log_a x$

B $\log_a(54x^6)$

C $\log_a(17x - 32x^2)$

D $6{,}5 \cdot \log_a(8x - 64x^2)$

E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

Teilnehmer: **26**

Antwortmöglichkeiten:

2 8% A

11 42% B

2 8% C

3 12% D

8 31% E

Richtig: B

Testfrage: Logarithmen 3

Was ist die Summe aller Lösungen folgender Gleichung? (Benutzen Sie keinen Taschenrechner)

$$\ln(x-1) - \frac{1}{3}\ln(8) = \frac{1}{5}\ln(32) - \ln(x+2)$$

Testfrage: Logarithmen 3

Was ist die Summe aller Lösungen folgender Gleichung? (Benutzen Sie keinen Taschenrechner)

$ax^2 + bx + c = 0$

$x_{1/2} = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)$

$$\ln(x-1) - \frac{1}{3}\ln(8) = \frac{1}{5}\ln(32) - \ln(x+2)$$

$\Leftrightarrow \ln \frac{x-1}{2} = \ln \frac{2}{x+2}$

$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{2}{x+2} \Leftrightarrow (x-1)(x+2) = 4$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1+24}\right) = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$

aber $x = -3$ ist keine Lsg., da $\ln(-3-1)$ nicht definiert

$\Rightarrow$ einzige Lsg.: $x = 2$

A -3

B -1

C 1

D 2

E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

Teilnehmer: **52**

Antwortmöglichkeiten:

- 6 12% A
- 8 15% B
- 4 8% C
- 8 15% D
- 26 50% E

Testfrage: Logarithmen 3

Was ist die Summe aller Lösungen folgender Gleichung? (Benutzen Sie keinen Taschenrechner)

$$\ln(x-1) - \tfrac{1}{3}\ln(8) = \tfrac{1}{5}\ln(32) - \ln(x+2)$$

- A -3
- B -1
- C 1
- D 2
- E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

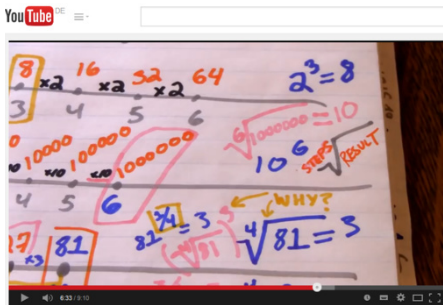
Richtig: D

Testauswertung:

Ihr Ergebnis:

- 3 Antworten richtig: Alles im Lot mit Ihrem Logarithmus!
- 2 Antworten richtig: Rechnen Sie mindestens die Hälfte der Aufgaben aus einem der beiden Bücher!
- Nur 1 Antwort richtig: Rechnen Sie mindestens alle Aufgaben aus einem der Bücher
- Keine Antwort richtig: Rechnen Sie alle Aufgaben aus beiden Büchern!

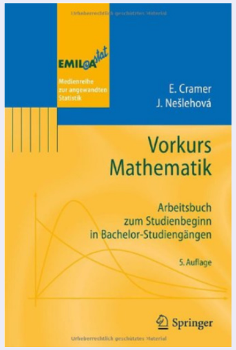
Video zum Thema:



http://goo.gl/zhfB3t

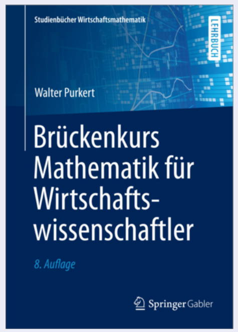
Übungsmaterial

Aufgaben 3.16-3.18, 6.12-6.14 aus



http://goo.gl/qHwN7X

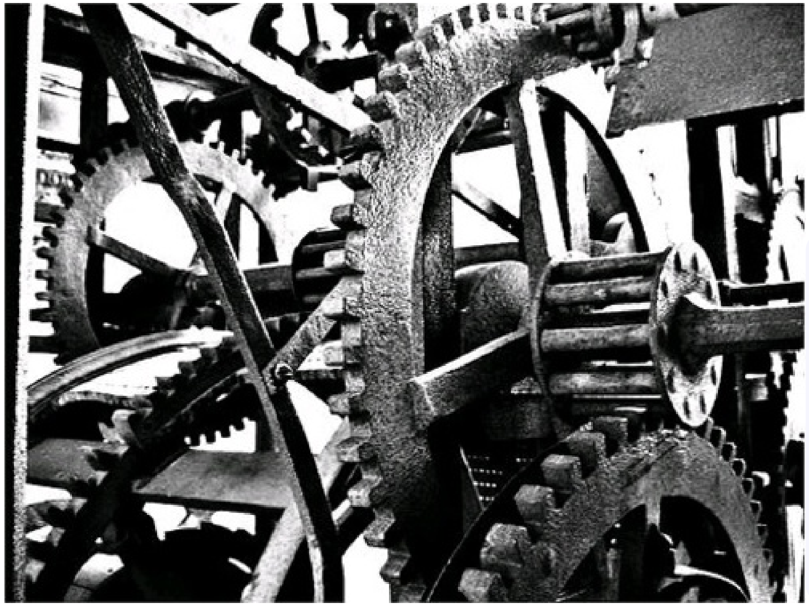
ab S. 99: Aufg. zu Kapitel 2: 22-24 aus



http://goo.gl/2D1oYo

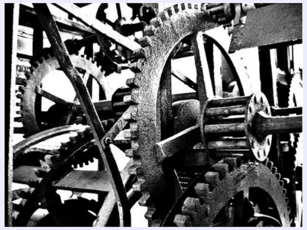
Gliederung

1. Grundlegende Bausteine
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differentialrechnung
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra



Opitz u.a., 2017, Kapitel 4, 5

2 Aussagenlogik
- Einführung
- Aussagenverknüpfungen
- Argumentationstechniken



Warum beschäftigen wir uns mit der Aussagenlogik?

- zahlreiche „Aussagen“ aus der Vorlesung erforden grundlegendes Verständnis der Aussagenlogik
- Grundlage der mathematischen Beweisführung
- Hilfreich zum Erlernen von Programmiersprachen

Wesentliche Lernziele

„Abkürzung“, keine Aussage (ist weder wahr noch falsch)

z.B.: $\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-mal}} = a^n$

Grundlegende Aussage, wird nicht bewiesen

z.B. jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger

Aussage mit eindeutigem Wahrheitswert (wahr oder falsch)

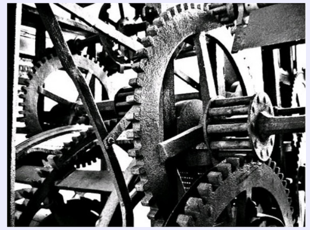
z.B. für $a \neq 0$ gilt $a^0 = 1$ (wahr)

denn $a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1$

Beweis

- Kenntniss der relevanten Begriffe wie Definition, Axiom, Satz und Beweis
- Verständnis der wesentlichen aussagenlogischen Operatoren
- Auswertung logischer Aussagen hinsichtlich der Eigenschaften „wahr“ oder „falsch“
- Beherrschung grundlegender Beweistechniken wie dem direkten und indirekten Beweis sowie der vollständigen Induktion

Beispiel



Aussagen eines Politikers zur Wahl

V : Vollbeschäftigung
S : Steuererhöhung
K : Politiker kümmern sich

- ① $V \vee \bar{S}$ — Die Vollbeschäftigung wird erhalten oder die Steuern dürfen nicht erhöht werden.
- ② $K \Rightarrow S$ — Wenn sich Politiker um die Bevölkerung kümmern, müssen die Steuern angehoben werden.
- ③ $K \vee \bar{V}$ — Die Politiker kümmern sich um die Bevölkerung oder die Vollbeschäftigung kann nicht erhalten werden.
- ④ $\overline{V \Rightarrow S}$ — Es stimmt nicht, dass die Erhaltung der Vollbeschäftigung eine Steuererhöhung zur Folge haben muss.

Hat sich der Politiker widersprochen?

Verknüpfung von Aussagen

Negation: Aussage A, Negation: $\bar{A}$

z.B. A: Herr Mayer ist mind. 18 Jahre alt
$\bar{A}$: " jünger als 18

Wahrheitstabelle — w(ahr), f(alsch)

A	w	f
$\bar{A}$	f	w

Konjunktion: Aussagen: A, B

$A \wedge B$ „A und B"

z.B. A: Herr M. ist mind. 18
B: Herr M. darf in D. wählen

$A \wedge B$: „Herr M. ist mind. 18 und darf in Deutschland wählen"

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \wedge B$	w	f	f	f

Disjunktion $A \vee B$ „vel" — „A oder B" (nicht: entweder oder)

Bsp: A: Übungsgruppe 1 ist überfüllt
B: " 2 "

$A \vee B$: ÜG 1 oder ÜG 2 ist überfüllt

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \vee B$	w	w	w	f

Implikation: $A \Rightarrow B$
„Wenn A, dann B"
„Aus A folgt B"
„A ist hinreichend B"
„B ist notwendig für A"

Beispiel B: Herr M. ist mind. 18
A: " darf in D. wählen

$A \Rightarrow B$: Wenn er wählen darf ist er mind. 18

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Rightarrow B$	w	f	w	w

Ich möchte
A) Eine Pause in der Mitte der VL
B) Zwei Pausen wie bisher
C) Pausen sind was für Warmduscher

Teilnehmer: **189**

Antwortmöglichkeit
26 14% A
150 79% B
13 7% C

Anmerkungen: $A \Rightarrow B$ ist nicht gleichwertig zu $B \Rightarrow A$, $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$

aber $A \Rightarrow B$ ist gleichwertig zu $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Rightarrow B$	w	f	w	w
$\bar{A}$	f	f	w	w
$\bar{B}$	f	w	f	w
$B \Rightarrow A$	w	w	f	w
$\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$	w	w	f	w
$\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$	w	f	w	w

Äquivalenz $\quad A \Leftrightarrow B \quad$ „Genau dann wenn A gilt gilt auch B"

Beispiel : $\quad 2^x = 8 \Leftrightarrow x = 3$

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$A \Leftrightarrow B$	w	f	f	w

Tautologie : Eine immer wahre Aussage

Kontradiktion : Eine immer falsche Aussage

Beispiel : $\underset{②}{(\bar{A} \vee B)} \Leftrightarrow \underset{①}{(A \Rightarrow B)}$

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
① $A \Rightarrow B$	w	f	w	w
$\bar{A}$	f	f	w	w
② $\bar{A} \vee B$	w	f	w	w
① $\Leftrightarrow$ ②	w	w	w	w

Tautologie

Beispiel (Politikeraussagen)

K	w	w	w	w	f	f	f	f
S	w	w	f	f	w	w	f	f
V	w	f	w	f	w	f	w	f
① $V \vee \bar{S}$	w	f	w	w	w	f	w	w
② $K \Rightarrow S$	w	w	f	f	w	w	w	w
③ $K \vee \bar{V}$	w	w	w	w	f	w	f	w
④ $\overline{V \Rightarrow S}$	f	f	w	f	f	f	w	f
① $\wedge$ ② $\wedge$ ③ $\wedge$ ④	f	f	f	f	f	f	f	f

Kontradiktion

Allaussagen : $\quad A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$

$$\bigwedge_{i=1}^{n} A_i$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : A_i$$

Alle Aussagen sind wahr

„Für alle"

Existenzaussagen : $\quad A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$

$$\bigvee_{i=1}^{n} A_i$$

$$\exists i \in \{1, \dots, n\} : A_i$$

Mindestens eine der Aussagen ist wahr

Es gibt (mindestens) ein

Argumentationstechniken

Direkter Beweis einer Implikation $A \Rightarrow B$

$$A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow B$$

Beispiel: $\underbrace{(x+y)^2 = 4xy}_{A} \Rightarrow \underbrace{x = y}_{B}$

$$(x+y)^2 = 4xy$$

$\Rightarrow \quad x^2 + 2xy + y^2 = 4xy \qquad | -4xy$

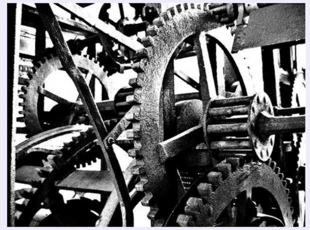
$\Rightarrow \quad x^2 - 2xy + y^2 = 0$

$\Rightarrow \quad (x-y)^2 = 0$

$\Rightarrow \quad x - y = 0$

$\Rightarrow \quad x = y$

Begriffe

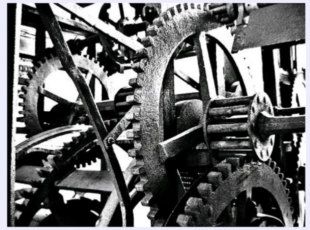


- **Axiom**: Grundsachverhalt als Ausgangspunkt, wird nicht bewiesen
- **Definition**: Sachverhalt, wird durch neuen Begriff beschrieben, bezieht sich auf bereits Definiertes oder auf Axiome
- **Aussage** (math. Satz): Formulierung auf Basis bisherigen Wissens, wird als **wahr** oder falsch identifiziert.
- Aussagenverknüpfungen: **Negation** ($\overline{A}$), **Konjunktion** ($A \wedge B$), **Disjunktion** ($A \vee B$), **Implikation** ($A \Rightarrow B$), **Äquivalenz** ($A \Leftrightarrow B$)
- **Tautologie**: Verknüpfte, stets wahre Aussage
- **Kontradiktion**: Verknüpfte, stets falsche Aussage
- **Allaussage**:

$$A(1) \wedge A(2) \ldots \quad = \quad \bigwedge_x A(x) \text{ (für } x = 1,2,\ldots) \quad = \quad \forall\, x: \; A(x)$$

- **Existenzaussage**:

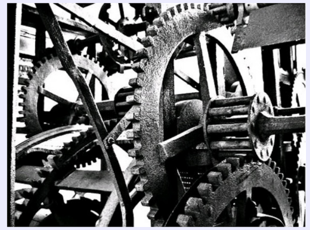
$$A(1) \vee A(2) \ldots \quad = \quad \bigvee_x A(x) \text{ (für } x = 1,2,\ldots) \quad = \quad \exists\, x: \; A(x)$$



Wahrheitswerte aller möglichen Verknüpfungen der Aussagen A und B

A	w	w	f	f	
B	w	f	w	f	
1)	w	w	w	w	Verknüpfung ist stets wahr
2)	f	f	f	f	Verknüpfung ist stets falsch
2)	f	f	f	f	Verknüpfung ist stets falsch
3)	w	w	w	f	Disjunktion $A \vee B$
4)	w	w	f	w	Implikation $B \Rightarrow A$
5)	w	f	w	w	Implikation $A \Rightarrow B$
6)	f	w	w	w	Negierte Konjunktion $\overline{A \wedge B}$
7)	w	f	f	f	Konjunktion $A \wedge B$
8)	f	w	f	f	Negierte Implikation $\overline{A \Rightarrow B}$
9)	f	f	w	f	Negierte Implikation $\overline{B \Rightarrow A}$
10)	f	f	f	w	Negierte Disjunktion $\overline{A \vee B}$
11)	w	f	f	w	Äquivalenz $A \iff B$
12)	f	w	w	f	Negierte Äquivalenz $\overline{A \iff B}$
13)	f	w	f	w	Negation $\overline{B}$
14)	f	f	w	w	Negation $\overline{A}$

Beispiel



Gegeben sind Aussagen über den Marktanteil eines weltweit vertriebenen Markterzeugnisses P in zwei Handelszonen:

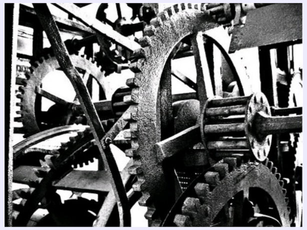
A: *„Das Produkt P hat in der Europäischen Union (EU) einen Marktanteil von mehr als 25 %“*

B: *„Das Produkt P hat in Nordamerika (NA) einen Marktanteil von mehr als 25 %“*

Abgeleitete Aussagen:

- $\overline{A}$: Der Marktanteil von P in der EU beträgt höchstens 25%.
- $A \wedge B$: Der Marktanteil von P beträgt in der EU und in NA mehr als 25%.
- $A \vee B$: Der Marktanteil von P beträgt in der EU oder in NA mehr als 25%.
- $A \Rightarrow B$: Wenn der Marktanteil von P in der EU mehr als 25% beträgt, so liegt er auch in NA über 25 %.
- $A \Leftrightarrow B$: der Marktanteil von P in der EU beträgt genau dann mehr als 25%, wenn er auch in NA über 25 % liegt.

Beispiel



Ausgangspunkt: Aussage A mit

A: *„Der Gewinn einer Unternehmung ist gleich dem Umsatz abzüglich der Kosten."*

Daraus abgeleitet:

A_1: Die Kosten wachsen.

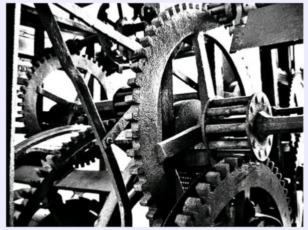
A_2: Der Umsatz wächst.

A_3: Der Gewinn wächst.

Dann ist die folgende Implikation wahr:

- $(\overline{A_1} \wedge A_2) \Rightarrow A_3$:

Argumentationstechniken



- Direkter Beweis einer Implikation $A \Rightarrow B$ (analog Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$):

$$A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow B$$

- Beweis von $A \not\Rightarrow B$ durch Gegenbeispiel
- Beweisprinzip der vollständigen Induktion für Allaussagen
  - Induktionsanfang: Beweis der Aussage für kleinstmöglichen Wert von n (oft $n = 0$ oder $n = 1$)
  - Induktionsvoraussetzung: Annahme, dass die Aussage für n wahr ist
  - Induktionsschluss: Beweis (unter Ausnutzung der Induktionsvoraussetzung), dass die Aussage auch für $n + 1$ gültig ist
- Beispiel (vollst. Induktion): $A(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\ ; n \in \mathbb{N}$
  - Ind.-Anfang: $n = 1 : \sum_{i=1}^{1} i = 1 \quad = \quad \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$
  - Ind.-Schluss:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$