Wirtschafts- und Finanzmathematik

für Betriebswirtschaft und International Management

Wintersemester 2017/18

04.10.2017	Einführung, R, Grundlagen	1
11.10.2017	Grundlagen, Aussagen	2
18.10.2017	Aussagen	3
25.10.2017	Mengen, Folgen, Reihen	4
01.11.2017	Allerheiligen	
08.11.2017	Reelle Funktionen einer Variablen, Stetigkeit	5
15.11.2017	Differentialrechnung	6
22.11.2017	Differentialrechnung	7
29.11.2017	Integration	8
06.12.2017	Finanzmathematik	9
13.12.2017	Matrizen, Vektoren, Lineare Gleichungssysteme	10
20.12.2017	Determinanten, Eigenwerte	11
29.12.2017	Weihnachten	
05.01.2018	Weihnachten	
10.01.2018	Puffer, Wiederholung	12
19.01.2018	Beginn der Prüfungszeit	

Prof. Dr. Stefan Etschberger
HSA

Organisation

Veranstaltungen zur Mathematik für BW/IM Wintersemester 2017/18					
Was?	Wer?	Tag	Uhrzeit	Wo?	Ab wann?
Vorlesung Mathematik	Etschberger	Mi	14.00-17.00	B2.14	04.10.2017
Übung Mathematik	Jansen	Di	11.30-13.00	W1.19	09.10.2017
Übung Mathematik	Jansen	Mi	11.30-13.00	W3.20	10.10.2017
Übung Mathematik	Jansen	Do	11.30-13.00	W1.19	11.10.2017
Übung Mathematik	Etschberger	Mi	17.00-18.30	B4.05	11.10.2017
Übung Mathematik	Henle	Mi	11.30-13.00	W1.06	08.11.2017
Übung Mathematik	Henle	Do	11.30-13.00	J4.13	02.11.2017
Übung Mathematik	Henle	Do	13.15-14.45	J4.13	02.11.2017
Übung Mathematik	Burkart	Do	13.00-14.30	W1.01	19.10.2017
Übung Mathematik	Burkart	Do	14.30-16.00	W1.01	19.10.2017
Offener Matheraum	?/Wesp	Mo	13.30-16.00	B3.05	09.10.2017
Offener Matheraum	?/Wesp	Di	13.00-16.00	B3.05	10.10.2017
Offener Matheraum	?/Wesp	Mi	11.30-16.00	B3.05	11.10.2017
Offener Matheraum	?/Jansen	Do	11.30-15.00	B3.05	12.10.2017
Offener Matheraum	?/Etschberger	Fr	11.30-14.30	B3.05	13.10.2017
Veranstaltungen für Teilnehmer der Statistik-Klausur im Januar 2018					
Was?	Wer?		Wann?	Wo?	Ab wann?
Vorlesung Statistik	Wins	Di	14.00-17.00	W3.02	10.10.2017
Offener Statistikraum	?/Wesp	Mo	11.30-14.00	B3.05	09.10.2017
Offener Statistikraum	?/Wesp	Di	13.00-16.00	B3.05	10.10.2017
Offener Statistikraum	?/Wesp	Mi	11.30-16.30	B3.05	11.10.2017
Offener Statistikraum	?/Jansen	Do	12.00-15.00	B3.05	12.10.2017
Offener Statistikraum	?/Etschberger	Fr	11.30-14.30	B3.05	13.10.2017
Statistik Übung	Ivanov	Do	14.00-15.30	J3.19	12.10.2017
Statistik Übung	Ivanov	Do	15.40-17.10	J3.19	12.10.2017

Indirekter Beweis von $A \Rightarrow B$

Benutze : $A \Rightarrow B \iff \bar{B} \Rightarrow \bar{A}$

Beispiel : $\underbrace{x^3 - x + x^2 - 1 \neq 0}_{A} \Rightarrow \underbrace{|x| \neq 1}_{B}$

$\underbrace{x = \pm 1}_{\bar{B}} \Rightarrow \underbrace{x^3 - x + x^2 - 1 = 0}_{\bar{A}}$ wahr

$[\, x = 1 : \; 1^3 - 1 + 1^2 - 1 = 0 \checkmark$

$\;\; x = -1 : \; -1 + 1 + 1 - 1 = 0 \checkmark \,]$

Beweis von $A \not\Rightarrow B$ durch Gegenbeispiel

Beispiel : Behauptung : $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x^{100} \geq x!$

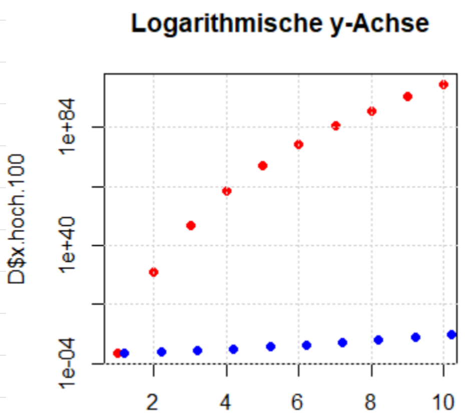
$$200! = \underbrace{\begin{matrix}200\\1\end{matrix}}_{200} \cdot \underbrace{\begin{matrix}199\\2\end{matrix}}_{>200} \cdot \underbrace{\begin{matrix}198\\3\end{matrix}}_{>200} \cdots\cdots \underbrace{\begin{matrix}102\\99\end{matrix}}_{>200} \cdot \underbrace{\begin{matrix}101\\100\end{matrix}}_{>200}$$

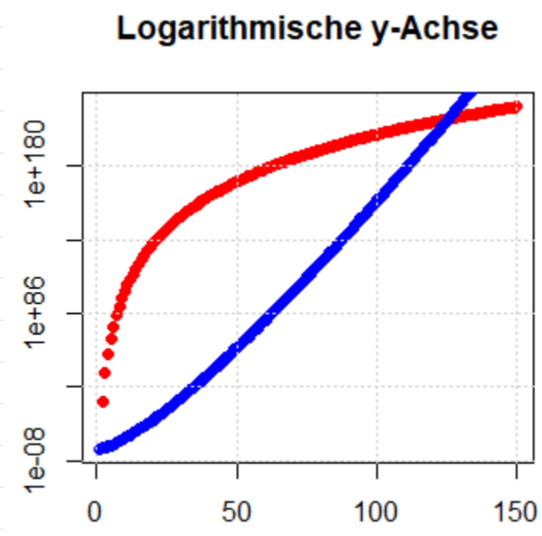
$>200 \cdots$

$$> 200^{100}$$

```
# Gilt x^100 >= x! für alle x in IN?

Auswertung = function(n=10) {
  D = data.frame( x=x <- 1:n, 'x hoch 100'=x^100, 'x Fakultät'=factorial(x))

print(D)

readline(prompt="Press [enter] to continue")
plot(D$x, D$x.hoch.100, col="red", pch=19)
points(D$x+0.2, D$x.Fakultät, col="blue", pch=19)
grid()

readline(prompt="Press [enter] to continue")
plot(D$x, D$x.hoch.100, col="red", log="y", pch=19, main="Logarithmische y-Achse")
points(D$x+0.2, D$x.Fakultät, col="blue", pch=19)
grid()
}

Auswertung(10)
```

	x	x.hoch.100	x.Fakultät
1	1	1.000000e+00	1
2	2	1.267651e+30	2
3	3	5.153775e+47	6
4	4	1.606938e+60	24
5	5	7.888609e+69	120
6	6	6.533186e+77	720
7	7	3.234477e+84	5040
8	8	2.037036e+90	40320
9	9	2.656140e+95	362880
10	10	1.000000e+100	3628800





$$\sum_{i=1}^{100} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100 = 50 \cdot 101 = 5050$$

101

101

101

allgemein : $\sum_{i=1}^{n} i = (1+n) \cdot \frac{n}{2}$

Beweis einer Aussage in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion

gegeben: Aussagen A_n

Aufgabe: Zeige, dass A_n wahr ist für alle $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$

Beweis: ① Suche möglichst kleines n, so dass A_n wahr ist (Induktionsanfang)

z.B. A_1 f, A_2 f, A_3 ✓ w → $n=3$, A_4 ···· A_n

Beispiel: A_n : $n^2 > 4n$

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$1^2 > 4\cdot 1$	$2^2 > 4\cdot 2$	$3^2 > 4\cdot 3$	$4^2 > 4\cdot 4$	$5^2 > 4\cdot 5$
f	f	f	f	w → $n_0 = 5$

② Induktionsschritt: $n \to n+1$

- Annahme: A_n ist wahr
- Zeige: Wenn A_n wahr ist, dann ist auch A_{n+1} wahr (Kurz: $A_n \Rightarrow A_{n+1}$)

Beispiel: A_n : $n^2 > 4n$ (①: Anfang: gilt für $n=5$)

② zu zeigen: $A_n \overset{!}{\Rightarrow} A_{n+1}$ → „ist noch nicht bewiesen, ist zu zeigen"

$$\underbrace{n^2}_{\text{linke S. von } A_n\ (A_n^L)} > \underbrace{4n}_{\text{rechte S. von } A_n\ (A_n^R)} \overset{!}{\Rightarrow} \underbrace{(n+1)^2}_{\text{linke Seite von } A_{n+1}\ (A_{n+1}^L)} > \underbrace{4(n+1)}_{\text{rechte S. von } A_{n+1}\ (A_{n+1}^R)}$$

Beweis:

$$\underbrace{(n+1)^2}_{A_{n+1}^L} = \underbrace{n^2}_{A_n^L} + 2n + 1 > \underbrace{4n}_{A_n^R} + 2n + 1$$

↑ Induktionsvoraussetzung

$$> 4n + 4 = \underbrace{4(n+1)}_{A_{n+1}^R}$$

denn $2n+1 > 4$ wenn $n \geq 5$

↑ Induktionsanfang

Beispiel: A_n : $\sum_{i=1}^{n} i = (n+1)\frac{n}{2}$

mit vollst. Induktion zu zeigen

① A_1 : $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = (1+1)\cdot\frac{1}{2}$ ✓

② Ind. Schritt: $n \to n+1$ $\left[A_{n+1}: \sum_{i=1}^{n+1} i = (n+2)\frac{(n+1)}{2}\right]$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1)$$

Ind. voraussetzung

$$= \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = (n+1)\frac{n}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + n + 1 = \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{3}{2}n + 1$$

$$= \frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} + 1 = \frac{n^2+2n+n+2}{2} = (n+2)\cdot\frac{(n+1)}{2}$$

Beispiel: $A_n: \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

mit vollständiger Induktion

① $A_1: \sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)$ ✓

② $n \to n+1$ $\quad \left[A_{n+1}: \sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)\right]$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2$$

$$= \frac{1}{6}(n^2+n)(2n+1) + n^2+2n+1$$

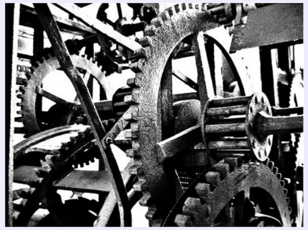
$$= \frac{1}{6}(2n^3+n^2+2n^2+n) + n^2+2n+1$$

$$= \frac{1}{6}\left[(2n^3+3n^2+n) + 6n^2+12n+6\right]$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left[2n^3+9n^2+13n+6\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[2n^3+3n^2+6n^2+9n+4n+6\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[(n^2+3n+2)(2n+3)\right] = \frac{1}{6}(n+1) \cdot (n+2)(2n+3)$$



- Direkter Beweis einer Implikation $A \Rightarrow B$ (analog Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$):

$$A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow B$$

- Beweis von $A \not\Rightarrow B$ durch Gegenbeispiel
- Beweisprinzip der vollständigen Induktion für Allaussagen
  - Induktionsanfang: Beweis der Aussage für kleinstmöglichen Wert von n (oft $n = 0$ oder $n = 1$)
  - Induktionsvoraussetzung: Annahme, dass die Aussage für n wahr ist
  - Induktionsschluss: Beweis (unter Ausnutzung der Induktionsvoraussetzung), dass die Aussage auch für $n + 1$ gültig ist
- Beispiel (vollst. Induktion): $A(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\ ; n \in \mathbb{N}$
  - Ind.-Anfang: $n = 1 : \sum\limits_{i=1}^{1} i = 1 \quad = \quad \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$
  - Ind.-Schluss:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

Beispiel: Beweis durch Gegenbeispiel

- Ausgangspunkt: Die ökonomische Gleichung

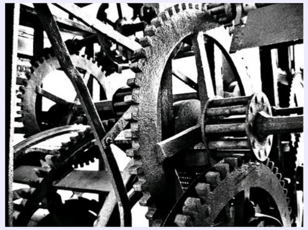
$$\text{Gewinn} = \text{Umsatz} - \text{Kosten}$$

- Daraus:

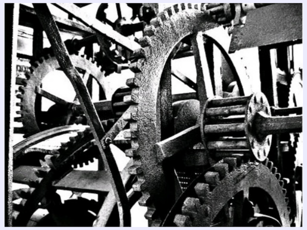
A: Für zwei Produkte stimmen Umsätze und Kosten überein
B: Für zwei Produkte sind die Gewinne gleich

- Damit gilt: $A \Rightarrow B$, andererseits aber $B \not\Rightarrow A$.

Gegenbeispiel zur Bestätigung von $B \not\Rightarrow A$:



Beispiel: Beweis durch Gegenbeispiel



- Ausgangspunkt: Die ökonomische Gleichung

$$\text{Gewinn} \quad = \quad \text{Umsatz} - \text{Kosten}$$

- Daraus:

  A: Für zwei Produkte stimmen Umsätze und Kosten überein
  B: Für zwei Produkte sind die Gewinne gleich

- Damit gilt: $A \Rightarrow B$, andererseits aber $B \not\Rightarrow A$.

Gegenbeispiel zur Bestätigung von $B \not\Rightarrow A$:

- Für zwei Produkte gegeben:
  - Umsätze $u_1 = 2, u_2 = 5$
  - Kosten $c_1 = 1, c_2 = 4$
- Dann ist $g_1 = u_1 - c_1 = 2 - 1 \quad = 1 = \quad u_2 - c_2 = 5 - 4 = g_2$, aber $u_1 \neq u_2$, $c_1 \neq c_2$.

Gliederung

1. Grundlegende Bausteine
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differentialrechnung
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra

Opitz u.a., 2017, Kapitel 6, 7.1, 7.3, 7.4

3. Mengen
   - Grundlagen
   - Beziehungen zwischen Mengen
   - Relationen

Warum Mengen?

- Mengen sind natürliche Betrachtungsgegenstände in den Wirtschaftswissenschaften:
  - Kundensegmente
  - Produktgruppen
  - Handlungsalternativen
  - etc.
- Mengen erlauben die effiziente Gruppierung von Objekten sowie die Repräsentation ihrer Eigenschaften und Beziehungen
- mengenorientierte Schreibweisen bilden die Grundlage der Darstellung zahlreicher mathematischer Methoden wie z.B. im Operations Research oder in Methoden der Marktforschung

Wesentliche Lernziele

- Verstehen des Begriffs Menge
- Fähigkeit Mengen darzustellen und Operationen mit ihnen durchzuführen
- Beherrschen der grundlegenden kombinatorischen Methoden, die Elemente einer Menge anzuordnen bzw. eine Teilmenge davon auszuwählen
- Fähigkeit Beziehungen zwischen Mengenelementen darstellen zu können

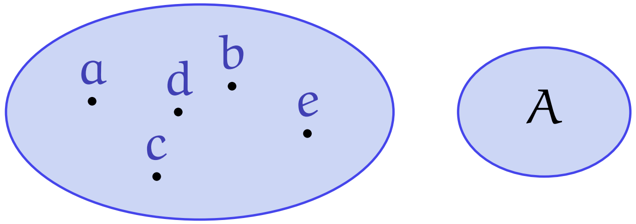
Grundbegriffe

- Menge A: Gesamtheit bestimmter unterscheidbarer Objekte (Elemente)
- Es kann immer entschieden werden:

$$a \in A \qquad \text{oder} \qquad a \notin A$$

ist Element von

- Mengendefinition durch Aufzählen ($A = \{a, b, c, \ldots\}$)
- oder Beschreibung der Elemente; zum Beispiel
  $B = \{b : b \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad 0 < b < 10\} = \{1, 2, \ldots, 9\}$
- Veranschaulichung durch Venn-Diagramme:



Venndiagramme der Menge $\{a, b, c, d, e\}$ (links)
und der Menge A (rechts)

- Mächtigkeit einer Menge: Anzahl der Elemente einer Menge; Symbol: $|A|$
- Leere Menge: enthält keine Elemente; Symbole: $\emptyset \; = \; \{\}$

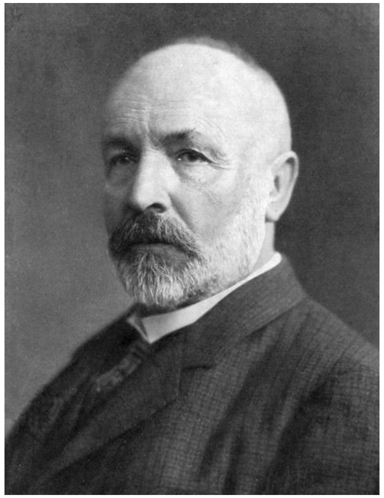


Abbildung 6.1: *Georg Cantor (1845-1918)*

Opitz u. a., (2017, S. 55)

Antinomie von Betrand Russell (1872 - 1970)

- *„Der Barbier eines Dorfes rasiert genau alle Männer eines Dorfes, die sich nicht selber rasieren"*
- Unklar: Gehört der Barbier zur Menge der Selbstrasierer?

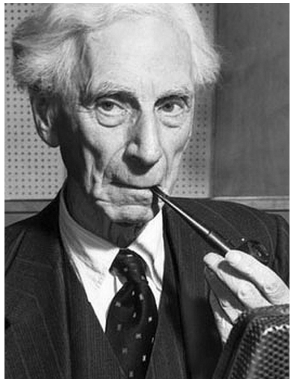


Abbildung 6.2: *Bertrand Russell (1872-1970)*

Opitz u. a., (2017, S. 55)

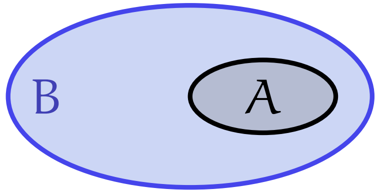
Problem der „naiven" Mengenlehre

- Widersprüche (s.o.)!
- Lösung: Axiomatische Mengentheorie
- Erster Ansatz mit Axiomen: Georg Cantor
- verbreitet in moderner Mathe: Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre mit Auswahlaxiom (ZFC)
- Trotzdem hier im Kurs: Naiver Ansatz

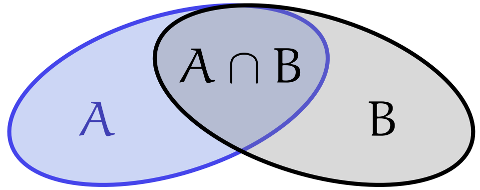
Relationen und Operationen zwischen Mengen

- **Gleichheit**: $A = B \quad \Leftrightarrow \quad (a \in A \Leftrightarrow a \in B)$
- **Teilmenge**: $A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad (a \in A \Rightarrow a \in B)$

  B ist Obermenge von A
- **Echte Teilmenge**:
  $A \subsetneq B \;\Leftrightarrow\; (A \subseteq B \land A \neq B)$
- **Potenzmenge** $\mathcal{P}(A)$: Menge aller Teilmengen von A
- Bemerkung: $\emptyset$ ist Teilmenge jeder Menge



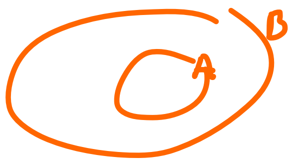
Teilmenge $A \subsetneq B$

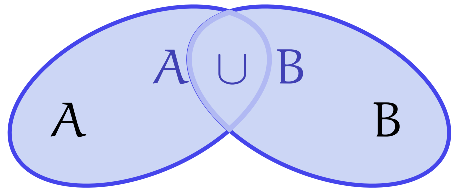


Durchschnittsmenge
$A \cap B$

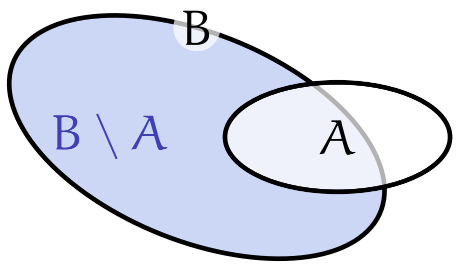
Mengenoperationen

- **Durchschnittsmenge**:
  $A \cap B = \{a : a \in A \land a \in B\}$
- **Vereinigungssmenge**:
  $A \cup B = \{a : a \in A \lor a \in B\}$
- **Differenzmenge**: $A \backslash B = \{a : a \in A \land a \notin B\}$ „A ohne B"
- **Komplementärmenge** (Vorauss. $A \subseteq B$):
  $\overline{A}_B = \{a : a \in B \land a \notin A\}$





Vereinigungsmenge $A \cup B$



Differenzmenge B ohne A

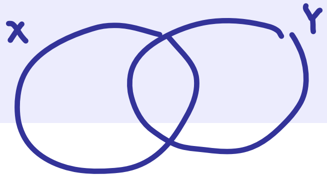
Beispiel Potenzmenge gegeben Menge $M = \{1, B, W\}$

$$\mathcal{P}(M) = \{ \{1, B, W\}, \{B, W\}, \{1, W\}, \{1, B\}, \{W\}, \{B\}, \{1\}, \{\ \} \}$$

$$|\mathcal{P}(M)| = 8$$

$$\boxed{|A| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = 2^n}$$

Beispiel: Skiclub „Buckelpiste“ (Opitz u. a., 2017, S. 64)



$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$

$\Leftrightarrow |X \cap Y| = |X| + |Y| - |X \cup Y|$

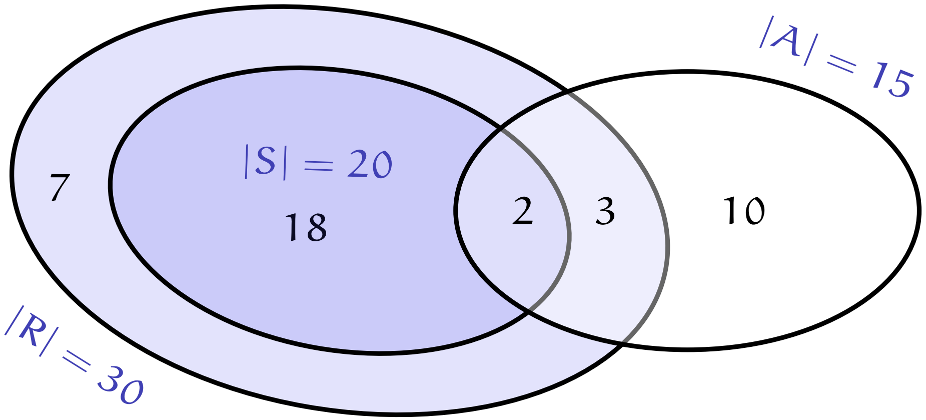
- Vereinsmeisterschaft in den Disziplinen Abfahrt (A), Slalom (S) und Riesenslalom (R)
- 40 Teilnehmer, davon 15 für Abfahrt, 20 für Slalom, 30 für Riesenslalom.
- Alle Slalomteilnehmer: Auch Riesenslalom.
- Zwei Teilnehmer: Alle drei Disziplinen

Damit gilt

$$
\begin{aligned}
|A| = 15\,,\ |S| &= 20\,,\\
|R| &= 30\,,\\
|R \cap S| &= 20\,,\\
|R \cup S| &= 30\,,\\
|R \setminus S| &= 10\,,\\
|A \cap S \cap R| = |A \cap S| &= 2\,,\\
|A \cup S \cup R| = |A \cup R| &= 40
\end{aligned}
$$

- Daraus folgt:

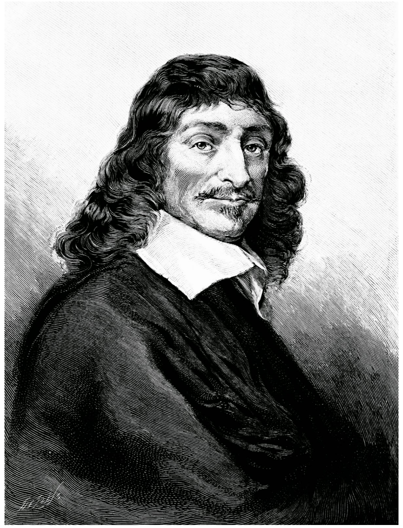
$$
\begin{aligned}
|A \cap R| &= |A| + |R| - |A \cup R|\\
&= 15 + 30 - 40 = 5\\
|A \cup S| &= |A| + |S| - |A \cap S|\\
&= 15 + 20 - 2 = 33\\
|(A \setminus R) \setminus S| &= |A \setminus R| = |A| - |A \cap R|\\
&= 15 - 5 = 10\\
|(R \setminus S) \setminus A| &= |R| - |R \cap A| - |R \cap S|\\
&\quad + |R \cap S \cap A|\\
&= 30 - 5 - 20 + 2 = 7
\end{aligned}
$$



Venndiagramm zum Beispiel

Relationen und Abbildungen

- Ausgangspunkt: Mengen A, B
- Daraus: Kombination von zwei Elementen (mit Reihenfolge): (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$
- Sprechweise für (a, b): Geordnetes Paar, Tupel
- Menge aller geordneten Paare von A und B (auch: kartesisches Produkt)



Opitz u. a., (2017, S. 65)

Tupel

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

A kreuz B

$\Rightarrow |A \times B| = |A| \cdot |B|$

- $R \subseteq A \times B$ heißt (binäre) Relation von A in B
- Abbildung von A in B: Eine Vorschrift f, die jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ zuordnet

Funktion

$$f : A \to B \quad \text{mit} \quad a \in A \mapsto f(a) = b \in B$$

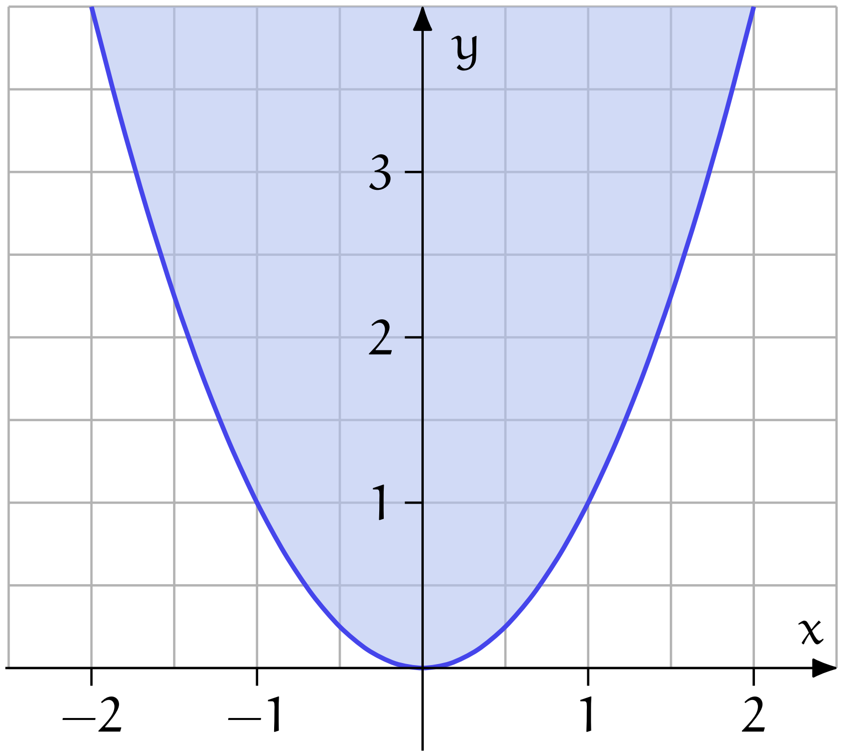
Beispiel: Relation

Abk. für $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

- Gegeben: Menge $A \times B = \mathbb{R}^2$ und Relation $R \subseteq \mathbb{R}^2$ mit

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \geqq x^2\}$$

- Damit: R enthält alle Zahlenpaare des $\mathbb{R}^2$, die oberhalb einer Parabel mit dem Scheitel im Nullpunkt liegen
- R ist keine Funktion



Graph der Relation
$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \geqq x^2\}$

Beispiel: Relationen und Abbildungen

- $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ ist Menge von Tätigkeiten,
- die von einer Menge $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ von Angestellten zu erledigen sind.

Gegeben: Zuordnungsvorschriften

a_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	
$f_1(a_i)$		b_1	b_2		b_3	b_4	nein
$f_2(a_i)$	b_1	b_2	b_2	b_2, b_3	b_3	b_4	nein
$f_3(a_i)$	b_1	b_1	b_1	b_1	b_1	b_1	ja
$f_4(a_i)$	b_1	b_3	b_2	b_2	b_3	b_4	ja

Welches f_i ist eine Funktion?

Eine Funktion $f: D \to W$ heißt:

- surjektiv, wenn zu jedem $y \in W$ ein $x \in D$ mit $f(x) = y$ existiert,
- injektiv, wenn für alle $x, \tilde{x} \in D$ gilt $x \neq \tilde{x} \Rightarrow f(x) \neq f(\tilde{x})$,
- bijektiv, wenn f surjektiv und injektiv ist.

Beispiel

- Gegeben: $A = \{a_1, a_2, a_3\}, B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$

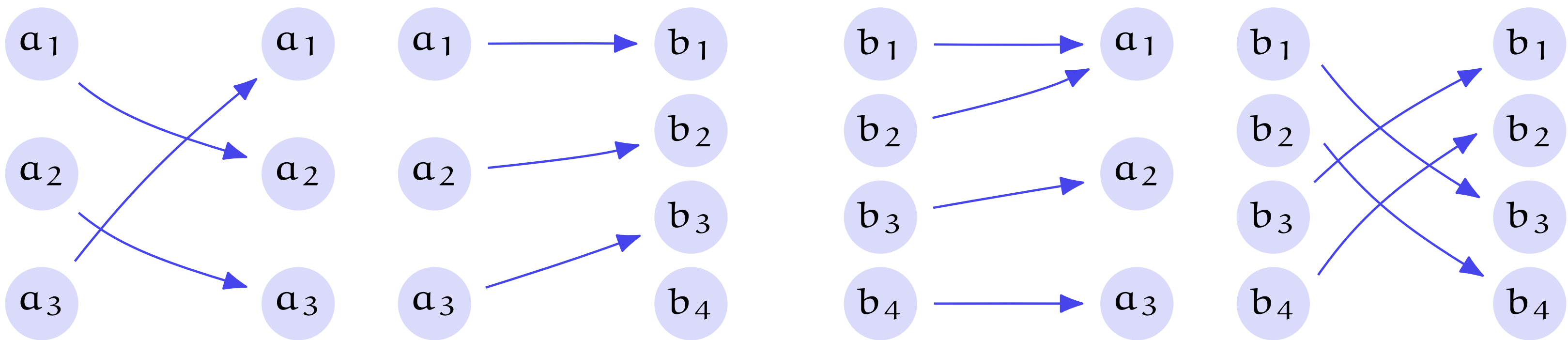
- Funktionen f_1, f_2:

$a \in A$	a_1	a_2	a_3
$f_1(a)$	a_2	a_3	a_1
$f_2(a)$	b_1	b_2	b_3

- Funktionen f_3, f_4:

$b \in B$	b_1	b_2	b_3	b_4
$f_3(b)$	a_1	a_1	a_2	a_3
$f_4(b)$	b_3	b_4	b_1	b_2

$f_1 : A \to A$ $\quad$ $f_2 : A \to B$ $\quad$ $f_3 : B \to A$ $\quad$ $f_4 : B \to B$



Die Funktionen f_1, f_4 sind bijektiv, f_2 ist injektiv, f_3 ist surjektiv.

Ende
25.10.2017