Wirtschafts- und Finanzmathematik

für Betriebswirtschaft und International Management

Wintersemester 2017/18

04.10.2017	Einführung, R, Grundlagen	1
11.10.2017	Grundlagen, Aussagen	2
18.10.2017	Aussagen	3
25.10.2017	Mengen, Folgen, Reihen	4
01.11.2017	Allerheiligen	
08.11.2017	Reelle Funktionen einer Variablen, Stetigkeit	5
15.11.2017	Differentialrechnung	6
22.11.2017	Differentialrechnung	7
29.11.2017	Integration	8
06.12.2017	Finanzmathematik	9
13.12.2017	Matrizen, Vektoren, Lineare Gleichungssysteme	10
20.12.2017	Determinanten, Eigenwerte	11
29.12.2017	Weihnachten	
05.01.2018	Weihnachten	
10.01.2018	Puffer, Wiederholung	12
19.01.2018	Beginn der Prüfungszeit	

Prof. Dr. Stefan Etschberger
HSA

Grundlagentest
Gleichungen!

Testfrage: Gleichungen 1

Quadratische Gleichung

Falls $a, x \neq 0$ sind für die Gleichung

$$x - a = \frac{2a^2}{x}$$

in Abhängigkeit von a folgende $x \in \mathbb{R}$ eine Lösung:

Testfrage: Gleichungen 1

Quadratische Gleichung

Falls $a, x \neq 0$ sind für die Gleichung

$$x - a = \frac{2a^2}{x}$$

in Abhängigkeit von a folgende $x \in \mathbb{R}$ eine Lösung:

$$\Leftrightarrow \overset{A}{x^2} \overset{B}{- a x} \overset{C}{- 2a^2} = 0$$

$$x_{1/2} = \tfrac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2 + 8a^2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}(a \pm 3a) = \begin{cases} 2a \\ -a \end{cases}$$

- **A** a
- **B** $2a$ und $-a$
- **C** $3{,}5a$ und $-2{,}5a$
- **D** es gibt keine Lösung
- **E** Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

1	2%	A
23	40%	B
1	2%	C
7	12%	D
26	45%	E

Quadratische Gleichung

Falls $a, x \neq 0$ sind für die Gleichung

$$x - a = \frac{2a^2}{x}$$

in Abhängigkeit von a folgende $x \in \mathbb{R}$ eine Lösung:

- A a
- B $2a$ und $-a$
- C $3{,}5a$ und $-2{,}5a$
- D es gibt keine Lösung
- E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

Richtig: B

Testfrage: Gleichungen 2

Die Gleichung

$$\frac{x-6}{1-x}+\frac{5}{(1-x)(x-6)}=\frac{x-7}{x-6}$$

$x \neq 1, 6$

HN: $(1-x)(x-6)$

$\rightarrow$ multipl. mit HN

hat folgende Lösungsmenge $\mathbb{L}$:

$$\Leftrightarrow (x-6)^2+5=(x-7)(1-x)$$
$$\Leftrightarrow x^2-12x+41=-x^2+8x-7$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-20x+48=0$$
$$x_{1/2}=\frac{1}{4}\left(20\pm\sqrt{400-8\cdot 48}\right)$$
$$=5\pm 1=\begin{cases}6\\4\end{cases}$$

aber $x=6$ geht nicht

$\Rightarrow$ einzige Lsg: $x=4$

$L=\{4\}$

8	24%	A
1	3%	B
2	6%	C
6	18%	D
17	50%	E

Testfrage: Gleichungen 2

Die Gleichung

$$\frac{x-6}{1-x}+\frac{5}{(1-x)(x-6)}=\frac{x-7}{x-6}$$

hat folgende Lösungsmenge $\mathbb{L}$:

$x \neq 1, 6$

HN: $(1-x)(x-6)$

→ multipl. mit HN

A $\mathbb{L}=\{6,4\}$

B $\mathbb{L}=\{6,1\}$

C $\mathbb{L}=\{1\}$

D $\mathbb{L}=\{4\}$

E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

$$\Leftrightarrow (x-6)^2+5=(x-7)(1-x)$$
$$\Leftrightarrow x^2-12x+41=-x^2+8x-7$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-20x+48=0$$
$$x_{1/2}=\tfrac{1}{4}\left(20\pm\sqrt{400-8\cdot 48}\right)$$
$$=5\pm 1=\begin{cases}6\\4\end{cases}$$

aber $x=6$ geht nicht

$\Rightarrow$ einzige Lsg: $x=4$

$L=\{4\}$

8	24%	A
1	3%	B
2	6%	C
6	18%	D
17	50%	E

Testfrage: Gleichungen 2

Die Gleichung

$$\frac{x-6}{1-x} + \frac{5}{(1-x)(x-6)} = \frac{x-7}{x-6}$$

hat folgende Lösungsmenge $\mathbb{L}$:

A $\mathbb{L} = \{6, 4\}$

B $\mathbb{L} = \{6, 1\}$

C $\mathbb{L} = \{1\}$

D $\mathbb{L} = \{4\}$

E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

Richtig: D

Testfrage: Gleichungen 3

Betragsgleichung

Die Gleichung

$$|x - 3| - |2x + 4| = 0$$

hat folgende Lösungsmenge $\mathbb{L}$:

Testfrage: Gleichungen 3

Betragsgleichung

Die Gleichung

$$|x - 3| - |2x + 4| = 0$$

hat folgende Lösungsmenge $\mathbb{L}$:

- A $\mathbb{L} = \{3, -2\}$
- B $\mathbb{L} = \{-7\}$
- C $\mathbb{L} = \{-7, -\frac{1}{3}\}$
- D $\mathbb{L} = \{3\}$
- E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

Betragsgleichung

Die Gleichung

$$|x-3| - |2x+4| = 0$$

hat folgende Lösungsmenge $\mathbb{L}$:

$\Leftrightarrow \; |x-3| = |2x+4|$

$\Leftrightarrow \; x-3 = 2x+4 \;\lor\; -(x-3) = 2x+4$

$\Leftrightarrow \; -7 = x \;\lor\; -1 = 3x$

$\Leftrightarrow \; x = -7 \;\lor\; x = -\frac{1}{3}$

$|\;\;| = |\;\;|$

$\Leftrightarrow \;\; = $

oder $- \;\; = $

A $\mathbb{L} = \{3, -2\}$

B $\mathbb{L} = \{-7\}$

C $\mathbb{L} = \{-7, -\frac{1}{3}\}$

D $\mathbb{L} = \{3\}$

E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

13	14%	A
40	44%	B
12	13%	C
3	3%	D
23	25%	E

Richtig: C

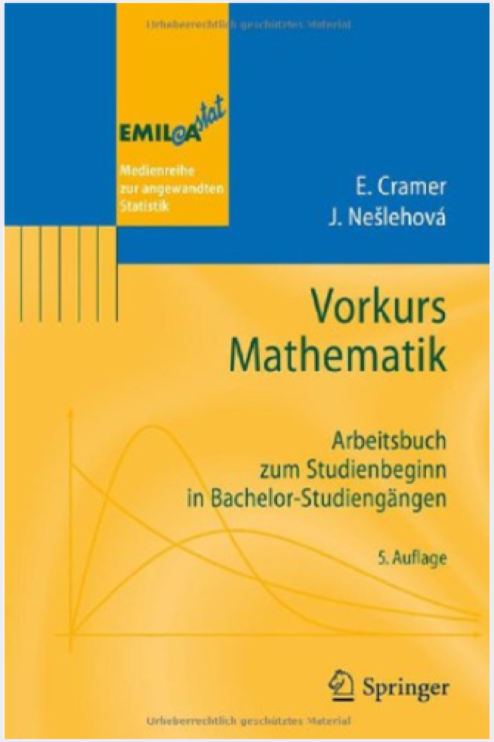
Testauswertung:

Ihr Ergebnis:

- 3 Antworten richtig: Sie wirken ausgeglichen!
- 2 Antworten richtig: Rechnen Sie die Aufgaben 6.12 - 6.19!
- Nur 1 Antwort richtig: Rechnen Sie die Aufgaben 6.8 - 6.19!
- Keine Antwort richtig: Rechnen Sie die Aufgaben 6.1 - 6.19!

Übungsmaterial

Aufgaben 6.1 - 6.19 aus



http://goo.gl/qHwN7X

Gliederung

Opitz u. a., (2017, Kapitel 9, 10)

5 Reelle Funktionen

- Grundbegriffe
- Elementare Funktionen
- Stetigkeit reeller Funktionen

Warum beschäftigen wir uns mit reellen Funktionen?

- allgemein: kompakte und präzise Beschreibung von Abhängigkeiten zwischen mehreren Faktoren
- speziell: Modellierung technischer und ökonomischer Systeme
- Basis für Analyse und Optimierung von Systemen / Prozessen

Wesentliche Lernziele

- Fähigkeit mit den wesentlichen Begriffen im Zusammenhang mit Funktionen umzugehen
- Kennenlernen der wichtigsten Klassen reeller Funktionen
- Beherrschen des Stetigkeitsbegriffs

Beispiel (Opitz u. a., 2017, Beispiel 9.1, S. 99)

- Für ein Produkt wird der monatliche Absatz erhoben. Über ein Jahr betrachtet erhält man Absatzwerte für 12 Zeitpunkte.
- Darstellung der Funktion $f : A \to B$ mit

$$A = \{1, \ldots, 12\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}:$$

durch die Wertetabelle

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(t)$	3	2	3	4	4	4	1	2	4	5	3	4

- graphisch:

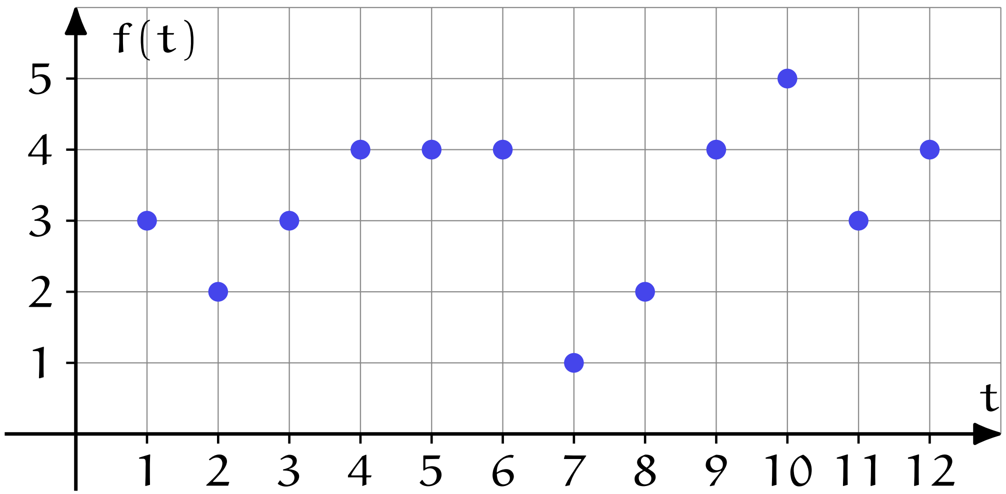


Abbildung: Graph der Funktion $f : A \to B$

Definition

- $f : D \to \mathbb{R}$ heißt reellwertige Abbildung mit Definitionsbereich D
- Mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt f reelle Funktion von n Variablen

$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}}$

z.B. $x = (1, 2, 7) \in \mathbb{R}^3$
$x = (-1, 5.8) \in \mathbb{R}^2$

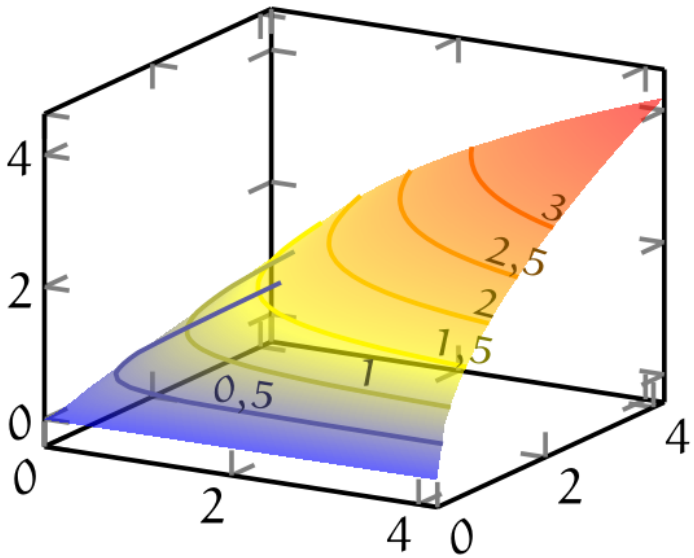
Darstellung von Funktionen

- Durch Funktionsgleichungen $f(x_1, \dots, x_n) = y$
  - $x = (x_1, \dots, x_n)$: unabhängige (exogene) Variablen
  - y: abhängige (endogene) Variablen
- Durch Wertetabellen
- Durch Graphen
  - Für $D \subseteq \mathbb{R}$: Darstellung im kartesischen Koordinatensystem
  - Für $D \subseteq \mathbb{R}^2$: 3-dimensionale Darstellung oder Niveaulinien $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$

Cobb-Douglas-Funktion

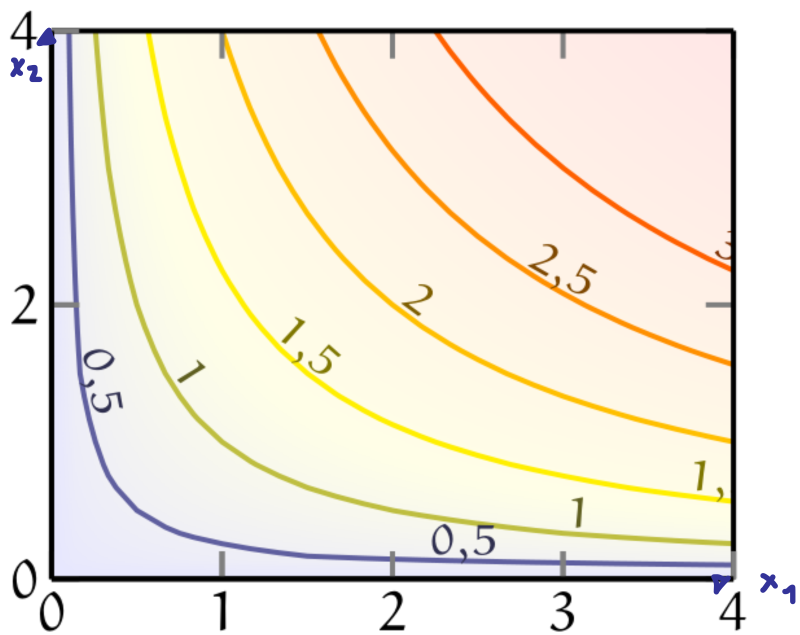
- neoklassische Produktionsfunktion der Form
  $$f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \ldots x_n^{a_n}$$
- Beispiel für zwei Produktionsfaktoren
  $$f(x_1, x_2) = 1 \cdot x_1^{1/2} \cdot x_2^{1/2} = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$$

Dreidimensionale Darstellung



Niveaulinien

für $f(x_1, x_2) = c$ mit $c = 1/2, \ldots, 3$

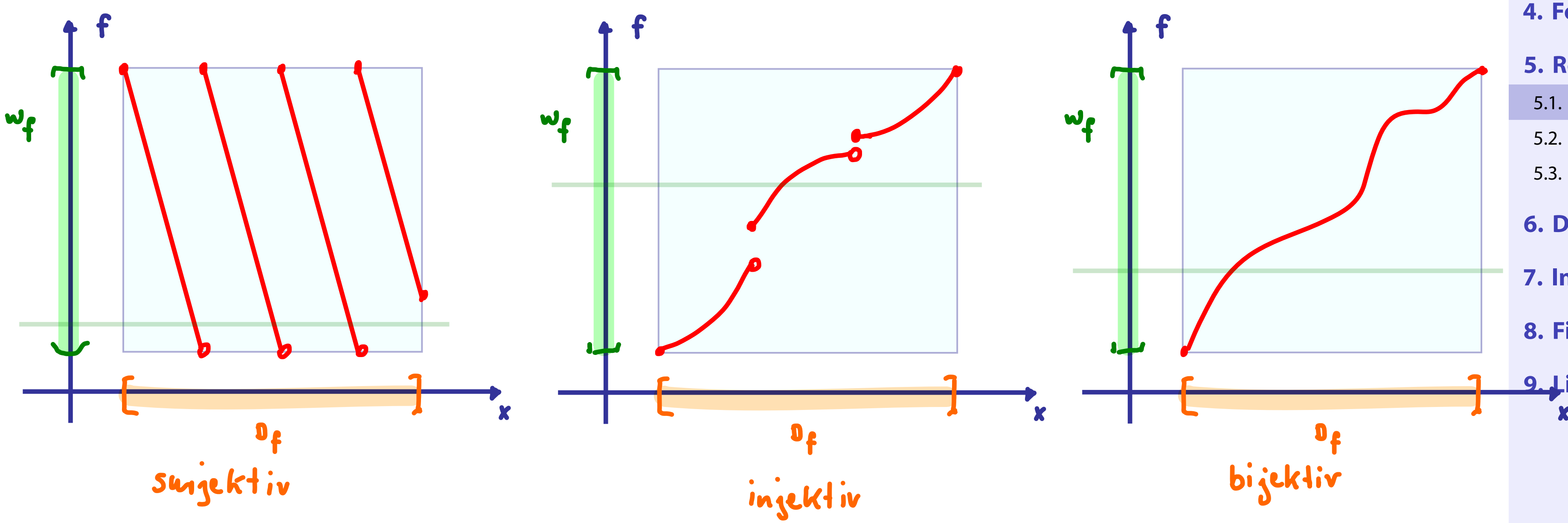


$x_1, x_2 \geq 0$: $\sqrt{x_1 x_2} = 1 \iff x_2 = \frac{1}{x_1}$

Eigenschaften von Funktionen

Eine Funktion $f : D \to W$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $W \subseteq \mathbb{R}$ heißt:

- surjektiv, wenn zu jedem $y \in W$ ein $x \in D$ mit $f(x) = y$ existiert,
- injektiv, wenn für alle $x, \tilde{x} \in D$ gilt $x \neq \tilde{x} \Rightarrow f(x) \neq f(\tilde{x})$,
- bijektiv, wenn f surjektiv und injektiv ist.



Eigenschaften von Funktionen

Eine Funktion $f: D \to W$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $W \subseteq \mathbb{R}$ heißt:

- surjektiv, wenn zu jedem $y \in W$ ein $x \in D$ mit $f(x) = y$ existiert,
- injektiv, wenn für alle $x, \tilde{x} \in D$ gilt $x \neq \tilde{x} \Rightarrow f(x) \neq f(\tilde{x})$,
- bijektiv, wenn f surjektiv und injektiv ist.

Komposition von Funktionen

- Voraussetzung: Funktionen $f: D_f \to \mathbb{R}$ und $g: D_g \to \mathbb{R}$ mit $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f(D_f) \subseteq D_g \subseteq \mathbb{R}$
- Zusammengesetzte Funktion: $g \circ f: D_f \to \mathbb{R}$: Zuordnung des Werts $(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right)$ für alle $x \in D_f$

Eigenschaften von Funktionen

Eine Funktion $f: D \to W$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $W \subseteq \mathbb{R}$ heißt:

- surjektiv, wenn zu jedem $y \in W$ ein $x \in D$ mit $f(x) = y$ existiert,
- injektiv, wenn für alle $x, \tilde{x} \in D$ gilt $x \neq \tilde{x} \Rightarrow f(x) \neq f(\tilde{x})$,
- bijektiv, wenn f surjektiv und injektiv ist.

Komposition von Funktionen

- Voraussetzung: Funktionen $f: D_f \to \mathbb{R}$ und $g: D_g \to \mathbb{R}$ mit $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f(D_f) \subseteq D_g \subseteq \mathbb{R}$
- Zusammengesetzte Funktion: $g \circ f: D_f \to \mathbb{R}$: Zuordnung des Werts $(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right)$ für alle $x \in D_f$

Inverse Funktion / Umkehrfunktion

- Voraussetzung: bijektive Funktion $f: D \to W$ mit $D, W \subseteq \mathbb{R}$
- Inverse Funktion: $f^{-1}: W \to D,\ y \mapsto f^{-1}(y)$, wobei y für alle $x \in D$ mit $y = f(x)$ zugeordnet wird

Invertierung: Beispiel

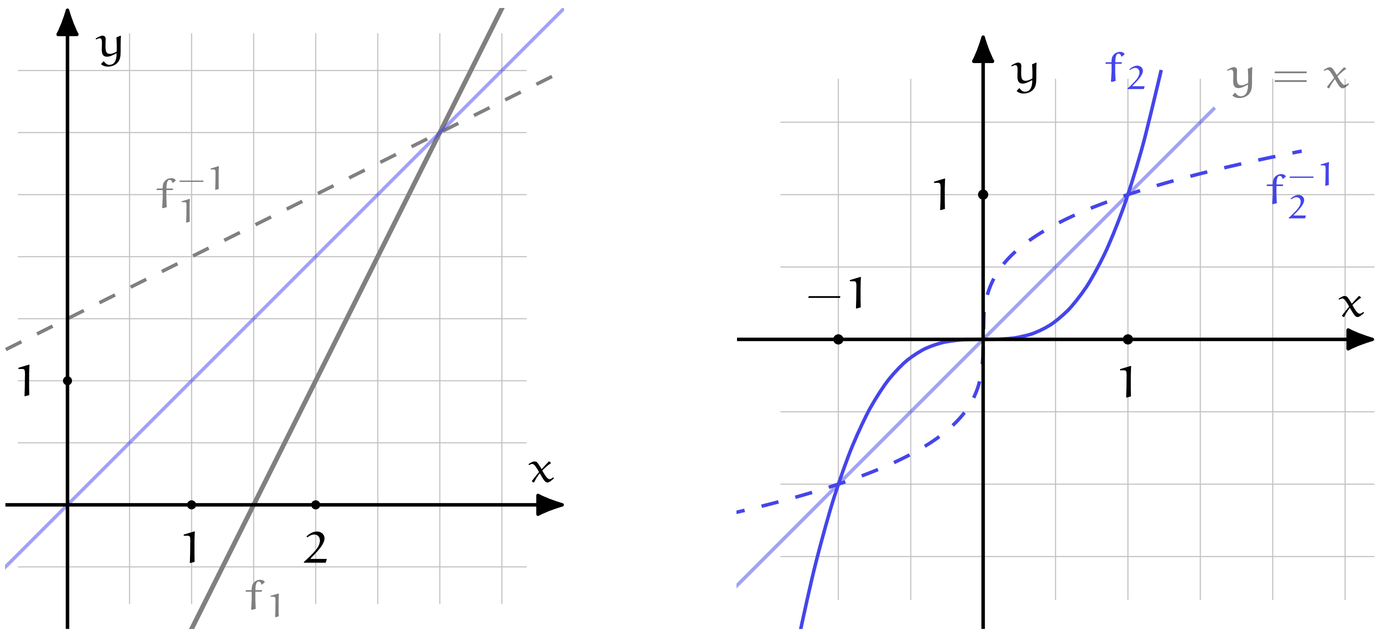
$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \qquad x \mapsto f_1(x) = 2x - 3 = y$$

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \qquad x \mapsto f_2(x) = x^3 = y$$

Damit ebenfalls bijektiv: Inverse Abbildungen $f_1^{-1}, f_2^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$y \mapsto {f_1}^{-1}(y) = \tfrac{1}{2}(y + 3) = x$$

$$y \mapsto {f_2}^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} = x$$



Graphen der Abbildungen f_1, f_2, ${f_1}^{-1}$, ${f_2}^{-1}$

Satz: Operationen zwischen Funktionen

- Gegeben: $f, g : D \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen mit identischem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$.
- Dann sind auch die folgenden Abbildungen relle Funktionen:

$$
\begin{array}{lllll}
f+g: & D \to \mathbb{R} & \text{mit} & x \in D & \mapsto & (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\
f-g: & D \to \mathbb{R} & \text{mit} & x \in D & \mapsto & (f-g)(x) = f(x) - g(x) \\
f \cdot g: & D \to \mathbb{R} & \text{mit} & x \in D & \mapsto & (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \\
\dfrac{f}{g}: & D_1 \to \mathbb{R} & \text{mit} & x \in D_1 & \mapsto & \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}
\end{array}
$$

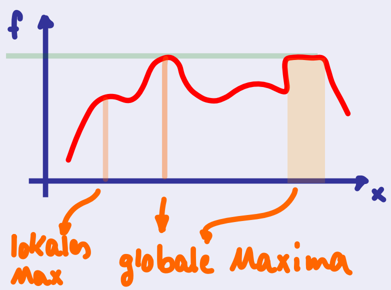
$$D_1 = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$$

Besondere Punkte bei Funktionen

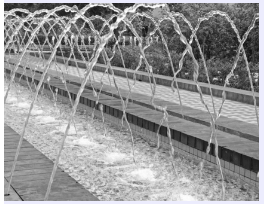
- Gegeben: Reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$

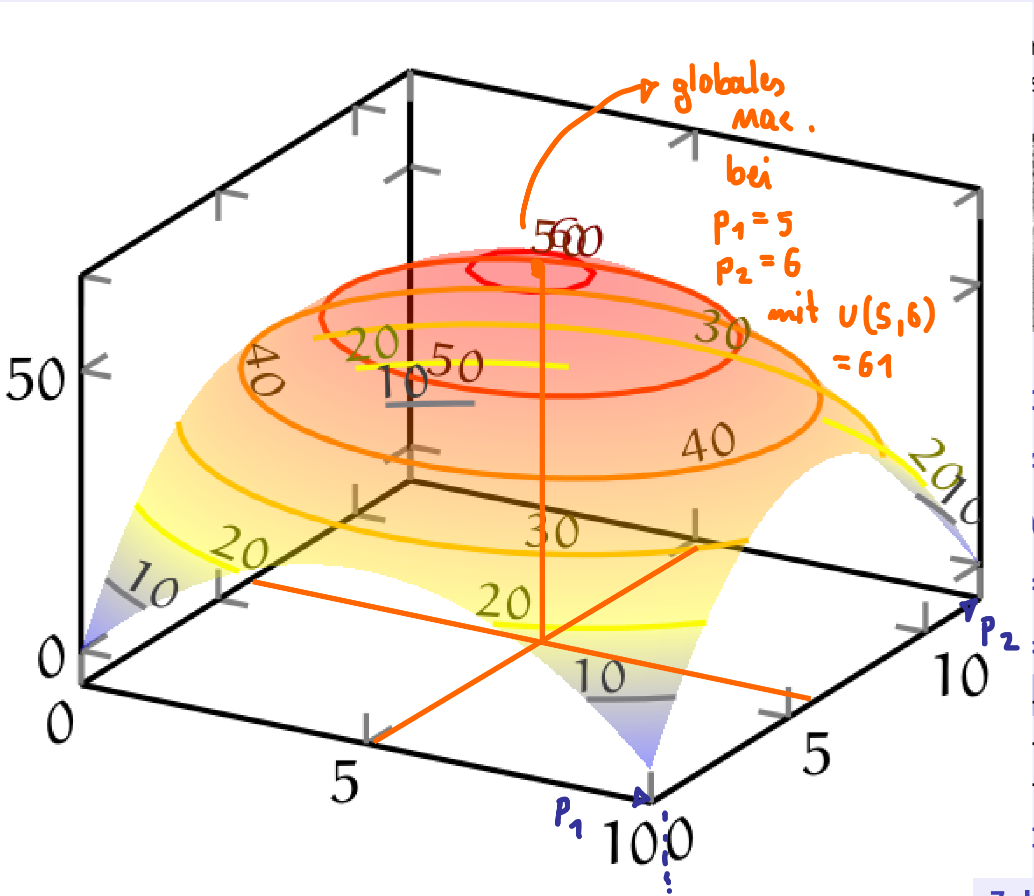
Definitionen

- c-Stelle von f: $x_c \in D$ mit $f(x_c) = c$
- Mit $c = 0$ heißt c-Stelle dann 0-Stelle von f
- Maximalstelle oder globales Maximum:
  $x_{max} \in D$ mit $f(x_{max}) \geqslant f(x)$ für alle $x \in D$
- Minimalstelle oder globales Minimum:
  $x_{min} \in D$ mit $f(x_{min}) \leqslant f(x)$ für alle $x \in D$
- $x^* \in D$ mit $f(x^*) \overset{\geqslant}{(\leqslant)} f(x)$ für $x \in [x^* - a, x * +a] \subseteq D$
  heißt lokale Maximalstelle (Minimalstelle), $f(x^*)$ lokales Maximum



- Weitere Sprechweisen: Extremal-, Optimalstelle, Extremum, Optimum





- Umsatzmaximierung für zwei Produkte mit Absatzquantitäten x_1, x_2 und Preisen p_1, p_2:
- Gegeben: Preis-Absatz-Funktionen

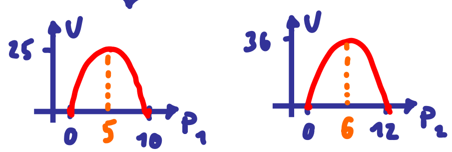
$$x_1 = 10 - p_1$$

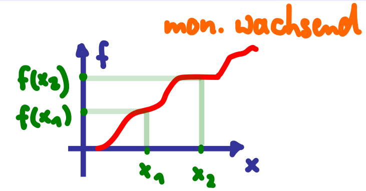
und $x_2 = 12 - p_2$

- Wegen $x_1, x_2 \geqslant 0$ und $p_1, p_2 \geqslant 0$ folgt $p_1 \in [0, 10]$ und $p_2 \in [0, 12]$
- Gesamtumsatz?
- Maximalstelle?
- Minimalstellen?

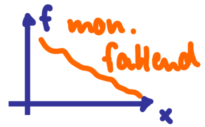
$$\text{Umsatz} = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2$$

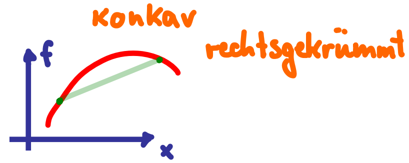
$$= \underbrace{(10 - p_1) \cdot p_1} + (12 - p_2) \cdot p_2$$



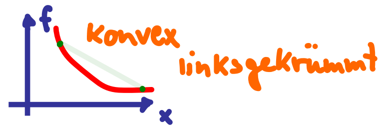


- f beschränkt $\Leftrightarrow$ es gibt $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ mit $c_0 \leqslant f(x) \leqslant c_1$
- f monoton wachsend $\Leftrightarrow$ $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2))$
  f monoton fallend $\Leftrightarrow$ $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2))$

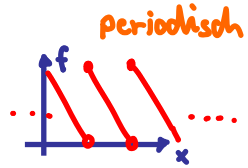




- bei strenger Monotonie entfällt „="

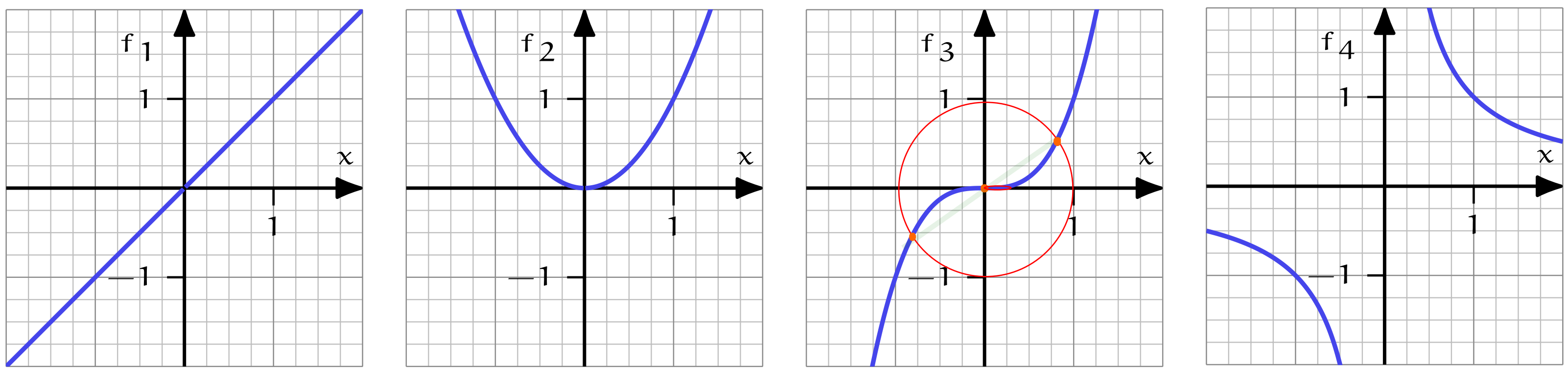


- f konvex $\Leftrightarrow$ $\left(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)\right)$
  f konkav $\Leftrightarrow$ $\left(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \geqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)\right)$
  $\lambda \in (0,1)$



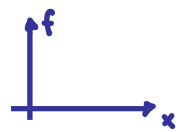
- bei strenger Konkavität entfällt „="
- f periodisch mit Periode $p > 0$ $\Leftrightarrow$ $f(x) = f(x \pm p)$
- f gerade (ungerade) $\Leftrightarrow$ $f(x) = f(-x)$ $(-f(x) = f(-x))$

achsensymm. punktsymmetrisch



$f_1 = x$ $f_2 = x^2$ $f_3 = x^3$ $f_4 = {}^1/_x$

Graphen einiger Funktionen



Definition

- $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad (\text{mit } a_n \neq 0)$$

- heißt Polynom n-ten Grades
- Schreibweise: $\operatorname{grad}(p) = n$

Satz

- Summen, Differenzen und Produkte von Polynomen sind wieder Polynome.
- $p(x_1) = 0 \Rightarrow u(x) = \frac{p(x)}{x - x_1}$ ist wieder Polynom mit $\operatorname{grad}(u) = \operatorname{grad}(p) - 1$

Definition

- $q : D \to \mathbb{R}$ mit

$$q(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)} \quad (\text{mit } p_1, p_2 (\neq 0) \text{ sind Polynome})$$

- heißt Rationale Funktion.

Satz

- Jedes Polynom ist auch rationale Funktione (z.B. $p_2(x) = c$).
- Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten (falls definiert) von rationalen Funktionen sind wieder rationale Funktionen.

Beispiel Polynomdivision

$$\left(x^5 - \frac{9}{2}x^4 + \frac{11}{2}x^3 - 2x\right) : (x-1) = x^4 - \frac{7}{2}x^3 + 2x^2 + 2x$$

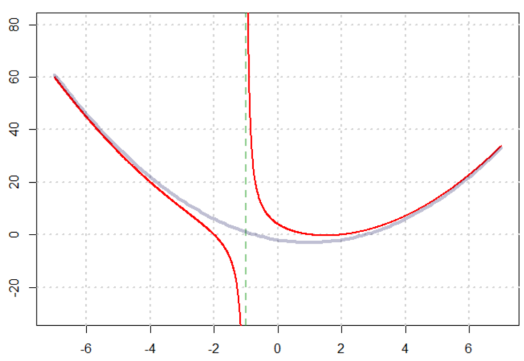
$$\begin{aligned}
&-(x^5 - x^4) \\
&\quad -\frac{7}{2}x^4 + \frac{11}{2}x^3 - 2x \\
&\quad -\left(-\frac{7}{2}x^4 + \frac{7}{2}x^3\right) \\
&\qquad 2x^3 - 2x \\
&\qquad -(2x^3 - 2x^2) \\
&\qquad\quad 2x^2 - 2x \\
&\qquad\quad -(2x^2 - 2x) \\
&\qquad\qquad 0
\end{aligned}$$

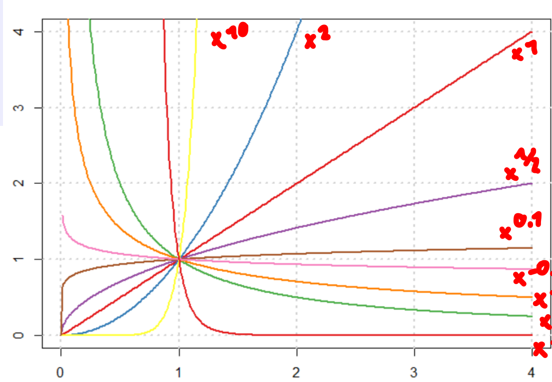
Beispiel rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x+1} \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$(x^3 - x^2 - 4x + 4) : (x+1) = \underbrace{x^2 - 2x - 2}_{\text{Asymptote}} + \frac{6}{x+1}$$

$$\begin{aligned}
&-(x^3 + x^2) \\
&\quad -2x^2 - 4x + 4 \\
&\quad -(-2x^2 - 2x) \\
&\qquad -2x + 4 \\
&\qquad -(-2x - 2) \\
&\qquad\quad 6 \longrightarrow \text{Rest}
\end{aligned}$$





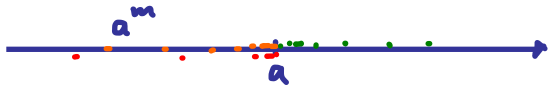
Potenzfunktion

- $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit $f(x) = x^a$, $(a \in \mathbb{R})$ heißt Potenzfunktion.
- f ist streng monoton wachsend für $a > 0$ und streng monoton fallend für $a < 0$.
- Für $a \neq 0$ existiert eine inverse Funktion f^{-1} zu f

Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mit $f(x) = a^x$, $(a > 0, a \neq 1)$ heißt Exponentialfunktion zur Basis a.
- $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $g(y) = \log_a(y)$, $(a > 0, a \neq 1)$ heißt Logarithmusfunktion zur Basis a mit $g = f^{-1}$.
- Satz: f, g wachsen streng monoton für $a > 1$ und fallen streng monoton für $a < 1$

Grenzwert einer Funktion



Ausgangssituation

- Gegeben: Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$
- Grenzwert von f aufbauend auf Konvergenz von Zahlenfolgen
- Dazu betrachte: Alle Folgen $\underbrace{a^m}_{}$ $a^m = (a_1^m, \ldots, a_n^m)^T \in D$ mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}^n$, also $a^m \to a$ für $m \to \infty$
- Untersuche Grenzwerte $\lim\limits_{a^m \to a} f(a^m)$.

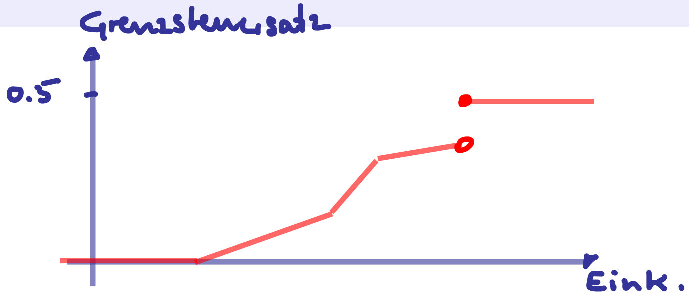
Definition des Grenzwerts einer Funktion

- f heißt an der Stelle $a \in \mathbb{R}^n$ (die nicht notwendig zu D gehören muss) konvergent gegen $\tilde{f} \in \mathbb{R}$,
- wenn
  1. mindestens eine Folge (a^m) mit $a^m \in D,\ a^m \neq a$ und $a^m \to a$ existiert (d.h. a ist kein „isolierter Punkt“)
  2. für alle Folgen (a^m) mit $a^m \in D$ und $a^m \to a^0$ gilt $f(a^m) \to \tilde{f}$.
- $\tilde{f}$ heißt dann Grenzwert von $f(a^m)$.

Schreibweise für alle gegen a konvergierende Folgen (a^m):

$$\lim_{a^m \to a} f(a^m) = \tilde{f} \qquad \text{oder kurz} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = \tilde{f}$$

Begriff der Stetigkeit



Gegeben

- Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$

Definition

- f heißt stetig in x_0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f heißt stetig in $T \subseteq D$ $\Leftrightarrow$ f ist für alle $x \in T$ stetig
- Ist f für ein $\tilde{x} \in D$ nicht stetig, so heißt $\tilde{x}$ Unstetigkeitsstelle oder Sprungstelle

Satz

- Für stetige Funktionen f, g gilt:
  - $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g $(g(x) \neq 0)$ sind stetig
  - $|f|$, $f \circ g$, sind stetig
  - Falls f auf einem Intervall definiert und invertierbar: f^{-1} stetig
- Alle elementaren Funktionen sind in ihrem Definitionsbereich stetig

Beispiel Stetigkeit

Geg. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{für } x \leq 2 \\ 3x - 1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$

Ist f stetig auf D_f?

① f ist stetig für $x \neq 2$, da elementare stetige Funktionen

② $x = 2$?

$\lim_{x \nearrow 2} f(x) = 2^2 + 1 = 5 = f(2)$

„von unten" (x ist minimal kleiner als 2 1.999999...)

$\lim_{x \searrow 2} f(x) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$

„von oben" 2.0000...1

$\Rightarrow$ f ist stetig für $x = 2$

Zwischenwertsatz

- Gegeben: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig
- Dann gilt:

$$f(a) < f(b) \quad \Rightarrow \quad \forall\, y \in [f(a), f(b)]\ \exists\, x \in [a, b] \quad \text{mit } f(x) = y$$

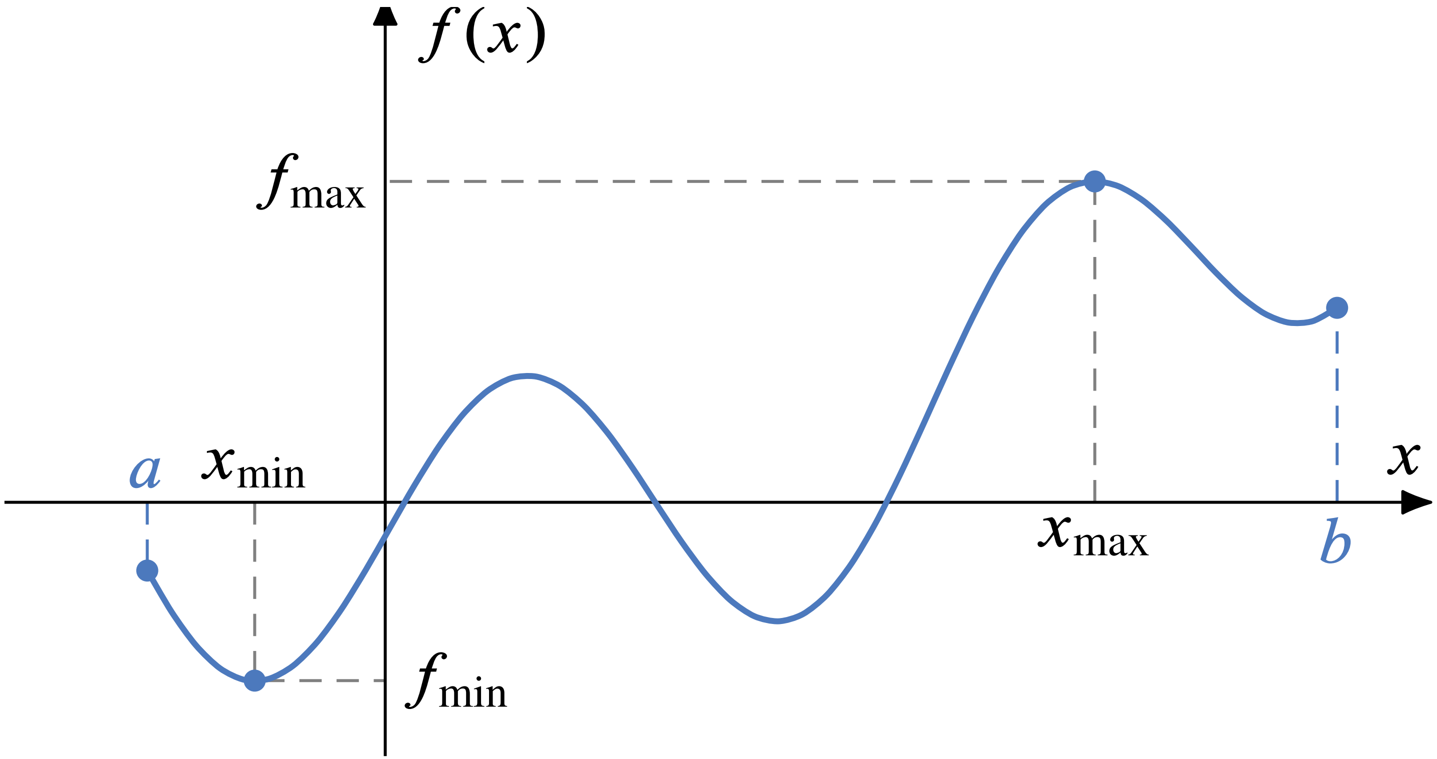


Abbildung 10.13: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *mit* f *stetig*

Opitz u. a., (2017, S. 132)