Wirtschafts- und Finanzmathematik

für Betriebswirtschaft und International Management

Wintersemester 2017/18

04.10.2017	Einführung, R, Grundlagen	1
11.10.2017	Grundlagen, Aussagen	2
18.10.2017	Aussagen	3
25.10.2017	Mengen, Folgen, Reihen	4
01.11.2017	Allerheiligen	
08.11.2017	Reelle Funktionen einer Variablen, Stetigkeit	5
15.11.2017	Differentialrechnung	6
22.11.2017	Differentialrechnung	7
29.11.2017	Integration	8
06.12.2017	Finanzmathematik	9
13.12.2017	Matrizen, Vektoren, Lineare Gleichungssysteme	10
20.12.2017	Determinanten, Eigenwerte	11
29.12.2017	Weihnachten	
05.01.2018	Weihnachten	
10.01.2018	Puffer, Wiederholung	12
19.01.2018	Beginn der Prüfungszeit	

Prof. Dr. Stefan Etschberger
HSA

Grundlagentest
Polynome!

Testfrage: Polynome 1

Die Summe der Lösungen der Gleichung

$$x^6 - 2x^5 - 15x^4 = 0$$

beträgt:

Testfrage: Polynome 1

pingo.upb.de/252598

Die Summe der Lösungen der Gleichung

$$x^6 - 2x^5 - 15x^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 \cdot (x^2 - 2x - 15) = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{1}{2}\left(2 \pm \sqrt{4+60}\right) = 1 \pm \sqrt{16} = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$$

beträgt:

Summe der Lsg: $0 + 5 + (-3) = 2$

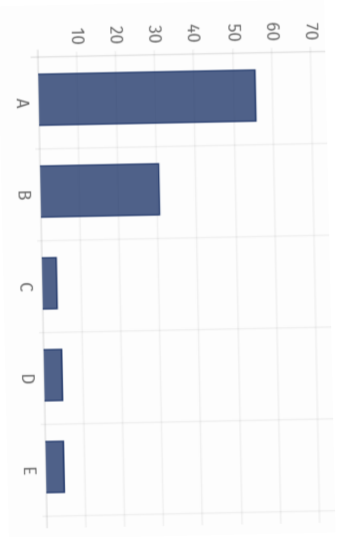
A 2

B 3

C 8

D 0

E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.



Testfrage: Polynome 1

Die Summe der Lösungen der Gleichung

$$x^6 - 2x^5 - 15x^4 = 0$$

beträgt:

- A 2
- B 3
- C 8
- D 0
- E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

Richtig: A

Testfrage: Polynome 2

Die Polynomdivision

$$(x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 2) : (x - 1)$$

ergibt:

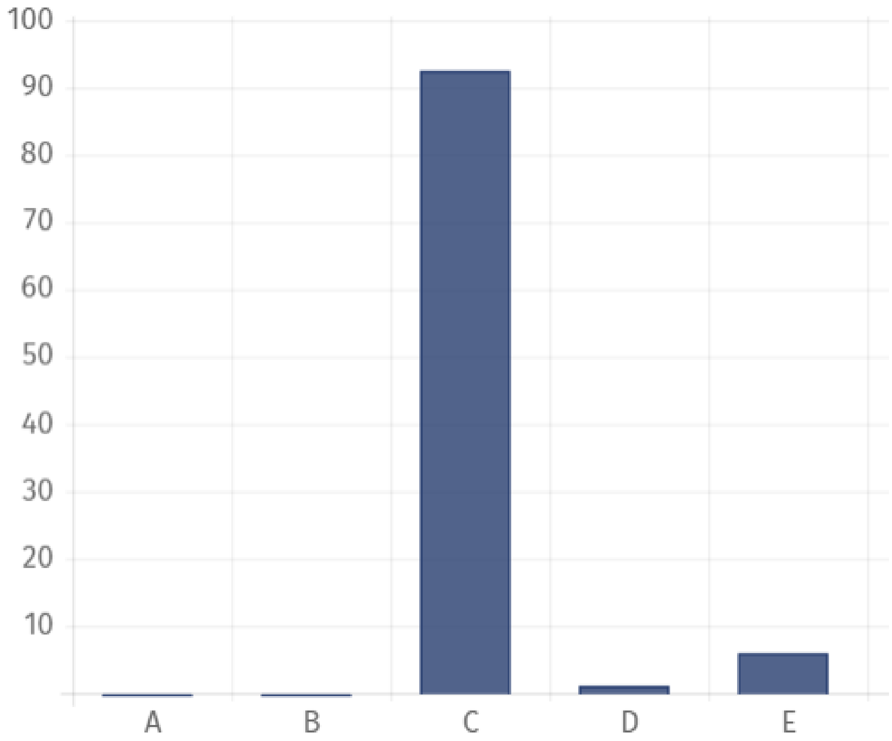
Testfrage: Polynome 2

Die Polynomdivision

$$(x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 2) : (x - 1)$$

ergibt:

- **A** $x^4 - 3x^2 + 2x - 3$
- **B** $x^4 - 3x^2 + 2x$
- **C** $x^4 + x^3 - 2x^2 + 2$
- **D** $4x^4 + 9x^3 - 4x^2 + 2$
- **E** Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.



Testfrage: Polynome 2

Die Polynomdivision

$$(x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 2) : (x - 1)$$

ergibt:

- A $x^4 - 3x^2 + 2x - 3$
- B $x^4 - 3x^2 + 2x$
- C $x^4 + x^3 - 2x^2 + 2$
- D $4x^4 + 9x^3 - 4x^2 + 2$
- E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

Richtig: C

Testfrage: Polynome 3

Eine Nullstelle der Gleichung

$$x^3 - 5x^2 - 29x + 105 = 0$$

ist $x_1 = 3$. Die Summe aller drei Nullstellen ist:

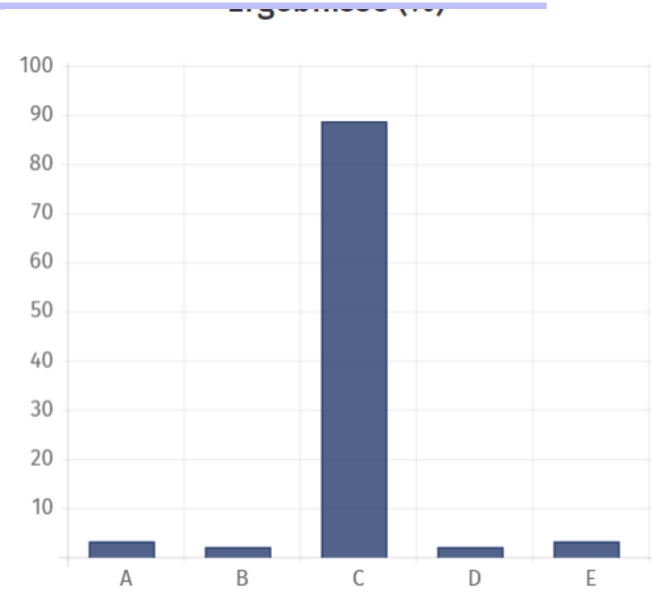
Testfrage: Polynome 3

Eine Nullstelle der Gleichung

$$x^3 - 5x^2 - 29x + 105 = 0$$

ist $x_1 = 3$. Die Summe aller drei Nullstellen ist:

- **A** -2
- **B** 8
- **C** 5
- **D** 3
- **E** Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.



Testfrage: Polynome 3

Eine Nullstelle der Gleichung

$$x^3 - 5x^2 - 29x + 105 = 0$$

ist $x_1 = 3$. Die Summe aller drei Nullstellen ist:

- A -2
- B 8
- C 5
- D 3
- E Ich habe kein oder ein anderes Ergebnis.

Richtig: C

Testfrage: Folge Euler

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} e_n = \mathrm{e} \quad \text{(Eulersche Zahl)}$$

Damit ergibt sich: Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} g_n$ der Folge

$$g_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$$

Testfrage: Folge Euler

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} e_n = \mathrm{e} \quad \text{(Eulersche Zahl)}$$

Damit ergibt sich: Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} g_n$ der Folge

$$g_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$$

- A ist e, da die Folge den gleichen Grenzwert wie (e_n) und (e_n^*) haben muss.
- B ist 2e. Der Grund ist das Logarithmusgesetz.
- C ist e^2. Der Grund ist das Potenzgesetz.
- D ist eine andere reelle Zahl, als die obigen, die man noch bestimmen muss.
- E ist unendlich. Die Folge divergiert, weil $2n$ sehr viel schneller wächst als n

Testfrage: Folge Euler

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} e_n = \mathrm{e} \quad \text{(Eulersche Zahl)}$$

Damit ergibt sich: Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} g_n$ der Folge

$$g_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$$

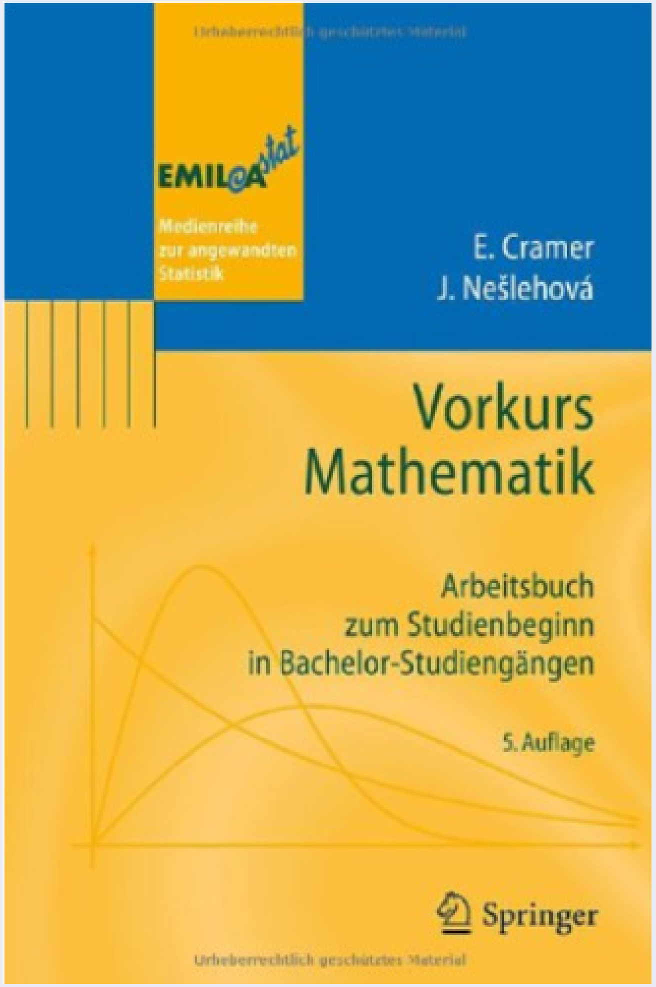
- **A** ist e, da die Folge den gleichen Grenzwert wie (e_n) und (e_n^*) haben muss.
- **B** ist 2e. Der Grund ist das Logarithmusgesetz.
- **C** ist e^2. Der Grund ist das Potenzgesetz.
- **D** ist eine andere reelle Zahl, als die obigen, die man noch bestimmen muss.
- **E** ist unendlich. Die Folge divergiert, weil $2n$ sehr viel schneller wächst als n

Richtig: C

Testauswertung:

Übungsmaterial

Aufgaben 7.1- 7.7 aus



http://goo.gl/qHwN7X

Ihr Ergebnis:

- 3 Antworten richtig: Mit Polynomen geht alles klar!
- 2 Antworten richtig: Rechnen Sie die Aufgaben 7.6 und 7.7!
- Nur 1 Antwort richtig: Rechnen Sie die Aufgaben 7.3-7.7!
- Keine Antwort richtig: Sie sollten unbedingt die Aufgaben 7.1-7.7 rechnen!

Unbestimmte Integrale

Geg.: $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$

Gesucht: Funktion $F: D \to \mathbb{R}$

mit $F'(x) = f(x)$

Beispiele: $f(x) = x \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}x^2$

$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$

$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x$

Alle F mit $F'(x) = f(x)$ nennt man Stammfunktion oder unbestimmtes Integral von $f(x)$

Schreibweise: $F(x) = \int f(x)\,dx$

Beobachtung: F ist nicht eindeutig; Unterschied: Additive Konstante

z.B. $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C \quad (C \in \mathbb{R})$

Wichtige Stammfunktionen

für	$f(x)$	$\int f(x)dx$
$x \geq 0, b \neq -1$	x^b	$\frac{1}{b+1}x^{b+1} + C$
$x \neq 0$	x^{-1}	$\ln\lvert x\rvert + C$
$a > 0$	a^x	$\frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C$

Beispiele: ▶ $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} \cdot x^{\frac{1}{2}+1} + C$

$= \frac{2}{3}x^{3/2} + C$

Rechenregeln

Summenregel $\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

Konstante Faktoren $\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx \quad a \in \mathbb{R}$

[Differentialrechnung: Produktregel

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \longrightarrow$ Integrieren auf beiden Seiten

$\Rightarrow \quad f \cdot g = \int f' \cdot g\,dx + \int f \cdot g'\,dx$]

partielle Integration $\int f'(x) \cdot g(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\,dx$

Beispiel: $\int \underbrace{x \cdot e^x}_{g \cdot f'}\,dx = \underbrace{e^x \cdot x}_{f \cdot g} - \int \underbrace{e^x \cdot 1}_{f \cdot g'}\,dx = e^x \cdot x - e^x + C$

$= e^x \cdot (x-1) + C$

[Probe: $[e^x \cdot (x-1)]' = e^x \cdot (x-1) + e^x \cdot 1$

$= e^x \cdot (x - 1 + 1) = x \cdot e^x$ ✓]

Beispiel: $\int \ln(x)\,dx = \int \underbrace{1 \cdot \ln(x)}_{f' \cdot g}\,dx = \underbrace{x \cdot \ln(x)}_{f \cdot g} \underbrace{-}_{-} \underbrace{\int x \cdot \frac{1}{x}\,dx}_{\int f \cdot g'\,dx}$

$= x \cdot \ln(x) - x + C = x \cdot (\ln(x) - 1) + C$

Bemerkung: $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

$\Rightarrow \int \log_a(x)\,dx = \frac{1}{\ln a} \cdot \int \ln(x)\,dx$

$= \frac{1}{\ln a} \cdot [x \cdot (\ln(x) - 1) + C]$

Substitutionsregel

[Differentialrechnung: Kettenregel

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x) \rightarrow \text{Integrieren auf beiden Seiten}$$

$$\Rightarrow f(g(x)) = \int f'(g(x))\cdot g'(x)\, dx \quad]$$

Integration durch Substitution

$$\int f(z)\cdot dz = \int f(z(x))\cdot \underbrace{z'(x)\cdot dx}_{\frac{dz}{dx}\cdot dx}$$

Beispiel: gesucht: $\int \frac{2x}{x^2-5}\,dx$

Substitution: $z = x^2-5$, $\frac{dz}{dx} = 2x$

$$\int \frac{\frac{dz}{\cancel{dx}}}{z}\,\cancel{dx} = \int \frac{1}{z}\,dz = \ln|z| + C \overset{\text{zurück substituieren}}{=} \ln|x^2-5| + C$$

Beispiel: $\int \frac{x^2+\frac{2}{3}}{\sqrt[3]{x^3+2x}}\,dx$

Substituiere: $z = x^3+2x$, $\frac{dz}{dx} = 3x^2+2$

$\Leftrightarrow dz = (3x^2+2)\,dx$

$$\frac{1}{3}\int \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^3+2x}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{\sqrt[3]{z}} = \frac{1}{3}\int z^{-\frac{1}{3}}\cdot dz$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{-\frac{1}{3}+1}\cdot z^{-\frac{1}{3}+1} + C$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot z^{\frac{2}{3}} + C = \frac{1}{2}\cdot z^{\frac{2}{3}} + C$$

zurück-subst. $z = x^3+2x$

$$= \frac{1}{2}(x^3+2x)^{\frac{2}{3}} + C$$

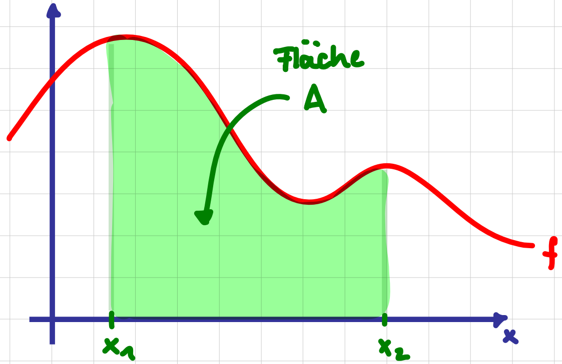
Beispiel: $\int x\cdot e^{-x^2}\,dx$

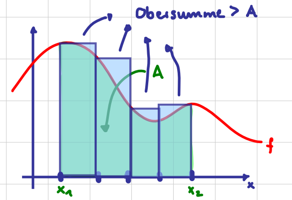
$z = -x^2$, $z' = -2x = \frac{dz}{dx} \Leftrightarrow dx = \frac{1}{-2x}\cdot dz$

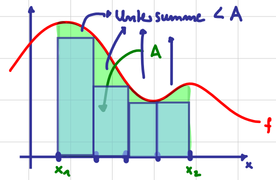
$$\int \cancel{x}\cdot e^{z}\cdot\frac{1}{-2\cancel{x}}\cdot dz = -\frac{1}{2}\int e^{z}\,dz = -\frac{1}{2}\cdot e^{z} + C$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot e^{-x^2} + C$$

Bestimmte Integrale: geg. $f(x) \geq 0$







Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$A = F(x_2) - F(x_1) \quad \text{mit } F(x) = \int f(x)\,dx$$

Schreibweise: $(a < b)$

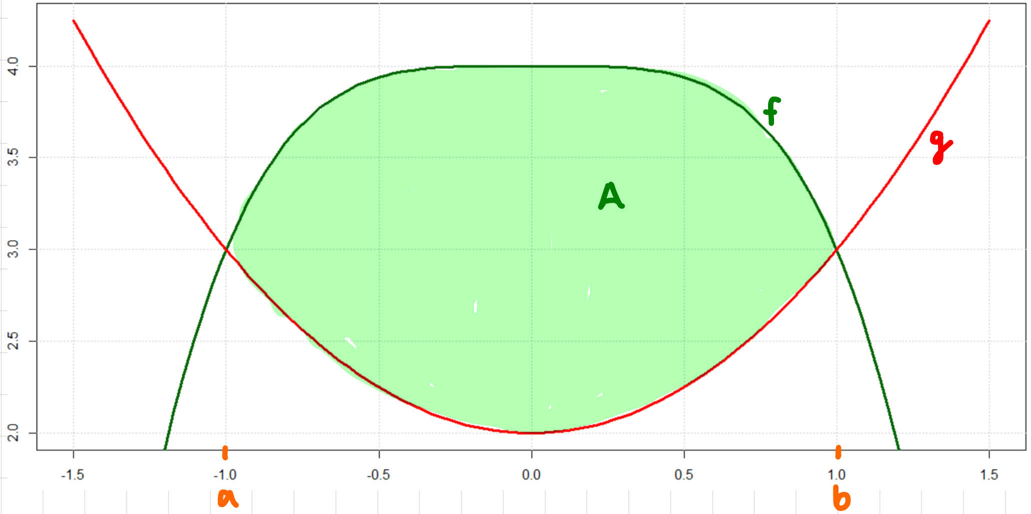
$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

„bestimmtes Integral von a bis b über f(x)"

Beispiel: gesucht: Fläche, die von den Graphen der Funktionen f, g mit

$$f(x) = 4 - x^4, \quad g(x) = x^2 + 2$$

eingeschlossen ist.



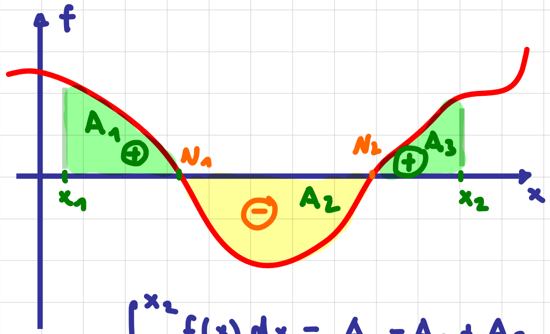
Schnittpunkte über Gleichsetzen der Funktionen:

$$4 - x^4 = x^2 + 2 \iff x_{1/2} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

$$A = \int_{-1}^{1} f(x) - g(x)\, dx = \int_{-1}^{1} 4 - x^4 - (x^2 + 2)\, dx$$

$$= \left[4x - \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{3}x^3 - 2x \right]_{-1}^{1} = 2 \cdot \left(4 \cdot 1 - \tfrac{1}{5} \cdot 1^5 - \tfrac{1}{3} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1\right)$$

$$= \tfrac{44}{15} \approx 3$$



$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = A_1 - A_2 + A_3$$

falls Gesamtfläche gesucht:

$$A_1 + A_2 + A_3 = \int_{x_1}^{N_1} f(x)\, dx - \int_{N_1}^{N_2} f(x)\, dx + \int_{N_2}^{x_2} f(x)\, dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\, dx$$

Gliederung

1. Grundlegende Bausteine
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differentialrechnung
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra

Opitz u.a., (2017, Kapitel 11, 12.1, 12.2)

7. Integration
   - Unbestimmte Integrale
   - Bestimmte Integrale
   - Uneigentliche Integrale

Einleitung

- Umkehrung der Fragestellung der Differentialrechnung
- Jetzt gesucht:
  Funktion, deren Änderungsverhalten bekannt ist
- Beispiel:
  - Bekannt:
    Geschwindigkeit eines Körpers in Abhängigkeit der Zeit
  - Gesucht:
    Ort in Abhängigkeit der Zeit

Gliederung

1. Unbestimmte Integrale
2. Riemannsche Summen und bestimmte Integrale
3. Uneigentliche Integrale

Stammfunktion

- Eine differenzierbare Funktion $F : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, wenn für alle $x \in D$ gilt

$$F'(x) = f(x)$$

- Sind $F, \hat{F}$ beliebige Stammfunktionen von f, gilt für alle $x \in D$:

$$\hat{F}(x) - F(x) = \text{konstant}$$

- Also: Hat man eine Stammfunktion F gefunden, gilt für alle anderen Stammfunktionen

$$\hat{F}(x) = F(x) + c$$

- Ist $F: D \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f: D \to \mathbb{R}$, so heißt

$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = F(x) + c \qquad \text{für beliebiges } c \in \mathbb{R}$$

das unbestimmte Integral der Funktion f.

- Weitere Bezeichnungen:

x : Integrationsvariable
$f(x)$: Integrand
c : Integrationskonstante

- Unbestimmte Integration ist Umkehrung der Differentiation

Einige unbestimmte Integrale

- Sei f eine reelle Funktion und $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante. Dann gilt:

a) $f(x) = a \ (a \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = ax + c$

b) $f(x) = x^n \ (n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$

$f(x) = x^m \ (m = -2, -3, \ldots,\ x \neq 0) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = \frac{1}{m+1}x^{m+1} + c$

$f(x) = x^r \ (r \in \mathbb{R},\ r \neq -1,\ x > 0) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$

c) $f(x) = x^{-1} \ (x \neq 0) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = \ln|x| + c$

d) $f(x) = \sin x \ (x \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = -\cos x + c$

$f(x) = \cos x \ (x \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = \sin x + c$

e) $f(x) = e^x \ (x \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = e^x + c$

$f(x) = a^x \ (a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + c$

Summen und konstante Faktoren

- Für die reellen Funktionen $f, g: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ existiere das unbestimmte Integral. Dann gilt:

a) $$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

b) $$\int af(x)\,dx = a \int f(x)\,dx \qquad \text{für alle} \quad a \in \mathbb{R}$$

Partielle Integration

- Für zwei stetig differenzierbare Funktionen $f, g: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ gilt:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Substitutionsregel

- Die Funktion $f: D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ besitze eine Stammfunktion F und
- $g: D_1 \to \mathbb{R}, D_1 \subseteq \mathbb{R}, g(D_1) \subseteq D$ sei stetig differenzierbar.
- Dann existiert die zusammengesetzte Funktion $f \circ g: D_1 \to \mathbb{R}$ mit $z = f(y) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$
- und es gilt mit $y = g(x)$

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(y)\,dy$$
$$= F(y) + c = F(g(x)) + c$$
$$= (F \circ g)(x) + c$$

- mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig.

Riemannsche Summen

- Gegeben: Beschränkte und stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \geqslant 0$
- Unterteilen von $[a, b]$ in $[a, x_1], \ [x_1, x_2], \ \ldots \ , \ [x_{i-1}, x_i], \ \ldots \ , \ [x_{n-1}, b]$
- mit $a = x_0, \ b = x_n$
- In jedem Teilintervall: Wähle Maximum und Minimum:

$$f(u_i) = \min\{f(x) : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{und}$$
$$f(v_i) = \max\{f(x) : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\} \, .$$

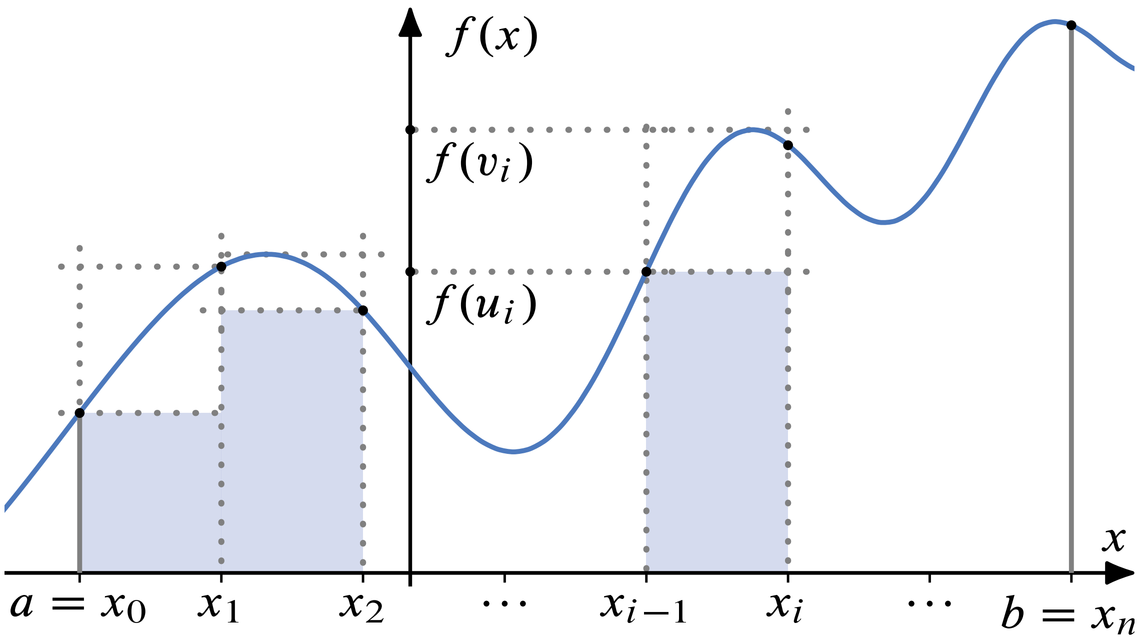


Abbildung 13.2: *Unter- und Oberschranken der Flächeninhalte*

Opitz u. a., (2017, S. 177)

Riemannsche Summen

- Untere und obere Grenze $I^n_{\text{min}} \leqq I \leqq I^n_{\text{max}}$ für Flächeninhalt unter Kurve mit:

$$I^n_{\text{min}} = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)(x_i - x_{i-1}), \quad I^n_{\text{max}} = \sum_{i=1}^{n} f(v_i)(x_i - x_{i-1})$$

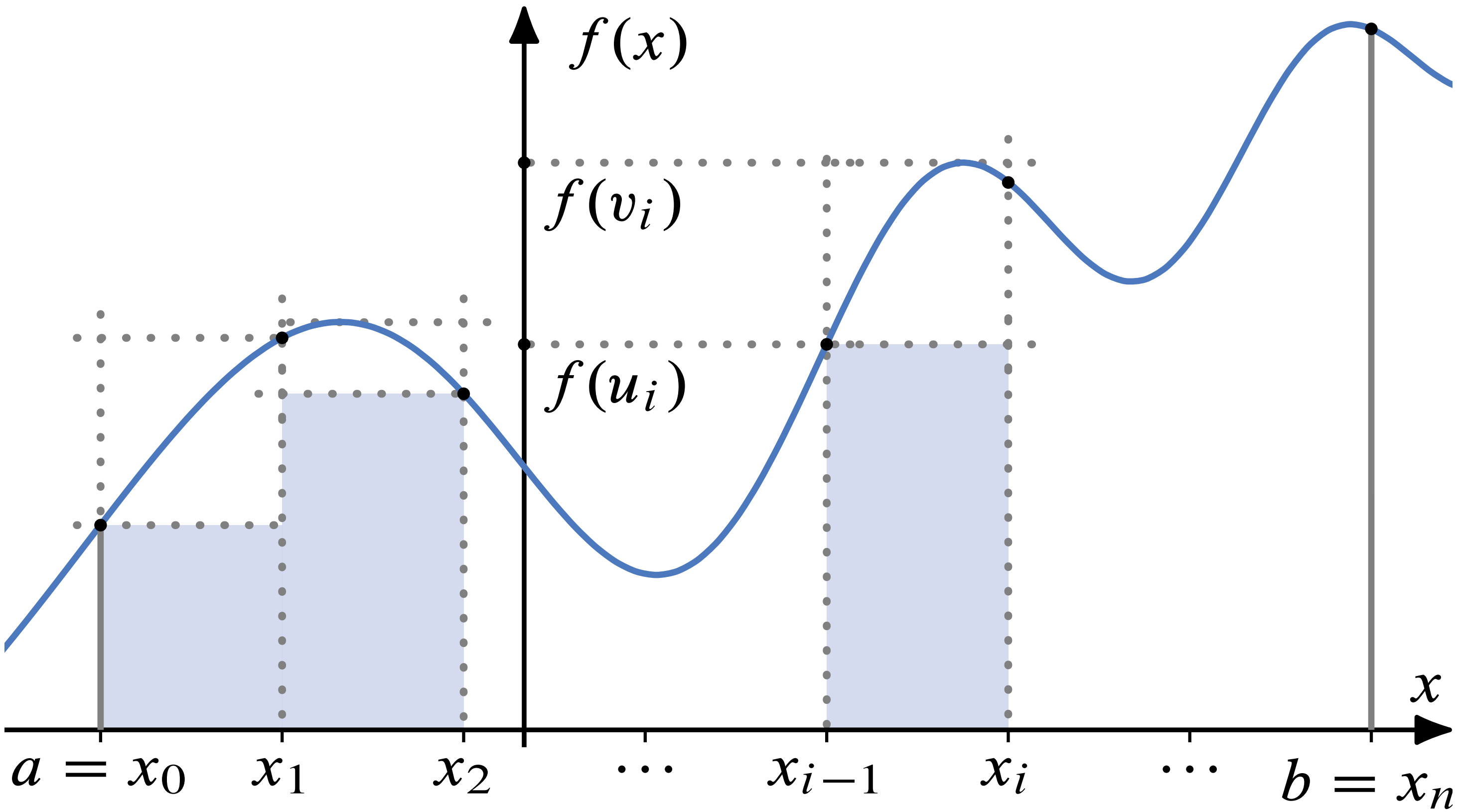


Abbildung 13.2: *Unter- und Oberschranken der Flächeninhalte*

Opitz u. a., (2017, S. 177)

Riemannsche Summen

- Untere und obere Grenze $I^n_{\text{min}} \leqq I \leqq I^n_{\text{max}}$ für Flächeninhalt unter Kurve mit:

$$I^n_{\text{min}} = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)(x_i - x_{i-1}), \quad I^n_{\text{max}} = \sum_{i=1}^{n} f(v_i)(x_i - x_{i-1})$$

- Jetzt: Verfeinerung der Unterteilung von $[a, b] \Rightarrow$ Folgen (I^n_{min}) und (I^n_{max})
- Existieren für $n \to \infty$ die Grenzwerte der beiden Folgen und gilt für den wahren Flächeninhalt I unter der Kurve

$$\lim_{n\to\infty} I^n_{\text{min}} = \lim_{n\to\infty} I^n_{\text{max}} = I$$

- dann heißt f Riemann-integrierbar im Intervall $[a, b]$
- Schreibweise:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

- Bezeichnungen:

I	Bestimmtes Integral von f im Intervall $[a, b]$
x	Integrationsvariable
$f(x)$	Integrand
a, b	Integrationsrenzen

Existenz von bestimmten Integralen

- Gegeben: Reelle Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) f stetig in $[a, b]$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ existiert

b) f monoton in $[a, b]$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ existiert

Existenz von bestimmten Integralen

- Gegeben: Reelle Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

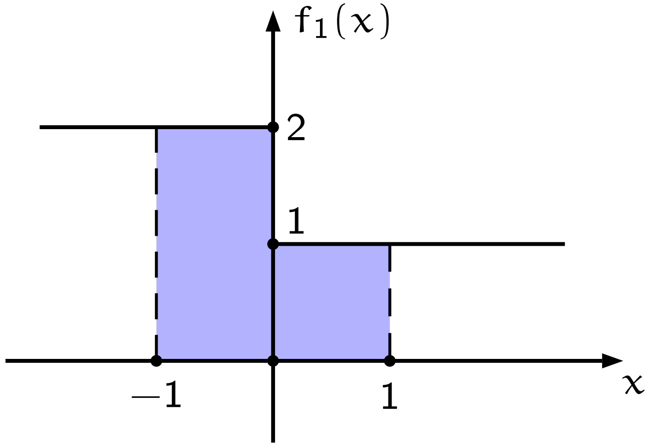
  a) f stetig in $[a, b]$ $\quad \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ existiert

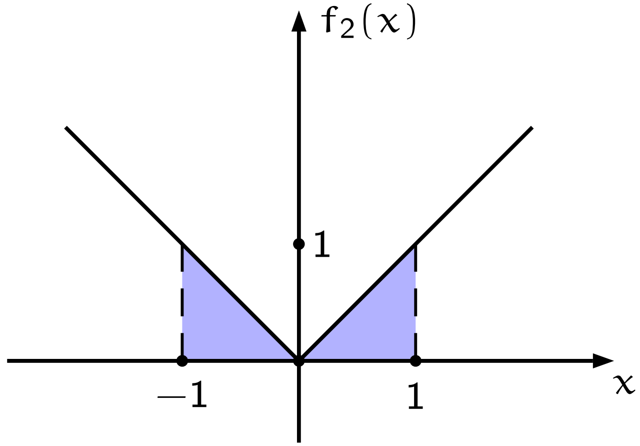
  b) f monoton in $[a, b]$ $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ existiert

- Beispiele: Gesucht: $\int_{-1}^{+1} f_i(x)\,dx$ für

$$f_1(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geqq 0 \end{cases} \quad \text{und}$$

$$f_2(x) = |x|$$





- Gegeben: Integrierbare Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$.
  Dann gilt:

a) $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$ für alle $c \in \mathbb{R}$

b) $f(x) \leqq g(x)$ für alle $x \in [a, b] \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx$

c) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ für alle $c \in (a, b)$

- Definiert wird außerdem:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Zusammenhang bestimmtes und unbestimmtes Integral

Zusammenhang

- Gegeben $f: \ D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ eine in D stetige Funktion.
- Dann existiert eine Stammfunktion F von f mit $\boxed{F'(x) = f(x)}$
- sowie das unbestimmte Integral $\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c}$
- und das bestimmte Integral $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$

Unterschiede

- Bestimmtes Integral entspricht einer reellen Zahl
- Unbestimmtes Integral entspricht Schar von Funktionen

Integrationsregeln

a) Für integrierbare Funktionen $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt die Additionsregel

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx\,.$$

b) Für stetig differenzierbare Funktionen $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt die Regel der partiellen Integration

$$\int_a^b f(x) g'(x)\, dx = f(x) g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x)\, dx$$

c) Ist $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ integrierbar mit der Stammfunktion F und $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $g[a, b] \subseteq [\alpha, \beta]$ stetig differenzierbar, so gilt die Substitutionsregel

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x))\Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, dy\,.$$

Grenzen bei $\pm\infty$

- Die reelle Funktion f sei für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und integrierbar.
- Dann heißt der Grenzwert $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$, falls er existiert, das konvergente uneigentliche Integral von f im Intervall $[a, \infty)$, und man schreibt

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx\,.$$

- Andernfalls spricht man von einem divergenten uneigentlichen Integral.
- Entsprechend definiert man das konvergente uneigentliche Integral von f im Intervall $(-\infty, b]$, falls folgender Grenzwert existiert:

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-\infty}^b f(x)\,dx$$

- Sind beide Integrale $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ und $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergent, so existiert auch

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx\,.$$

Beliebige Grenzen

- Geg.: Reelle Funktion $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, die für alle $x \in [a, b - \epsilon]$ mit $\epsilon \in (0, b - a)$ integrierbar. Dann heißt Grenzwert $\lim\limits_{\epsilon \to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\, dx$ (falls er existiert)
  konvergentes uneigentliches Integral von f im Intervall $[a, b]$. Schreibweise:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

- Andernfalls: Divergentes uneigentliches Integral
- Analog für alle $x \in [a + \epsilon, b]$ mit $\epsilon \in (0, b - a)$, konvergentes uneigentliches Integral von f in $[a, b]$, mit

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

- Ist f in (a, b) definiert und sind für $c \in (a, b)$ die uneigentlichen Integrale $\int_a^c f(x)\, dx$ und $\int_c^b f(x)\, dx$ konvergent, dann ist auch folgendes Integral konvergent:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$