Wirtschafts- und Finanzmathematik

für Betriebswirtschaft und International Management

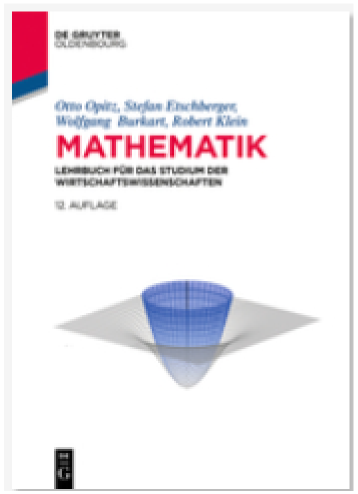
Wintersemester 2017/18

04.10.2017	Einführung, R, Grundlagen	1
11.10.2017	Grundlagen, Aussagen	2
18.10.2017	Aussagen	3
25.10.2017	Mengen, Folgen, Reihen	4
01.11.2017	Allerheiligen	
08.11.2017	Reelle Funktionen einer Variablen, Stetigkeit	5
15.11.2017	Differentialrechnung	6
22.11.2017	Differentialrechnung	7
29.11.2017	Integration	8
06.12.2017	Finanzmathematik	9
13.12.2017	Matrizen, Vektoren, Lineare Gleichungssysteme	10
20.12.2017	Determinanten, Eigenwerte	11
29.12.2017	Weihnachten	
05.01.2018	Weihnachten	
10.01.2018	Puffer, Wiederholung	12
19.01.2018	Beginn der Prüfungszeit	

Mathebuch jetzt verfügbar
(kostenlos mit Hochschulkennung als pdf):

https://goo.gl/GCb4ks

https://goo.gl/epGdcD



Prof. Dr. Stefan Etschberger
HSA

Aufteilung der Zinsperiode in mehrere gleich lange Rentenperioden, d.h. m Rentenzahlungen pro Zinsperiode (= Jahr). Dazu:

- Rechnung mit einfacher Verzinsung innerhalb der Zinsperiode
- Rentenzahlungen nachschüssig (also am Ende jeder unterj. Rentenperiode) oder vorschüssig möglich

Lösung: Errechnung von konformen (gleichwertigen) jährlich nachschüssigen Ersatzzahlungen zu den m unterjährigen Zahlungen.

Definition

r_e heißt konforme jährlich nachschüssige Ersatzrentenrate einer nachschüssigen (oder vorschüssigen) unterjährigen Rentenrate r.

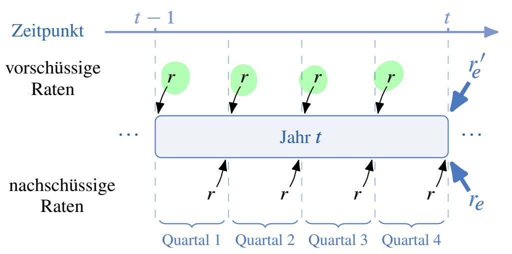


Abbildung 27.3: *Vorschüssige und nachschüssige unterjährige Rentenraten am Beispiel von Quartalszahlungen*

$m = 4$

$\frac{4}{4} + \frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4}$

$$\left[4 + i\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{0}{4}\right)\right] \cdot r$$

$(m+1)$ $\cdot \frac{m}{2}$

$$= \left[m + \frac{i}{\cancel{m}} \cdot (\cancel{1+m-1}) \cdot \frac{m-1}{2}\right] \cdot r$$

$(m+1)$

$$= r \cdot \left[m + \frac{i}{2} \cdot (m-1)\right]$$

Rentenersatzrate bei m nachschüssigen unterjährigen Zahlungen

" bei vorschüssigen "

Beispiel 27.43

Für eine Laufzeit von drei Jahren wird bei einem jährlichen Zinssatz von $i = 0.05$ eine monatliche Zahlung von $r = 100$ (Euro) geleistet. Dann erhalten wir

a) bei nachschüssigen Zahlungen:

$m-1$

$$r_e = 100 \cdot \left(12 + \frac{0.05 \cdot 11}{2}\right) = 1227.50,$$
$$R_3 = 1225.50 \cdot \frac{1.05^3 - 1}{1.05 - 1} = 3869.69,$$
$$R_0 = 3869.69 \cdot 1.05^{-3} = 3342.79$$

b) bei vorschüssigen Zahlungen:

$$r_e' = 100 \cdot \left(12 + \frac{0.05 \cdot 13}{2}\right) = 1232.50,$$
$$R_3' = 1232.50 \cdot \frac{1.05^3 - 1}{1.05 - 1} = 3885.46,$$
$$R_0' = 3885.46 \cdot 1.05^{-3} = 3356.41$$

! ! ! !

Achtung: Rentenersatzrate muss immer in nachschüssige jährliche Rentenformel eingesetzt werden!

Annuitätentilgung: $A_k \mathrel{\hat{=}}$ Annuität soll konstant hoch sein

Tilgung		Renten	
Schuldsumme	S	Rentenbarwert	R_0 (nachsch.)
Annuität	A	Rate	r

$$S = A \frac{q^n - 1}{q-1} \cdot q^{-n}$$

$$R_0 = r \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} \cdot q^{-n}$$

Ratentilgung

Beispiel 27.57

Für $S = 40\,000$ €, $i = 0.05$, $n = 5$ ergibt sich bei jährlicher Ratentilgung $T = 8000$ sowie nachfolgender Tilgungsplan:

k	R_k	Z_k	T_k	A_k
1	40 000	2000	8000	10 000
2	32 000	1600	8000	9600
3	24 000	1200	8000	9200
4	16 000	800	8000	8800
5	8000	400	8000	8400
Summe		6000	40 000	46 000

Die gesamte Zinsbelastung in 5 Jahren beträgt hier 6000 €.

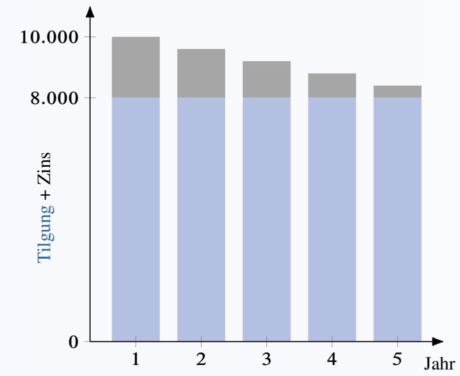


Abbildung 27.4: *Aufteilung der Annuitäten bei Ratentilgung*

Beispiel 27.60

Für

$$S = 40\,000\,€\,, \qquad i = 0.05\,,$$
$$n = 5$$

ergibt sich bei jährlicher Annuitätentilgung gerundet

$$A = 40\,000 \cdot 1,05^5 \cdot \frac{0.05}{1.05^5 - 1}$$
$$= 9238.99\ €$$

sowie folgender Tilgungsplan

k	R_k	Z_k	T_k	A_k
1	40 000.00	2000.00	7238.99	9238.99
2	32 761.01	1638.05	7600.94	9238.99
3	25 160.07	1258.00	7980.99	9238.99
4	17 179.08	858.95	8380.04	9238.99
5	8799.04	439.95	8799.04	9238.99
Summe		6194.95	40 000.00	46 194.95

Die gesamte Zinsbelastung in 5 Jahren beträgt hier 6194.95 € .

Die sich ändernde Aufteilung der Annuitäten in Tilgungs- und Zinszahlungen zeigt die folgende Abbildung 27.5.

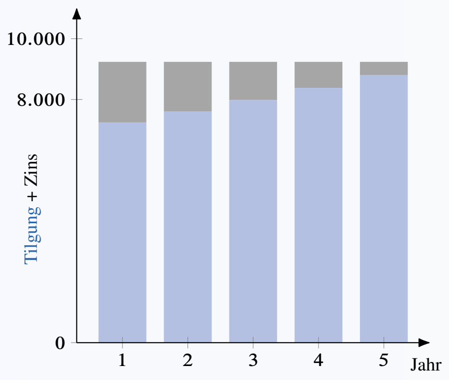


Abbildung 27.5: *Aufteilung der Annuitäten bei Annuitätentilgung*

Beispiel: $S = 800\,000$ €
$i = 0.009$
$A = S \cdot (0.009 + 0.01)$ Anfangs-tilgung
$= 15.200$ €

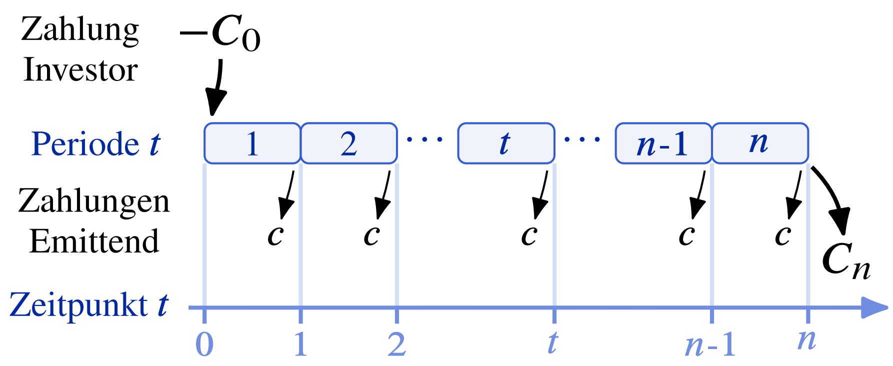
10 Jahre Zinsbindung.

gesucht: Laufzeit bei unveränderten Konditionen bis vollst. Tilgung

$$S = A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q^{-n}$$
$$\Leftrightarrow \frac{S}{A}(q-1) = 1 - q^{-n}$$
$$\Leftrightarrow n = -\log_q\left[1 - \frac{S}{A}(q-1)\right]$$
$$= -\log_{1.009}\left[1 - \frac{800000}{15200} \cdot 0.009\right]$$
$$\approx 71.64 \quad (\text{also } 72 \text{ Jahre})$$

Restschuld nach 10 Jahren:

$$S \cdot q^n - A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$
$$= 800\,000 \cdot 1.009^{10} - 15\,200 \cdot \frac{1.009^{10} - 1}{0.009}$$
$$= 716\,681.00\ €$$



Berechnung von r_e:

falls unterjährige Rente nachschüssig:

$$\begin{aligned}
r_e &= r + r \cdot \left(1 + \frac{1}{m} \cdot i\right) \\
&\quad + r \cdot \left(1 + \frac{2}{m} \cdot i\right) \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + r \cdot \left(1 + \frac{m-1}{m} \cdot i\right) \\
&= \quad r \cdot m \\
&\quad + i \cdot r \cdot \frac{1}{m} \left(1 + 2 + \ldots + (m-1)\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{r_e = r \cdot \left[m + i \cdot \frac{m-1}{2}\right]}$$

falls unterjährige Rente vorschüssig:

$$\begin{aligned}
r_e &= r \cdot \left(1 + \frac{1}{m} \cdot i\right) \\
&\quad + r \cdot \left(1 + \frac{2}{m} \cdot i\right) \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + r \cdot \left(1 + \frac{m}{m} \cdot i\right) \\
&= r \cdot m \\
&\quad + i \cdot r \cdot \frac{1}{m} \left(1 + 2 + \ldots + m\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{r_e = r \cdot \left[m + i \cdot \frac{m+1}{2}\right]}$$

Aus Ersatzrentenrate r_e: Weiterrechnen mit Formeln für jährliche nachschüssige Rente

Beispiel konforme Ersatzrentenraten

Beispiel

Ein Sparer legt monatliche nachschüssig 1.000 € auf ein Konto. Wie hoch ist der Kontostand nach 10 Jahren bei einem Zinssatz von 4%?

Lösung: Gesucht ist der Rentenendwert auf Basis der konformen Rentenraten. Mit $n = 10$, $m = 12$, $q = 1{,}04$ und $r = 1\,000$ ergibt sich Folgendes:

$$R_{10} = 1\,000 \cdot \underbrace{\left[12 + \frac{0{,}04 \cdot 11}{2}\right]}_{12{,}22} \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04 - 1}$$

$$= 12\,220 \cdot 12{,}006107 = 146\,714{,}63$$

Beim Zinssatz von $i = 4\%$ kann eine monatlich nachschüssige Rente von 1.000 € durch eine jährlich nachschüssige Rentenzahlung von 12.220 € gleichwertig ersetzt werden. Der Kontostand nach 10 Jahren beträgt $146\,714{,}63$ €.

Ewige Renten

- Eine Rente heißt ewige Rente, wenn Anzahl n der Ratenzahlungen nicht begrenzt, n also beliebig groß wird ($n \to \infty$).
- Berechnung des Rentenendwertes dann nicht möglich
- Rentenbarwert R_0 existiert jedoch:

$$
\begin{aligned}
R_0 &= \lim_{n\to\infty} (r \cdot \text{NRBF}) = r \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \\
&= r \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{q^n}}{q - 1} \right) = r \cdot \frac{1}{q - 1} = \frac{r}{i}
\end{aligned}
$$

- Damit: Rentenbarwert einer nachschüssigen ewigen Rente:

$$\boxed{R_0 = \frac{r}{i}}$$

Ewige Renten: Beispiel

Beispiel

Wie groß ist der Barwert einer ewigen nachschüssigen Rente von 40.000 € pro Jahr, wenn der Zins bei 8% liegt?

Lösung:

$$R_0 = \frac{40\,000}{0{,}08} = 500\,000$$

- Anmerkung: Geht man von einer vorschüssigen ewigen Rente aus, so ergibt sich für den Rentenbarwert:

$$R_0 = r' + \frac{r'}{i}$$

Tilgungsrechnung

- Rückzahlung oder Tilgung größerer Darlehen oft in mehreren Raten
- Hier betrachtet: Tilgung in mehreren Teilbeträgen, in konstanten Zeitabständen
- Jede zu bezahlende Rate beinhaltet Zinsen und Tilgung
- Verwendete Symbole:

Symbol	Bezeichnung
S	Darlehenssumme, Anfangsschuld
R_k	Restschuld nach k Jahren
n	Tilgungsdauer ($\in \mathbb{N}$)
Z_k	Zins am Ende des k-ten Jahres
T_k	Tilgungsquote am Ende des k-ten Jahres
$Z_k + T_k = A_k$	Annuität am Ende des k-ten Jahres

- Unterscheidung zwischen Ratentilgung und Annuitätentilgung

- Während Laufzeit sind Tilgungsquoten konstant. Daraus folgt:

$$T_k = T = \frac{S}{n}$$

- und damit:

R_k	$= S - k \cdot T$	Restschuld nach k Jahren
Z_k	$= R_{k-1} \cdot i$	Zins am Ende des k-ten Jahres
A_k	$= Z_k + T$	Annuität am Ende des k-ten Jahres

Annuitätentilgung

- Problem der Ratentilgung: Belastung anfangs hoch, später geringer
- Ausweg: Konstanthalten der Annuitäten über Rentenformel

$$A_k = A = S \cdot \frac{q^n(q-1)}{q^n - 1}$$

- Daraus ergibt sich:

$R_k = S \cdot q^k - A\dfrac{q^k - 1}{q-1}$	Restschuld nach k Jahren
$Z_k = R_{k-1} \cdot i = A \cdot \left(1 - q^{k-n-1}\right)$	Zinsen im k-ten Jahr
$T_k = A - Z_k = A \cdot q^{k-n-1}$	Tilgung im k-ten Jahr

Festverzinsliche Wertpapiere

- Wertpapier: Investor erwirbt für bestimmten Preis ein Recht auf Zahlungen
- Hier: Gesamtfällige festverzinsliche Wertpapiere
- Emission (Erstausgabe): Investor zahlt pro 100 € Nennwert einen Preis C_0 (Emissionskurs)
- Emittend: Zahlt während Laufzeit Zinsen (Kuponszahlung) und (meist nach Ablauf) Tilgung (Rücknahmekurs)
- Kuponzahlung: mittels nominellen Jahreszinses i^* (oder Jahreszinsfuß p^*) auf den Nennwert an Investor, meist jährlich nachschüssig
- Falls $i^* = 0$: Null-Kupon-Anleihen oder Zerobonds
- Rücknahmekurs: Tilgung in einem Betrag am Ende der Laufzeit C_n als Prozentsatz des Nennwertes
- Rendite: i_{eff} Jährlicher Effektivzins, der Leistung des Investors und des Emittenden gleichwertig macht

Äquivalenzgleichung für Emissionskurs

$$C_0 = p^* \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q^{-n} + C_n \cdot q^{-n}$$

Dabei:

- n : Laufzeit in Jahren
- C_0 : Emissionskurs
- p^* : Nominalzinsfuß, jährliche Zinszahlung pro 100 € Nennwert
- C_n : Rücknahmekurs am Ende der Laufzeut
- $q = 1 + i_{\text{eff}}$: Effektiver Jahreszins bzw. Rendite des festverz. Wertpapiers

Anmerkungen:

- Gleichung i.a. nicht elementar nach q auflösbar
- Deswegen oft: Näherung durch Iteration (z.B. regula falsi)
- Emissionskurs $\triangleq$ mit Rendite abgezinster Kapitalwert sämtlicher zukünftiger Leistungen des Wertpapiers

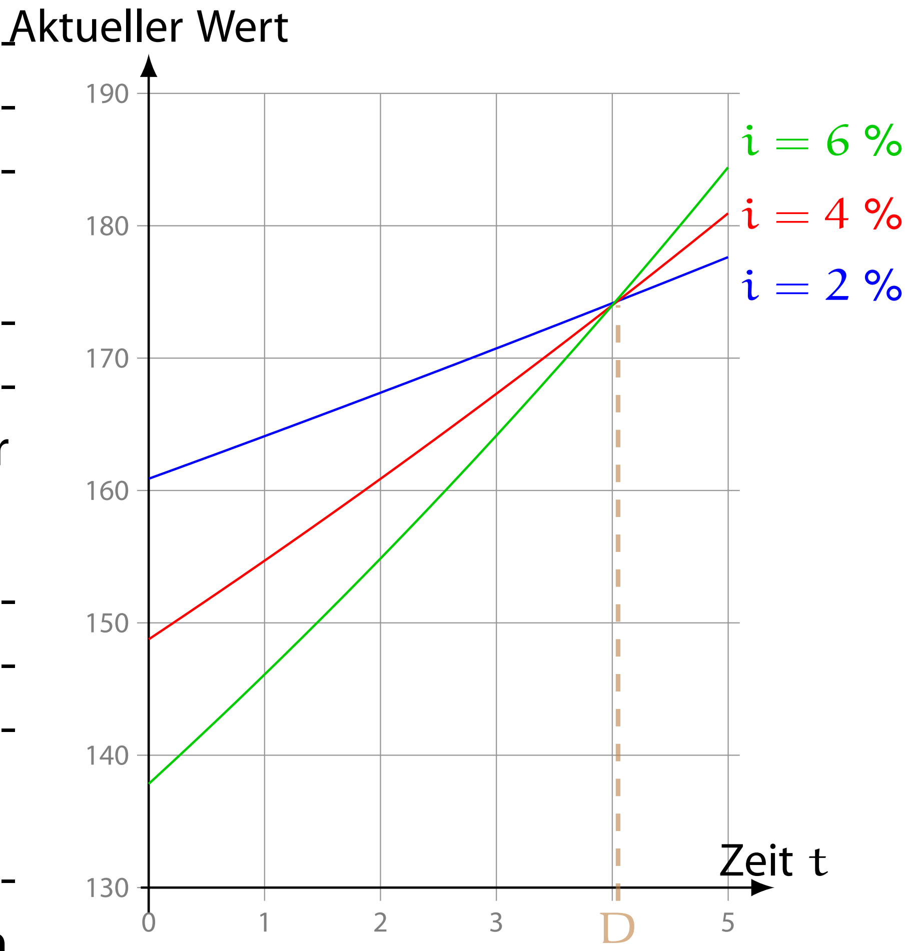
Ganzzahlige Restlaufzeiten

- Festverzinsliche Wertpapiere können meist jederzeit gehandelt werden
- Annahme zunächst: Handel nur unmittelbar nach Kuponzahlung möglich
- Gesucht: Kurs C_t für eine Restlaufzeit von t Jahren
- Lösung: Preis eines Wertpapiers ist zu jedem Zeitpunkt der Kapitalwert aller in der Restlaufzeit noch ausstehenden Leistungen
- Abgezinst wird dabei mit dem Marktzins (auch: Umlaufrendite)

$$C_t = p^* \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1} \cdot q^{-t} + C_n \cdot q^{-t}$$

Risikoanalyse – Duration

- Änderung des Marktzinses: Abhängig von Zeitpunkt Auswirkung auf aktuellen Wert des Papiers
- Fall 1 (Zins steigt): C_0 ist niedriger, aber Wiederanlage der Kuponzahlungen erbringen mehr Rendite
- Fall 2 (Zins fällt): C_0 ist höher, aber Wiederanlage der Kuponzahlungen erbringen weniger Rendite
- Vermutung: An einem (Zeit-)Punkt heben sich diese beiden Effekte auf
- Dieser Zeitpunkt heißt **Duration D**.



Risikoanalyse – Duration

- Der aktuelle Wert eines Papiers $C_t(q) = q^t \cdot C_0(q)$ ändert sich also nicht bzgl. Änderungen von q, wenn $t = D$
- damit gilt für die Duration D

$$\frac{\partial C_D(q)}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\left(q^D \cdot C_0(q)\right) = D \cdot q^{D-1} C_0(q) + q^D \frac{\partial C_0(q)}{\partial q} = 0$$

- Da q^{D-1} immer positiv ist muss also für D gelten $D \cdot C_0(q) + q \cdot \frac{\partial C_0(q)}{\partial q} = 0$ und damit:

$$\boxed{D = -\frac{\partial C_0(q)}{\partial q} \cdot \frac{q}{C_0(q)} = -q \cdot \frac{C_0'(q)}{C_0(q)}}$$

- Weitere mögliche Interpretation der Duration als Bruttozinselastizität des Barwertes.

Partielle Ableitung des Kapitalwertes

- Für die Berechnung von D ist $C_0'(q)$ zu bestimmen;
- bei einem festverzinslichen Wertpapier ergibt sich so

$$C_0'(q) = -\frac{n}{q^{n+1}}\left(p * \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} + C_n\right) + \frac{p*}{q^n} \cdot \frac{n \cdot q^{n-1}(q-1) - (q^n - 1)}{(q-1)^2}$$

Varianten der Duration

- Modifizierte Duration:

$$MD = \frac{D}{q} = -\frac{C_0'(q)}{C_0(q)}$$

- Elastizität (von i):

$$\varepsilon_{C_0,i} = \frac{C_0'(i)}{C_0(i)} \cdot i = -\frac{i}{q} \cdot D = -MD \cdot i$$

Auswirkungen von Zinsänderungen

- Bei bekanntem Emissionskurs: Auswirkungen kleiner Zinsänderungen über Duration

$$C_0(i + \Delta i) \approx C_0(i) \cdot (1 - MD \cdot \Delta i)$$

Gliederung

Opitz u.a., (2017, Kapitel 14, 15, 17)

9 Lineare Algebra

- Matrizen und Vektoren
- Matrixalgebra
- Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
- Lineare Gleichungssysteme
- Inverse Matrizen
- Determinanten
- Eigenwerte

Warum beschäftigen wir uns mit linearer Algebra?

- Quantitative tabellarische Daten (Excel) sind aus betriebs- und volkswirtschaftlichen Fragestellungen nicht wegzudenken
- Methoden der Matrizenrechnung erleichtern beziehungsweise ermöglichen die Analyse solcher Daten

Wesentliche Lernziele

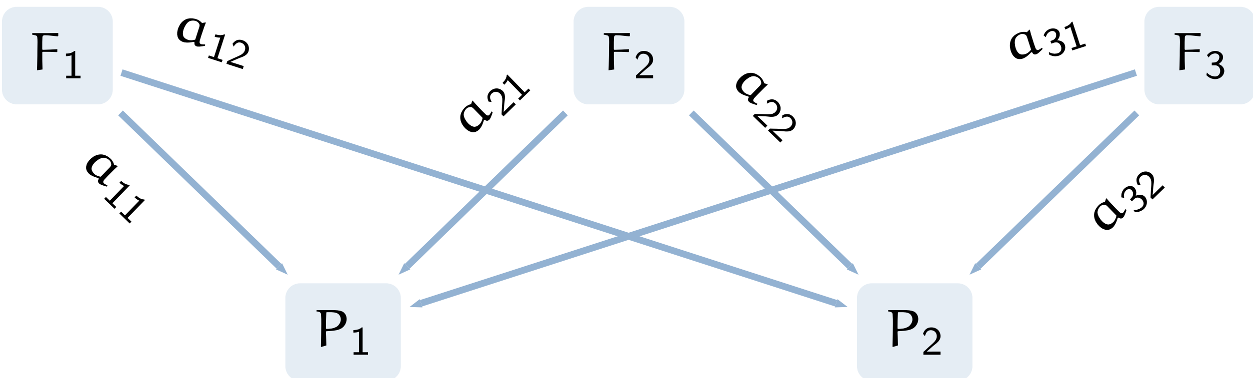
- Kennenlernen der Eigenschaften von Matrizen
- Beherrschen elementarer Matrixoperationen
- Fähigkeit, lineare Gleichungssysteme aufzustellen, zu lösen und diese Lösung darzustellen
- Beherrschen des Invertierens spezieller Matrizen

Beispiel 1

- Eine Unternehmung stellt mit Hilfe der Produktionsfaktoren F_1, F_2, F_3 zwei Produkte P_1, P_2 her.
- Zur Produktion für jede Mengeneinheit von P_j $(j = 1,2)$ werden a_{ij} Mengeneinheiten von F_i $(i = 1,2,3)$ verbraucht.

Verbrauch		für eine Einheit des Produkts	
		P_1	P_2
von Einheiten	F_1	a_{11}	a_{12}
der	F_2	a_{21}	a_{22}
Produktionsfaktoren	F_3	a_{31}	a_{32}

- Grafisch dargestellt:



Beispiel 2

- Für fünf gleichartige Produkte $P_1, \dots, P_5$ werden drei Merkmale erhoben,
- und zwar der Preis, die Qualität und die Art des Kundenkreises, der das jeweilige Produkt nachfragt.
- Ergebnis:

		Merkmale		
		Preis	Qualität	Kundenkreis
Produkte	P_1	20	sehr gut	$\mathcal{A}$
	P_2	18	sehr gut	$\mathcal{B}$
	P_3	20	sehr gut	$\mathcal{A}$
	P_4	16	mäßig	$\mathcal{C}$
	P_5	18	ordentlich	$\mathcal{B}$

Beispiel 2

- Für fünf gleichartige Produkte $P_1, \ldots, P_5$ werden drei Merkmale erhoben,
- und zwar der Preis, die Qualität und die Art des Kundenkreises, der das jeweilige Produkt nachfragt.
- Ergebnis:

		Merkmale		
		Preis	Qualität	Kundenkreis
Produkte	P_1	20	sehr gut	A
	P_2	18	sehr gut	B
	P_3	20	sehr gut	A
	P_4	16	mäßig	C
	P_5	18	ordentlich	B

Fragen:

- Ähnlichkeit von Produkten
- Finden von Kundensegmenten
- Zuordnen zu diesen Segmenten

$\longrightarrow$ Marktforschung

Definition Matrix

- Ein geordnetes, rechteckiges Schema von Zahlen oder Symbolen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m,n}$$

mit $m, n \in \mathbb{N}$ heißt Matrix mit m Zeilen und n Spalten oder kurz $m \times n$-Matrix (Im Folgenden: $a_{ij} \in \mathbb{R}$).

„m Kreuz n" - Matrix

- $a_{11}, \dots, a_{mn}$ heißen Komponenten der Matrix.
- Dabei gibt i die Zeile und j die Spalte an, in der a_{ij} steht.
- i heißt Zeilenindex und j Spaltenindex von a_{ij}.
- Sind alle Komponenten a_{ij} reelle Zahlen, so spricht man von einer reellen Matrix.

Definition

- Zu jeder $m \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- heißt die $n \times m$-Matrix

$$A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- die zu A transponierte Matrix

Definition

- Zu jeder $m \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- heißt die $n \times m$-Matrix

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- die zu A transponierte Matrix

$$\Rightarrow (A^T)^T = A$$

Beispiel transponierte Matrix

a) $$\underbrace{A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{2 \times 5\text{-Matrix}} \quad \Rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Beispiel transponierte Matrix

a) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

b) $$A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left(A^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}} = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Definition

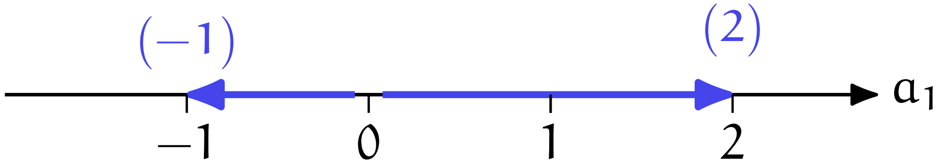
- $n \times 1$-Matrix heißt Spaltenvektor mit n Komponenten:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

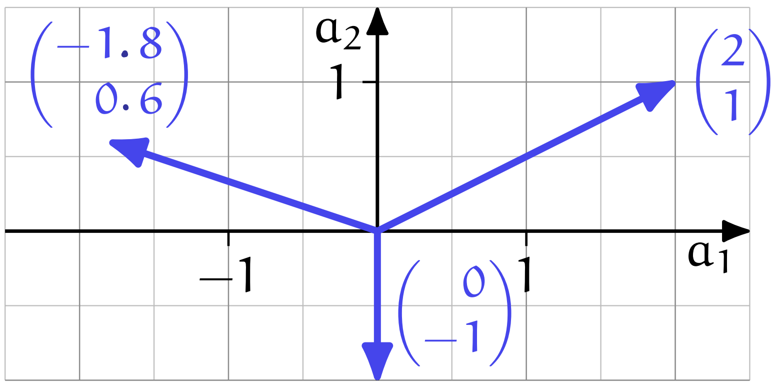
- $1 \times n$-Matrix heißt Zeilenvektor mit n Komponenten:

$$a^T = (a_1, \ldots, a_n)$$

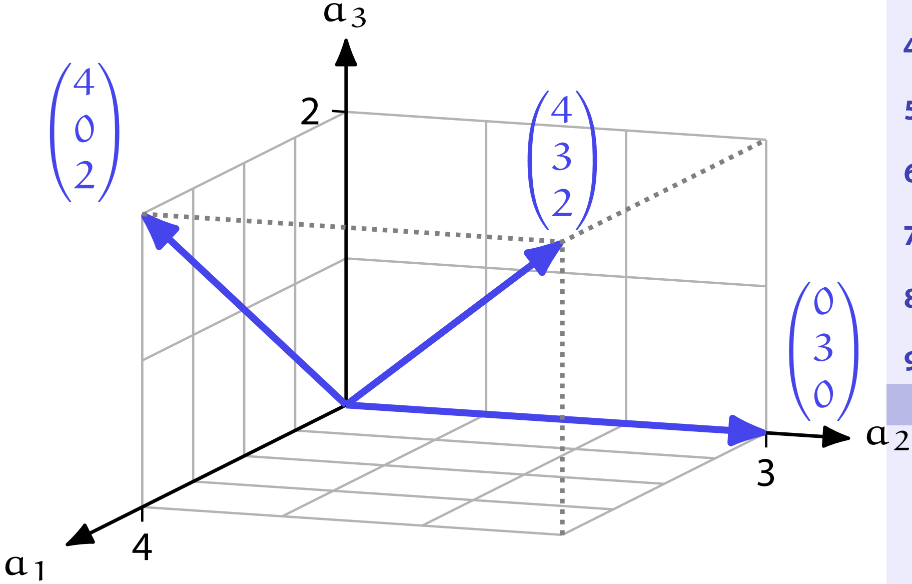
Geometrische Veranschaulichung von Vektoren



Vektoren im $\mathbb{R}^1$



Vektoren im $\mathbb{R}^2$



Vektoren im $\mathbb{R}^3$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

$\cancel{\underset{3\times 2}{A^T} = \underset{2\times 3}{B}}$ nicht definiert

$A \neq B$ denn z.B. $a_{11} \neq b_{11}$

$A \leq B$ ✓

Definition

- Seien $A = (a_{ij})_{m,n}$ und $B = (b_{ij})_{m,n}$ reelle Matrizen mit übereinstimmender Zeilenzahl m und Spaltenzahl n.
- Dann wird definiert:

$$\begin{array}{lcll} A = B & \Leftrightarrow & a_{ij} = b_{ij} & \text{für alle } i = 1, \ldots, m\,, j = 1, \ldots, n \\ A \neq B & \Leftrightarrow & a_{ij} \neq b_{ij} & \text{für mindestens ein Indexpaar } (i, j) \\ A \leqslant B & \Leftrightarrow & a_{ij} \leqslant b_{ij} & \forall (i, j) \\ A < B & \Leftrightarrow & a_{ij} < b_{ij} & \forall (i, j) \end{array}$$

- Entsprechend $A \geqslant B$ und $A > B$.

Definition

a_{ii} : Elemente der Hauptdiagonale

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -7 \\ 0 & -7 & 5 \end{pmatrix}$ } symmetrisch

a) $A = (a_{ij})_{n,n}$ heißt quadratisch

b) $A = (a_{ij})_{n,n}$ mit $A = A^T$ heißt symmetrisch

a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{21}, a_{32}

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ untere Dreiecksmatrix

c) $A = (a_{ij})_{n,n}$ heißt Dreiecksmatrix, wenn
$a_{ij} = 0$ für $i < j$ (untere Dreiecksmatrix) oder
$a_{ij} = 0$ für $i > j$ (obere Dreiecksmatrix)

d) $A = (a_{ij})_{n,n}$ heißt Diagonalmatrix, wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

e) $A = (a_{ij})_{n,n}$ heißt Einheitsmatrix, wenn $a_{ii} = 1$ für alle i und
$a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$ $\qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Addition und Subtraktion von Matrizen

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

$A + B = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 \\ -5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$

$A - B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

Definition

- Gegeben: $A = (a_{ij})_{m,n}$ und $B = (b_{ij})_{m,n}$.
- Dann gilt:
- Addition: $A + B = (a_{ij})_{m,n} + (b_{ij})_{m,n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m,n}$
- Subtraktion: $A - B = (a_{ij})_{m,n} - (b_{ij})_{m,n} = (a_{ij} - b_{ij})_{m,n}$

Damit:

- $A + B = B + A$ Kommutativ
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ Assoziativ
- Addition/Subtraktion nicht definiert, wenn Zeilen- bzw. Spaltenzahl nicht übereinstimmen

Definition

- Gegeben: $A = (a_{ij})_{m,n}$ und $r \in \mathbb{R}$ (Skalar).
- Dann gilt:

$$r \cdot A = r \cdot (a_{ij})_{m,n} = (r \cdot a_{ij})_{m,n} = (a_{ij} \cdot r)_{m,n} = A \cdot r$$

Beispiel:

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 25 \end{pmatrix}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} (rs)A &= r(sA) && \text{(Assoziativgesetz)} \\ (r+s)A &= rA + sA && \text{(Distributivgesetz)} \\ r(A+B) &= rA + rB \end{aligned}$$

Matrixmultiplikation

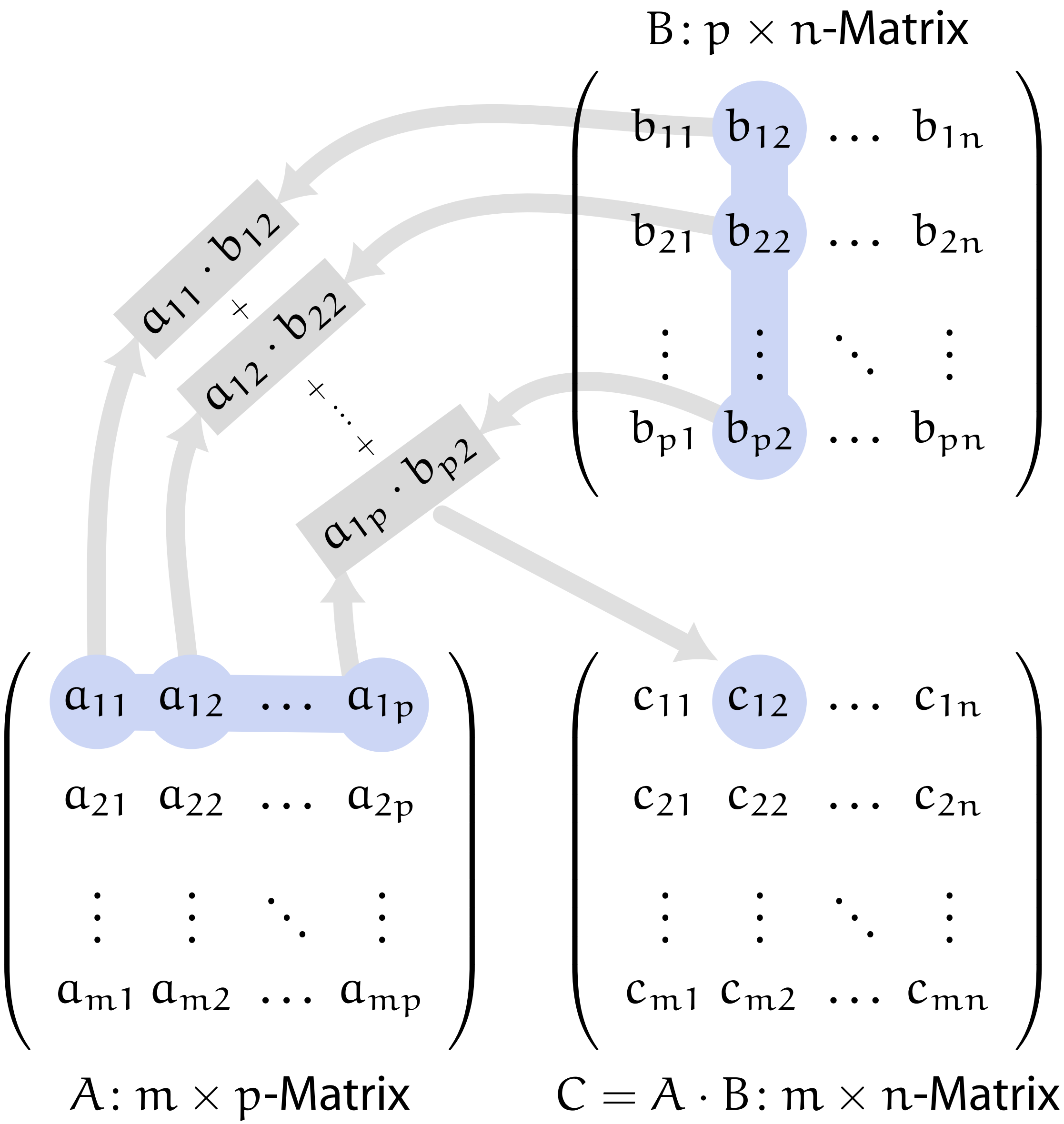
$\cancel{\underset{3\times 4}{A} \cdot \underset{3\times 4}{B}}$ nicht definiert

$\underset{4\times 2}{C} \cdot \underset{2\times 7}{D}$ ✓

- Gegeben:
  $A = (a_{ik})_{m,p}$
  und $B = (b_{kj})_{p,n}$.
- Dann gilt:

$$A \cdot B = (a_{ik})_{m,p} \cdot (b_{kj})_{p,n} = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \right)_{m,n}$$

- Merke:
  Zeile mal Spalte!



Schema zur Matrixmultiplikation

Beispiel Matrixmultiplikation

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

A: 2×3, B: 2×2

$A \cdot B$ nicht definiert

2×3 2×2

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -6 \\ 28 & 40 & 8 \end{pmatrix}$$

2×2 2×3

$-1\cdot1 + 2\cdot3 = 5 \quad (c_{11})$

$-1\cdot0 + 2\cdot5 = 10$

$-1\cdot4 + 2\cdot(-1) = -6$

$4\cdot1 + 8\cdot3 = 28$

$4\cdot0 + 8\cdot5 = 40$

$4\cdot4 + 8\cdot(-1) = 8$

```
> B = matrix(c(-1,2,4,8), nrow=2, byrow=T)
> B
     [,1] [,2]
[1,]   -1    2
[2,]    4    8
> A = matrix(c(1,0,4,3,5,-1), nrow=2, byrow=T)
> A
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    0    4
[2,]    3    5   -1
> B %*% A
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    5   10   -6
[2,]   28   40    8
```

Beispiel :

$x_1, x_2 \mathrel{\hat{=}}$ Anzahl der Produkte P_1, P_2

$y_1, y_2, y_3 \mathrel{\hat{=}}$ Anz. der Produktionsfaktoren F_1, F_2, F_3

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \\ y_2 &= a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \\ y_3 &= a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{3\times 2}{A} \cdot \underset{2\times 1}{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = y$$

$$\begin{tikzcd} F_1, \dots, F_m \arrow[d, "A_{m,n}"] \\ P_1, \dots, P_n \end{tikzcd}$$

$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

$\Rightarrow y = A \cdot x$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\begin{tikzcd} F_1, \dots, F_m \arrow[dd, "A_{m,n}"'] \arrow[dr, "B_{m,l}"] & & y \\ & z_1, \dots, z_l \arrow[dl, "C_{l,n}"] & \\ P_1, \dots, P_n & & x \end{tikzcd}$$

$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_l \end{pmatrix}$

$z = C \cdot x$

$$\begin{aligned} y &= A \cdot x + B \cdot z \\ &= A \cdot x + B \cdot C \cdot x \\ &= (A + B \cdot C) \cdot x \end{aligned}$$

Spezialfälle der Matrixmultiplikation

- $A = (m \times n)$-Matrix, $B = (n \times m)$-Matrix
  $\Rightarrow$ es existiert $\quad A \cdot B \quad$ und $\quad B \cdot A$
- A quadratisch $\quad \Rightarrow \quad A \cdot A = A^2$ existiert
- A, B quadratisch $\quad \Rightarrow \quad A \cdot B$ existiert und $B \cdot A$ existiert.
  Aber: Im Allgemeinen $A \cdot B \neq B \cdot A$
- Ist E Einheitsmatrix, dann gilt:

$$A \cdot E = E \cdot A = A$$

Spezielle Rechenregeln

- $A = (m \times p)$-Matrix, $B = (p \times n)$-Matrix. Damit gilt:
- $A \cdot B \quad$ und $\quad B^T \cdot A^T \quad$ existieren.
- $B^T A^T = (A \cdot B)^T$
- $A^T A \quad$ ist symmetrische $(p \times p)$-Matrix und
  $A A^T \quad$ ist symmetrische $(m \times m)$-Matrix

Norm

- Gegeben Vektor $a \in \mathbb{R}^n$
- Definition: Absolutbetrag, Norm oder Länge eines Vektors:

$$\|a\| = |a| = \sqrt{a^T a} = \sqrt{{a_1}^2 + \ldots + {a_n}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2} \quad \in \mathbb{R}_+$$

- Seien a, b, c Vektoren des $\mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}$ ein Skalar. Dann gilt:

a) $\|a+b\| = \|b+a\|, \qquad \|a-b\| = \|b-a\|$

b) $\|ra\| = |r| \cdot \|a\|$

c) $\left\|a^T b\right\| \leqq \|a\| \cdot \|b\|$ für $n > 1$ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

$= |a| \cdot |b|$ für $n = 1$

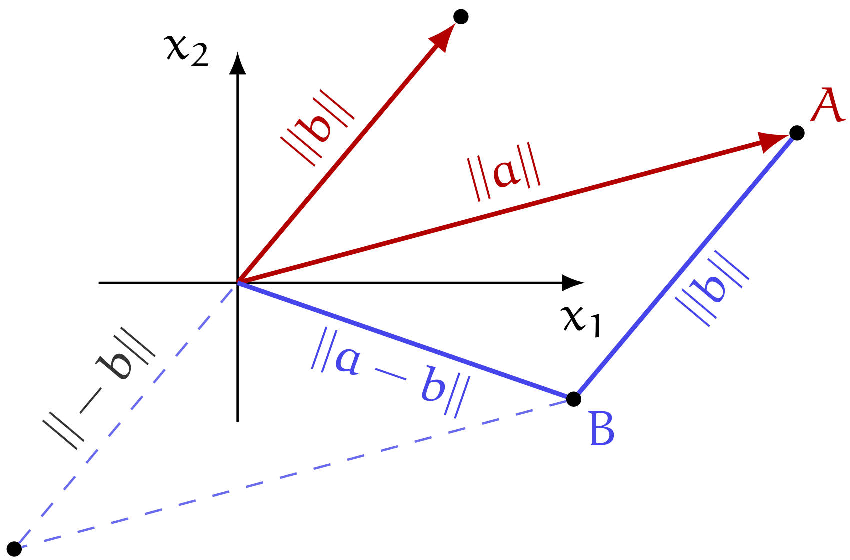
d) $\|a+b\| \leqq \|a\| + \|b\|$ (Dreiecksungleichung)

e) $\|a-c\| - \|c-b\| \leqq \|a-b\| \leqq \|a-c\| + \|c-b\|$

Kosinussatz

- Gegeben: a, b Vektoren des $\mathbb{R}^n$, die den Winkel γ einschließen.
- Nach dem Kosinussatz gilt im Dreieck mit den Ecken $0, A, B$

$$\|a-b\|^2 =$$
$$\|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\,\|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos\gamma.$$



- Damit gilt:

$$\begin{aligned} a^{\mathsf{T}} b &= \frac{1}{2}\left(\|a+b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|a\|^2 + \|b\|^2 - \|a-b\|^2\right) \\ &= \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos\gamma \end{aligned}$$

Hyperebenen und Sphären

Definition Hyperebene

- Gegeben: $a \in \mathbb{R}^n$ mit $a \neq 0$ und $b \in \mathbb{R}$
- Dann heißt $H(a, b) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\right\}$ Hyperebene im $\mathbb{R}^n$
- Anmerkung: H teilt den $\mathbb{R}^n$ in zwei Halbräume

Definition Sphäre

- Gegeben: $a \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}_+$
- Dann heißt $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| = r\}$ Sphäre (Kugelfläche) im $\mathbb{R}^n$ und dem Radius r
- Damit: r-Umgebung von a: $K_<(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}$

Beispiel Hyperebene/Sphäre

Beispiele

- $H = \{x \in \mathbb{R}^3 : \; 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6\}$
- $$K = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \; \left\| x - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 1 \right\}$$
  $$= \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \; \sqrt{(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 + {x_3}^2} = 1 \right\}$$

Offenheit, Abgeschlossenheit

Gegeben

- $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Punktmenge des $\mathbb{R}^n$ und
- $\overline{M} = \mathbb{R}^n \setminus M$ deren Komplement bzgl. $\mathbb{R}^n$.

Dann heißt:

- $a \in \mathbb{R}^n$ innerer Punkt von M, wenn eine r-Umgebung $K_<(a, r)$ von a existiert, die ganz in M liegt, also $K_<(a, r) \subseteq M$,
- $a \in \mathbb{R}^n$ äußerer Punkt von M, wenn eine r-Umgebung $K_<(a, r)$ von a existiert, die ganz in $\overline{M}$ liegt und
- $a \in \mathbb{R}^n$ Randpunkt von M, wenn a weder innerer noch äußerer Punkt von M ist.

Eine Punktmenge $M \in \mathbb{R}^n$ heißt dann

- offen wenn jedes Element $a \in M$ innerer Punkt von M ist,
- abgeschlossen, wenn jedes Element $a \in \overline{M}$ innerer Punkt von $\overline{M}$ ist, also das Komplement $\overline{M}$ offen ist.

Beschränktheit, Kompaktheit

Eine Punktmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt

- **beschränkt nach oben**, wenn ein $b \in \mathbb{R}^n$ existiert mit $b \geqq x$ für alle $x \in M$,
- **beschränkt nach unten**, wenn ein $a \in \mathbb{R}^n$ existiert mit $a \leqq x$ für alle $x \in M$,
- **beschränkt**, wenn M nach oben und unten beschränkt ist,
- **kompakt**, wenn M beschränkt und abgeschlossen ist.

Beispiele

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^2_+ : x_1 + 2x_2 \leqq 3, \ \|x\| \leqq 2\}$$
$$M_2 = \{x \in \mathbb{R}^2_+ : x_1 \in \mathbb{N}\}$$

Beispiele linearer Gleichungssysteme

a)
$$\left.\begin{array}{rrrrrrl} ① & 2x_1 & - & 3x_2 & = & -1 \\ ② & x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{array}\right\} \begin{array}{lll} ① - 2② : & -5x_2 = -5 : & x_2 = 1 \\ \text{in } ② : & & x_1 = 1 \end{array}$$

b)
$$\left.\begin{array}{rrrrr} x_1 & + & x_2 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{array}\right\} \text{Keine Lösung}$$

c)
$$\left.\begin{array}{rrrrr} x_1 & - & x_2 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & = & -2 \end{array}\right\} \text{unendl. viele Lsg.}$$

Beispiele linearer Gleichungssysteme

a) $$\left.\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$$

b) $$\left.\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{array}\right\} \Rightarrow L = \emptyset$$

c) $$\left.\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & x_2 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & = & -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{unendlich viele Lösungen}$$

Beispiele linearer Gleichungssysteme

a) $$\left.\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$$

b) $$\left.\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{array}\right\} \Rightarrow L = \emptyset$$

c) $$\left.\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & x_2 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & = & -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{unendlich viele Lösungen}$$

Probleme:

- System lösbar oder nicht?
- Verfahren zum Auffinden von Lösungen
- Darstellung von mehrdeutigen Lösungen

Beispiele linearer Gleichungssysteme

a) $$\left.\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$$

b) $$\left.\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{array}\right\} \Rightarrow L = \emptyset$$

c) $$\left.\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & x_2 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & = & -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{unendlich viele Lösungen}$$

Probleme:

- System lösbar oder nicht?
- Verfahren zum Auffinden von Lösungen
- Darstellung von mehrdeutigen Lösungen

Dazu gibt es:

- Den Gaußschen Algorithmus (erzeugt Dreiecksmatrix)
- das Verfahren von Gauß-Jordan (modifizierte Gauß: erzeugt Einheitsmatrix)

Allgemeines lineares Gleichungssystem

- Ein System von Gleichungen

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & & & & \vdots & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

- heißt lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten.
- Die a_{ij} und b_i heißen Koeffizienten des Gleichungssystems.
- In Matrixform:

$$Ax = b$$

- Lösungsmenge:

$$L = \{x : \quad Ax = b\}$$