Wirtschafts- und Finanzmathematik

für Betriebswirtschaft und International Management

Wintersemester 2017/18

- Probeklausur: Ab Weihnachten online
- am 10.1.2018: Besprechung Probeklausur, Fragen, WH

04.10.2017	Einführung, R, Grundlagen	1
11.10.2017	Grundlagen, Aussagen	2
18.10.2017	Aussagen	3
25.10.2017	Mengen, Folgen, Reihen	4
01.11.2017	Allerheiligen	
08.11.2017	Reelle Funktionen einer Variablen, Stetigkeit	5
15.11.2017	Differentialrechnung	6
22.11.2017	Differentialrechnung	7
29.11.2017	Integration	8
06.12.2017	Finanzmathematik	9
13.12.2017	Matrizen, Vektoren, Lineare Gleichungssysteme	10
20.12.2017	Determinanten, Eigenwerte	11
29.12.2017	Weihnachten	
05.01.2018	Weihnachten	
10.01.2018	Puffer, Wiederholung	12
19.01.2018	Beginn der Prüfungszeit	

Prof. Dr. Stefan Etschberger
HSA

Lösungsdarstellung

Buch Kapitel lineare Gleichungssysteme:
https://goo.gl/epGdcD

- Beispiel für Enddarstellung:

Basis

$$\begin{array}{rcl} x_1 \quad + \quad x_3 \qquad\quad &=& 4 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 &=& 7 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{\text{Einheitsmatrix}} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{matrix}}_{\text{Rest}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Nichtbasis

- Dabei bezeichnet:

$$\begin{pmatrix} E & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b$$

- kann nach Basisvariablen aufgelöst werden:
  $x_1 = 4 - x_3, \quad x_2 = 7 - 3x_3 - 2x_4$ (allgemeine Lösung)
- In diesem Fall immer lösbar, zum Beispiel mit

$$x_N = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- Gesucht: Verfahren zur Überführung beliebiger Gleichungssysteme in diese Form

$$\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline ① & -1 & 5 & 3 & 4 \\ ② & 1 & 4 & -3 & 5 \\ \hline & 0 & 9 & 0 & 9 \end{array} \quad ①+②$$

$$\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline ① & 5 & -2 & 10 & 4 \\ & -5/2 & 1 & -5 & -2 \end{array} \quad -\tfrac{1}{2}\cdot ①$$

Elementare Umformungen

- Das sind Umformungen der Koeffizientenmatrix, die die Lösung nicht verändern. Erlaubt ist
- Multiplikation einer Zeile mit beliebigen Zahlen $c \neq 0$
- Addition einer Zeile zu einer anderen Zeile
- Vertauschen von Zeilen (oder Spalten)

Lösungsalgorithmus

- Lösung mit Verfahren von Gauß-Jordan: Systematische Umformungen nach obigem Prinzip, bis Darstellung der Koeffizientenmatrix in Einheits- und Restmatrix ensteht
- Algorithmus und Lösungsvarianten siehe Vorlesung

Definition

- Gegeben: $n \times n$-Matrix (quadratisch)
- Existiert eine $n \times n$-Matrix X mit $AX = XA = E$, so heißt X die zu A inverse Matrix.
- Schreibweise: $X = A^{-1}$
- $\Rightarrow AA^{-1} = A^{-1}A = E$

Inverse Matrizen und Gleichungssysteme

- Falls A^{-1} existiert, gilt:

$$Ax = b \quad \Rightarrow \quad \underbrace{A^{-1}A}_{E}x = A^{-1}b \quad \Rightarrow \quad Ex = x = A^{-1}b$$

- Damit existiert genau eine Lösung und zwar:

$$x = A^{-1}b$$

Berechnung inverser Matrizen durch den Gaußalgorithmus:

- Ansatz:

$$\begin{aligned} Ax + \quad Ey &= 0 \\ \Rightarrow \quad A^{-1}Ax + A^{-1}Ey &= 0 \\ \Rightarrow \quad Ex + \quad A^{-1}y &= 0 \end{aligned}$$

- Also: Gaußtableau mittels elementarer Umformungen folgendermaßen umformen:

$$(A|E) \quad \longrightarrow \quad (E|A^{-1})$$

Orthogonale Matrizen

- Eine $n \times n$-Matrix A heißt orthogonal, wenn gilt:
- $AA^T = A^TA = E$
- Bei orthogonalen Matrizen A gilt also: $A^{-1} = A^T$.
- Mit A ist damit auch A^T orthogonal

Beispiel (Lineares Gleichungssystem)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 9x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Pivot-Element

Pivot-Zeile

	x_1	x_2	x_3		
①	1	1	1	0	
②	4	2	1	1	
③	9	3	1	3	
④	1	1	1	0	①
⑤	0	-2	-3	1	② − 4·①
⑥	0	-6	-8	3	③ − 9·①
⑦	1	0	−1/2	1/2	④ + 1/2 ⑤
⑧	0	1	3/2	−1/2	−1/2·⑤
⑨	0	0	1	0	⑥ − 3·⑤
	1	0	0	1/2	⑦ + 1/2 ⑨
	0	1	0	−1/2	⑧ − 3/2 ⑨
	0	0	1	0	⑨

Einheitsmatrix

kein Rest

⇒ genau eine Lösung : $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = 0$

Beispiel 2, 3 → siehe Videos

https://goo.gl/BD9TO5
https://goo.gl/jmHnMX

Beispiel 2:

	x_1	x_2	x_3		
①	1	2	-4	1	
②	2	1	-2	0	
③	1	-4	8	0	
④	1	-4	8	0	③
⑤	0	6	-12	1	① − ③
⑥	0	9	-18	0	② − 2③
⑦	1	0	0	0	④ + 4/9 ⑥
⑧	0	1	-2	0	1/9 ⑥
⑨	0	0	0	1	⑤ − 6/9 ⑥

⑨ : $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$ (immer falsch)

⇒ keine Lösung

Beispiel 3:

	x_1	x_2	x_3	x_4		
1	1	5	2	3	4	
2	4	18	2	8	12	
3	3	11	-6	1	4	
4	0	2	6	4	4	
5	1	5	2	3	4	1
6	0	-2	-6	-4	-4	2 - 4·1
7	0	-4	-12	-8	-8	3 - 3·1
8	0	2	6	4	4	4
	1	0	-13	-7	-6	5 - 5/2·8
	0	1	3	2	2	1/2·8
	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~6 + 8~~
	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~7 + 2·8~~

komplette Nullzeilen streichen

Einheitsmatrix und Restmatrix

→ unendlich viele Lösungen

→ Nichtbasisvariablen (x_3, x_4) sind frei wählbar

$$\Rightarrow \quad x_1 = 13x_3 + 7x_4 - 6$$
$$x_2 = -3x_3 - 2x_4 + 2$$

Vektorielle Lösungsdarstellung:

Setze: $x_3 = a, \; x_4 = b \quad (a, b \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 13a + 7b - 6 \\ x_2 = -3a - 2b + 2 \\ x_3 = 1\cdot a + 0\cdot b + 0 \\ x_4 = 0\cdot a + 1\cdot b + 0 \end{array}\right\} L = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 13 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

„Lösungsmenge"

„4x1-Vektoren"

Beispiel: Invertierung einer Matrix

geg.: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$, ges.: A^{-1}

	A		E		
1	-1	2	1	0	
2	5	10	0	1	
3	1	-2	-1	0	-1·1
4	0	20	5	1	2 + 5·1
	1	0	-1/2	1/10	3 + 1/10·4
	0	1	1/4	1/20	1/20·4
	E		A^{-1}		

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/10 \\ 1/4 & 1/20 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Probe: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Determinanten: Abbildung von quadratischen Matrizen in eine Zahl ($\in \mathbb{R}$).

$$\det: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$$

$n = 1$: $\det(x) = x$

$n = 2$: $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$n = 3$: $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

(Regel von Sarrus)

Achtung: Sarrus-Regel lässt sich <u>nicht</u> auf größere Determinanten ($n \geq 4$) übertragen

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, $\det A = ?$

$$\det A = 1\cdot 3\cdot 2 + 2\cdot 4\cdot 2 + (-1)\cdot 0\cdot 7 - (2\cdot 3\cdot(-1) + 7\cdot 4\cdot 1 + 2\cdot 0\cdot 2) = 22 - 22 = 0$$

Determinanten für $A_{n\times n}$ mit $n \geq 4$

Definition: A_{ij} (Minor von A) entsteht, indem man Zeile i und Spalte j aus der Matrix A streicht

z.B. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ → $A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $A_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Berechnung der det A über sog. Entwicklungssatz

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Entwickeln nach Spalte j

Spalte j

$$(-1)^{1+j}\cdot a_{1j}\cdot \det(\cdots) + (-1)^{2+j}\, a_{2j}\cdot \det(\cdots) + (-1)^{3+j}\cdot a_{3j}\cdot \det(\cdots) + (-1)^{4+j}\cdot a_{4j}\cdot \det(\cdots) + (-1)^{n+j}\cdot a_{nj}\cdot \det(\cdots)$$

analog möglich: Entwickeln nach Zeile

Strategie: Suche Spalte/Zeile mit möglichst vielen Nullen!

Beispiel:

entwickeln nach 2. Zeile

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{2+1}\cdot 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ \dots 0 \dots + \dots 0 \dots$$

$$+ (-1)^{2+4}\cdot(-1)\cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -2\cdot[2\cdot 2\cdot 1 + 0\cdot 0\cdot 3 + 1\cdot 1\cdot 1 - (3\cdot 2\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot 0)]$$
$$-1\cdot[1\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 0 + (-1)\cdot 3\cdot 0 - (0\cdot 1\cdot 0 + (-1)\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 3\cdot 2)]$$

$$= 2 + 3 = 5$$

Eigenschaften von Determinanten

a) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

[Achtung: i.a. $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$]

b) $\det A \neq 0 \iff$ Lineares Gleichungssystem $Ax = b$ hat genau eine Lösung

$\iff A^{-1}$ existiert

$\iff \text{rang}(A) = n$

„Zeilen, die nach dem Gauß-Algorithmus übrig bleiben"

c) A orthogonal $\iff A^T = A^{-1} \iff \det A = \pm 1$

d) $\det(A^T) = \det(A)$

e) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Beispiel: geg. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

gesucht: $\det(A^{-1} \cdot B \cdot A^T \cdot A^2)$

$\det(A^{-1} \cdot B \cdot A^T \cdot A^2) =$

$\overset{a)}{=} \det(A^{-1}) \cdot \det(B) \cdot \det(A^T) \cdot (\det(A))^2$

$= \cancel{\frac{1}{\det(A)}} \cdot \det(B) \cdot \cancel{\det(A)} \cdot \det^2(A)$

$\det A = 1 \cdot 5 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= 1 \cdot 5 \cdot (-1 - 1 \cdot 2) = -15$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det B = 1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$

Merke: A Dreiecksmatrix $\Rightarrow \det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(B) \cdot \det^2(A) = 8 \cdot (-15)^2 = 1800$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & -a & a \end{pmatrix}$, für welche $a \in \mathbb{R}$ ist A orthogonal?

$\det A = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} a & a \\ -a & a \end{pmatrix} = a^2 - (-a \cdot a) = 2a^2 \overset{!}{=} \pm 1 \iff a^2 = \frac{1}{2}$

$\iff a = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

Eigenwertprobleme

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0 & 1.1 \end{pmatrix}$

gesucht: $\lambda \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^2$ so, dass

$\lambda z = Az$

das funktioniert, wenn $\det(A - \lambda E) = 0$

$\det\left[\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0 & 1.1 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \det\begin{pmatrix} 0.8-\lambda & 0.2 \\ 0 & 1.1-\lambda \end{pmatrix} = (0.8-\lambda)\cdot(1.1-\lambda) - 0 \cdot 0.2 = 0$

$\iff \lambda_1 = 0.8, \lambda_2 = 1.1$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 0.8$
$\lambda_2 = 1.1$

Bestimmung der Eigenvektoren über Lösung des Gleichungssystems

$$\boxed{(A - \lambda \cdot E) \cdot x = 0}$$

im Beispiel:

$\lambda_1 = 0.8$:
$$\left[\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0 & 1.1 \end{pmatrix} - 0.8 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.2 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$y = 0$
x ist frei wählbar, z.B. $x = a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Eigenvektor zu Eigenwert $\lambda_1 = 0.8$

$$EV^1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 1.1$
$$\left[\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0 & 1.1 \end{pmatrix} - 1.1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{pmatrix} -0.3 & 0.2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} -0.3\,x + 0.2\,y = 0 \\ 0\,x + 0\,y = 0 \end{matrix}\right\}$$

$y = \frac{3}{2} x$
z.B x ist frei wählbar $x = b$

$$\Rightarrow \quad EV^2 = \begin{pmatrix} b \\ \frac{3}{2} b \end{pmatrix}$$

d.h. gleichförmiges 10%iges Wachstum von Männern und Frauen ist nur bei Startverhältnis von 3 Frauen zu 2 Männern

Probe $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0 & 1.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 160 + 60 \\ 330 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220 \\ 330 \end{pmatrix} = 1.1 \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Determinanten: Vorüberlegung

Permutationen und Inversionen

- Sei $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$ eine n-elementige Menge.
- Dann: jede Anordnung $(a_{p_1}, \ldots, a_{p_n})$ der Elemente $a_1, \ldots, a_n$ mit $\{p_1, \ldots, p_n\} = \{1, \ldots, n\}$ heißt eine Permutation.
- Wenn für ein Paar (a_i, a_j) einerseits $i < j$, und andererseits $p_i > p_j$, gilt: Inversion.
- Also: Ausgehend von Permutation $(a_1, \ldots, a_n)$: Jede Vertauschung zweier Elemente a_i und a_j ist eine Inversion.

Beispiel

- Gegeben: Menge $\{1,2,3\}$

Permutationen und Inversionen

- Sei $M = \{a_1, \dots, a_n\}$ eine n-elementige Menge.
- Dann: jede Anordnung $(a_{p_1}, \dots, a_{p_n})$ der Elemente $a_1, \dots, a_n$ mit $\{p_1, \dots, p_n\} = \{1, \dots, n\}$ heißt eine Permutation.
- Wenn für ein Paar (a_i, a_j) einerseits $i < j$, und andererseits $p_i > p_j$, gilt: Inversion.
- Also: Ausgehend von Permutation $(a_1, \dots, a_n)$: Jede Vertauschung zweier Elemente a_i und a_j ist eine Inversion.

Beispiel

- Gegeben: Menge $\{1,2,3\}$
- Damit: Folgende 6 Permutationen:

$$\begin{array}{ll} (1,2,3) & \text{ohne Inversion,} \\ (1,3,2),\ (2,1,3) & \text{mit je einer Inversion,} \\ (2,3,1),\ (3,1,2) & \text{mit je zwei Inversionen,} \\ (3,2,1) & \text{mit drei Inversionen.} \end{array}$$

Definition Determinante

- Gegeben: A, eine $n \times n$-Matrix.
- Außerdem: $(1, \ldots, n)$ sei geordnetes n-Tupel der Zeilenindizes und $p = (p_1, \ldots, p_n)$ eine Permutation von $(1, \ldots, n)$ mit $\nu(p)$ Inversionen.
- Determinante von A ist dann:

$$\det A = \sum_p (-1)^{\nu(p)} \cdot a_{1p_1} \cdot a_{2p_2} \cdot \ldots \cdot a_{np_n}$$

Beispiele

- Gegeben: A als eine $n \times n$-Matrix
- Für $n = 1$ gilt dann $A = (a_{11})$ sowie $\det A = \det(a_{11}) = a_{11}.$
- Für $n = 2$ enthält die Determinante $2! = 2$ Summanden,
- nämlich: $a_{11}a_{22}$ ohne Inversion und $-a_{12}a_{21}$ mit einer Inversion.
- Damit: $\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$

Determinanten von 3×3-Matrizen

Beispiel: Determinante einer 3×3-Matrix

- Für $n = 3$: Determinante hat $3! = 6$ Summanden, nämlich $a_{11}a_{22}a_{33}$ ohne Inversion, $a_{12}a_{23}a_{31}$ und $a_{13}a_{21}a_{32}$ mit zwei Inversionen, $-a_{11}a_{23}a_{32}$ und $-a_{12}a_{21}a_{33}$ mit einer Inversion und $-a_{13}a_{22}a_{31}$ mit drei Inversionen.
- Es gilt:

$$\begin{aligned} \det A = \quad & \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ = \quad & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

- Einfacher zu merken: Regel von Sarrus (siehe Vorl.)

Zahlenbeispiel Determinanten

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Zeigen Sie: $\det A = -2$,
  $\det B = 6$,
  $\det C = 0$

Minor, Kofaktoren

- Gegeben: $n \times n$-Matrix A mit $n \geqq 2$;
- Streiche Zeile i und Spalte j, $\Rightarrow$ Matrix mit $n-1$ Zeilen und $n-1$ Spalten:

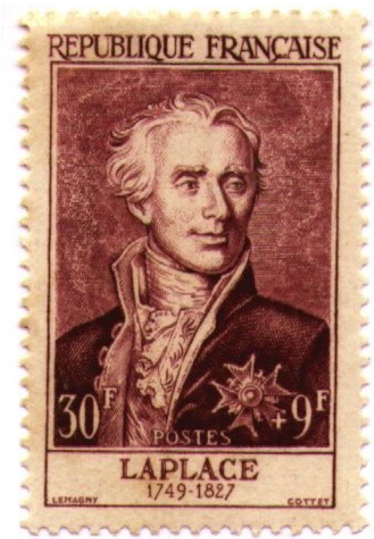
$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- nach dem Streichen heißt diese Matrix Minor
- Damit kann man das algebraische Komplement oder den Kofaktor d_{ij} zur Komponente a_{ij} von A berechnen:

$$d_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij} = \begin{cases} \det A_{ij} & \text{für } i+j \text{ gerade} \\ -\det A_{ij} & \text{für } i+j \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$(i, j = 1, \dots, n)$$

Entwicklungssatz von Laplace



- Entwicklungssatz für Determinanten
- Gegeben: A eine $n \times n$-Matrix und D die Matrix der Kofaktoren.
- Dann gilt für $n = 2,3,\ldots$

$$AD^{T} = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix}.$$

- Insbesondere wird mit:

$$\begin{aligned} \det A &= a_i^T d_i = a_{i1} d_{i1} + \ldots + a_{in} d_{in} && \text{(i=1,...,n)} \\ &= a^{jT} d^j = a_{1j} d_{1j} + \ldots + a_{nj} d_{nj} && \text{(j=1,...,n)} \end{aligned}$$

die Determinante von A nach der $i$ten Zeile $a_i^T = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ bzw. nach der j-ten Spalte $a^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ von A entwickelt.

Beispiele

- Zeigen Sie:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 5$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = 0$$

Sätze

Es gilt für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ (Determinantenmultiplikationssatz)
- aber: im allgemeinen $\det(A + B) \neq \det A + \det B$
- $\det A \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}$ existiert

Gilt zusätzlich $\det A \neq 0$

- Mit $D = (d_{ij})_{n,n}$, der Matrix der Kofaktoren zu A gilt
- $A^{-1} = \frac{1}{\det A} D^T$
- $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$
- Ist A orthogonal gilt: $\det A = \pm 1$

Lösung eindeutig bestimmter linearer Gleichungssysteme

- Gegeben: Lineares Gleichungssystem $Ax = b$
- Voraussetzung: Es existiert A^{-1}, also auch $\det A \neq 0$
- Bezeichnung: Mit A_j ist die Matrix, in der gegenüber A die j-te Spalte durch b ersetzt wird, also

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Gabriel Cramer
(1704 – 1752)

- Dann lässt sich die Lösung x in folgender Form schreiben:

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A} \quad (j = 1, \dots, n)$$

(Cramersche Regel)

Beispiel Cramersche Regel

Zu zeigen:

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- und $Ax = b$
- Damit: $x^T = (1, -1, 1)$

Eigenwerte: Einführendes Beispiel

Bevölkerungsentwicklung

- Gegeben:

$$\begin{array}{ll} x_t > 0 & \text{die Anzahl von Männern im Zeitpunkt } t \text{ und} \\ y_t > 0 & \text{die Anzahl von Frauen im Zeitpunkt } t. \end{array}$$

- Anzahl der Sterbefälle für Männer bzw. Frauen im Zeitintervall $[t, t+1]$ sei proportional zum jeweiligen Bestand im Zeitpunkt t, und zwar $0{,}2x_t$ für die Männer und $0{,}2y_t$ für die Frauen.
- Anzahl der Knaben- und Mädchengeburten im Zeitintervall $[t, t+1]$ proportional ist zum Bestand der Frauen.
- Anzahl der Knabengeburten: $0{,}2y_t$,
- Anzahl der Mädchengeburten: $0{,}3y_t$.
- Für Übergang vom Zeitpunkt t zum Zeitpunkt $t+1$ damit:

$$\begin{array}{rcrcr} x_{t+1} & = & x_t - 0{,}2x_t + 0{,}2y_t & = & 0{,}8x_t + 0{,}2y_t \\ y_{t+1} & = & y_t - 0{,}2y_t + 0{,}3y_t & = & 1{,}1y_t \end{array}$$

- Matriziell:

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 1{,}1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$$

- Forderung: Zeitliches Verhältnis von Männern und Frauen soll konstant bleiben
- Also:

$$x_{t+1} = \lambda x_t \iff y_{t+1} = \lambda y_t \qquad (\lambda \in \mathbb{R}_+),$$

- Dieser Fall beschreibt einen gleichförmigen Wachstums- ($\lambda > 1$) beziehungsweise Schrumpfungsprozess ($\lambda < 1$)
- Matriziell:

$$\lambda z = Az \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 1{,}1 \end{pmatrix}, \; z = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+$$

- Lösung?

Definition

David Hilbert
(1862 – 1943)

- Gegeben: $n \times n$-Matrix A.
- Ist nun für eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ und einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq o$
- lineare Gleichungssystem $Ax = \lambda x$ erfüllt, so heißt λ reeller Eigenwert zu A und
- x reeller Eigenvektor zum Eigenwert λ.
- Insgesamt: Eigenwertproblem der Matrix A.

Damit

- $Ax = \lambda x \iff Ax - \lambda x = Ax - \lambda E x = (A - \lambda E)x = o$
- Satz: Das LGS $Ax = \lambda x$ hat genau dann eine Lösung $x \neq o$, wenn gilt:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren

- Jedes λ, das $\det(A - \lambda E) = 0$ löst ist ein Eigenwert von A.
- Anschließend: Für jedes erhaltene λ Lösen des Gleichungssystems

$$(A - \lambda E)x = o \quad \text{mit} \quad x \neq o$$

- Damit hat man für jedes λ mindestens einen reellen Eigenvektor x.
- Satz: Mit $x \neq o$ ist auch jeder Vektor rx $(r \in \mathbb{R},\ r \neq 0)$ Eigenvektor zum Eigenwert λ von A.

Beispiele

- $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 1{,}1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}65 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

  $D = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Sätze über Eigenwertprobleme

- Gegeben: A ist eine reelle, symmetrische $n \times n$-Matrix
- Es gilt: Die Eigenwerte sind alle reell und nicht notwendigerweise verschieden und
- ist der Rang von A gleich $k \leqslant n$, so ist $\lambda = 0$ ein $(n-k)$-facher Eigenwert
- Zu den reellen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ existieren genau n reelle, linear unabhängige Eigenvektoren $x^1, \dots, x^n$
- Diese Eigenvektoren kann man so wählen, dass $X = (x^1, \dots, x^n)$ orthogonale Matrix wird, also $XX^T = E$
- Gegeben zusätzlich: $L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ die Diagonalmatrix der Eigenwerte von A und $A^m = A \cdot \ldots \cdot A$ mit $m \in \mathbb{N}$
- Dann gilt: $L = X^T A X$ und $A = XLX^T$
- außerdem gilt: A^m besitzt die Eigenwerte $\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m$