Wirtschafts- und Finanzmathematik

für Betriebswirtschaft und International Management

Wintersemester 2017/18

04.10.2017	Einführung, R, Grundlagen	1
11.10.2017	Grundlagen, Aussagen	2
18.10.2017	Aussagen	3
25.10.2017	Mengen, Folgen, Reihen	4
01.11.2017	Allerheiligen	
08.11.2017	Reelle Funktionen einer Variablen, Stetigkeit	5
15.11.2017	Differentialrechnung	6
22.11.2017	Differentialrechnung	7
29.11.2017	Integration	8
06.12.2017	Finanzmathematik	9
13.12.2017	Matrizen, Vektoren, Lineare Gleichungssysteme	10
20.12.2017	Determinanten, Eigenwerte	11
29.12.2017	Weihnachten	
05.01.2018	Weihnachten	
10.01.2018	Puffer, Wiederholung	12
19.01.2018	Beginn der Prüfungszeit	

Prof. Dr. Stefan Etschberger

Vorlesungsbegleitende Unterlagen

- Arbeitsmaterial: Foliensatz, Aufgabenskript, Mitschrift auf Wunsch
- Bücher (unterstützend):

Arens, Tilo, Frank Hettlich, Christian Karpfinger, Ulrich Kockelkorn, Klaus Lichtenegger und Hellmuth Stachel (2015). Mathematik. 3. Aufl. Springer Spektrum.

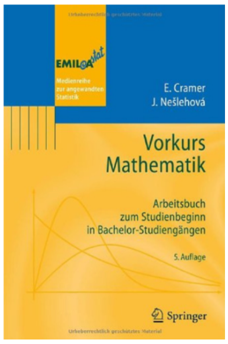
Cramer, Erhard und Johanna Nešlehová (2015). Vorkurs Mathematik: Arbeitsbuch zum Studienbeginn in Bachelor-Studiengängen. 6. Aufl. Springer Spektrum.

Opitz, Otto, Stefan Etschberger, Wolfgang R. Burkart und Robert Klein (2017). Mathematik. München: De Gruyter Oldenbourg.

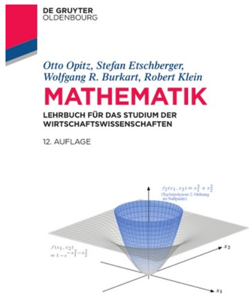
Purkert, Walter (2014). Brückenkurs Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. 8. Aufl. Springer Gabler.

Tietze, Jürgen (2013). Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik. 17. Aufl. Springer Spektrum.

Tietze, Jürgen (2015). Einführung in die Finanzmathematik. 12. Aufl. Springer Spektrum.



`http://goo.gl/qHwN7X`
(als E-Book innerhalb des Hochschulnetzwerks kostenlos)



`https://goo.gl/uajWmQ`
(ab Mitte Oktober 2017)

Prüfung

Klausur:

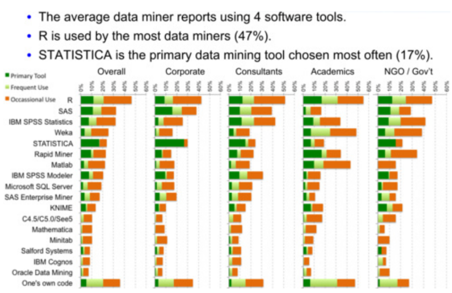
- Klausur am Ende des Semesters
- Bearbeitungszeit: 90 Minuten
- Erreichbare Punktzahl: 90
- Aufgaben mit R sind Prüfungsbestandteil
- Hilfsmittel:
  - Schreibzeug,
  - Taschenrechner, der nicht 70! berechnen kann,
  - ein Blatt (DIN-A4, vorne und hinten beschrieben) mit handgeschriebenen Notizen (keine Kopien oder Ausdrucke)

Gliederung

Was ist R und warum sollte man es benutzen?

- R ist ein freies Softwarepaket zu Mathematik, Statistik und Datenanalyse
- R ist sehr mächtig und weit verbreitet in Wissenschaft und Industrie (sogar von mehr Leuten benutzt als z.B. SPSS)
- Ursprung von R: 1993 an der Universität Auckland von Ross Ihaka and Robert Gentleman entwickelt
- Seitdem: Viele Leute haben R verbessert mit tausenden von Paketen für viele Anwendungen
- Nachteil (auf den ersten Blick): Kein point und click tool
- Großer Vorteil (auf den zweiten Blick): Kein point und click tool

graphics source: `http://goo.gl/W70kms`



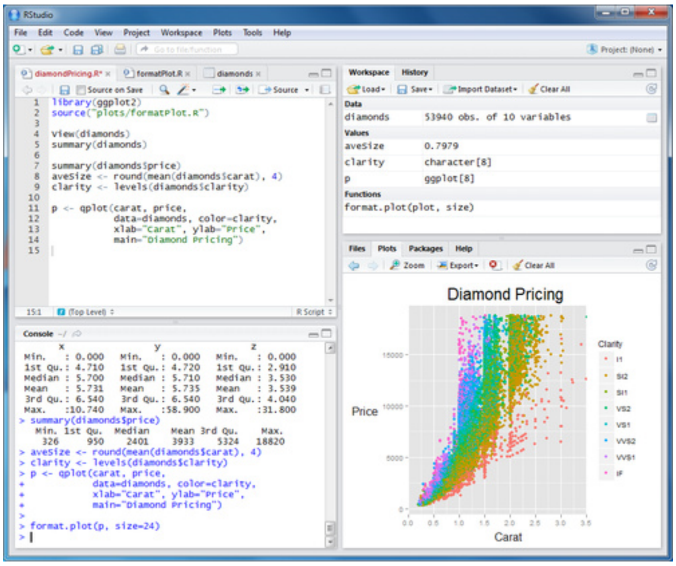
source: `http://goo.gl/axhGhh`

Download: `R-project.org`

Was ist RStudio?

- RStudio ist ein Integrated Development Environment (IDE) um R leichter benutzen zu können.
- Gibt's für OSX, Linux und Windows
- Ist auch frei
- Trotzdem: Sie müssen Kommandos schreiben
- Aber: RStudio unterstützt Sie dabei
- Download: `RStudio.com`

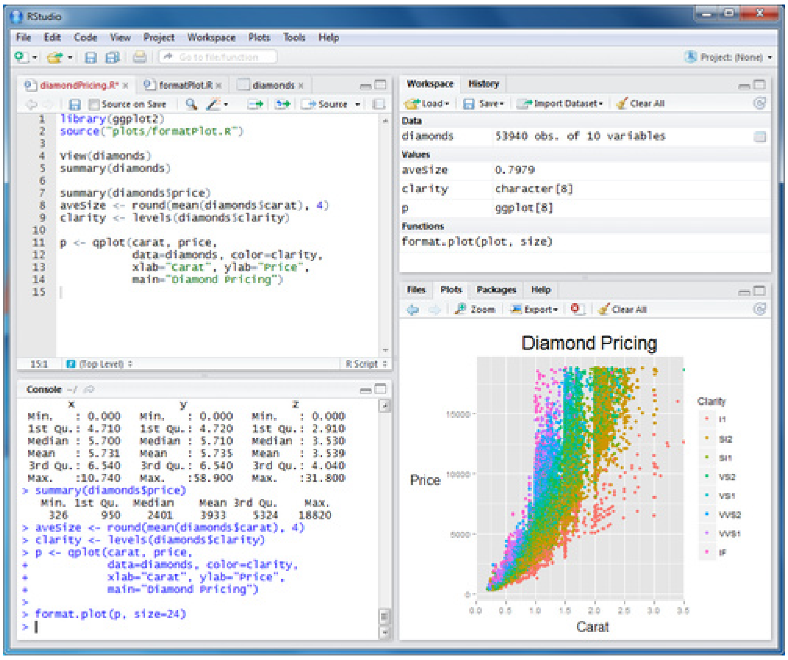
Free & Open-Source IDE for R



Erste Schritte

RStudio Kennenlernen

- Code
- Console
- Workspace
- History
- Files
- Plots
- Packages
- Help
- Auto-Completion
- Data Import



Erste Schritte in R

```r
# --------------------
# R als Taschenrechner
# --------------------
1 + 1
```

```
## [1] 2
```

```r
0.2 * 4 + 1 # Dezimaltrenner ".", Punkt vor Strich gilt
```

```
## [1] 1.8
```

```r
(3 - 2/5)^2 # runde Klammern zum Gruppieren, Potenzen mit "^"
```

```
## [1] 6.76
```

```r
x = 2^10    # Ergebnisse in Variablen abgespeichert
x           # und anschließend weiterverwendet
```

```
## [1] 1024
```

```r
x - 1
```

```
## [1] 1023
```

```r
f = function(x) {x^2 + 3*x - 5} # Funktionsterm
f(0)                            # ein Funktionswert
```

```
## [1] -5
```

```r
f(-1:3)                         # mehrere Funktionswerte
```

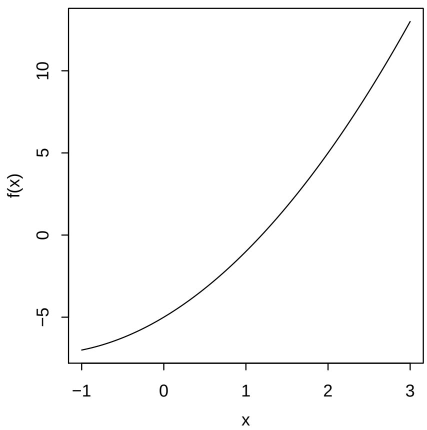
```
## [1] -7 -5 -1  5 13
```

Erste Schritte in R

```r
x = seq(from=-1, to=3, by=0.5) # x-Werte
data.frame(x, f(x))            # Wertetabelle
```

```
##      x  f.x.
## 1 -1.0 -7.00
## 2 -0.5 -6.25
## 3  0.0 -5.00
## 4  0.5 -3.25
## 5  1.0 -1.00
## 6  1.5  1.75
## 7  2.0  5.00
## 8  2.5  8.75
## 9  3.0 13.00
```

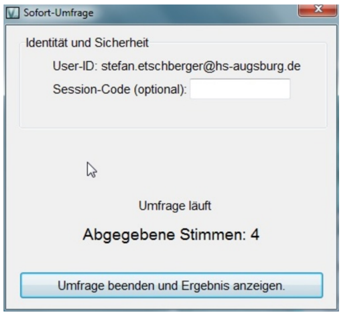
```r
curve(f, from = -1, to = 3)    # Funktionsgraph
```



EduVote

Umfragen in Vorlesung mit EduVote:

- System zur Abstimmung im Hörsaal
- App herunterladen oder direkt benutzen unter eduvote.de
- User-Id: `Etschberger`, kein Session-Code



Gliederung

1. Grundlegende Bausteine
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differentialrechnung
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra

Opitz u.a., 2017, Kapitel 1.1–1.3, 1.5, 1.6

1. Grundlegende Bausteine
   - Reelle Zahlen
   - Ganzzahlige Potenzen
   - Algebraische Umformungen
   - Brüche
   - Nichtganzzahlige Potenzen
   - Logarithmen
   - Notation von Summen

Zahlen

„Vernünftige“ Zahlen

- Natürliche Zahlen: $\mathbb{N}$
- Ganze Zahlen; $\mathbb{Z}$
- Rationale Zahlen: $\mathbb{Q}$
- Rationale Zahlen liegen unendlich dicht auf dem Zahlenstrahl

Aber

- Aber: Lösungen von Gleichungen wie

$$x^2 = 2$$

  haben keine rationale Lösung
- Folge: Es gibt auch irrationale Zahlen: Z.B. $\sqrt{2}$

Dezimaldarstellung rationaler Zahlen

Zahldarstellung über Vielfache von 10

- Die meisten Leute schreiben Zahlen heute im Dezimalsystem
- Damit möglich: Schreiben jeder natürlichen Zahl mit Kombinationen der Ziffern $0, 1, \ldots, 9$
- z.B.: $2009 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$
- Mit Dezimalkomma: Schreiben rationaler Zahlen möglich
- z.B.: $2{,}36 = 2 \cdot 10^0 + 3 \cdot \frac{1}{10^1} + 6 \cdot \frac{1}{10^2}$ (endlicher Dezimalbruch)
- z.B.: $\frac{10}{3} = 3{,}333\ldots = 3 + 3 \cdot \frac{1}{10^1} + 3 \cdot \frac{1}{10^2} + 3 \cdot \frac{1}{10^3} + \ldots$ (unendlicher Dezimalbruch)
- Jede rationale Zahl kann man über einen periodischen Dezimalbruch darstellen

Definition reeller Zahlen

- Eine reelle Zahl hat die Form

$$x = m, a_1 a_2 a_3 \ldots$$

- Dabei: m: Ganze Zahl
- und a_i (mit $i = 1, 2, \ldots$) ist unendliche Folge von Ziffern von 0 bis 9
- Damit: Nichtperiodische Dezimalbrüche heißen irrationale Zahlen
- Beispiele:

$$\sqrt{2}, \quad -\sqrt{17}, \quad \pi, \quad 0{,}1121121112\ldots$$

- Rechenoperationen $+, -, \cdot, :$ mit reellen Zahlen ergeben wieder reelle Zahlen
- Einzige Ausnahme: $\frac{p}{0}$ ist keine reelle Zahl

Ganzzahlige Potenzen

- Abkürzung: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$ oder $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$
- Allgemein:

$$a^n = a \cdot a \cdot \ldots a$$

- Rechenregeln:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

- Achtung: im allgemeinen

$$(a+b)^r \neq a^r + b^r$$

Anwendungsbeispiel für Potenzen

Zinseszinsen

- Anlage von 1000 € auf Bankkonto
- Verzinsung jeweils am Jahresende 2,5 %
- Zinsen nach einem Jahr: $1000 \cdot 2{,}5\ \% = 25$
- Kontostand am Jahresende:

$$1000 + 1000 \cdot 2{,}5\ \% = 1000 \cdot (1 + 0{,}025) = 1000 \cdot 1{,}025$$

- Kontostand am Ende des zweiten Jahres:

$$\begin{aligned} &(1000 \cdot 1{,}025) + (1000 \cdot 1{,}025) \cdot 0{,}025 \\ &= 1000 \cdot 1{,}025 \cdot (1 + 0{,}025) \\ &= 1000 \cdot 1{,}025 \cdot 1{,}025 = 1000 \cdot 1{,}025^2 \end{aligned}$$

- Allgemein: Kontostand ist bei Anfangskapital K und einem Zinssatz von i nach n Jahren

$$\boxed{K_n = K \cdot (1 + i)^n}$$

Wichtige Rechenregeln

Es gilt für beliebige Zahlen a, b, c:

1. $a + b = b + a$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. $a + 0 = a$
4. $a + (-a) = 0$
5. $ab = ba$
6. $(ab)c = a(bc)$
7. $1 \cdot a = a$
8. $aa^{-1} = 1$ (für $a \neq 0$)
9. $(-a)b = a(-b) = -ab$
10. $(-a)(-b) = ab$
11. $a(b + c) = ab + ac$
12. $(a + b)c = ac + bc$

Einfache Algebra

Algebraische Ausdrücke

- Beispiel für einen algebraischen Ausdruck:

$$4x^2y^2 + 7y^4x - 9xy + 11xy^4$$

- Die einzelnen Summanden ($4x^2y^2$, $-9xy$, usw.) heißen Terme des Ausdrucks
- Faktoren vor den Buchstaben ($4,\ 7,\ -9,\ 11$): Koeffizienten
- Terme, die sich maximal durch Koeffizienten unterscheiden, genannt Koeffizienten von der gleichen Art, können zusammengefasst werden:

$$7y^4x + 11xy^4 = 18xy^4$$

Binomische Formeln

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Faktorisieren

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2017

Primfaktorzerlegung

- Zahlen können multiplikativ in Primfaktoren zerlegt werden,
- Beispiel

$$64 = 8 \cdot 8 \quad \text{oder} \quad 1848 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$$

Faktorisierung algebraischer Ausdrücke

- Analog bei algebraischen Ausdrücken:
  Zerlegung in irreduzible Faktoren
- Beispiele:

$$5a^2b^3 - 15ab^2 = 5 \cdot a \cdot b^2 \cdot (ab - 3)$$

$$16a^4b^2 - 9b^4 = b^2 \cdot \left(4a^2 - 3b\right) \cdot \left(4a^2 + 3b\right)$$

1. Grundlagen
1.1. Reelle Zahlen
1.2. Ganzzahlige Potenzen
1.3. Algebraische Umformungen
1.4. Brüche
1.5. Nichtganzzahlige Potenzen
1.6. Logarithmen
1.7. Notation von Summen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra

Brüche

- Division zweier Zahlen ($a,\ b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$) kann durch Bruch geschrieben werden

$$a : b = \frac{a}{b} = a/b$$

- Rechenregeln ($a,\ b,\ c\ \in \mathbb{R}$):

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b} \quad (b, c \neq 0)$$

$$\frac{-a}{-b} = \frac{(-a)\cdot(-1)}{(-b)\cdot(-1)} = \frac{a}{b}$$

$$-\frac{a}{b} = (-1)\frac{a}{b} = \frac{(-1)a}{b} = \frac{-a}{b}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$$

$$a + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$$

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Quadratwurzel

- Potenz mit a^x, wenn $a \geqslant 0$ und $x = 1/2$: Quadratwurzel
- Schreibweise:

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \qquad \text{wenn } a \geqslant 0$$

- Rechenregeln für $a \neq 0$ und $b > 0$:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

- Achtung: Im allgemeinen:

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

N-te Wurzeln

- Problem: Was bedeutet z.B. $5^{\frac{1}{3}}$?
- Damit Rechenregeln gültig bleiben: $5^{\frac{1}{3}}$ ist Lösung der Gleichung $x^3 = 5$
- Also Allgemein ($a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$):

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^1 = a$$

- Schreibweise:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

- Allgemeine rationale Exponenten ($a \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$):

$$a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

Logarithmen

- Wie löst man die Gleichung $a^x = b$ nach x auf? (dabei soll gelten $a, b > 0$ und $a \neq 1$)
- Neues Symbol: Der Logarithmus von b zur Basis a:

$$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a b$$

- Beobachtungen:
  - $\log_a a = 1$
  - $\log_a 1 = 0$
  - $\log_a (a^n) = n$
- Rechenregeln:

$$\log_a (c \cdot d) = \log_a c + \log_a d$$

$$\log_a \frac{c}{d} = \log_a c - \log_a d$$

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

Logarithmen

Spezielle Logarithmen:

- $\log_2 x = \operatorname{ld} x$ Logarithmus dualis
- $\log_{10} x = \log x$ Dekadischer Logarithmus
- $\log_e x = \ln x$ Logarithmus naturalis

Umrechnung von Basen

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Beispiel

- Nach wieviel Jahren verdoppelt sich ein Anfangskapital K mit einem jährlichen Zins von 5%?
- Lösung:

$$\begin{aligned} & 2K = K \cdot (1 + 5\%)^n = K \cdot 1{,}05^n \\ \Leftrightarrow\ & 1{,}05^n = 2 \\ \Leftrightarrow\ & n = \log_{1{,}05} 2 = \frac{\ln 2}{\ln 1{,}05} \approx 14{,}2 \end{aligned}$$

Summenzeichen

- Oft sinnvoll: Abkürzen von längeren Summen durch das Summenzeichen $\sum$ (Großes griechisches Sigma)
- Beispiel: Summe von 6 durchnumerierten Zahlen:

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 = \sum_{i=1}^{6} N_i$$

Sprechweise: „Summe von i gleich 1 bis 6 über N_i"

- Obere und untere Summationsgrenze kann variieren, z.B.

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = a_p + a_{p+1} + \ldots + a_q$$

- Auch konkrete Berechnungsvorschriften sind möglich, z.B.

$$\sum_{i=3}^{8} i^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2$$

Summenzeichen

Rechenregeln für das Summenzeichen

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad \text{Additivität}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \text{Homogenität}$$

- Damit leicht zu zeigen (Setze $\mu_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$):

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - \mu_x) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - \mu_x)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) - n \cdot \mu_x^2$$

Produktzeichen

- Analog zum Summenzeichen:
  Das Produktzeichen $\prod$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot$$

- Zum Beispiel:

$$\prod_{i=1}^{2}\left(x + (-1)^i\right) = (x-1)(x+1)$$

- Spezielle Abkürzung:

$$\prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n! \qquad \text{„n Fakultät“}$$

Binomialkoeffizient

- Man definiert den Binomialkoeffizienten als:

$$\binom{m}{k} = \frac{\prod\limits_{i=(m-k+1)}^{m} i}{\prod\limits_{j=1}^{k} j} = \frac{m!}{k! \cdot (m-k)!}$$

- Wobei $0! = 1$ gesetzt wird. Also: $\binom{m}{0} = 1$
- Beispiel:

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$$

- Rechenregeln:

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k} \qquad \text{und} \qquad \binom{m+1}{k+1} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k+1}$$

Binomische Formel

- Newtons binomische Formel

$$(a+b)^m = \binom{m}{0} a^m + \binom{m}{1} a^{m-1} b + \cdots + \binom{m}{m-1} a b^{m-1} + \binom{m}{m} b^m$$

- Kurzform:

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k$$

- Zum Beispiel:

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Doppelsummen

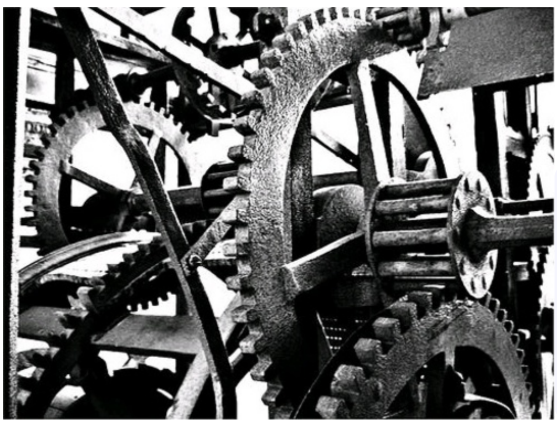
- Beispielsituation: Daten in Tabellenform in n Spalten und m Zeilen
- Einzelne Einträge: a_{ij} mit $i \in 1, \ldots, m$ und $j \in 1, \ldots, n$
- Summe über alle Zahlen mit Doppelsummen:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1} + \sum_{i=1}^{m} a_{i2} + \ldots + \sum_{i=1}^{m} a_{in} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \right)$$

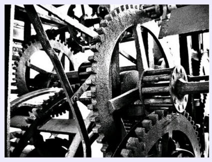
- Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

Gliederung



Opitz u.a., 2017, Kapitel 4, 5



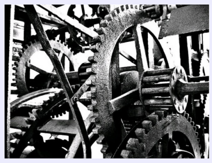
Warum beschäftigen wir uns mit der Aussagenlogik?

- zahlreiche „Aussagen“ aus der Vorlesung erforden grundlegendes Verständnis der Aussagenlogik
- Grundlage der mathematischen Beweisführung
- Hilfreich zum Erlernen von Programmiersprachen

Wesentliche Lernziele

- Kenntniss der relevanten Begriffe wie Definition, Axiom, Satz und Beweis
- Verständnis der wesentlichen aussagenlogischen Operatoren
- Auswertung logischer Aussagen hinsichtlich der Eigenschaften „wahr“ oder „falsch“
- Beherrschung grundlegender Beweistechniken wie dem direkten und indirekten Beweis sowie der vollständigen Induktion

Beispiel

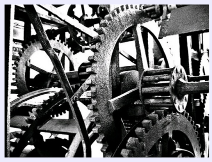


Aussagen eines Politikers zur Wahl

- Die Vollbeschäftigung wird erhalten oder die Steuern dürfen nicht erhöht werden.
- Wenn sich Politiker um die Bevölkerung kümmern, müssen die Steuern angehoben werden.
- Die Politiker kümmern sich um die Bevölkerung oder die Vollbeschäftigung kann nicht erhalten werden.
- Es stimmt nicht, dass die Erhaltung der Vollbeschäftigung eine Steuererhöhung zur Folge haben muss.

Hat sich der Politiker widersprochen?

Begriffe



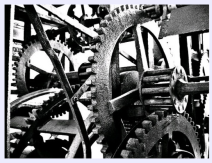
- Axiom: Grundsachverhalt als Ausgangspunkt, wird nicht bewiesen
- Definition: Sachverhalt, wird durch neuen Begriff beschrieben, bezieht sich auf bereits Definiertes oder auf Axiome
- Aussage (math. Satz): Formulierung auf Basis bisherigen Wissens, wird als wahr oder falsch identifiziert.
- Aussagenverknüpfungen: Negation ($\overline{A}$), Konjunktion ($A \wedge B$), Disjunktion ($A \vee B$), Implikation ($A \Rightarrow B$), Äquivalenz ($A \Leftrightarrow B$)
- Tautologie: Verknüpfte, stets wahre Aussage
- Kontradiktion: Verknüpfte, stets falsche Aussage
- Allaussage:

$$A(1) \wedge A(2) \ldots \quad = \quad \bigwedge_x A(x) \text{ (für } x = 1,2,\ldots) \quad = \quad \forall\, x: \; A(x)$$

- Existenzaussage:

$$A(1) \vee A(2) \ldots \quad = \quad \bigvee_x A(x) \text{ (für } x = 1,2,\ldots) \quad = \quad \exists\, x: \; A(x)$$

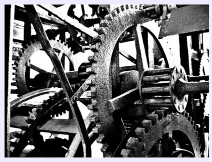
Aussagenverknüpfungen



Wahrheitswerte aller möglichen Verknüpfungen der Aussagen A und B

A	w	w	f	f	
B	w	f	w	f	
1)	w	w	w	w	Verknüpfung ist stets wahr
2)	f	f	f	f	Verknüpfung ist stets falsch
2)	f	f	f	f	Verknüpfung ist stets falsch
3)	w	w	w	f	Disjunktion $A \vee B$
4)	w	w	f	w	Implikation $B \Rightarrow A$
5)	w	f	w	w	Implikation $A \Rightarrow B$
6)	f	w	w	w	Negierte Konjunktion $\overline{A \wedge B}$
7)	w	f	f	f	Konjunktion $A \wedge B$
8)	f	w	f	f	Negierte Implikation $\overline{A \Rightarrow B}$
9)	f	f	w	f	Negierte Implikation $\overline{B \Rightarrow A}$
10)	f	f	f	w	Negierte Disjunktion $\overline{A \vee B}$
11)	w	f	f	w	Äquivalenz $A \iff B$
12)	f	w	w	f	Negierte Äquivalenz $\overline{A \iff B}$
13)	f	w	f	w	Negation $\overline{B}$
14)	f	f	w	w	Negation $\overline{A}$

Beispiel



Gegeben sind Aussagen über den Marktanteil eines weltweit vertriebenen Markterzeugnisses P in zwei Handelszonen:

A: *„Das Produkt P hat in der Europäischen Union (EU) einen Marktanteil von mehr als 25 %“*

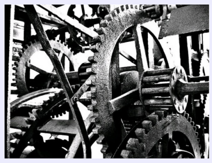
B: *„Das Produkt P hat in Nordamerika (NA) einen Marktanteil von mehr als 25 %“*

Abgeleitete Aussagen:

- $\overline{A}$: Der Marktanteil von P in der EU beträgt höchstens 25%.
- $A \wedge B$: Der Marktanteil von P beträgt in der EU und in NA mehr als 25%.
- $A \vee B$: Der Marktanteil von P beträgt in der EU oder in NA mehr als 25%.
- $A \Rightarrow B$: Wenn der Marktanteil von P in der EU mehr als 25% beträgt, so liegt er auch in NA über 25 %.
- $A \Leftrightarrow B$: der Marktanteil von P in der EU beträgt genau dann mehr als 25%, wenn er auch in NA über 25 % liegt.

Beispiel

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2017



Ausgangspunkt: Aussage A mit

A: *„Der Gewinn einer Unternehmung ist gleich dem Umsatz abzüglich der Kosten.“*

Daraus abgeleitet:

A_1: Die Kosten wachsen.

A_2: Der Umsatz wächst.

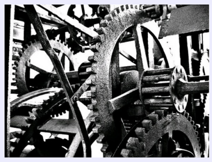
A_3: Der Gewinn wächst.

Dann ist die folgende Implikation wahr:

- $\left(\overline{A_1} \wedge A_2\right) \Rightarrow A_3$: *„Wenn der Umsatz bei nicht steigenden Kosten wächst, so wächst auch der Gewinn.“*

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
2.1. Einführung
2.2. Aussagenverknüpfungen
2.3. Argumentieren
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra

Argumentationstechniken



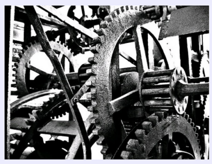
- Direkter Beweis einer Implikation $A \Rightarrow B$ (analog Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$):

$$A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow B$$

- Beweis von $A \not\Rightarrow B$ durch Gegenbeispiel
- Beweisprinzip der vollständigen Induktion für Allaussagen
  - Induktionsanfang: Beweis der Aussage für kleinstmöglichen Wert von n (oft $n = 0$ oder $n = 1$)
  - Induktionsvoraussetzung: Annahme, dass die Aussage für n wahr ist
  - Induktionsschluss: Beweis (unter Ausnutzung der Induktionsvoraussetzung), dass die Aussage auch für $n + 1$ gültig ist
- Beispiel (vollst. Induktion): $A(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$; $n \in \mathbb{N}$
  - Ind.-Anfang: $n = 1$: $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$
  - Ind.-Schluss:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

Beispiel: Beweis durch Gegenbeispiel



- Ausgangspunkt: Die ökonomische Gleichung

$$\text{Gewinn} = \text{Umsatz} - \text{Kosten}$$

- Daraus:

  A: Für zwei Produkte stimmen Umsätze und Kosten überein
  B: Für zwei Produkte sind die Gewinne gleich

- Damit gilt: $A \Rightarrow B$, andererseits aber $B \not\Rightarrow A$.

Gegenbeispiel zur Bestätigung von $B \not\Rightarrow A$:

- Für zwei Produkte gegeben:
  - Umsätze $u_1 = 2, u_2 = 5$
  - Kosten $c_1 = 1, c_2 = 4$
- Dann ist $g_1 = u_1 - c_1 = 2 - 1 = 1 = u_2 - c_2 = 5 - 4 = g_2$, aber $u_1 \neq u_2$, $c_1 \neq c_2$.

Gliederung

Opitz u.a., 2017, Kapitel 6, 7.1, 7.3, 7.4

Warum Mengen?

- Mengen sind natürliche Betrachtungsgegenstände in den Wirtschaftswissenschaften:
  - Kundensegmente
  - Produktgruppen
  - Handlungsalternativen
  - etc.
- Mengen erlauben die effiziente Gruppierung von Objekten sowie die Repräsentation ihrer Eigenschaften und Beziehungen
- mengenorientierte Schreibweisen bilden die Grundlage der Darstellung zahlreicher mathematischer Methoden wie z.B. im Operations Research oder in Methoden der Marktforschung

Wesentliche Lernziele

- Verstehen des Begriffs Menge
- Fähigkeit Mengen darzustellen und Operationen mit ihnen durchzuführen
- Beherrschen der grundlegenden kombinatorischen Methoden, die Elemente einer Menge anzuordnen bzw. eine Teilmenge davon auszuwählen
- Fähigkeit Beziehungen zwischen Mengenelementen darstellen zu können

Grundbegriffe

- Menge A: Gesamtheit bestimmter unterscheidbarer Objekte (Elemente)
- Es kann immer entschieden werden:

$$a \in A \qquad \text{oder} \qquad a \notin A$$

- Mengendefinition durch Aufzählen ($A = \{a, b, c, \ldots\}$)
- oder Beschreibung der Elemente; zum Beispiel $B = \{b : b \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad 0 < b < 10\}$
- Veranschaulichung durch Venn-Diagramme:

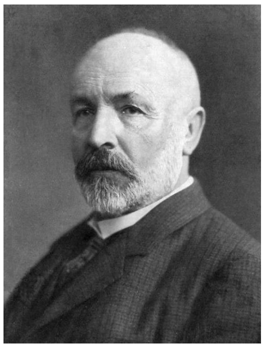
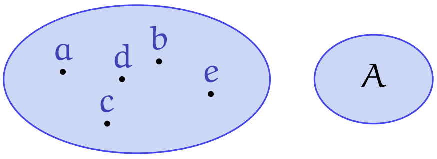


Abbildung 6.1: *Georg Cantor (1845-1918)*

Opitz u. a., (2017, S. 55)



Venndiagramme der Menge $\{a, b, c, d, e\}$ (links) und der Menge A (rechts)

- Mächtigkeit einer Menge: Anzahl der Elemente einer Menge; Symbol: $|A|$
- Leere Menge: enthält keine Elemente; Symbole: $\emptyset \;=\; \{\}$

Paradoxa in naiver Mengenlehre

Antinomie von Betrand Russell (1872 - 1970)

- *„Der Barbier eines Dorfes rasiert genau alle Männer eines Dorfes, die sich nicht selber rasieren“*
- Unklar: Gehört der Barbier zur Menge der Selbstrasierer?

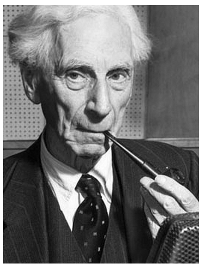


Abbildung 6.2: *Bertrand Russell (1872-1970)*

Opitz u. a., (2017, S. 55)

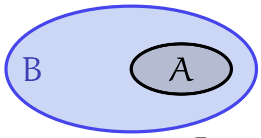
Problem der „naiven“ Mengenlehre

- Widersprüche (s.o.)!
- Lösung: Axiomatische Mengentheorie
- Erster Ansatz mit Axiomen: Georg Cantor
- verbreitet in moderner Mathe: Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre mit Auswahlaxiom (ZFC)
- Trotzdem hier im Kurs: Naiver Ansatz

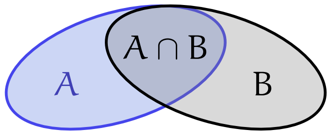
Relationen und Operationen zwischen Mengen

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
3.1. Grundlagen
3.2. Beziehungen
3.3. Relationen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra

- **Gleichheit**: $A = B \quad \Leftrightarrow \quad (a \in A \Leftrightarrow a \in B)$
- **Teilmenge**: $A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad (a \in A \Rightarrow a \in B)$
- **Echte Teilmenge**:
  $A \subsetneq B \;\Leftrightarrow\; (A \subseteq B \wedge A \neq B)$
- **Potenzmenge** $\mathcal{P}(A)$: Menge aller Teilmengen von A
- Bemerkung: $\emptyset$ ist Teilmenge jeder Menge



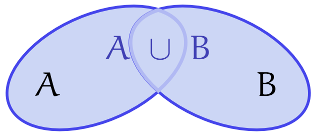
Teilmenge $A \subsetneq B$



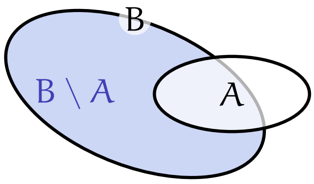
Durchschnittsmenge $A \cap B$

Mengenoperationen

- **Durchschnittsmenge**:
  $A \cap B = \{a : a \in A \wedge a \in B\}$
- **Vereinigungssmenge**:
  $A \cup B = \{a : a \in A \vee a \in B\}$
- **Differenzmenge**: $A \backslash B = \{a : a \in A \wedge a \notin B\}$
- **Komplementärmenge** (Vorauss. $A \subseteq B$):
  $\overline{A}_B = \{a : a \in B \wedge a \notin A\}$



Vereinigungsmenge $A \cup B$



Differenzmenge B ohne A

Beispiel: Skiclub „Buckelpiste“ (Opitz u. a., 2017, S. 64)

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
3.1. Grundlagen
3.2. Beziehungen
3.3. Relationen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra

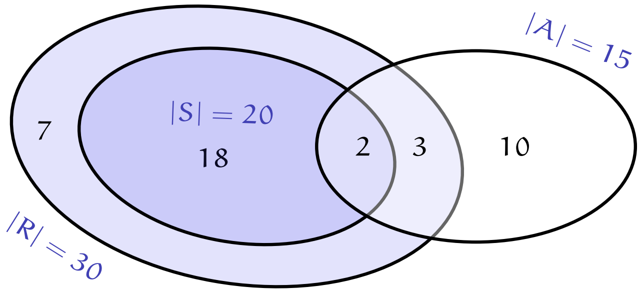
- Vereinsmeisterschaft in den Disziplinen Abfahrt (A), Slalom (S) und Riesenslalom (R)
- 40 Teilnehmer, davon 15 für Abfahrt, 20 für Slalom, 30 für Riesenslalom.
- Alle Slalomteilnehmer: Auch Riesenslalom.
- Zwei Teilnehmer: Alle drei Disziplinen

Damit gilt

$$
\begin{aligned}
|A| = 15\,,\ |S| &= 20\,,\\
|R| &= 30\,,\\
|R \cap S| &= 20\,,\\
|R \cup S| &= 30\,,\\
|R \setminus S| &= 10\,,\\
|A \cap S \cap R| &= |A \cap S| = 2\,,\\
|A \cup S \cup R| &= |A \cup R| = 40
\end{aligned}
$$

- Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
|A \cap R| &= |A| + |R| - |A \cup R|\\
&= 15 + 30 - 40 = 5\\
|A \cup S| &= |A| + |S| - |A \cap S|\\
&= 15 + 20 - 2 = 33\\
|(A \setminus R) \setminus S| &= |A \setminus R| = |A| - |A \cap R|\\
&= 15 - 5 = 10\\
|(R \setminus S) \setminus A| &= |R| - |R \cap A| - |R \cap S|\\
&\quad + |R \cap S \cap A|\\
&= 30 - 5 - 20 + 2 = 7
\end{aligned}
$$



Venndiagramm zum Beispiel

Relationen und Abbildungen

- Ausgangspunkt: Mengen A, B
- Daraus: Kombination von zwei Elementen (mit Reihenfolge): (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$
- Sprechweise für (a, b): Geordnetes Paar, Tupel
- Menge aller geordneten Paare von A und B (auch: kartesisches Produkt)

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

Opitz u. a., (2017, S. 65)

- $R \subseteq A \times B$ heißt (binäre) Relation von A in B
- Abbildung von A in B: Eine Vorschrift f, die jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ zuordnet

$$f : A \to B \quad \text{mit} \quad a \in A \mapsto f(a) = b \in B$$

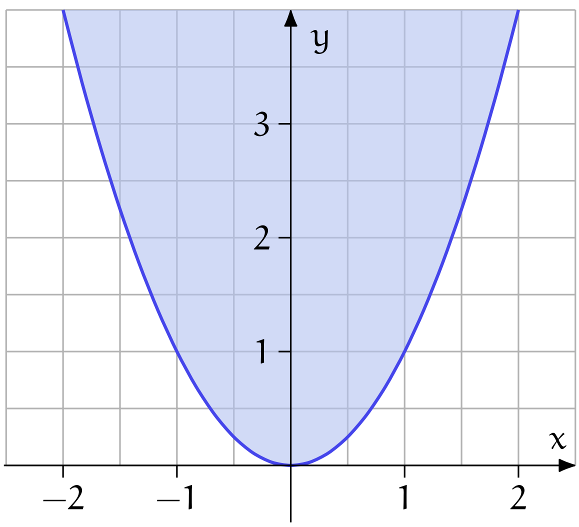
Beispiel: Relation

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
3.1. Grundlagen
3.2. Beziehungen
3.3. Relationen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra

- Gegeben: Menge $A \times B = \mathbb{R}^2$ und Relation $R \subseteq \mathbb{R}^2$ mit

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geqq x^2\}$$

- Damit: R enthält alle Zahlenpaare des $\mathbb{R}^2$, die oberhalb einer Parabel mit dem Scheitel im Nullpunkt liegen
- R ist keine Funktion



Graph der Relation
$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geqq x^2\}$

Beispiel: Relationen und Abbildungen

- $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ ist Menge von Tätigkeiten,
- die von einer Menge $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ von Angestellten zu erledigen sind.

Gegeben: Zuordnungsvorschriften

a_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$f_1(a_i)$		b_1	b_2		b_3	b_4
$f_2(a_i)$	b_1	b_2	b_2	b_2, b_3	b_3	b_4
$f_3(a_i)$	b_1	b_1	b_1	b_1	b_1	b_1
$f_4(a_i)$	b_1	b_3	b_2	b_2	b_3	b_4

Welches f_i ist eine Funktion?

Eigenschaften von Funktionen

Eine Funktion $f : D \to W$ heißt:

- surjektiv, wenn zu jedem $y \in W$ ein $x \in D$ mit $f(x) = y$ existiert,
- injektiv, wenn für alle $x, \tilde{x} \in D$ gilt $x \neq \tilde{x} \Rightarrow f(x) \neq f(\tilde{x})$,
- bijektiv, wenn f surjektiv und injektiv ist.

Beispiel

- Gegeben: $A = \{a_1, a_2, a_3\}, B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$

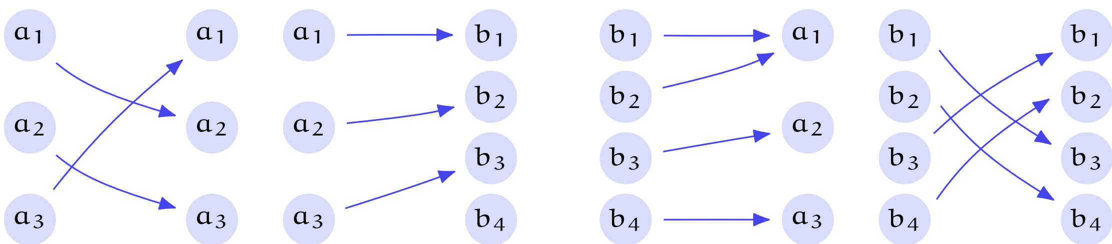
- Funktionen f_1, f_2:

$a \in A$	a_1	a_2	a_3
$f_1(a)$	a_2	a_3	a_1
$f_2(a)$	b_1	b_2	b_3

- Funktionen f_3, f_4:

$b \in B$	b_1	b_2	b_3	b_4
$f_3(b)$	a_1	a_1	a_2	a_3
$f_4(b)$	b_3	b_4	b_1	b_2

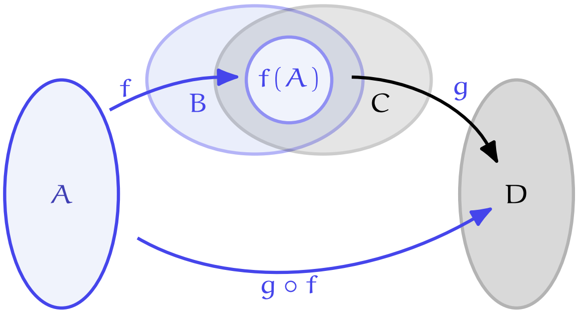
$f_1 : A \to A$ $f_2 : A \to B$ $f_3 : B \to A$ $f_4 : B \to B$



Die Funktionen f_1, f_4 sind bijektiv, f_2 ist injektiv, f_3 ist surjektiv.

Komposition von Funktionen

- Voraussetzung: Funktionen $f : D_f \to W_f$ und $g : D_g \to W_g$ und $f(D_f) \subseteq D_g$
- Zusammengesetzte Funktion: $g \circ f : D_f \to W_f$: Zuordnung des Werts $(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right)$ für alle $x \in D_f$



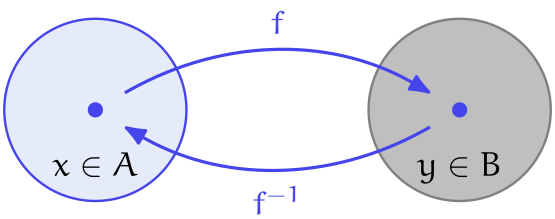
Komposition von f und g

Beispiel (Folie 69): Aus f_1, f_4 bijektiv, f_2 injektiv und f_3 surjektiv folgt

$f_1 \circ f_1 : A \to A$, $f_4 \circ f_4 : B \to B$	bijektiv
$f_2 \circ f_1 : A \to B$, $f_4 \circ f_2 : A \to B$	injektiv
$f_1 \circ f_3 : B \to A$, $f_3 \circ f_4 : B \to A$	surjektiv
$f_2 \circ f_3 : B \to B$, $f_3 \circ f_2 : A \to A$	weder surjektiv, noch injektiv

Wegen $A \neq B$ sind alle weiteren Kompositionen $f_1 \circ f_2$, $f_1 \circ f_4$, $f_2 \circ f_2$, $f_2 \circ f_4$, $f_3 \circ f_1$, $f_3 \circ f_3$, $f_4 \circ f_1$, $f_4 \circ f_3$ nicht möglich.

- Voraussetzung: bijektive Funktion $f : D \to W$ mit $D, W \subseteq \mathbb{R}$
- Inverse Funktion oder Umkehrabbildung: $f^{-1} : W \to D,\ y \mapsto f^{-1}(y)$, wobei y für alle $x \in D$ mit $y = f(x)$ zugeordnet wird
- Für (bijektive) Kompositionen gilt: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$



Umkehrabbildung f^{-1} von $f : A \to B$

Beispiel (Folie 69): Wir erhalten die inversen Abbildungen $f_1{}^{-1}$, $f_2{}^{-1} : B \to B$ mit den Wertetabellen:

$b \in B$	b_1	b_2	b_3	b_4
$f_1{}^{-1}(b)$	b_3	b_4	b_1	b_2
$f_2{}^{-1}(b)$	b_1	b_4	b_2	b_3

Ferner existieren die Kompositionen $f_1 \circ f_2$ und $(f_2 \circ f_1)$ sowie $(f_1 \circ f_2)^{-1} = f_2^{-1} \circ f_1^{-1}$ und $(f_2 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1}$ mit

$b \in B$	b_1	b_2	b_3	b_4
$(f_1 \circ f_2)(b)$	b_3	b_1	b_2	b_4
$(f_1 \circ f_2)^{-1}(b)$	b_2	b_3	b_1	b_4
$(f_2 \circ f_1)(b)$	b_4	b_2	b_1	b_3
$(f_2 \circ f_1)^{-1}(b)$	b_3	b_2	b_4	b_1

Grundlagentest Mengen!

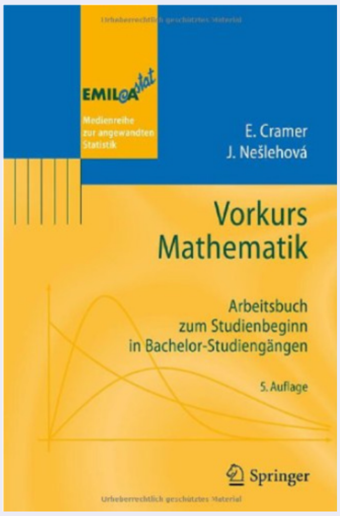
Testauswertung:

Ihr Ergebnis:

- 3 Antworten richtig: Mengenmäßig ist alles in Ordnung!
- 2 Antworten richtig: Rechnen Sie die Aufgaben 2.13-2.19 aus dem Buch!
- 1 Antwort richtig: Rechnen Sie die Aufgaben 2.7-2.19 aus dem Buch!
- Keine Antwort richtig: Rechnen Sie die Aufgaben 2.1-2.19 aus dem Buch!

Übungsmaterial

S. 64ff., Aufgaben 2.1 - 2.19 aus



http://goo.gl/qHwN7X

Gliederung

Opitz u.a., (2017, Kapitel 8)

4 Folgen und Reihen
- Eigenschaften und Beispiele
- Konvergenz und Grenzwert
- Reihen

Folgen und Reihen

Warum beschäftigen wir uns mit Folgen und Reihen?

- Analyse von Datensequenzen, insbesondere Modellierung diskreter, zeitlicher Entwicklungen (z.B. von Aktienkursen, Absatzmengen)
- Grundlage der Finanzmathematik (z.B. Zinseszinsrechnung, Tilgungsrechnung)
- wesentlich zum Verständnis der Konzepte der Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Wesentliche Lernziele:

- Verständnis der Begriffe Folgen und Reihen
- Fähigkeit Folgen und Reihen nach ihrer Art zu klassifizieren
- Kennenlernen typischer, insbesondere der Grenzwerteigenschaften von Folgen und Reihen
- Fähigkeit, diese Eigenschaften zu erkennen und nachzuweisen

Definition und Eigenschaften

Definition

- Eine Folge ist eine Abbildung $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$
- Schreibweise für Folgenglieder: $a(0), a(1), \ldots$ oder $a_0, a_1, \ldots$
- Schreibweise für Folge: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ oder (a_n)

Leonardo von Pisa
(ca. 1180 - 1250)

Eigenschaften: Eine Folge heißt

- endlich (unendlich), falls Anzahl der Folgenglieder endlich (unendlich) ist
- gesetzmäßig gebildet, falls Folgenglieder einem Bildungsgesetz folgen, zum Beispiel: $a_n = \frac{1}{n+1}$
- rekursiv definiert, falls zur Berechnung eines Folgengliedes frühere Werte nötig sind
  Beispiel: $a_0 = 0;\ a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n > 1$
  (Fibonacci-Folge)

Spezielle Folgen

- Arithmetische Folge: $(a_n): \ a_{n+1} - a_n = d \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$ mit $d \in \mathbb{R}$
- Geometrische Folge: $(a_n): \ \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$ mit $q \in \mathbb{R}$

Geometrische Folge: Beispiel Schachspiel

- Sissa ibn Dahir, der Erfinder des Schachspieles, darf sich vom indischen König Shihram eine Belohnung wünschen.
- Sein Wunsch: So viele Weizenkörner, wie man auf ein Schachbrett legen kann, wenn

1. Feld	:	$a_0 = 1$	Korn
2. Feld	:	$a_1 = 2$	Körner
3. Feld	:	$a_2 = 4$	Körner
4. Feld	:	$a_3 = 8$	Körner
		$\vdots$	
n. Feld	:	$a_{n-1} = 2 \cdot a_{n-2}$	Körner

Konvergenz und Grenzwert

- Fragen: Bleiben Folgenglieder ab einem gewissen n in einen kleinen Bereich um einen festen Wert?
- Und: Kann man diesen Bereich beliebig verkleinern?
- Definition:

$a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert oder Limes von (a_n) $\Leftrightarrow$

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, n(\epsilon) \quad \text{mit} \quad |a_n - a| < \epsilon \quad \forall\, n > n(\epsilon)$$

- Schreibweise für Grenzwert: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$
- Existiert dieser Grenzwert, heißt die Folge konvergent
- Ist der Grenzwert $a = 0$, heißt die Folge Nullfolge
- Existiert kein Grenzwert, heißt die Folge divergent

Beispiel zur Definition des Grenzwerts

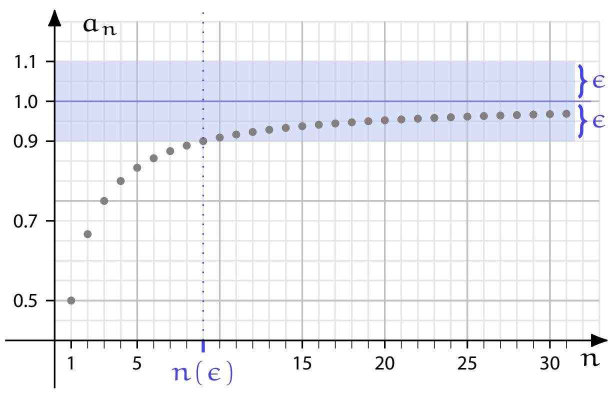
- Gegeben: $a_n = \frac{n}{n+1}$
- Vermutung: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = 1$
- Beweis: Wenn $a = 1$, dann folgt

$$|a_n - a| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\epsilon} < n + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\epsilon} - 1 < n$$



Folge (a_n) mit $n(\epsilon) = 9$ für $\epsilon = 0.1$.

- Also: Für jedes ϵ findet man ein $n(\epsilon)$, so dass die Grenzwertbedingung stimmt
- Zum Beispiel: Wähle $\epsilon = 0.1 \quad \Rightarrow \quad n > \frac{1}{\epsilon} - 1 = \frac{1}{0.1} - 1 = 10 - 1 = 9$

Rechenregeln für Grenzwerte

Gegeben:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = b$
- kurz: $(a_n) \to a$ und $(b_n) \to b$

Dann gilt:

- $(a_n + b_n) \to a + b$
- $(a_n - b_n) \to a - b$
- $(a_n \cdot b_n) \to a \cdot b$
- $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \to \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$
- $(a_n^c) \to a^c$
  $(a_n > 0,\ a > 0,\ c \in \mathbb{R})$
- $(c^{a_n}) \to c^a \quad (c > 0)$

Definition der Reihe

- Gegeben: (a_n) unendliche Folge in $\mathbb{R}$
- Dann heißt (s_n) mit

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

  eine unendliche Reihe.
- s_n heißt n-te Partialsumme
- Klar ist: Reihen sind spezielle Folgen

Beispiel:

- (a_n) geometrische Folge $\to$ (s_n) geometrische Reihe
- $s_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i$; mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$
- Offensichtlich gilt: $a_n = a_{n-1}q = a_{n-2}q^2 = \ldots = a_0 q^n$

$$\Rightarrow s_n = \sum_{i=0}^{n} a_0 q^i = a_0(1 + q + q^2 + \ldots + q^n) = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Geometrische Reihe: Beispiel Schachspiel

- Summe aller Körner auf Schachbrett:

$$s_n = \sum_{i=0}^{63} a_i = a_0 \frac{1-q^{64}}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-2^{64}}{1-2} \approx 1{,}84467 \cdot 10^{19}$$

- Das bedeutet:

100 Körner $\triangleq$ 1 g Weizen	$\longrightarrow$	$1{,}8 \cdot 10^{17}$ g
	$\longrightarrow$	$1{,}8 \cdot 10^{14}$ kg
	$\longrightarrow$	$1{,}8 \cdot 10^{11}$ t $= 180$ Mrd. t
1 Güterwagon $\triangleq$ 50 t Weizen	$\longrightarrow$	3,6 Mrd. Güterwagons
	$\longrightarrow$	36 Mrd. m langer Eisenbahnzug
	$\longrightarrow$	36 Mill. km

$\longrightarrow$ 100-fache Entfernung zwischen Erde und Mond

Konvergenzkriterien für Reihen

Gegeben: a_i Folge, $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

Divergenzkriterium

- Ist s_n konvergent $\Rightarrow$ a_i ist Nullfolge
- Also äquivalent dazu:

$$a_i \text{ ist keine Nullfolge} \quad \Rightarrow \quad s_n \text{ divergent}$$

Quotientenkriterium

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad s_n \text{ konvergent}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1 \quad \Rightarrow \quad s_n \text{ divergent}$$

- Bemerkung: Für $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1$ ist im Allgemeinen keine Aussage möglich
- Spezialfall geometrische Reihe:

$$\Rightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} = q \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q \quad \Rightarrow \begin{cases} q < 1 & \Rightarrow \quad s_n \text{ konvergent} \\ q \geqslant 1 & \Rightarrow \quad s_n \text{ divergent} \end{cases}$$

Gliederung

Opitz u.a., (2017, Kapitel 9, 10)

5 Reelle Funktionen
Grundbegriffe
Elementare Funktionen
Stetigkeit reeller Funktionen

Warum beschäftigen wir uns mit reellen Funktionen?

- allgemein: kompakte und präzise Beschreibung von Abhängigkeiten zwischen mehreren Faktoren
- speziell: Modellierung technischer und ökonomischer Systeme
- Basis für Analyse und Optimierung von Systemen / Prozessen

Wesentliche Lernziele

- Fähigkeit mit den wesentlichen Begriffen im Zusammenhang mit Funktionen umzugehen
- Kennenlernen der wichtigsten Klassen reeller Funktionen
- Beherrschen des Stetigkeitsbegriffs

Beispiel (Opitz u. a., 2017, Beispiel 9.1, S. 99)

- Für ein Produkt wird der monatliche Absatz erhoben. Über ein Jahr betrachtet erhält man Absatzwerte für 12 Zeitpunkte.
- Darstellung der Funktion $f : A \to B$ mit

$$A = \{1, \ldots, 12\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}:$$

durch die Wertetabelle

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(t)$	3	2	3	4	4	4	1	2	4	5	3	4

- graphisch:

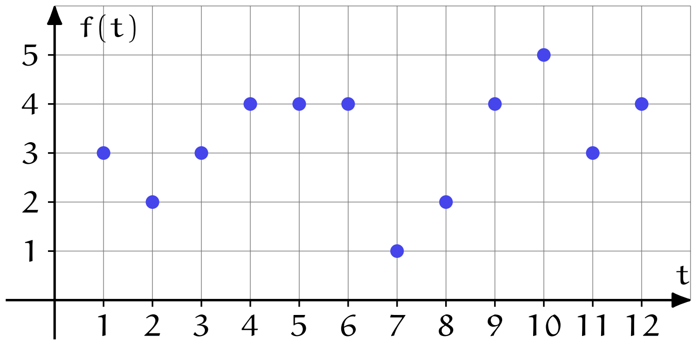


Abbildung: Graph der Funktion $f : A \to B$

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
5.1. Grundbegriffe
5.2. Elementare Funktionen
5.3. Stetigkeit
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra

Begriff reelle Funktion

Definition

- $f : D \to \mathbb{R}$ heißt reellwertige Abbildung mit Definitionsbereich D
- Mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt f reelle Funktion von n Variablen

Darstellung von Funktionen

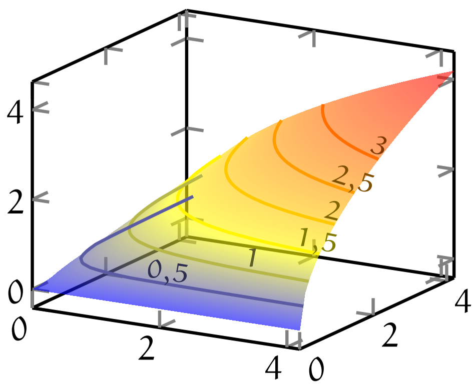
- Durch Funktionsgleichungen $f(x_1, \ldots, x_n) = y$
  - $x = (x_1, \ldots, x_n)$: unabhängige (exogene) Variablen
  - y: abhängige (endogene) Variablen
- Durch Wertetabellen
- Durch Graphen
  - Für $D \subseteq \mathbb{R}$: Darstellung im kartesischen Koordinatensystem
  - Für $D \subseteq \mathbb{R}^2$: 3-dimensionale Darstellung oder Niveaulinien $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
5.1. Grundbegriffe
5.2. Elementare Funktionen
5.3. Stetigkeit
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra

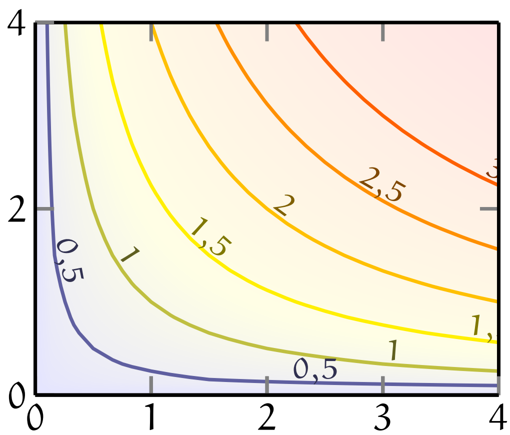
Cobb-Douglas-Funktion

- neoklassische Produktionsfunktion der Form
  $f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \ldots x_n^{a_n}$
- Beispiel für zwei Produktionsfaktoren
  $f(x_1, x_2) = 1 \cdot x_1^{1/2} \cdot x_2^{1/2} = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$

Dreidimensionale Darstellung



Niveaulinien
für $f(x_1, x_2) = c$ mit $c = 1/2, \ldots, 3$



Eigenschaften von Funktionen

Eine Funktion $f : D \to W$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $W \subseteq \mathbb{R}$ heißt:

- surjektiv, wenn zu jedem $y \in W$ ein $x \in D$ mit $f(x) = y$ existiert,
- injektiv, wenn für alle $x, \tilde{x} \in D$ gilt $x \neq \tilde{x} \Rightarrow f(x) \neq f(\tilde{x})$,
- bijektiv, wenn f surjektiv und injektiv ist.

Komposition von Funktionen

- Voraussetzung: Funktionen $f : D_f \to \mathbb{R}$ und $g : D_g \to \mathbb{R}$ mit $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f(D_f) \subseteq D_g \subseteq \mathbb{R}$
- Zusammengesetzte Funktion: $g \circ f : D_f \to \mathbb{R}$: Zuordnung des Werts $(g \circ f)(x) = g\,(f(x))$ für alle $x \in D_f$

Inverse Funktion / Umkehrfunktion

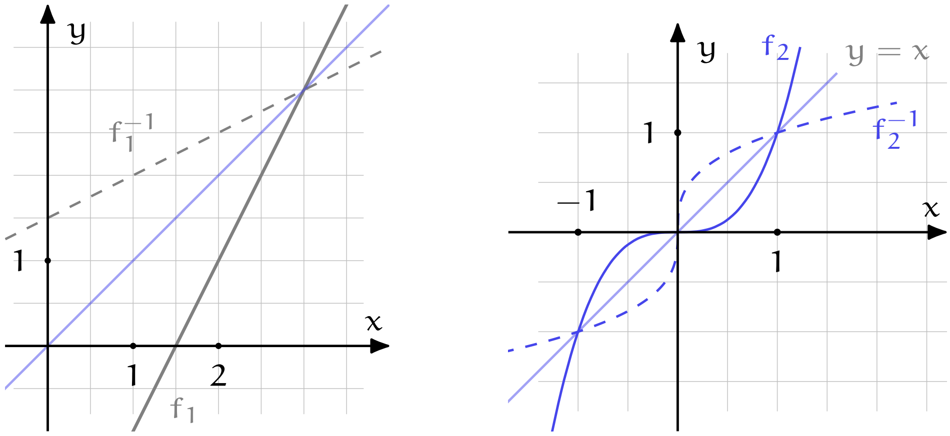
- Voraussetzung: bijektive Funktion $f : D \to W$ mit $D, W \subseteq \mathbb{R}$
- Inverse Funktion: $f^{-1} : W \to D,\ y \mapsto f^{-1}(y)$, wobei y für alle $x \in D$ mit $y = f(x)$ zugeordnet wird

Invertierung: Beispiel

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto f_1(x) = 2x - 3 = y$$
$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto f_2(x) = x^3 = y$$

Damit ebenfalls bijektiv: Inverse Abbildungen $f_1^{-1}, f_2^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$y \mapsto {f_1}^{-1}(y) = \tfrac{1}{2}(y+3) = x$$
$$y \mapsto {f_2}^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} = x$$



Graphen der Abbildungen f_1, f_2, ${f_1}^{-1}$, ${f_2}^{-1}$

Satz: Operationen zwischen Funktionen

- Gegeben: $f, g : D \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen mit identischem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$.
- Dann sind auch die folgenden Abbildungen relle Funktionen:

$$\begin{array}{lllll}
f+g: & D \to \mathbb{R} & \text{mit} & x \in D & \mapsto \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\
f-g: & D \to \mathbb{R} & \text{mit} & x \in D & \mapsto \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x) \\
f \cdot g: & D \to \mathbb{R} & \text{mit} & x \in D & \mapsto \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \\
\frac{f}{g}: & D_1 \to \mathbb{R} & \text{mit} & x \in D_1 & \mapsto \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}
\end{array}$$

$$D_1 = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$$

Besondere Punkte bei Funktionen

- Gegeben: Reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$

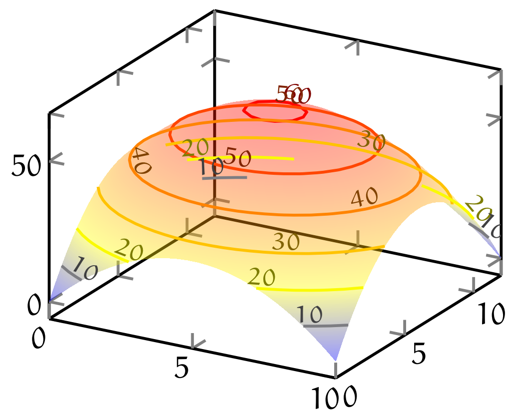
Definitionen

- c-Stelle von f: $x_c \in D$ mit $f(x_c) = c$
- Mit $c = 0$ heißt c-Stelle dann 0-Stelle von f
- Maximalstelle oder globales Maximum:
  $x_{\text{max}} \in D$ mit $f(x_{\text{max}}) \geqslant f(x)$ für alle $x \in D$
- Minimalstelle oder globales Minimum:
  $x_{\text{min}} \in D$ mit $f(x_{\text{min}}) \leqslant f(x)$ für alle $x \in D$
- $x^* \in D$ mit $f(x^*) \underset{(\leqslant)}{\geqslant} f(x)$ für $x \in [x^* - a, x * +a] \subseteq D$
  heißt lokale Maximalstelle (Minimalstelle), $f(x^*)$ lokales Maximum

- Weitere Sprechweisen: Extremal-, Optimalstelle, Extremum, Optimum

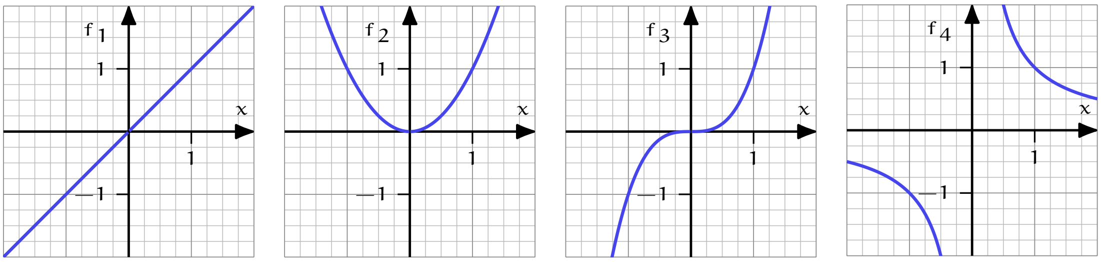
Beispiel: Maximal-, bzw. Minimalstellen

- Umsatzmaximierung für zwei Produkte mit Absatzquantitäten x_1, x_2 und Preisen p_1, p_2:
- Gegeben:
  Preis-Absatz-Funktionen
  $$x_1 = 10 - p_1$$
  und $x_2 = 12 - p_2$
- Wegen $x_1, x_2 \geqslant 0$ und $p_1, p_2 \geqslant 0$ folgt
  $p_1 \in [0, 10]$ und $p_2 \in [0, 12]$
- Gesamtumsatz?
- Maximalstelle?
- Minimalstellen?



Weitere Eigenschaften reeller Funktionen

- f beschränkt $\Leftrightarrow$ es gibt $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ mit $c_0 \leqslant f(x) \leqslant c_1$
- f monoton wachsend $\Leftrightarrow \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2))$
  f monoton fallend $\Leftrightarrow \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2))$
- bei strenger Monotonie entfällt „="
- f konvex $\Leftrightarrow \left(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)\right)$
  f konkav $\Leftrightarrow \left(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \geqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)\right)$
  $\lambda \in (0,1)$
- bei strenger Konkavität entfällt „="
- f periodisch mit Periode $p > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f(x \pm p)$
- f gerade (ungerade) $\quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f(-x)\ (-f(x) = f(-x))$



$f_1 = x$ $\quad f_2 = x^2$ $\quad f_3 = x^3$ $\quad f_4 = 1/x$

Graphen einiger Funktionen

Polynome

Definition

- $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad (\text{mit } a_n \neq 0)$$

- heißt Polynom n-ten Grades
- Schreibweise: $\operatorname{grad}(p) = n$

Satz

- Summen, Differenzen und Produkte von Polynomen sind wieder Polynome.
- $p(x_1) = 0 \Rightarrow u(x) = \frac{p(x)}{x - x_1}$ ist wieder Polynom mit $\operatorname{grad}(u) = \operatorname{grad}(p) - 1$

Rationale Funktionen

Definition

- $q : D \to \mathbb{R}$ mit

$$q(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)} \quad (\text{mit } p_1, p_2 (\neq 0) \text{ sind Polynome})$$

- heißt Rationale Funktion.

Satz

- Jedes Polynom ist auch rationale Funktione (z.B. $p_2(x) = c$).
- Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten (falls definiert) von rationalen Funktionen sind wieder rationale Funktionen.

Weitere Funktionen

Potenzfunktion

- $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit $f(x) = x^a$, $(a \in \mathbb{R})$ heißt Potenzfunktion.
- f ist streng monoton wachsend für $a > 0$ und streng monoton fallend für $a < 0$.
- Für $a \neq 0$ existiert eine inverse Funktion f^{-1} zu f

Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mit $f(x) = a^x$, $(a > 0, a \neq 1)$ heißt Exponentialfunktion zur Basis a.
- $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $g(y) = \log_a(y)$, $(a > 0, a \neq 1)$ heißt Logarithmusfunktion zur Basis a mit $g = f^{-1}$.
- Satz: f, g wachsen streng monoton für $a > 1$ und fallen streng monoton für $a < 1$

Grenzwert einer Funktion

Ausgangssituation

- Gegeben: Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$
- Grenzwert von f aufbauend auf Konvergenz von Zahlenfolgen
- Dazu betrachte: Alle Folgen $a^m = (a_1^m, \ldots, a_n^m)^T \in D$ mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}^n$, also $a^m \to a$ für $m \to \infty$
- Untersuche Grenzwerte $\lim\limits_{a^m \to a} f(a^m)$.

Definition des Grenzwerts einer Funktion

- f heißt an der Stelle $a \in \mathbb{R}^n$ (die nicht notwendig zu D gehören muss) konvergent gegen $\tilde{f} \in \mathbb{R}$,
- wenn
  1. mindestens eine Folge (a^m) mit $a^m \in D,\ a^m \neq a$ und $a^m \to a$ existiert (d.h. a ist kein „isolierter Punkt“)
  2. für alle Folgen (a^m) mit $a^m \in D$ und $a^m \to a^0$ gilt $f(a^m) \to \tilde{f}$.
- $\tilde{f}$ heißt dann Grenzwert von $f(a^m)$.

Schreibweise für alle gegen a konvergierende Folgen (a^m):

$$\lim_{a^m \to a} f(a^m) = \tilde{f} \qquad \text{oder kurz} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = \tilde{f}$$

Begriff der Stetigkeit

Gegeben

- Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$

Definition

- f heißt stetig in $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- f heißt stetig in $T \subseteq D \Leftrightarrow f$ ist für alle $x \in T$ stetig
- Ist f für ein $\tilde{x} \in D$ nicht stetig, so heißt $\tilde{x}$ Unstetigkeitsstelle oder Sprungstelle

Satz

- Für stetige Funktionen f, g gilt:
  - $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g $(g(x) \neq 0)$ sind stetig
  - $|f|$, $f \circ g$, sind stetig
  - Falls f auf einem Intervall definiert und invertierbar: f^{-1} stetig
- Alle elementaren Funktionen sind in ihrem Definitionsbereich stetig

Zwischenwertsatz

- Gegeben: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig
- Dann gilt:

$$f(a) < f(b) \quad \Rightarrow \quad \forall\, y \in [f(a), f(b)]\ \exists\, x \in [a, b] \quad \text{mit } f(x) = y$$

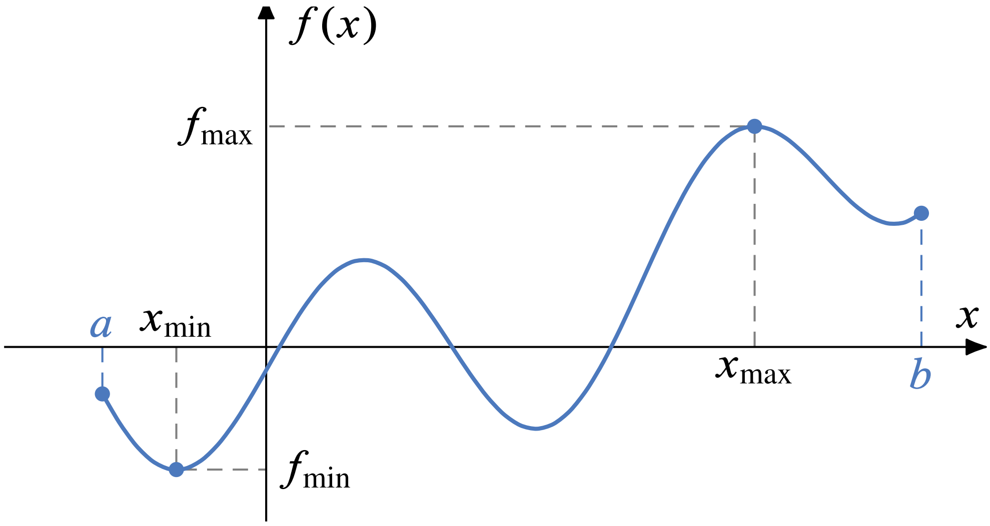


Abbildung 10.13: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *mit* f *stetig*

Opitz u. a., (2017, S. 132)

Gliederung

Opitz u. a., (2017, Kapitel 11, 12.1, 12.2)

6 Differentialrechnung
- Differentialquotient und Ableitung
- Änderungsrate und Elastizität
- Kurvendiskussion

Warum Differentialrechnung?

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
6.1. Differentialquotient und Ableitung
6.2. Änderungsrate und Elastizität
6.3. Kurvendiskussion
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra

Anwendungen

- Analyse und ökonomische Interpretation wirtschaftswissenschaftlicher Gesetzmäßigkeiten durch Untersuchung der Charakteristika von Funktionen
- Ermittlung von optimalen Lösungen betriebswirtschaftlicher Entscheidungsprobleme wie zum Beispiel Absatzmengenplanung, Loßgrößenplanung etc.

Wesentliche Lernziele

- Verständnis des Differentialquotienten
- Fähigkeit, eine Funktion zu differenzieren
- Bestimmung und Interpretation von Änderungsraten und Elastizitäten
- Durchführung und Interpretation von Kurvendiskussionen

Preisbestimmung beim Angebotsmonopol

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2017

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
6.1. Differentialquotient und Ableitung
6.2. Änderungsrate und Elastizität
6.3. Kurvendiskussion
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra

Bekannt sind folgende Zusammenhänge:

- $p(x) = c_1 - c_2 x$ (Preis-Absatz-Funktion)
- $K(x) = c_3 + c_4 x$ (Kostenfunktion)
- (mit $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}^+$ Konstanten)

Damit ergibt sich:

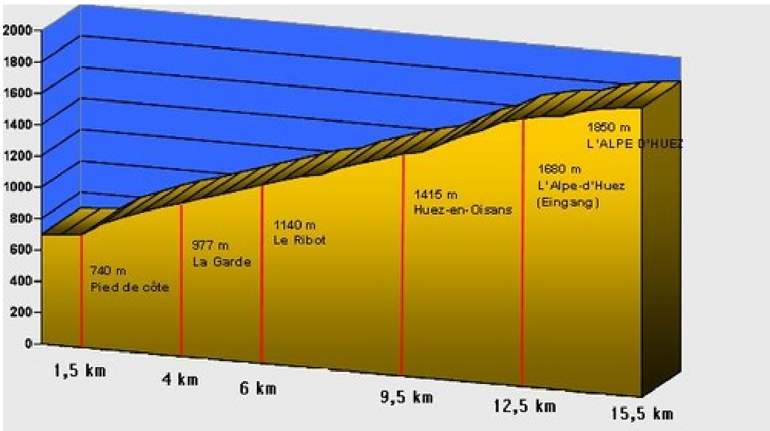
- Umsatzfunktion: $U(x) = c_1 x - c_2 x^2$
- Gewinnfunktion: $G(x) = U(x) - K(x) = c_1 x - c_2 x^2 - (c_3 + c_4 x)$

Fragen:

- Welche Menge/Welcher Preis ist Umsatz-/Gewinnmaximal?
- Welche Veränderung des Umsatzes ergibt sich bei einer Veränderung der Absatzmenge?

Differenzenquotient: Idee

- Tour de France: Anstieg nach L'Alpe d'Huez
- Länge des Anstiegs: 13,9 km
- Auf einer Höhe von 740 m beginnen die 21 Kehren
- Zielankunft liegt auf 1850 m
- Bestimmung von Steigungen: $\dfrac{\text{Höhendifferenz}}{\text{Distanz}}$



Differenzenquotient

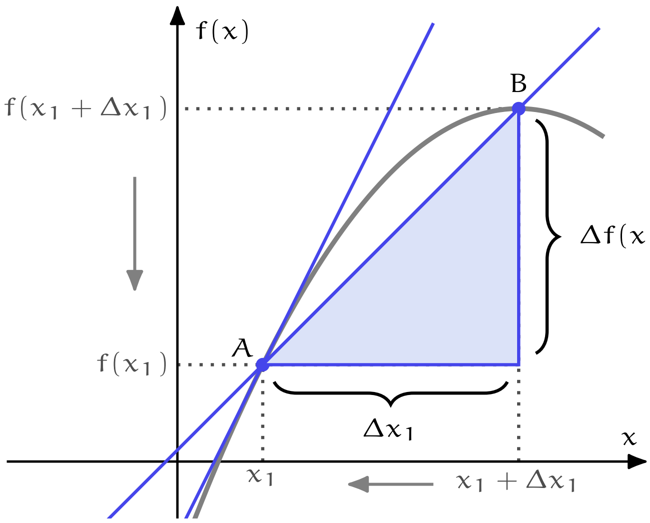
- Gegeben: Reelle Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \in \mathbb{R}$
- Dann heißt der Ausdruck

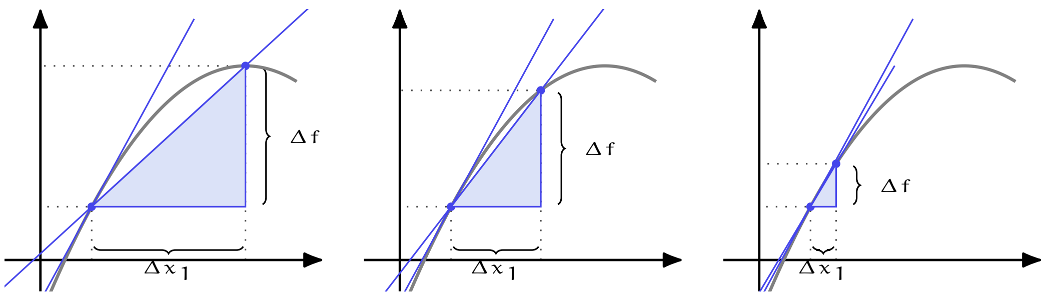
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Differenzenquotient (Steigung) von f im Intervall $[x_1, x_2] \subseteq D$

- Alternative Schreibweise, dabei Ersetzen von x_2 durch $x_1 + \Delta x_1$:

$$\frac{f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)}{\Delta x_1} = \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x_1}$$





Differentialquotient einer reellen Funktion

Differentialquotient

- Eine reelle Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x_1 \in D$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x_1}$$

existiert.

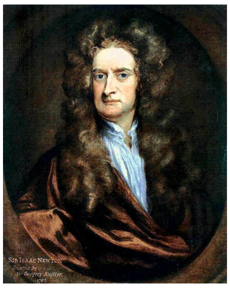
- Ist f an der Stelle x_1 differenzierbar, heißt

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta f(x_1)}{\Delta x_1} \\ = \; & \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1) - f(x_1)}{\Delta x_1} \\ = \; & \frac{df}{dx_1}(x_1) = f'(x_1) \end{aligned}$$

Differentialquotient oder erste Ableitung von f an der Stelle x_1.

- f heißt in D differenzierbar, wenn f für alle $x \in D$ differenzierbar ist.


G. W. Leibniz
(1646-1716)


I. Newton
(1643-1727)

Ableitungsregeln

- Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten (soweit definiert) von differenzierbaren Funktionen sind differenzierbar.
- Summenregel:

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

- Produktregel:

$$(f \cdot g)'(x) = f(x)' \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

- Daraus ergibt sich für eine Konstante c: $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$
- Quotientenregel:

$$\left(\frac{z}{n}\right)'(x) = \frac{z'(x) \cdot n(x) - z(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

- Kettenregel:

$$(g \circ f)'(x) = [g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Ableitung elementarer Funktionen

Gegeben: $f : D \to \mathbb{R}$, mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und $a > 0,\ b \in \mathbb{R}$.
Dann gilt:

$f(x)$	$f'(x)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
x^b	bx^{b-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Ableitungen höherer Ordnung

- Gegeben: $f : D \to \mathbb{R}$, mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und $a > 0,\ b \in \mathbb{R}$
- Wenn der Differentialquotient $f' : D \to \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbar ist, dann heißt

$$\frac{df'(x)}{dx} = \frac{d^2 f(x)}{(dx)^2} = f''(x)$$

  zweite Ableitung oder Differentialquotient zweiter Ordnung von f in $x \in D$.
- Analog für $n = 2,3,\ldots$:

$$\frac{d}{dx}\left(f^{(n-1)}(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{(n-1)}f(x)}{(dx)^{(n-1)}}\right) = f^{(n)}(x)$$

  $f^{(n)}(x)$ bezeichnet dabei die n-te Ableitung von f in $x \in D$.
- f heißt n-mal stetig differenzierbar in D, wenn f in D stetig und in jedem Punkt $x \in D$ n-mal differenzierbar ist

Definition Elastizität

- Voraussetzung: $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar.
- Dann heißt

$$\rho_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Änderungsrate von f

- und

$$\epsilon_f(x) = \frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)} = \rho_f(x) \cdot x$$

Elastizität von f.

Beispiel (Opitz u. a., 2017, Beispiel 11.28, S.148)

- Für f mit $f(x) = 10^{-9} e^{4x}$ ergibt sich

$$\epsilon_f(x) = 4x$$

- Damit bei $x = 6$: $\epsilon_f(6) = 24$

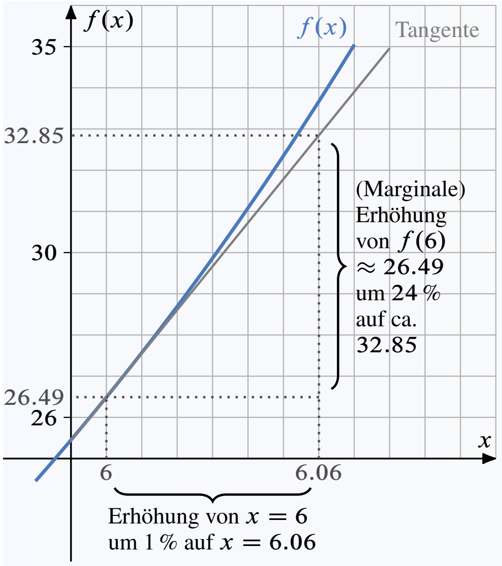


Abbildung 11.8: *Elastizität von f bei $x = 6$*

Opitz u. a., (2017, S. 148)

Elastische versus unelastische Funktionen

Definition

- Für $|\epsilon_f(x)| > 1$ reagiert die relative Änderung von $f(x)$ überproportional auf relative Änderungen von x, die Funktion f heißt im Punkt x elastisch.
- Für $|\epsilon_f(x)| < 1$ bezeichnen wir die Funktion f im Punkt x als unelastisch.

Beispiel

- $f(x) = ae^{bx}$ mit $a, b \neq 0 \quad \Rightarrow$

$$\rho_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{abe^{bx}}{ae^{bx}} = b \quad \text{und} \quad \epsilon_f(x) = x \cdot \rho_f(x) = bx$$

- Die Änderungsrate der Exponentialfunktion ist also konstant
- Die Elastizität wächst linear mit x.

Steigung und erste Ableitung

Gegeben:

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig und differenzierbar auf (a, b).

Dann gilt:

- f monoton wachsend in $[a, b]$ $\Leftrightarrow f'(x) \geqslant 0$ für alle $x \in (a, b)$
- f monoton fallend in $[a, b]$ $\Leftrightarrow f'(x) \leqslant 0$ für alle $x \in (a, b)$
- f konstant in $[a, b]$ $\Leftrightarrow f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$
- $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$ $\Rightarrow f$ streng monoton wachsend in $[a, b]$
- $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$ $\Rightarrow f$ streng monoton fallend in $[a, b]$

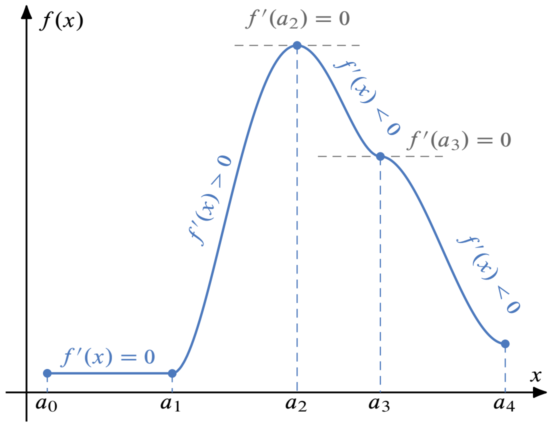


Abbildung 12.3: *Monotonie einer differenzierbaren Funktion*

Opitz u. a., (2017, S. 153)

Krümmung und zweite Ableitung

Gegeben:

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig und zweimal differenzierbar auf (a, b).

Dann gilt:

- f konvex in $[a, b]$ $\Leftrightarrow f''(x) \geqslant 0$ für alle $x \in (a, b)$
- f konkav in $[a, b]$ $\Leftrightarrow f''(x) \leqslant 0$ für alle $x \in (a, b)$
- f beschreibt eine Gerade in $[a, b]$ $\Leftrightarrow f''(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$
- $f''(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$ $\Rightarrow f$ streng konvex in $[a, b]$
- $f''(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$ $\Rightarrow f$ streng konkav in $[a, b]$

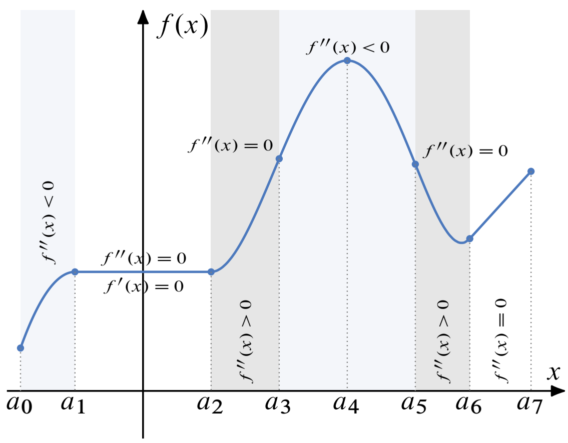


Abbildung 12.5: *Konvexität und Konkavität einer differenzierbaren Funktion*

Opitz u. a., (2017, S. 154)

Beispiel

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = xe^{-x}$
- $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$
- Damit: $f'(x) \geqslant 0$ für $x \leqslant 1$ und $f'(x) \leqslant 0$ für $x \geqslant 1$
- $\Rightarrow$ f mon. wachsend für $x \leqslant 1$ und f mon. fallend für $x \geqslant 1$
- $\Rightarrow$ f global maximal bei $x = 1$

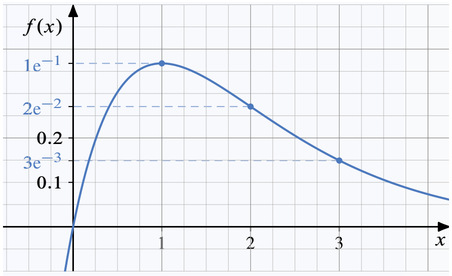


Abbildung 12.10: *Graph der Funktion f mit $f(x) = xe^{-x}$*

Opitz u. a., (2017, S. 156)

- $$f''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$$
- $\Rightarrow$ $f''(x) \geqslant 0$ für $x \geqslant 2$ und $f''(x) \leqslant 0$ für $x \leqslant 2$
- $\Rightarrow$ f konvex für $x \geqslant 2$ und f konkav für $x \leqslant 2$

Charakteristische Punkte

Definition Wendepunkt

- $f(x)$ hat in $x_0 \in (a, b)$ einen Wendepunkt
- wenn es ein $r > 0$ gibt mit
- f ist in $[x_0 - r, x_0]$ streng konvex und
- f ist in $[x_0, x_0 + r]$ streng konkav und
- (oder umgekehrt)

Definition Terrassenpunkt

- x_0 ist Terrassenpunkt
- wenn x_0 Wendepunkt ist
- und $f'(x) = 0$

Extremumsbedingung

Voraussetzung

- f zweimal stetig differenzierbar in (a, b)
- und $f'(x_0) = 0$ mit ($x_0 \in (a, b)$)

Dann gilt

- $f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_0$ ist lokales Maximum von f
- $f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0$ ist lokales Minimum von f

- $f''(x) < 0$ für alle $x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad x_0$ ist globales Maximum von f
- $f''(x) > 0$ für alle $x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad x_0$ ist globales Minimum von f

Gliederung

Opitz u.a., (2017, Kapitel 11, 12.1, 12.2)

7 Integration
- Unbestimmte Integrale
- Bestimmte Integrale
- Uneigentliche Integrale

Einleitung

- Umkehrung der Fragestellung der Differentialrechnung
- Jetzt gesucht:
  Funktion, deren Änderungsverhalten bekannt ist
- Beispiel:
  - Bekannt:
    Geschwindigkeit eines Körpers in Abhängigkeit der Zeit
  - Gesucht:
    Ort in Abhängigkeit der Zeit

Gliederung

1. Unbestimmte Integrale
2. Riemannsche Summen und bestimmte Integrale
3. Uneigentliche Integrale

Stammfunktion

- Eine differenzierbare Funktion $F : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, wenn für alle $x \in D$ gilt

$$F'(x) = f(x)$$

- Sind $F, \hat{F}$ beliebige Stammfunktionen von f, gilt für alle $x \in D$:

$$\hat{F}(x) - F(x) = \text{konstant}$$

- Also: Hat man eine Stammfunktion F gefunden, gilt für alle anderen Stammfunktionen

$$\hat{F}(x) = F(x) + c$$

Unbestimmtes Integral

- Ist $F: \; D \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f: \; D \to \mathbb{R}$, so heißt

$$\int f(x)\,dx = \int F'(x)\,dx = F(x) + c \qquad \text{für beliebiges } c \in \mathbb{R}$$

das unbestimmte Integral der Funktion f.

- Weitere Bezeichnungen:

x : Integrationsvariable
$f(x)$: Integrand
c : Integrationskonstante

- Unbestimmte Integration ist Umkehrung der Differentiation

Einige unbestimmte Integrale

- Sei f eine reelle Funktion und $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante. Dann gilt:

a) $f(x) = a \;(a \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = ax + c$

b) $f(x) = x^n \;(n \in \mathbb{N},\; x \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$

$f(x) = x^m \;(m = -2, -3, \ldots,\; x \neq 0) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} + c$

$f(x) = x^r \;(r \in \mathbb{R},\; r \neq -1,\; x > 0) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$

c) $f(x) = x^{-1} \;(x \neq 0) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = \ln|x| + c$

d) $f(x) = \sin x \;(x \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = -\cos x + c$

$f(x) = \cos x \;(x \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = \sin x + c$

e) $f(x) = e^x \;(x \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = e^x + c$

$f(x) = a^x \;(a > 0,\; a \neq 1,\; x \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \int f(x)\,dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c$

Summen und konstante Faktoren

- Für die reellen Funktionen $f, g: \ D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ existiere das unbestimmte Integral. Dann gilt:

a) $$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

b) $$\int a f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx \qquad \text{für alle} \quad a \in \mathbb{R}$$

Partielle Integration

- Für zwei stetig differenzierbare Funktionen $f, g: \ D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ gilt:

$$\int f(x) g'(x)\,dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x)\,dx$$

Substitutionsregel

- Die Funktion $f: \ D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ besitze eine Stammfunktion F und
- $g: \ D_1 \to \mathbb{R}$, $D_1 \subseteq \mathbb{R}$, $g(D_1) \subseteq D$ sei stetig differenzierbar.
- Dann existiert die zusammengesetzte Funktion $f \circ g: \ D_1 \to \mathbb{R}$ mit $z = f(y) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$
- und es gilt mit $y = g(x)$

$$\begin{aligned} \int f(g(x)) g'(x)\,dx &= \int f(y)\,dy \\ &= F(y) + c = F(g(x)) + c \\ &= (F \circ g)(x) + c \end{aligned}$$

- mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig.

Riemannsche Summen

- Gegeben: Beschränkte und stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \geqslant 0$
- Unterteilen von $[a, b]$ in $[a, x_1],\ [x_1, x_2],\ \dots,\ [x_{i-1}, x_i],\ \dots,\ [x_{n-1}, b]$
- mit $a = x_0,\ b = x_n$
- In jedem Teilintervall: Wähle Maximum und Minimum:

$$f(u_i) = \min\{f(x) :\ x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{und}$$
$$f(v_i) = \max\{f(x) :\ x \in [x_{i-1}, x_i]\}\,.$$

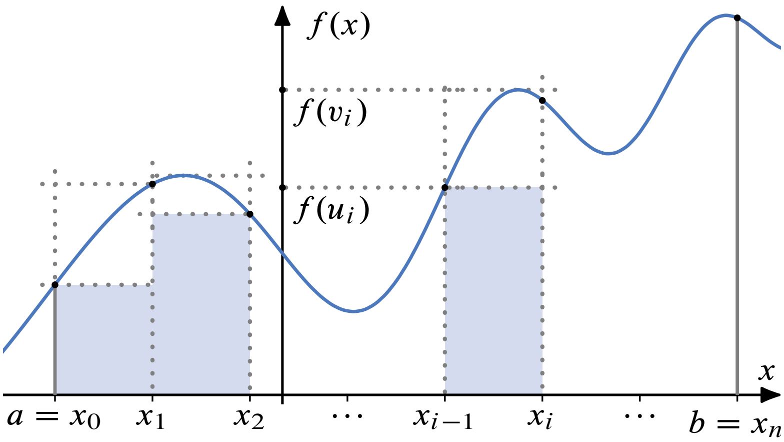


Abbildung 13.2: *Unter- und Oberschranken der Flächeninhalte*

Opitz u. a., (2017, S. 177)

Riemannsche Summen

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2017

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
1. Unbestimmte Integrale
2. Bestimmte Integrale
3. Uneigentliche Integrale
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra

- Untere und obere Grenze $I^n_{\text{min}} \leqq I \leqq I^n_{\text{max}}$ für Flächeninhalt unter Kurve mit:

$$I^n_{\text{min}} = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)(x_i - x_{i-1}), \qquad I^n_{\text{max}} = \sum_{i=1}^{n} f(v_i)(x_i - x_{i-1})$$

- Jetzt: Verfeinerung der Unterteilung von $[a, b] \Rightarrow$ Folgen (I^n_{min}) und (I^n_{max})
- Existieren für $n \to \infty$ die Grenzwerte der beiden Folgen und gilt für den wahren Flächeninhalt I unter der Kurve

$$\lim_{n\to\infty} I^n_{\text{min}} = \lim_{n\to\infty} I^n_{\text{max}} = I$$

- dann heißt f Riemann-integrierbar im Intervall $[a, b]$
- Schreibweise:

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

- Bezeichnungen:

I	Bestimmtes Integral von f im Intervall $[a, b]$
x	Integrationsvariable
$f(x)$	Integrand
a, b	Integrationsrenzen

Existenz von bestimmten Integralen

- Gegeben: Reelle Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

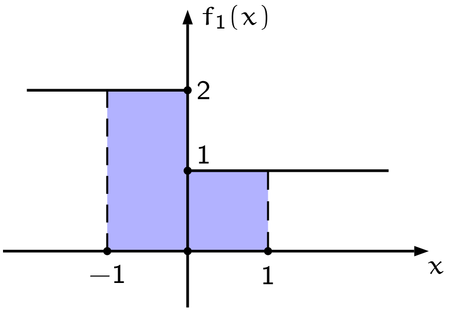
  a) f stetig in $[a, b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx$ existiert

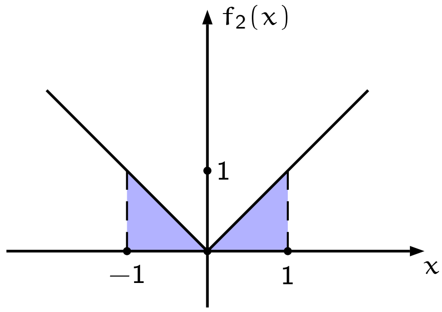
  b) f monoton in $[a, b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx$ existiert

- Beispiele: Gesucht: $\int_{-1}^{+1} f_i(x)\,dx$ für

$$f_1(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geqq 0 \end{cases} \qquad \text{und}$$

$$f_2(x) = |x|$$





Sätze zu bestimmten Integralen

- Gegeben: Integrierbare Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

  a) $\int_a^b c f(x)\,dx = c \int_a^b f(x)\,dx$ für alle $c \in \mathbb{R}$

  b) $f(x) \leqq g(x)$ für alle $x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx$

  c) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ für alle $c \in (a, b)$

- Definiert wird außerdem:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Zusammenhang bestimmtes und unbestimmtes Integral

Zusammenhang

- Gegeben $f: D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ eine in D stetige Funktion.
- Dann existiert eine Stammfunktion F von f mit $\boxed{F'(x) = f(x)}$
- sowie das unbestimmte Integral $\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c}$
- und das bestimmte Integral $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$

Unterschiede

- Bestimmtes Integral entspricht einer reellen Zahl
- Unbestimmtes Integral entspricht Schar von Funktionen

Integrationsregeln

a) Für integrierbare Funktionen $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt die Additionsregel

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

b) Für stetig differenzierbare Funktionen $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt die Regel der partiellen Integration

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

c) Ist $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ integrierbar mit der Stammfunktion F und $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $g[a, b] \subseteq [\alpha, \beta]$ stetig differenzierbar, so gilt die Substitutionsregel

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x))\Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy\,.$$

Grenzen bei $\pm\infty$

- Die reelle Funktion f sei für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und integrierbar.
- Dann heißt der Grenzwert $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$, falls er existiert, das konvergente uneigentliche Integral von f im Intervall $[a,\infty)$, und man schreibt

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx\,.$$

- Andernfalls spricht man von einem divergenten uneigentlichen Integral.
- Entsprechend definiert man das konvergente uneigentliche Integral von f im Intervall $(-\infty, b]$, falls folgender Grenzwert existiert:

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-\infty}^b f(x)\,dx$$

- Sind beide Integrale $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ und $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergent, so existiert auch

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx\,.$$

Beliebige Grenzen

- Geg.: Reelle Funktion $f : [a,b) \to \mathbb{R}$, die für alle $x \in [a, b-\epsilon]$ mit $\epsilon \in (0, b-a)$ integrierbar. Dann heißt Grenzwert $\lim\limits_{\epsilon\to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx$ (falls er existiert)
konvergentes uneigentliches Integral von f im Intervall $[a,b]$. Schreibweise:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

- Andernfalls: Divergentes uneigentliches Integral
- Analog für alle $x \in [a+\epsilon, b]$ mit $\epsilon \in (0, b-a)$, konvergentes uneigentliches Integral von f in $[a,b]$, mit

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

- Ist f in (a,b) definiert und sind für $c \in (a,b)$ die uneigentlichen Integrale $\int_a^c f(x)\,dx$ und $\int_c^b f(x)\,dx$ konvergent, dann ist auch folgendes Integral konvergent:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Gliederung

Opitz u.a., (2017, Kapitel 27)

Zinsen

- Zinsen: Gebühr, die ein Schuldner für die befristete Überlassung von Kapital bezahlt
- Betrag der Zinsen (Z): Abhängig von Höhe des überlassenen Kapitals K, dem vereinbartem Zinssatz und der Dauer der Überlassung

Verwendete Symbole:

Symbol	Bezeichnung
K_0	Betrag zu Beginn
K_t	Betrag zum Zeitpunkt t
K_n	Endbetrag (Zeitpunkt n)
n	ganzzahlige Laufzeit
Z_t	Zinsen zum Zeitpunkt t
$i = \frac{p}{100}$	(konstanter) Zinssatz
$q = 1 + i$	Zinsfaktor
p	(Prozentzinssatz)

Einfache Verzinsung

- Einfache (lineare) Verzinsung gemäß

$$\begin{aligned} K_n &= K_0 + Z \\ &= K_0 + K_0 \cdot i \cdot n \\ &= K_0 \cdot (1 + i \cdot n) \end{aligned}$$

- Gesetzlich vorgeschrieben für Verzugszinsen und bei Kreditgeschäften zwischen Privatpersonen
(BGB, §248)
- K_0 unbekannt: Barwert K_0 über Abzinsung bzw. Diskontierung bzw. Barwertberechnung
- Amtliche Diskontierung:

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + ni}$$

- Kaufmännische Diskontierung (Nur erste Näherung):

$$K_0 = K_n(1 - ni)$$

Unterjährige einfache Verzinsung: Sparbuchmethode

- Sparbuchmethode: Einteilung des Zinsjahres in 12 Monate zu je 30 Tagen,
- Maximal: 360 Zinstage pro Jahr
- Dadurch Berechnung von Monats- bzw. Tageszinsen möglich
- Dazu: Berechnung des Bruchteils eines Zinsjahres über die Anzahl der Zinstage $t \in \{0, 1, \ldots, 360\}$
- Regeln: Einzahlungstag wird komplett verzinst, Auszahlungstag gar nicht
- Daraus ergibt sich

$$K_n = K_0 + K_0 \cdot i \cdot \frac{t}{360} = K_0 \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)$$

Die Zinseszinsformel

- Während Laufzeit Zinszahlungen mit sofortiger Wiederanlage und Verzinsung zum Zinssatz i
- Entwicklung des Kapitals:

$$
\begin{aligned}
K_1 &= K_0 + K_0 \cdot i = K_0 \cdot (1+i) = K_0 \cdot q \\
K_2 &= K_1 \cdot (1+i) = (K_0 \cdot q) \cdot q = K_0 \cdot q^2 \\
K_3 &= K_2 \cdot (1+i) = \left(K_0 \cdot q^2\right) \cdot q = K_0 \cdot q^3 \\
&\dots
\end{aligned}
$$

- Damit: Zinseszinsformel, mit n (zunächst) ganzzahlig.

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

- q^n heißt Aufzinsungfaktor

Die Zinseszinsformel

Auflösung der Zinseszinsformel nach K_0, q und n:

$$K_0 = K_n q^{-n}$$

- Abzinsungs- oder Diskontierungsformel
- q^{-n} heißt Abzinsungsfaktor

$$q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} \quad \text{bzw.} \quad i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

$$n = \frac{\ln K_n - \ln K_0}{\ln q}$$

Gemischte Verzinsung

- Üblich: Einfache Verzinsung bei Restlaufzeiten kleiner einem ganzzahliges Vielfachen der Zinsperiode
- Genauer: Mit
  - Δt_1 (Anzahl Zinstage im ersten Jahr),
  - n (die weiteren, ganzen Zinsperioden) und
  - Δt_2 (Zinstage im letzten Jahr),

  gilt für das Endkapital K_x:

$$K_x = K_0 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{\Delta t_1}{360}\right) \cdot (1+i)^n \cdot \left(1 + i \cdot \frac{\Delta t_2}{360}\right)$$

- Gemischte Zinsrechnung unter Verwendung der Sparbuchmethode zur Bestimmung der Anzahl der Zinstage

Gemischte Verzinsung: Beispiel

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2017

Beispiel

Am 15.9.2016 wurden € 12 000 zu 3,75 % angelegt. Wie hoch ist der Endbetrag bei Kontoauflösung am 21.9.2023 (letzter Zinstag 20.9.2023)?

Lösung:

$$15.9. \;\hat{=}\; (9-1)\cdot 30 + 15 = 255$$
$$\Rightarrow \Delta t_1 = 360 - (255 - 1) = 106$$

$$20.9. \;\hat{=}\; (9-1)\cdot 30 + 20 = 260$$
$$\Rightarrow \Delta t_2 = 260$$

$(n = 6)$:

$$K_x = 12\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 106}{360}\right) \cdot 1{,}0375^6 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 260}{360}\right)$$

$$= 15\,541{,}20$$

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
8.1. Zinsen
Einfache Verzinsung
Zinseszinsen
Gemischte Verzinsung
Nominal- und Effektivzins
Stetige Verzinsung
Zeitwert
8.2. Renten
8.3. Tilgung
8.4. Kursrechnung
9. Lineare Algebra

Gemischte Verzinsung: Anmerkungen

- Würde man – von t_0 ausgehend – in ganze Jahre und einem Rest aufteilen, so ergäbe sich:

$$K_x = 12\,000 \cdot 1{,}0375^7 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 6}{360}\right) = 15\,537{,}08$$

(7 Jahre von 15.9.16 bis 14.9.23; dazu 6 Tage)

- Würde man die Zinseszinsformel mit nicht-ganzzahligem Exponenten verwenden, so ergäbe sich Folgendes:

$$K_x = 12\,000 \cdot 1{,}0375^{7+\frac{6}{360}} = 15\,536{,}90$$

- Gemischte Verzinsung ist also (zumindest für Kapitalanleger) verbraucherfreundlich

Gemischte Verzinsung: Anmerkungen

Nachteil der gemischten Verzinsung

- Die gemischte Verzinsung ist inkonsistent und vom Zeitpunkt des Zinszuschlages (bzw. der Einzahlung) abhängig.
- Im Beispiel: Wäre der Zeitraum um einen Monat verschoben (vom 15.10.16 bis zur Auflösung am 21.10.23), so ergäbe sich …

$$\begin{aligned} K_x &= 12\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 76}{360}\right) \cdot 1{,}0375^6 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0375 \cdot 290}{360}\right) \\ &= 15\,540{,}31 \end{aligned}$$

Die Widersprüche verschwinden, wenn eine unterjährige Verzinsung zum konformen Zinssatz vorgenommen wird.

Unterjährige Verzinsung

- Abrechnung und Zahlung von Zinsen nicht jährlich, sondern in kürzeren Abständen
- Dazu: m gleich lange Zinsperioden pro Jahr
- Typische Aufteilungen: $m = 2, 4, 12$ Zinsperioden
- Annahme: Laufzeit n in Jahren sei (aus Vereinfachungsgründen) ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{1}{m}$ (z.B. $m = 2$, $n = 1{,}5$ oder $m = 12$, $n = 1{,}25$).

Bei m Zinsabschnitten pro Jahr heißt gegeben, so heißt:

- der Zins i oder i_{nom} der nominelle Jahreszins oder Jahreszins,
- $i_{\text{rel}} = \frac{i}{m}$ der relative Periodenzins,
- i_{kon} der zu i konforme Periodenzins, mit dem die periodische Verzinsung über i_{rel} zum selben Ergebnis führt wie die jährliche Verzinsung mit i.

$$(1 + i_{\text{kon}})^m = (1 + i)$$

Unterjährige Verzinsung

Betrachte den relativen Periodenzinsen $i_{\text{rel}} = \frac{i}{m}$, so heißt:

- i der nominelle Jahreszins
- i_{eff} der effektive Jahreszins, wenn jährliche Verzinsung mit i_{eff} zum selben Ergebnis führt wie periodische Verzinsung mit i_{rel}. (Entsprechendes gilt für q_{rel}, $q$kon, q_{eff}).

$$K_1 = K_0 \cdot q_{\text{rel}}^m = K_0 \cdot q_{\text{eff}}$$
$$\Rightarrow q_{\text{eff}} = q_{\text{rel}}^m$$

$$\text{mit } q_{\text{rel}} = 1 + i_{\text{rel}} = 1 + \frac{i}{m}$$

Unterjährige Verzinsung: Formel

- Damit: Effektivzins q_{eff} ist

$$q_{\text{eff}} = (1 + i_{\text{rel}})^m = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$$

- Endkapital K_n ist:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i_{\text{rel}})^{m \cdot n} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}$$

- Anmerkung: $m \cdot n$ muss nach o.g. Bedingungen ganzzahlig sein.

Beispiel zur unterjährigen Verzinsung

Beispiel

Ein Betrag von 10 000 € soll zu 5 % nominal bei monatlicher Verzinsung angelegt werden. Welcher Betrag kann nach 16 Monaten entnommen werden? Wie hoch ist der Effektivzins?

Lösung:

Mit $i = 5\,\%$, $m = 12$ und $m \cdot n = 16$ gilt:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n} = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}05}{12}\right)^{16} = 10\,687{,}91\,€$$

Effektiver Jahreszins:

$$i_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{0{,}05}{12}\right)^{12} - 1 = 5{,}12\,\%$$

Beispiel zur unterjährigen Verzinsung mit dem konformen Zinssatz

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
8.1. Zinsen
Einfache Verzinsung
Zinseszinsen
Gemischte Verzinsung
Nominal- und Effektivzins
Stetige Verzinsung
Zeitwert
8.2. Renten
8.3. Tilgung
8.4. Kursrechnung
9. Lineare Algebra

- Widersprüche der gemischten Verzinsung verschwinden, wenn eine unterjährige Verzinsung mit dem konformen Zinssatz gemäß den Richtlinien für den internationalen Wertpapierhandel (ISMA – International Securities Market Association) vorgenommen wird.

Beispiel

Am 15.9.2016 (15.10.2016) wurden 12 000 € zu effektiv 3,75 % angelegt. Wie hoch ist der Endbetrag bei Kontoauflösung am 21.9.2023 (21.10.2023)?

Lösung

- Verwendung des konformen Zinses auf täglicher Basis,
- also $q_{\text{kon}} = \sqrt[360]{1{,}0375} = 1{,}0375^{\frac{1}{360}}$
- $K_n = 12\,000 \cdot 1{,}0375^{\frac{106}{360}} \cdot 1{,}0375^6 \cdot 1{,}0375^{\frac{260}{360}} = 15\,536{,}90$
- alternativ: $K_n = 12\,000 \cdot 1{,}0375^{\frac{76}{360}} \cdot 1{,}0375^6 \cdot 1{,}0375^{\frac{290}{360}} = 15\,536{,}90$

Stetige Verzinsung

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
8.1. Zinsen
Einfache Verzinsung
Zinseszinsen
Gemischte Verzinsung
Nominal- und Effektivzins
Stetige Verzinsung
Zeitwert
8.2. Renten
8.3. Tilgung
8.4. Kursrechnung
9. Lineare Algebra

- Lässt man $m \to \infty$ wachsen, so erhält man aus der obigen Formel

$$K_n = \lim_{m\to\infty} K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m\cdot n} = K_0 \left[\lim_{m\to\infty} \left(\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m\right)\right]^n = K_0 \left(e^i\right)^n$$

- die Formel für die stetige Verzinsung:

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot e^{i\cdot n}}$$

- Für den effektiven Jahreszinssatz gilt damit:

$$\boxed{i_{\text{eff}} = e^i - 1}$$

- Anwendung stetiger Wachstumsprozesse:
  - Ökonomie (Bevölkerungswachstum),
  - Physik (radioaktiver Zerfall),
  - BWL (Portfolio- und Kapitalmarkttheorie)

Beispiel zur stetigen Verzinsung

Beispiel (überzogenes Girokonto)

$K_0 = 10\,000$ €, $n = 5$, nominaler Jahreszins $i = 0{,}19$. Wie hoch ist K_n und p_{eff} bei stetiger Verzinsung?

Lösung:

$$K_n = K_0 \cdot e^{i \cdot n} = 10\,000 \cdot e^{0{,}19 \cdot 5} = 25\,857{,}10\,€$$

$$i_{\text{eff}} = e^{0{,}19} - 1 = 20{,}925\,\%$$

Anmerkungen

- Bei Variation von m ergeben sich:

m	1	2	4	12	∞
p_{eff}	5	19,903	20,397	20,745	20,925

- Die stetige Verzinsung wird z.B. in der Portfoliotheorie verwendet, da sie mathematisch einfacher zu handhaben ist als die diskrete Verzinsung.

Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik

- Das Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik für Vergleich von Zahlungen, welche zu verschiedenen Zeitpunkten anfallen.

Vereinfachende Annahmen:

- Zinseszinsliche Verzinsung
- Zahlungen stets am Anfang oder am Ende einer Zinsperiode

Prinzip

- Vergleich von 2 oder mehreren zu verschiedenen Zeitpunkten anfallende Geldbeträge: Beziehen auf den gleichen Zeitpunkt durch geeignetes Auf- oder Abzinsen.
- Wahl des Zeitpunktes dabei unerheblich.
- Meist: Zeitpunkt $t = 0$ oder $t = n$ (Ende der Laufzeit)
  - $t = 0$ den Anfang des ersten Zinszeitraums („heute“).
  - $t = 1$ Beginn des 2. Zinszeitraums (1.1. des 2. Jahres).
  - $t = 2$ Beginn des 3. Zinszeitraums (1.1. des 3. Jahres).
  - $t = n$ Ende des letzen Zinszeitraumes (31.12. des n-ten Jahres)

Äquivalenzprinzip: Herleitung

- Zwei Zahlungen, A im Zeitpunkt t_A und B im Zeitpunkt t_B, sind dann gleichwertig ($A \sim B$), wenn ihre Zeitwerte in jedem Zeitpunkt t übereinstimmen.

Beispiel

Gegeben: $A = 10\,000$, $t_A = 2$, $p = 7\%$
Gesucht: B mit $t_B = 5$ so, dass $A \sim B$.

Lösung:

$$B = 10\,000 \cdot 1{,}07^{(5-2)} = 12\,250{,}43\text{ €}$$

Eine Zahlung von € 12 250,43 nach 5 Jahren ist also gleichwertig zu einer Zahlung von € 10 000 nach 2 Jahren. Der Barwert („Wert heute“) beider Zahlungen ist übrigens
$10\,000 \cdot 1{,}07^{-2} = 12\,250{,}43 \cdot 1{,}07^{-5} = 8\,734{,}39$ [€].

Zahlungsströme, Barwert, Endwert

- Ein Zahlungsstrom $(A_0, \ldots, A_n)$ ist eine Folge von Zahlungen mit Zahlungszeitpunkten $t = 0, \ldots, n$.
- Summe aller auf $t = 0$ abgezinsten Zahlungen (Kapitalwert):

$$K_0 = \sum_{t=0}^{n} \frac{A_t}{q^t} = \sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{-t}$$

- Summe aller auf $t = n$ abgezinsten Zahlungen (Endwert):

$$K_n = \sum_{t=0}^{n} q^n \frac{A_t}{q^t} = \sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{n-t}$$

Gleichheit zweier Zahlungsströme

Zwei Zahlungsströme (A_t), (B_t), $t = 0, \ldots, n$ sind genau dann äquivalent, wenn sie zu einem beliebigen Zeitpunkt T den gleichen Zeitwert besitzen:

$$
\begin{aligned}
(A_t) \sim (B_t) \quad \Leftrightarrow \quad \textstyle\sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{T-t} &= \textstyle\sum_{t=0}^{n} B_t \cdot q^{T-t} \\
\Leftrightarrow \quad q^T \textstyle\sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{-t} &= q^T \textstyle\sum_{t=0}^{n} B_t \cdot q^{-t} \\
\Leftrightarrow \quad \textstyle\sum_{t=0}^{n} (A_t - B_t) \cdot q^{-t} &= 0
\end{aligned}
$$

$$
(A_t) \sim (B_t) \;\Leftrightarrow\; \sum_{t=0}^{n} (A_t - B_t)\, q^{-t} = 0
$$

Investitionsrechnung: Beispiel

Beispiel

Kalkulationszinssatz gleich 5 %. Welches Projekt ist zu bevorzugen?

Jahr t	0	1	2	3	4	5
A_t	0	1000	0	1000	0	1000
B_t	400	400	400	600	600	600

Lösung: Kapitalwert von (A_t):

$$
\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{5} A_t \cdot 1{,}05^{-t} &= 0 \cdot 1{,}05^{0} + 1000 \cdot 1{,}05^{-1} + 0 \cdot 1{,}05^{-2} + 1000 \cdot 1{,}05^{-3} \\
&\quad + 0 \cdot 1{,}05^{-4} + 1000 \cdot 1{,}05^{-5} \\
&= 2599{,}74
\end{aligned}
$$

Kapitalwert von (B_t):

$$
\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{5} B_t \cdot 1{,}05^{-t} &= 400 \cdot 1{,}05^{0} + 400 \cdot 1{,}05^{-1} + 400 \cdot 1{,}05^{-2} + 600 \cdot 1{,}05^{-3} \\
&\quad + 600 \cdot 1{,}05^{-4} + 600 \cdot 1{,}05^{-5} \\
&= 2625{,}80
\end{aligned}
$$

Alternative B ist der Alternative A vorzuziehen.

Rentenrechnung

Definition

Rente: Zahlungsstrom mit Zahlungen in gleichen zeitlichen Abständen und (meistens) in konstanter Höhe

Unterscheidung zwischen Renten

- mit Zahlung am Ende einer Rentenperiode (nachschüssig)
- mit Zahlung zu Beginn einer Rentenperiode vorschüssig)

- mit endlicher Laufzeit (endliche Renten)
- mit unendlicher Laufzeit (ewige Renten)

Rentenrechnung: Symbole

Symbol	Bezeichnungen
r_t	Rentenrate in Periode t
n	Laufzeit $(t = 1, \dots, n)$
m	Anzahl der Rentenzahlungen pro Zinsperiode
q	Zinsfaktor
R_0	Barwert der Rente
R_n	Endwert der Rente

Nachschüssige konstante (endliche) Renten

Rentenzahlung jeweils am Ende einer Zinsperiode, jeweils in Höhe von

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_n = \text{const.} = r$$

$\Rightarrow$ Rentenendwert R_n:

$$\begin{aligned} R_n &= r \cdot q^{n-1} + r \cdot q^{n-2} + \ldots + r \cdot q + r \\ &= r \cdot \left(q^{n-1} + \cdot q^{n-2} + \ldots + q + 1\right) \\ &= r \cdot \sum_{t=0}^{n-1} q^t \qquad \text{(geometrische Reihe)} \\ &= r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \end{aligned}$$

Rentenendwert und Rentenbarwert

- Endwert R_n der Rente:

$$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r \cdot \text{NREF}_{p,n}$$

- NREF: Nachschüssiger Rentenendwertfaktor für endliche konstante Rente.
- Barwert der Rente:

$$R_0 = R_n \cdot q^{-n} = r \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q - 1)} = r \cdot \frac{q^n - 1}{q^{n+1} - q^n} = r \cdot \text{NRBF}_{p,n}$$

- NRBF: Nachschüssiger Rentenbarwertfaktor

Beispiel Rentenendwert

Beispiel

Genau 10 Jahre lang wurde jeweils zum Jahresende ein Betrag von 12.000 € zum Zinssatz von 4% angelegt. Wieviel kann zu Beginn des 11. Jahres (entspricht dem Ende des 10. Jahres) abgehoben werden?

Lösung:

Mit $n = 10$, $q = 1{,}04$ und $r = 12\,000$ gilt Folgendes:

$$\begin{aligned} R_{10} &= 12\,000 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04 - 1} \\ &= 12\,000 \cdot 12{,}006107 \\ &= 144\,073{,}28 \quad [\text{€}] \end{aligned}$$

Beispiel Rentenbarwert

Beispiel

Aus welchem zum Zeitpunkt 0 eingezahlten Betrag kann 10 Jahre lang bei 4% Zins eine konstante nachschüssige Rente von 12.000 € bezahlt werden?

Lösung: Frage nach dem Barwert einer Rente. Mit $n = 10$, $q = 1{,}04$ und $r = 12\,000$ gilt:

$$\begin{aligned} R_0 &= 12\,000 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04^{11} - 1{,}04^{10}} \\ &\approx 12\,000 \cdot 8{,}110896 \\ &\approx 97\,330{,}75 \quad [\text{€}] \end{aligned}$$

Umformung der Rentenbar- und -endwertformel

- Je nach Fragestellung: Laufzeit n, Rentenzahlung r, Verzinsungsfaktor q .
- Rentenzahlung r:

$$r = \frac{R_0}{\text{NRBF}_{p,n}} = R_0 \cdot \frac{q^{n+1} - q^n}{q^n - 1} = \frac{R_n}{\text{NREF}_{p,n}} = R_n \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1}$$

- Laufzeit n aus R_n:

$$n = \frac{\ln\left(1 + \frac{R_n \cdot i}{r}\right)}{\ln q}$$

- Laufzeit n aus R_0:

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{R_0 \cdot i}{r}\right)}{\ln q}$$

- q aus R_0:

$$R_0 q^{n+1} - (R_0 + r) q^n + r \stackrel{!}{=} 0\,.$$

- q aus R_n:

$$r \cdot q^n - R_n \cdot q + R_n - r \stackrel{!}{=} 0\,.$$

- Berechnung von q im Allgemeinen nur näherungsweise (iterativ) möglich

Beispiel nachschüssige Rente

Beispiel

Ein Steuerberater kauft die Kanzlei eines älteren Kollegen und muss als Kaufpreis 10 Jahre lang jährlich–nachschüssig je 12.500 € zahlen. Durch welchen Betrag könnte der Steuerberater diese Zahlungsverpflichung sofort bei Vertragsabschluss ablösen, wenn mit 8% Zinsen kalkuliert wird?

Lösung: Gesucht ist der Rentenbarwert mit $r = 12\,500$, $q = 1{,}08$ und $n = 10$. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} R_0 &= 12\,500 \cdot \frac{1{,}08^{10} - 1}{1{,}08^{11} - 1{,}08^{10}} \\ &= 12\,500 \cdot 6{,}710081 \\ &= 83\,876{,}01 \quad [€] \end{aligned}$$

Beispiel nachschüssige Rente

Beispiel

Der Barwert einer über 15 Jahre laufenden nachschüssigen Jahresrente beträgt bei 5%-iger Verzinsung 10.380 €. Wie hoch sind die jährlichen Rentenzahlungen?

Lösung: Gesucht sind die Rentenzahlungen r mit $R_0 = 10\,380$, $q = 1{,}05$ und $n = 15$. Es gilt dann:

$$
\begin{aligned}
r &= 10\,380 \cdot \frac{1{,}05^{16} - 1{,}05^{15}}{1{,}05^{15} - 1} \\
&= 10\,380 \cdot 0{,}096342 \\
&= 1\,000{,}03 \quad [\text{€}]
\end{aligned}
$$

Vorschüssige konstante Renten

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2017

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
8.1. Zinsen
8.2. Renten
Unterjährige Renten
Ewige Renten
8.3. Tilgung
8.4. Kursrechnung
9. Lineare Algebra

- Rentenbetrag wird jeweils zu Beginn der Zinsperiode in Höhe von $r'_1 = r'_2 = \cdots = r'_n = r'$ bezahlt.
- äquivalenzprinzip $\Rightarrow$ Endwert der Rente:
- vorschüssige Rentenzahlung r' $\sim$ nachschüssige Rentenzahlung $r \quad \Rightarrow \quad r = r'q$

$$
R_n \quad = \quad r' \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r' \cdot \text{VREF}_{p,n}
$$

- VREF: Vorschüssiger Rentenendwertfaktor
- Barwert der Rente:

$$
\begin{aligned}
R_0 &= R_n \cdot q^{-n} \\
&= r' \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q-1)} \quad = \quad r' \cdot \frac{q^n - 1}{q^n - q^{n-1}} = r' \cdot \text{VRBF}_{p,n}
\end{aligned}
$$

- VRBF: Vorschüssiger Rentenbarwertfaktor

Unterjährige Raten und jährliche Verzinsung

Aufteilung der Zinsperiode in mehrere gleich lange Rentenperioden, d.h. m Rentenzahlungen pro Zinsperiode (= Jahr). Dazu:

- Rechnung mit einfacher Verzinsung innerhalb der Zinsperiode
- Rentenzahlungen nachschüssig (also am Ende jeder unterj. Rentenperiode) oder vorschüssig möglich

Lösung: Errechnung von konformen (gleichwertigen) jährlich nachschüssigen Ersatzzahlungen zu den m unterjährigen Zahlungen.

Definition

r_e heißt konforme jährlich nachschüssige Ersatzrentenrate einer nachschüssigen (oder vorschüssigen) unterjährigen Rentenrate r.

Konforme jährliche nachschüssige Ersatzrentenrate

Berechnung von r_e:

falls unterjährige Rente nachschüssig:

$$\begin{aligned} r_e = r &+ r\cdot\left(1+\frac{1}{m}\cdot i\right) \\ &+ r\cdot\left(1+\frac{2}{m}\cdot i\right) \\ &+ \ldots \\ &+ r\cdot\left(1+\frac{m-1}{m}\cdot i\right) \\ = \; & r\cdot m \\ &+ i\cdot r\cdot\frac{1}{m}\left(1+2+\ldots+(m-1)\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{r_e = r\cdot\left[m + i\cdot\frac{m-1}{2}\right]}$$

falls unterjährige Rente vorschüssig:

$$\begin{aligned} r_e = \; & r\cdot\left(1+\frac{1}{m}\cdot i\right) \\ &+ r\cdot\left(1+\frac{2}{m}\cdot i\right) \\ &+ \ldots \\ &+ r\cdot\left(1+\frac{m}{m}\cdot i\right) \\ = \; & r\cdot m \\ &+ i\cdot r\cdot\frac{1}{m}\left(1+2+\ldots+m\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{r_e = r\cdot\left[m + i\cdot\frac{m+1}{2}\right]}$$

Aus Ersatzrentenrate r_e: Weiterrechnen mit Formeln für jährliche nachschüssige Rente

Beispiel konforme Ersatzrentenraten

Beispiel

Ein Sparer legt monatliche nachschüssig 1.000 € auf ein Konto. Wie hoch ist der Kontostand nach 10 Jahren bei einem Zinssatz von 4%?

Lösung: Gesucht ist der Rentenendwert auf Basis der konformen Rentenraten. Mit $n = 10$, $m = 12$, $q = 1{,}04$ und $r = 1\,000$ ergibt sich Folgendes:

$$R_{10} = 1\,000 \cdot \underbrace{\left[12 + \frac{0{,}04 \cdot 11}{2}\right]}_{12{,}22} \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04 - 1}$$

$$= 12\,220 \cdot 12{,}006107 = 146\,714{,}63$$

Beim Zinssatz von $i = 4\%$ kann eine monatlich nachschüssige Rente von 1.000 € durch eine jährlich nachschüssige Rentenzahlung von 12.220 € gleichwertig ersetzt werden. Der Kontostand nach 10 Jahren beträgt $146\,714{,}63$ €.

Ewige Renten

- Eine Rente heißt ewige Rente, wenn Anzahl n der Ratenzahlungen nicht begrenzt, n also beliebig groß wird ($n \to \infty$).
- Berechnung des Rentenendwertes dann nicht möglich
- Rentenbarwert R_0 existiert jedoch:

$$R_0 = \lim_{n\to\infty} (r \cdot \text{NRBF}) = r \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$= r \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{q^n}}{q - 1} \right) = r \cdot \frac{1}{q-1} = \frac{r}{i}$$

- Damit: Rentenbarwert einer nachschüssigen ewigen Rente:

$$\boxed{R_0 = \frac{r}{i}}$$

Ewige Renten: Beispiel

Beispiel

Wie groß ist der Barwert einer ewigen nachschüssigen Rente von 40.000 € pro Jahr, wenn der Zins bei 8% liegt?

Lösung:

$$R_0 = \frac{40\,000}{0{,}08} = 500\,000$$

- Anmerkung: Geht man von einer vorschüssigen ewigen Rente aus, so ergibt sich für den Rentenbarwert:

$$R_0 = r' + \frac{r'}{i}$$

Tilgungsrechnung

- Rückzahlung oder Tilgung größerer Darlehen oft in mehreren Raten
- Hier betrachtet: Tilgung in mehreren Teilbeträgen, in konstanten Zeitabständen
- Jede zu bezahlende Rate beinhaltet Zinsen und Tilgung
- Verwendete Symbole:

Symbol	Bezeichnung
S	Darlehenssumme, Anfangsschuld
R_k	Restschuld nach k Jahren
n	Tilgungsdauer ($\in \mathbb{N}$)
Z_k	Zins am Ende des k-ten Jahres
T_k	Tilgungsquote am Ende des k-ten Jahres
A_k	Annuität am Ende des k-ten Jahres

- Unterscheidung zwischen Ratentilgung und Annuitätentilgung

Ratentilgung

- Während Laufzeit sind Tilgungsquoten konstant. Daraus folgt:

$$T_k = T = \frac{S}{n}$$

- und damit:

$R_k = S - k \cdot T$	Restschuld nach k Jahren
$Z_k = R_{k-1} \cdot i$	Zins am Ende des k-ten Jahres
$A_k = Z_k + T$	Annuität am Ende des k-ten Jahres

Annuitätentilgung

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2017

- Problem der Ratentilgung: Belastung anfangs hoch, später geringer
- Ausweg: Konstanthalten der Annuitäten über Rentenformel

$$A_k = A = S \cdot \frac{q^n(q-1)}{q^n - 1}$$

- Daraus ergibt sich:

$R_k = S \cdot q^k - A\dfrac{q^k - 1}{q - 1}$	Restschuld nach k Jahren
$Z_k = R_{k-1} \cdot i = A \cdot \left(1 - q^{k-n-1}\right)$	Zinsen im k-ten Jahr
$T_k = A - Z_k = A \cdot q^{k-n-1}$	Tilgung im k-ten Jahr

Festverzinsliche Wertpapiere

- Wertpapier: Investor erwirbt für bestimmten Preis ein Recht auf Zahlungen
- Hier: Gesamtfällige festverzinsliche Wertpapiere
- Emission (Erstausgabe): Investor zahlt pro 100 € Nennwert einen Preis C_0 (Emissionskurs)
- Emittend: Zahlt während Laufzeit Zinsen (Kuponszahlung) und (meist nach Ablauf) Tilgung (Rücknahmekurs)
- Kuponzahlung: mittels nominellen Jahreszinses i^* (oder Jahreszinsfuß p^*) auf den Nennwert an Investor, meist jährlich nachschüssig
- Falls $i^* = 0$: Null-Kupon-Anleihen oder Zerobonds
- Rücknahmekurs: Tilgung in einem Betrag am Ende der Laufzeit C_n als Prozentsatz des Nennwertes
- Rendite: i_{eff} Jährlicher Effektivzins, der Leistung des Investors und des Emittenden gleichwertig macht

Äquivalenzgleichung für Emissionskurs

$$C_0 = p^* \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q^{-n} + C_n \cdot q^{-n}$$

Dabei:

- n : Laufzeit in Jahren
- C_0 : Emissionskurs
- p^* : Nominalzinsfuß, jährliche Zinszahlung pro 100 € Nennwert
- C_n : Rücknahmekurs am Ende der Laufzeut
- $q = 1 + i_{\text{eff}}$: Effektiver Jahreszins bzw. Rendite des festverz. Wertpapiers

Anmerkungen:

- Gleichung i.a. nicht elementar nach q auflösbar
- Deswegen oft: Näherung durch Iteration (z.B. regula falsi)
- Emissionskurs $\triangleq$ mit Rendite abgezinster Kapitalwert sämtlicher zukünftiger Leistungen des Wertpapiers

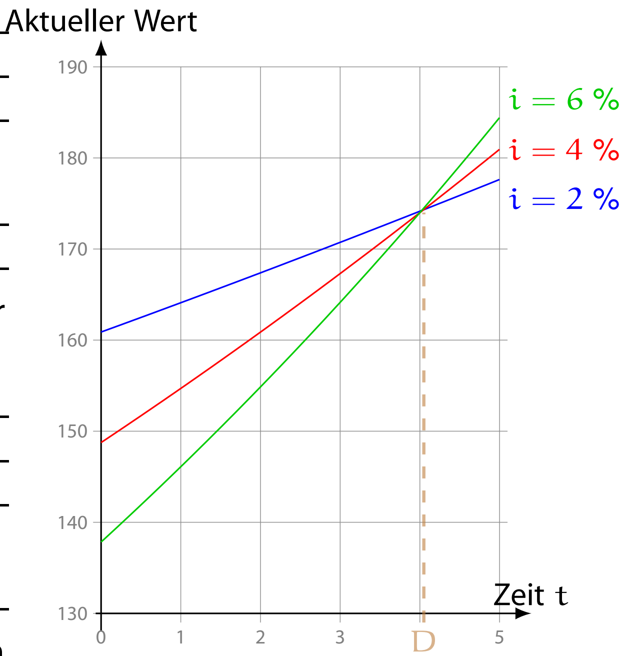
Ganzzahlige Restlaufzeiten

- Festverzinsliche Wertpapiere können meist jederzeit gehandelt werden
- Annahme zunächst: Handel nur unmittelbar nach Kuponzahlung möglich
- Gesucht: Kurs C_t für eine Restlaufzeit von t Jahren
- Lösung: Preis eines Wertpapiers ist zu jedem Zeitpunkt der Kapitalwert aller in der Restlaufzeit noch ausstehenden Leistungen
- Abgezinst wird dabei mit dem Marktzins (auch: Umlaufrendite)

$$C_t = p^* \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1} \cdot q^{-t} + C_n \cdot q^{-t}$$

Risikoanalyse – Duration

- Änderung des Marktzinses: Abhängig von Zeitpunkt Auswirkung auf aktuellen Wert des Papiers
- Fall 1 (Zins steigt): C_0 ist niedriger, aber Wiederanlage der Kuponzahlungen erbringen mehr Rendite
- Fall 2 (Zins fällt): C_0 ist höher, aber Wiederanlage der Kuponzahlungen erbringen weniger Rendite
- Vermutung: An einem (Zeit-)Punkt heben sich diese beiden Effekte auf
- Dieser Zeitpunkt heißt Duration D.



Risikoanalyse – Duration

- Der aktuelle Wert eines Papiers $C_t(q) = q^t \cdot C_0(q)$ ändert sich also nicht bzgl. Änderungen von q, wenn $t = D$
- damit gilt für die Duration D

$$\frac{\partial C_D(q)}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\left(q^D \cdot C_0(q)\right) = D \cdot q^{D-1} C_0(q) + q^D \frac{\partial C_0(q)}{\partial q} = 0$$

- Da q^{D-1} immer positiv ist muss also für D gelten $D \cdot C_0(q) + q \cdot \frac{\partial C_0(q)}{\partial q} = 0$ und damit:

$$D = -\frac{\partial C_0(q)}{\partial q} \cdot \frac{q}{C_0(q)} = -q \cdot \frac{C_0'(q)}{C_0(q)}$$

- Weitere mögliche Interpretation der Duration als Bruttozinselastizität des Barwertes.

Partielle Ableitung des Kapitalwertes

- Für die Berechnung von D ist $C_0'(q)$ zu bestimmen;
- bei einem festverzinslichen Wertpapier ergibt sich so

$$C_0'(q) = -\frac{n}{q^{n+1}}\left(p* \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} + C_n\right) + \frac{p*}{q^n} \cdot \frac{n \cdot q^{n-1}(q-1) - (q^n - 1)}{(q-1)^2}$$

Varianten der Duration

- Modifizierte Duration:

$$MD = \frac{D}{q} = -\frac{C_0'(q)}{C_0(q)}$$

- Elastizität (von i):

$$\varepsilon_{C_0,i} = \frac{C_0'(i)}{C_0(i)} \cdot i = -\frac{i}{q} \cdot D = -MD \cdot i$$

Auswirkungen von Zinsänderungen

- Bei bekanntem Emissionskurs: Auswirkungen kleiner Zinsänderungen über Duration

$$C_0(i + \Delta i) \approx C_0(i) \cdot (1 - MD \cdot \Delta i)$$

Opitz u.a., (2017, Kapitel 14, 15, 17)

Warum beschäftigen wir uns mit linearer Algebra?

- Quantitative tabellarische Daten (Excel) sind aus betriebs- und volkswirtschaftlichen Fragestellungen nicht wegzudenken
- Methoden der Matrizenrechnung erleichtern beziehungsweise ermöglichen die Analyse solcher Daten

Wesentliche Lernziele

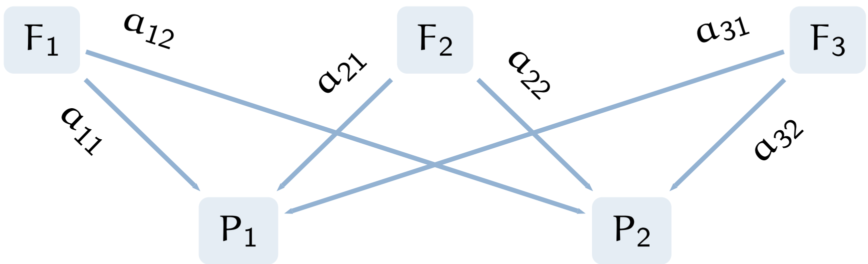
- Kennenlernen der Eigenschaften von Matrizen
- Beherrschen elementarer Matrixoperationen
- Fähigkeit, lineare Gleichungssysteme aufzustellen, zu lösen und diese Lösung darzustellen
- Beherrschen des Invertierens spezieller Matrizen

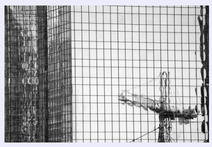
Beispiel 1

- Eine Unternehmung stellt mit Hilfe der Produktionsfaktoren F_1, F_2, F_3 zwei Produkte P_1, P_2 her.
- Zur Produktion für jede Mengeneinheit von P_j $(j = 1,2)$ werden a_{ij} Mengeneinheiten von F_i $(i = 1,2,3)$ verbraucht.

Verbrauch		für eine Einheit des Produkts	
		P_1	P_2
von Einheiten	F_1	a_{11}	a_{12}
der	F_2	a_{21}	a_{22}
Produktionsfaktoren	F_3	a_{31}	a_{32}

- Grafisch dargestellt:





Beispiel 2

- Für fünf gleichartige Produkte $P_1, \ldots, P_5$ werden drei Merkmale erhoben,
- und zwar der Preis, die Qualität und die Art des Kundenkreises, der das jeweilige Produkt nachfragt.
- Ergebnis:

			Merkmale	
		Preis	Qualität	Kundenkreis
Produkte	P_1	20	sehr gut	A
	P_2	18	sehr gut	B
	P_3	20	sehr gut	A
	P_4	16	mäßig	C
	P_5	18	ordentlich	B

Fragen:

- Ähnlichkeit von Produkten
- Finden von Kundensegmenten
- Zuordnen zu diesen Segmenten

$\longrightarrow$ Marktforschung

Definition Matrix

- Ein geordnetes, rechteckiges Schema von Zahlen oder Symbolen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m,n}$$

mit $m, n \in \mathbb{N}$ heißt Matrix mit m Zeilen und n Spalten oder kurz $m \times n$-Matrix (Im Folgenden: $a_{ij} \in \mathbb{R}$).

- $a_{11}, \dots, a_{mn}$ heißen Komponenten der Matrix.
- Dabei gibt i die Zeile und j die Spalte an, in der a_{ij} steht.
- i heißt Zeilenindex und j Spaltenindex von a_{ij}.
- Sind alle Komponenten a_{ij} reelle Zahlen, so spricht man von einer reellen Matrix.

Definition

- Zu jeder $m \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- heißt die $n \times m$-Matrix

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- die zu A transponierte Matrix

$$\Rightarrow (A^T)^T = A$$

Beispiel transponierte Matrix

a) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

b) $$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (A^T)^T = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Vektoren

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2017

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
9.1. Matrizen und Vektoren
9.2. Matrixalgebra
9.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
9.4. Lineare Gleichungssysteme
9.5. Inverse Matrizen
9.6. Determinanten
9.7. Eigenwerte

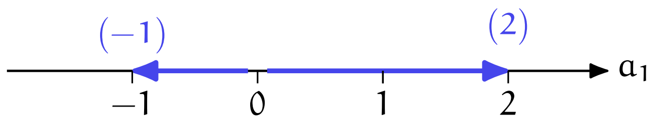
Definition

- $n \times 1$-Matrix heißt Spaltenvektor mit n Komponenten:

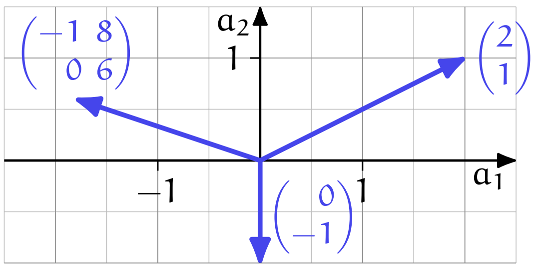
$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

- $1 \times n$-Matrix heißt Zeilenvektor mit n Komponenten:

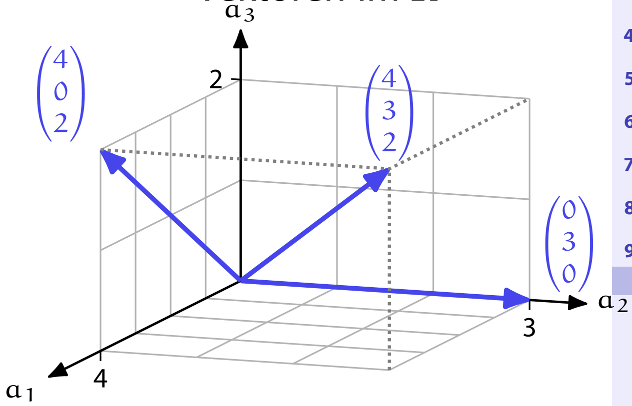
$$a^T = (a_1, \dots, a_n)$$



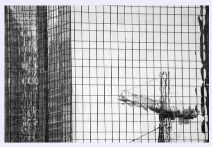
Vektoren im $\mathbb{R}^1$



Vektoren im $\mathbb{R}^2$



Vektoren im $\mathbb{R}^3$



Definition

- Seien $A = (a_{ij})_{m,n}$ und $B = (b_{ij})_{m,n}$ reelle Matrizen mit übereinstimmender Zeilenzahl m und Spaltenzahl n.
- Dann wird definiert:

$$\begin{array}{llll} A = B & \Leftrightarrow & a_{ij} = b_{ij} & \text{für alle } i = 1, \ldots, m\,, j = 1, \ldots, n \\ A \neq B & \Leftrightarrow & a_{ij} \neq b_{ij} & \text{für mindestens ein Indexpaar } (i,j) \\ A \leqslant B & \Leftrightarrow & a_{ij} \leqslant b_{ij} & \forall (i,j) \\ A < B & \Leftrightarrow & a_{ij} < b_{ij} & \forall (i,j) \end{array}$$

- Entsprechend $A \geqslant B$ und $A > B$.

Spezielle Matrizen

Definition

a) $A = (a_{ij})_{n,n}$ heißt quadratisch

b) $A = (a_{ij})_{n,n}$ mit $A = A^T$ heißt symmetrisch

c) $A = (a_{ij})_{n,n}$ heißt Dreiecksmatrix, wenn
$a_{ij} = 0$ für $i < j$ (untere Dreiecksmatrix) oder
$a_{ij} = 0$ für $i > j$ (obere Dreiecksmatrix)

d) $A = (a_{ij})_{n,n}$ heißt Diagonalmatrix, wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$

e) $A = (a_{ij})_{n,n}$ heißt Einheitsmatrix, wenn $a_{ii} = 1$ für alle i und $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$

Addition und Subtraktion von Matrizen

Definition

- Gegeben: $A = (a_{ij})_{m,n}$ und $B = (b_{ij})_{m,n}$.
- Dann gilt:
- Addition: $A + B = (a_{ij})_{m,n} + (b_{ij})_{m,n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m,n}$
- Subtraktion: $A - B = (a_{ij})_{m,n} - (b_{ij})_{m,n} = (a_{ij} - b_{ij})_{m,n}$

Damit:

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Addition/Subtraktion nicht definiert, wenn Zeilen- bzw. Spaltenzahl nicht übereinstimmen

Skalare Multiplikation

Definition

- Gegeben: $A = (a_{ij})_{m,n}$ und $r \in \mathbb{R}$ (Skalar).
- Dann gilt:

$$r \cdot A = r \cdot (a_{ij})_{m,n} = (r \cdot a_{ij})_{m,n} = (a_{ij} \cdot r)_{m,n} = A \cdot r$$

Beispiel:

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 25 \end{pmatrix}$$

Außerdem gilt:

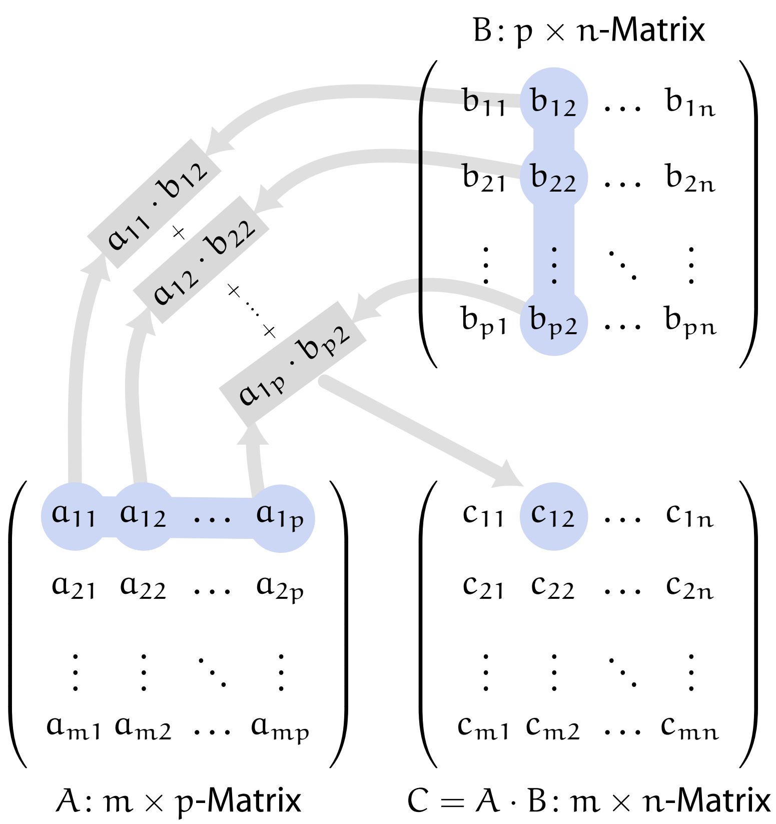
$$\begin{array}{lcll} (rs)A & = & r(sA) & \text{(Assoziativgesetz)} \\ (r+s)A & = & rA + sA & \text{(Distributivgesetz)} \\ r(A+B) & = & rA + rB & \end{array}$$

Matrixmultiplikation

- Gegeben:
  $A = (a_{ik})_{m,p}$
  und $B = (b_{kj})_{p,n}$.
- Dann gilt:

$$A \cdot B = (a_{ik})_{m,p} \cdot (b_{kj})_{p,n} = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \right)_{m,n}$$

- Merke:
  Zeile mal Spalte!



Schema zur Matrixmultiplikation

Spezialfälle und Rechenregeln

Spezialfälle der Matrixmultiplikation

- $A = (m \times n)$-Matrix, $B = (n \times m)$-Matrix
  $\Rightarrow$ es existiert $\quad A \cdot B \quad$ und $\quad B \cdot A$
- A quadratisch $\quad \Rightarrow \quad A \cdot A = A^2$ existiert
- A, B quadratisch $\quad \Rightarrow \quad A \cdot B$ existiert und $B \cdot A$ existiert.
  Aber: Im Allgemeinen $A \cdot B \neq B \cdot A$
- Ist E Einheitsmatrix, dann gilt:

$$A \cdot E = E \cdot A = A$$

Spezielle Rechenregeln

- $A = (m \times p)$-Matrix, $B = (p \times n)$-Matrix. Damit gilt:
- $A \cdot B \quad$ und $\quad B^T \cdot A^T \quad$ existieren.
- $B^T A^T = (A \cdot B)^T$
- $A^T A \quad$ ist symmetrische $(p \times p)$-Matrix und
  $A A^T \quad$ ist symmetrische $(m \times m)$-Matrix

Norm

- Gegeben Vektor $a \in \mathbb{R}^n$
- Definition: Absolutbetrag, Norm oder Länge eines Vektors:

$$\|a\| = |a| = \sqrt{a^T a} = \sqrt{{a_1}^2 + \ldots + {a_n}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2} \quad \in \mathbb{R}_+$$

- Seien a, b, c Vektoren des $\mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}$ ein Skalar. Dann gilt:

a) $\|a + b\| = \|b + a\|, \qquad \|a - b\| = \|b - a\|$

b) $\|ra\| = |r| \cdot \|a\|$

c) $\left\|a^T b\right\| \leqq \|a\| \cdot \|b\|$ für $n > 1$ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)
$\qquad = |a| \cdot |b|$ für $n = 1$

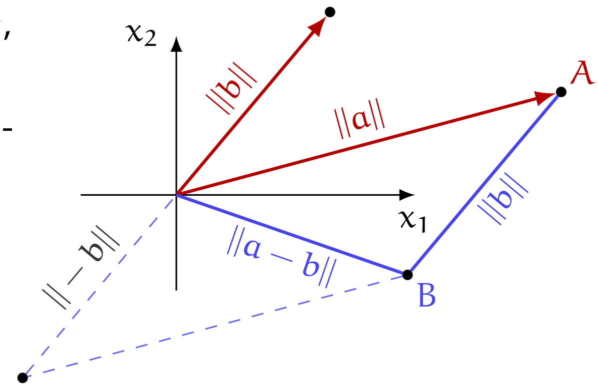
d) $\|a + b\| \leqq \|a\| + \|b\|$ (Dreiecksungleichung)

e) $\|a - c\| - \|c - b\| \leqq \|a - b\| \leqq \|a - c\| + \|c - b\|$

Kosinussatz

- Gegeben: a, b Vektoren des $\mathbb{R}^n$, die den Winkel γ einschließen.
- Nach dem Kosinussatz gilt im Dreieck mit den Ecken $0, A, B$

$$\|a-b\|^2 =$$
$$\|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\,\|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos\gamma.$$

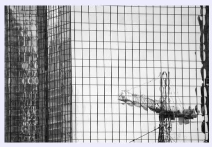


- Damit gilt:

$$\begin{aligned} a^T b &= \tfrac{1}{2}\left(\|a+b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\|a\|^2 + \|b\|^2 - \|a-b\|^2\right) \\ &= \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos\gamma \end{aligned}$$

Hyperebenen und Sphären

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2017



Definition Hyperebene

- Gegeben: $a \in \mathbb{R}^n$ mit $a \neq 0$ und $b \in \mathbb{R}$
- Dann heißt $H(a,b) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\right\}$ Hyperebene im $\mathbb{R}^n$
- Anmerkung: H teilt den $\mathbb{R}^n$ in zwei Halbräume

Definition Sphäre

- Gegeben: $a \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}_+$
- Dann heißt $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| = r\}$ Sphäre (Kugelfläche) im $\mathbb{R}^n$ und dem Radius r
- Damit: r-Umgebung von a: $K_<(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| < r\}$

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
9.1. Matrizen und Vektoren
9.2. Matrixalgebra
9.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
9.4. Lineare Gleichungssysteme
9.5. Inverse Matrizen
9.6. Determinanten
9.7. Eigenwerte

Beispiel Hyperebene/Sphäre

Beispiele

- $H = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \; 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6 \right\}$
- $K = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \; \left\| x - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 1 \right\}$
  $= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \; \sqrt{(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 + {x_3}^2} = 1 \right\}$

Offenheit, Abgeschlossenheit

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2017

1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
9.1. Matrizen und Vektoren
9.2. Matrixalgebra
9.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
9.4. Lineare Gleichungssysteme
9.5. Inverse Matrizen
9.6. Determinanten
9.7. Eigenwerte

Gegeben

- $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Punktmenge des $\mathbb{R}^n$ und
- $\overline{M} = \mathbb{R}^n \setminus M$ deren Komplement bzgl. $\mathbb{R}^n$.

Dann heißt:

- $a \in \mathbb{R}^n$ innerer Punkt von M, wenn eine r-Umgebung $K_<(a, r)$ von a existiert, die ganz in M liegt, also $K_<(a, r) \subseteq M$,
- $a \in \mathbb{R}^n$ äußerer Punkt von M, wenn eine r-Umgebung $K_<(a, r)$ von a existiert, die ganz in $\overline{M}$ liegt und
- $a \in \mathbb{R}^n$ Randpunkt von M, wenn a weder innerer noch äußerer Punkt von M ist.

Eine Punktmenge $M \in \mathbb{R}^n$ heißt dann

- offen wenn jedes Element $a \in M$ innerer Punkt von M ist,
- abgeschlossen, wenn jedes Element $a \in \overline{M}$ innerer Punkt von $\overline{M}$ ist, also das Komplement $\overline{M}$ offen ist.

Beschränktheit, Kompaktheit

Eine Punktmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt

- **beschränkt nach oben**, wenn ein $b \in \mathbb{R}^n$ existiert mit $b \geqq x$ für alle $x \in M$,
- **beschränkt nach unten**, wenn ein $a \in \mathbb{R}^n$ existiert mit $a \leqq x$ für alle $x \in M$,
- **beschränkt**, wenn M nach oben und unten beschränkt ist,
- **kompakt**, wenn M beschränkt und abgeschlossen ist.

Beispiele

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^2_+ : \; x_1 + 2x_2 \leqq 3, \; \|x\| \leqq 2\}$$
$$M_2 = \{x \in \mathbb{R}^2_+ : \; x_1 \in \mathbb{N}\}$$

Lineare Gleichungssysteme: Einführung

Beispiele linearer Gleichungssysteme

a)
$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & x_2 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & = & -2 \end{array}$$

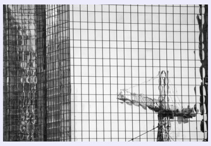
Probleme:

- System lösbar oder nicht?
- Verfahren zum Auffinden von Lösungen
- Darstellung von mehrdeutigen Lösungen

Dazu gibt es:

- Den Gaußschen Algorithmus (erzeugt Dreiecksmatrix)
- das Verfahren von Gauß-Jordan (modifizierte Gauß: erzeugt Einheitsmatrix)

Allgemeines lineares Gleichungssystem



- Ein System von Gleichungen

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- heißt lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten.
- Die a_{ij} und b_i heißen Koeffizienten des Gleichungssystems.
- In Matrixform:

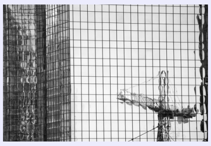
$$Ax = b$$

- Lösungsmenge:

$$L = \{x : \quad Ax = b\}$$

Lösungsdarstellung

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2017



1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
9.1. Matrizen und Vektoren
9.2. Matrixalgebra
9.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
9.4. Lineare Gleichungssysteme
9.5. Inverse Matrizen
9.6. Determinanten
9.7. Eigenwerte

- Beispiel für Enddarstellung:

$$\begin{array}{rl} x_1 \quad + \quad x_3 \qquad & = 4 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = 7 \end{array} \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- Dabei bezeichnet:

$$\begin{pmatrix} E & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b$$

- kann nach Basisvariablen aufgelöst werden:
  $x_1 = 4 - x_3, \quad x_2 = 7 - 3x_3 - 2x_4$ (allgemeine Lösung)
- In diesem Fall immer lösbar, zum Beispiel mit

$$x_N = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- Gesucht: Verfahren zur Überführung beliebiger Gleichungssysteme in diese Form

Elementare Umformungen

- Das sind Umformungen der Koeffizientenmatrix, die die Lösung nicht verändern. Erlaubt ist
- Multiplikation einer Zeile mit beliebigen Zahlen $c \neq 0$
- Addition einer Zeile zu einer anderen Zeile
- Vertauschen von Zeilen oder Spalten

Lösungsalgorithmus

- Lösung mit Verfahren von Gauß-Jordan: Systematische Umformungen nach obigem Prinzip, bis Darstellung der Koeffizientenmatrix in Einheits- und Restmatrix ensteht
- Algorithmus und Lösungsvarianten siehe Vorlesung

Definition

- Gegeben: $n \times n$-Matrix (quadratisch)
- Existiert eine $n \times n$-Matrix X mit $AX = XA = E$, so heißt X die zu A inverse Matrix.
- Schreibweise: $X = A^{-1}$
- $\Rightarrow AA^{-1} = A^{-1}A = E$

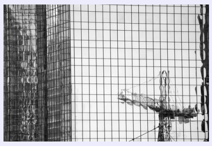
Inverse Matrizen und Gleichungssysteme

- Falls A^{-1} existiert, gilt:

$$Ax = b \quad \Rightarrow \quad A^{-1}Ax = A^{-1}b \quad \Rightarrow \quad Ex = x = A^{-1}b$$

- Damit existiert genau eine Lösung und zwar:

$$x = A^{-1}b$$



Berechnung inverser Matrizen durch den Gaußalgorithmus:

- Ansatz:

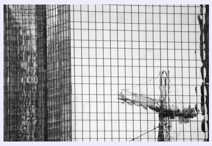
$$\begin{aligned} Ax + \quad Ey &= 0 \\ \Rightarrow \quad A^{-1}Ax + A^{-1}Ey &= 0 \\ \Rightarrow \quad Ex + \quad A^{-1}y &= 0 \end{aligned}$$

- Also: Gaußtableau mittels elementarer Umformungen folgendermaßen umformen:

$$(A|E) \quad \longrightarrow \quad (E|A^{-1})$$

Orthogonale Matrizen

- Eine $n \times n$-Matrix A heißt orthogonal, wenn gilt:
- $AA^T = A^TA = E$
- Bei orthogonalen Matrizen A gilt also: $A^{-1} = A^T$.
- Mit A ist damit auch A^T orthogonal



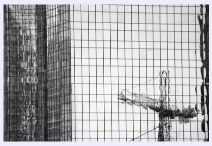
Permutationen und Inversionen

- Sei $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$ eine n-elementige Menge.
- Dann: jede Anordnung $(a_{p_1}, \ldots, a_{p_n})$ der Elemente $a_1, \ldots, a_n$ mit $\{p_1, \ldots, p_n\} = \{1, \ldots, n\}$ heißt eine Permutation.
- Wenn für ein Paar (a_i, a_j) einerseits $i < j$, und andererseits $p_i > p_j$, gilt: Inversion.
- Also: Ausgehend von Permutation $(a_1, \ldots, a_n)$: Jede Vertauschung zweier Elemente a_i und a_j ist eine Inversion.

Beispiel

- Gegeben: Menge $\{1,2,3\}$

Definition Determinante



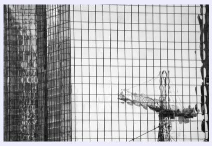
- Gegeben: A, eine $n \times n$-Matrix.
- Außerdem: $(1, \ldots, n)$ sei geordnetes n-Tupel der Zeilenindizes und $p = (p_1, \ldots, p_n)$ eine Permutation von $(1, \ldots, n)$ mit $\nu(p)$ Inversionen.
- Determinante von A ist dann:

$$\det A = \sum_p (-1)^{\nu(p)} \cdot a_{1p_1} \cdot a_{2p_2} \cdot \ldots \cdot a_{np_n}$$

Beispiele

- Gegeben: A als eine $n \times n$-Matrix
- Für $n = 1$ gilt dann $A = (a_{11})$ sowie $\det A = \det(a_{11}) = a_{11}$.
- Für $n = 2$ enthält die Determinante $2! = 2$ Summanden,
- nämlich: $a_{11}a_{22}$ ohne Inversion und $-a_{12}a_{21}$ mit einer Inversion.
- Damit: $\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Determinanten von 3×3-Matrizen



Beispiel: Determinante einer 3×3-Matrix

- Für $n = 3$: Determinante hat $3! = 6$ Summanden, nämlich
  $a_{11}a_{22}a_{33}$ ohne Inversion,
  $a_{12}a_{23}a_{31}$ und $a_{13}a_{21}a_{32}$ mit zwei Inversionen,
  $-a_{11}a_{23}a_{32}$ und $-a_{12}a_{21}a_{33}$ mit einer Inversion und
  $-a_{13}a_{22}a_{31}$ mit drei Inversionen.
- Es gilt:

$$\begin{aligned} \det A = \quad & \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ = \quad & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

- Einfacher zu merken: Regel von Sarrus (siehe Vorl.)

Zahlenbeispiel Determinanten

Beispiel

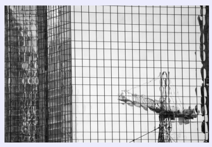
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Zeigen Sie: $\det A = -2$,
  $\det B = 6$,
  $\det C = 0$

Minor, Kofaktoren



- Gegeben: $n \times n$-Matrix A mit $n \geqq 2$;
- Streiche Zeile i und Spalte j, $\Rightarrow$ Matrix mit $n-1$ Zeilen und $n-1$ Spalten:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- nach dem Streichen heißt diese Matrix Minor
- Damit kann man das algebraische Komplement oder den Kofaktor d_{ij} zur Komponente a_{ij} von A berechnen:

$$d_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij} = \begin{cases} \det A_{ij} & \text{für } i+j \text{ gerade} \\ -\det A_{ij} & \text{für } i+j \text{ ungerade} \end{cases}$$

$(i, j = 1, \ldots, n)$

Kofaktoren

Entwicklungssatz von Laplace

- Entwicklungssatz für Determinanten
- Gegeben: A eine $n \times n$-Matrix und D die Matrix der Kofaktoren.
- Dann gilt für $n = 2,3,\ldots$

$$AD^T = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix}.$$

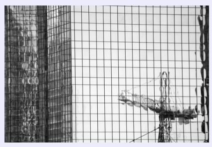
- Insbesondere wird mit:

$$\begin{aligned} \det A &= a_i^T d_i = a_{i1} d_{i1} + \ldots + a_{in} d_{in} \qquad \text{(i=1,...,n)} \\ &= a^{jT} d^j = a_{1j} d_{1j} + \ldots + a_{nj} d_{nj} \qquad \text{(j=1,...,n)} \end{aligned}$$

die Determinante von A nach der $i$ten Zeile $a_i^T = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ bzw. nach der j-ten Spalte $a^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ von A entwickelt.

Beispiel: Entwicklungssatz

Wirtschaftsmathematik
Etschberger - WS2017



1. Grundlagen
2. Aussagenlogik
3. Mengen
4. Folgen und Reihen
5. Reelle Funktionen
6. Differenzieren
7. Integration
8. Finanzmathematik
9. Lineare Algebra
9.1. Matrizen und Vektoren
9.2. Matrixalgebra
9.3. Punktmengen im $\mathbb{R}^n$
9.4. Lineare Gleichungssysteme
9.5. Inverse Matrizen
9.6. Determinanten
9.7. Eigenwerte

Beispiele

- Zeigen Sie:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 5$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = 0$$

Sätze

Es gilt für $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ (Determinantenmultiplikationssatz)
- aber: im allgemeinen $\det(A+B) \neq \det A + \det B$
- $\det A \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}$ existiert

Gilt zusätzlich $\det A \neq 0$

- Mit $D = (d_{ij})_{n,n}$, der Matrix der Kofaktoren zu A gilt
- $A^{-1} = \frac{1}{\det A} D^T$
- $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$
- Ist A orthogonal gilt: $\det A = \pm 1$

Cramersche Regel

Lösung eindeutig bestimmter linearer Gleichungssysteme

- Gegeben: Lineares Gleichungssystem $Ax = b$
- Voraussetzung: Es existiert A^{-1}, also auch $\det A \neq 0$
- Bezeichnung: Mit A_j ist die Matrix, in der gegenüber A die j-te Spalte durch b ersetzt wird, also

Gabriel Cramer
(1704 – 1752)

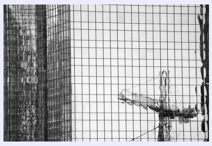
$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Dann lässt sich die Lösung x in folgender Form schreiben:

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

(Cramersche Regel)

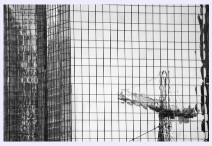
Beispiel Cramersche Regel



Zu zeigen:

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- und $Ax = b$
- Damit: $x^T = (1, -1, 1)$

Eigenwerte: Einführendes Beispiel



Bevölkerungsentwicklung

- Gegeben:

  $x_t > 0$ die Anzahl von Männern im Zeitpunkt t und
  $y_t > 0$ die Anzahl von Frauen im Zeitpunkt t.

- Anzahl der Sterbefälle für Männer bzw. Frauen im Zeitintervall $[t, t+1]$ sei proportional zum jeweiligen Bestand im Zeitpunkt t, und zwar $0{,}2x_t$ für die Männer und $0{,}2y_t$ für die Frauen.
- Anzahl der Knaben- und Mädchengeburten im Zeitintervall $[t, t+1]$ proportional ist zum Bestand der Frauen.
- Anzahl der Knabengeburten: $0{,}2y_t$,
- Anzahl der Mädchengeburten: $0{,}3y_t$.
- Für Übergang vom Zeitpunkt t zum Zeitpunkt $t+1$ damit:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= x_t - 0{,}2x_t + 0{,}2y_t &&= 0{,}8x_t + 0{,}2y_t \\ y_{t+1} &= y_t - 0{,}2y_t + 0{,}3y_t &&= 1{,}1y_t \end{aligned}$$

Beispiel Bevölkerungsentwicklung

- Matriziell:

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 1{,}1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$$

- Forderung: Zeitliches Verhältnis von Männern und Frauen soll konstant bleiben
- Also:

$$x_{t+1} = \lambda x_t \iff y_{t+1} = \lambda y_t \qquad (\lambda \in \mathbb{R}_+),$$

- Dieser Fall beschreibt einen gleichförmigen Wachstums- ($\lambda > 1$) beziehungsweise Schrumpfungsprozess ($\lambda < 1$)
- Matriziell:

$$\lambda z = Az \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 1{,}1 \end{pmatrix}, \; z = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+$$

- Lösung?

Eigenwertprobleme

Definition

David Hilbert
(1862 – 1943)

- Gegeben: $n \times n$-Matrix A.
- Ist nun für eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ und einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq o$
- lineare Gleichungssystem $Ax = \lambda x$ erfüllt, so heißt λ reeller Eigenwert zu A und
- x reeller Eigenvektor zum Eigenwert λ.
- Insgesamt: Eigenwertproblem der Matrix A.

Damit

- $Ax = \lambda x \iff Ax - \lambda x = Ax - \lambda E x = (A - \lambda E)x = o$
- Satz: Das LGS $Ax = \lambda x$ hat genau dann eine Lösung $x \neq o$, wenn gilt:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren

Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren

- Jedes λ, das $\det(A - \lambda E) = 0$ löst ist ein Eigenwert von A.
- Anschließend: Für jedes erhaltene λ Lösen des Gleichungssystems

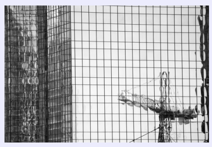
$$(A - \lambda E)x = o \quad \text{mit} \quad x \neq o$$

- Damit hat man für jedes λ mindestens einen reellen Eigenvektor x.
- Satz: Mit $x \neq o$ ist auch jeder Vektor rx $(r \in \mathbb{R},\ r \neq 0)$ Eigenvektor zum Eigenwert λ von A.

Beispiele

- $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 1{,}1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}65 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,
$D = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Sätze über Eigenwertprobleme



- Gegeben: A ist eine reelle, symmetrische $n \times n$-Matrix
- Es gilt: Die Eigenwerte sind alle reell und nicht notwendigerweise verschieden und
- ist der Rang von A gleich $k \leqslant n$, so ist $\lambda = 0$ ein $(n-k)$-facher Eigenwert
- Zu den reellen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ existieren genau n reelle, linear unabhängige Eigenvektoren $x^1, \ldots, x^n$
- Diese Eigenvektoren kann man so wählen, dass $X = (x^1, \ldots, x^n)$ orthogonale Matrix wird, also $XX^T = E$
- Gegeben zusätzlich: $L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ die Diagonalmatrix der Eigenwerte von A und $A^m = A \cdot \ldots \cdot A$ mit $m \in \mathbb{N}$
- Dann gilt: $L = X^T A X \quad$ und $\quad A = X L X^T$
- außerdem gilt: A^m besitzt die Eigenwerte $\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m$