

a) Gegeben sei die invertierbare Matrix F mit

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

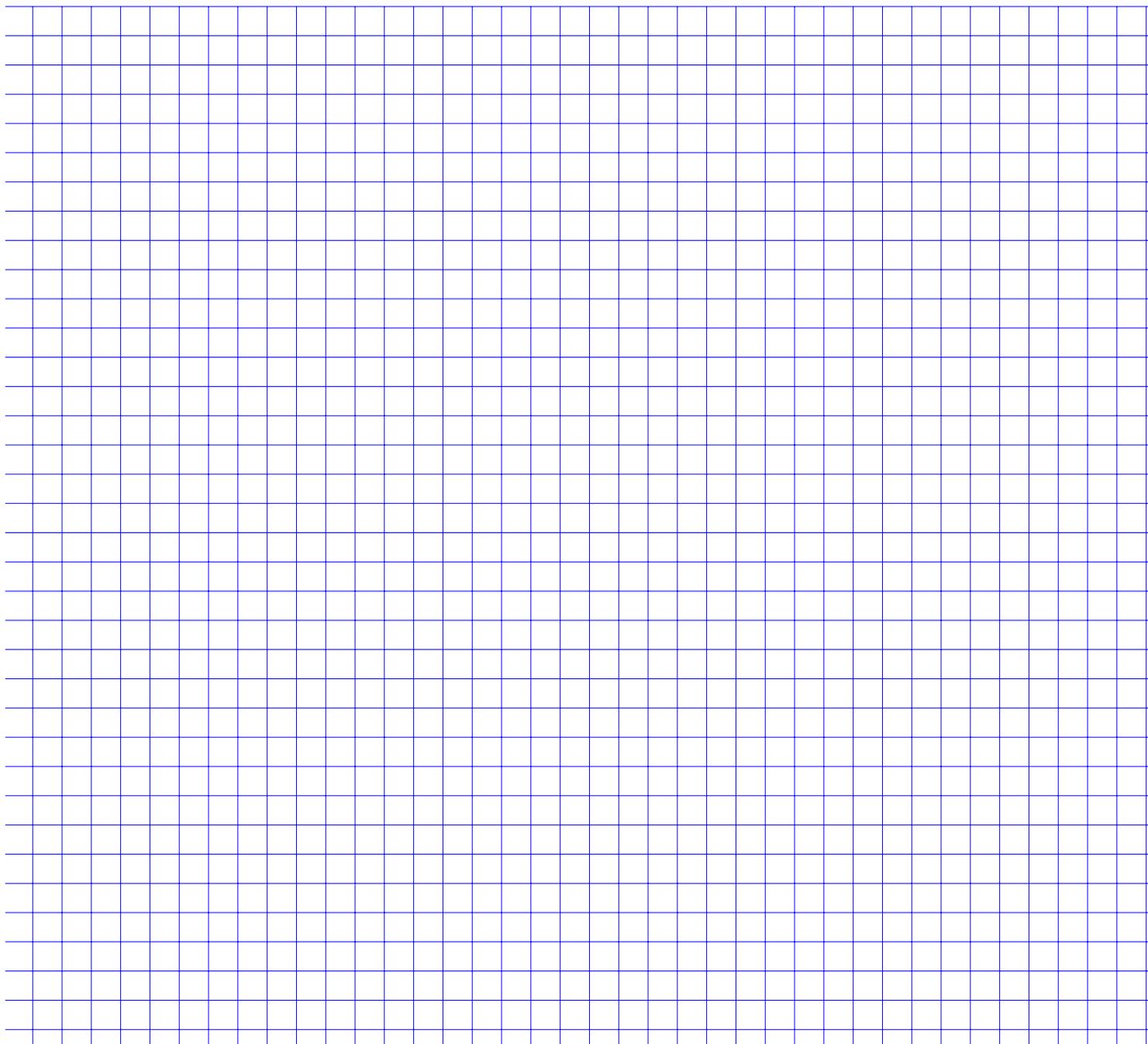
Berechnen Sie damit den Ausdruck $FF^T (F^{-1})^T F^{-1}$.

(*Tip*: Sie dürfen benutzen, dass die Inverse einer symmetrischen Matrix auch symmetrisch ist.)

b) Bestimmen Sie für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & c \\ 0 & -1 & 0 \\ d & -8 & 3 \end{pmatrix}$$

die Konstanten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ so, dass B die inverse Matrix zu A ist.



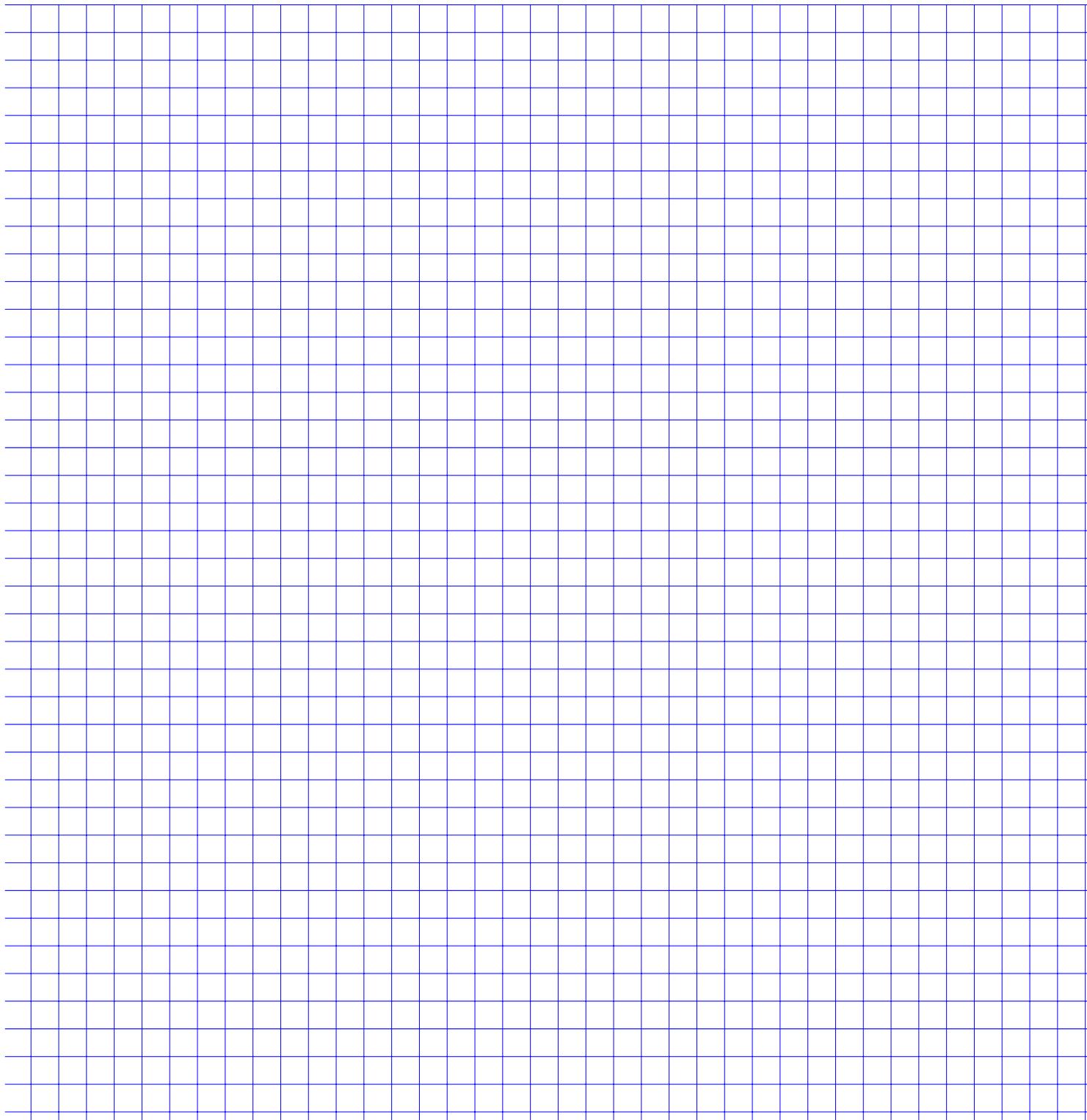
Aufgabe 2**8 Punkte**

a) Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen

$$a_n = \frac{1}{2^n}, \quad b_n = \frac{3n^3 + n}{n^4 + 3} \quad \text{und} \quad c_n = \frac{(1 + 2n)^2}{(1 + 3n)^2}.$$

b) Überprüfen Sie die Reihe

$$r_n = \sum_{i=0}^n \left(\frac{q}{1+q} \right)^i \quad \text{mit} \quad q > 0$$

auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} (r_n)$.

Aufgabe 3

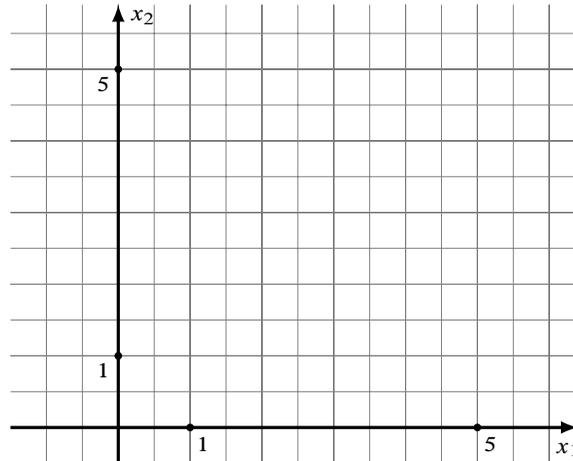
12 Punkte

Gegeben ist das folgende lineare Optimierungsproblem mit den Strukturvariablen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$, der Zielfunktion N und den Restriktionen R_1, R_2 und R_3 mit

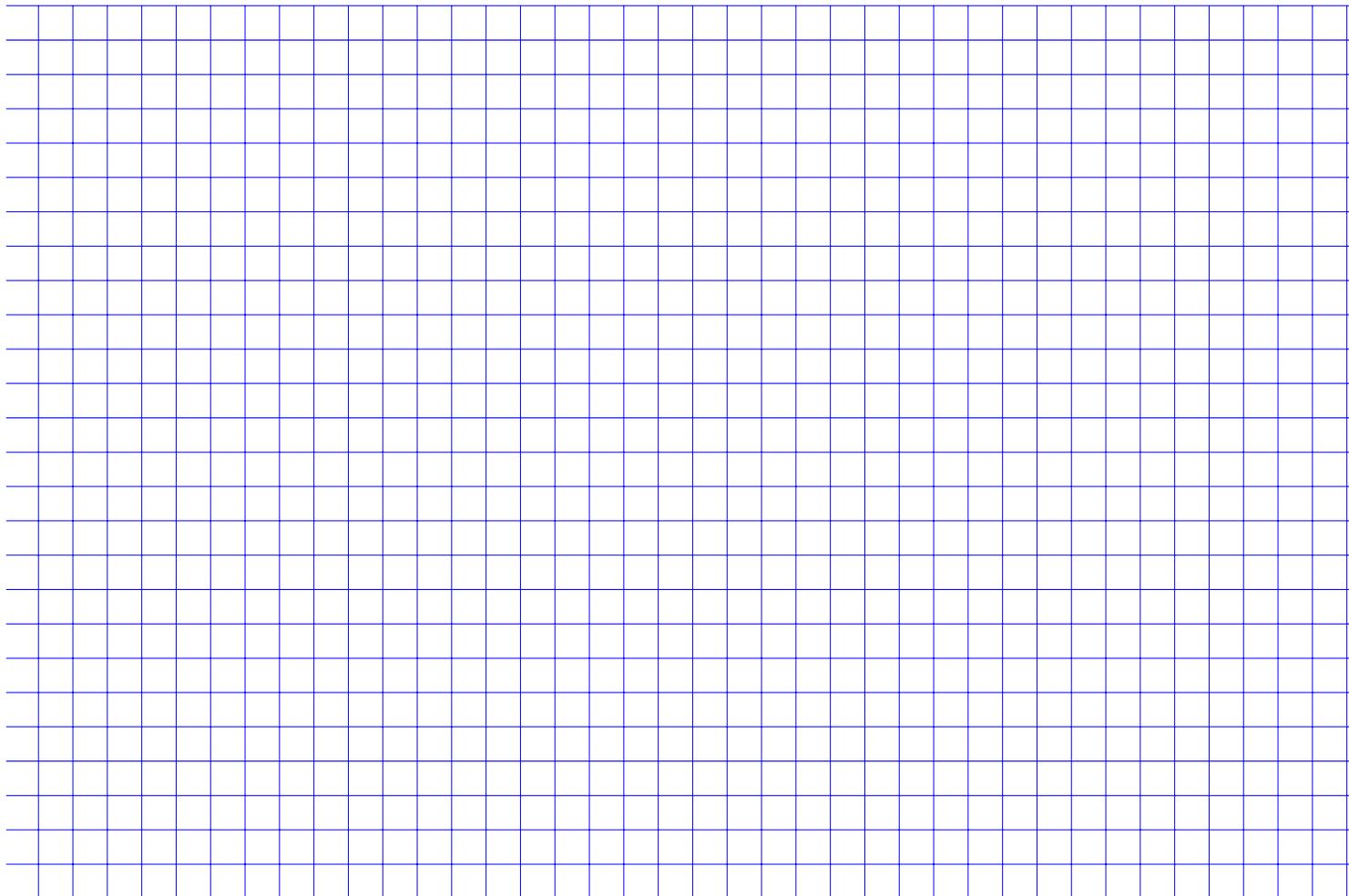
$$\begin{array}{llll} \text{Zielfunktion:} & x_1 + x_2 & \rightarrow \max & (N) \\ \text{Restriktionen:} & 5x_1 + 3x_2 & \leq 15 & (R_1) \\ & x_1 + x_2 & \geq 3 & (R_2) \\ & x_2 & \leq 2 & (R_3) \\ & x_1 - kx_2 & \leq -1 & (R_4) \end{array}$$

Für die Teilaufgaben a) bis c) sei der Wert der Konstanten k in Restriktion R_4 gleich 2.

- Skizzieren Sie den Zulässigkeitsbereich Z des Problems. Benutzen Sie dazu das vorgegebene Koordinatensystem rechts.
- Berechnen Sie die relevanten Eckpunkte von Z .
- Benutzen Sie die Ergebnisse aus Teilaufgabe b) und bestimmen Sie damit die Menge der Optimallösungen des Problems.



- Für welche $k \in \mathbb{R}$ in Restriktion R_4 ist der Zulässigkeitsbereich $Z = \emptyset$?
- Für welche $k \in \mathbb{R}$ bleibt das Optimum aus Teilaufgabe c) erhalten?



Aufgabe 4

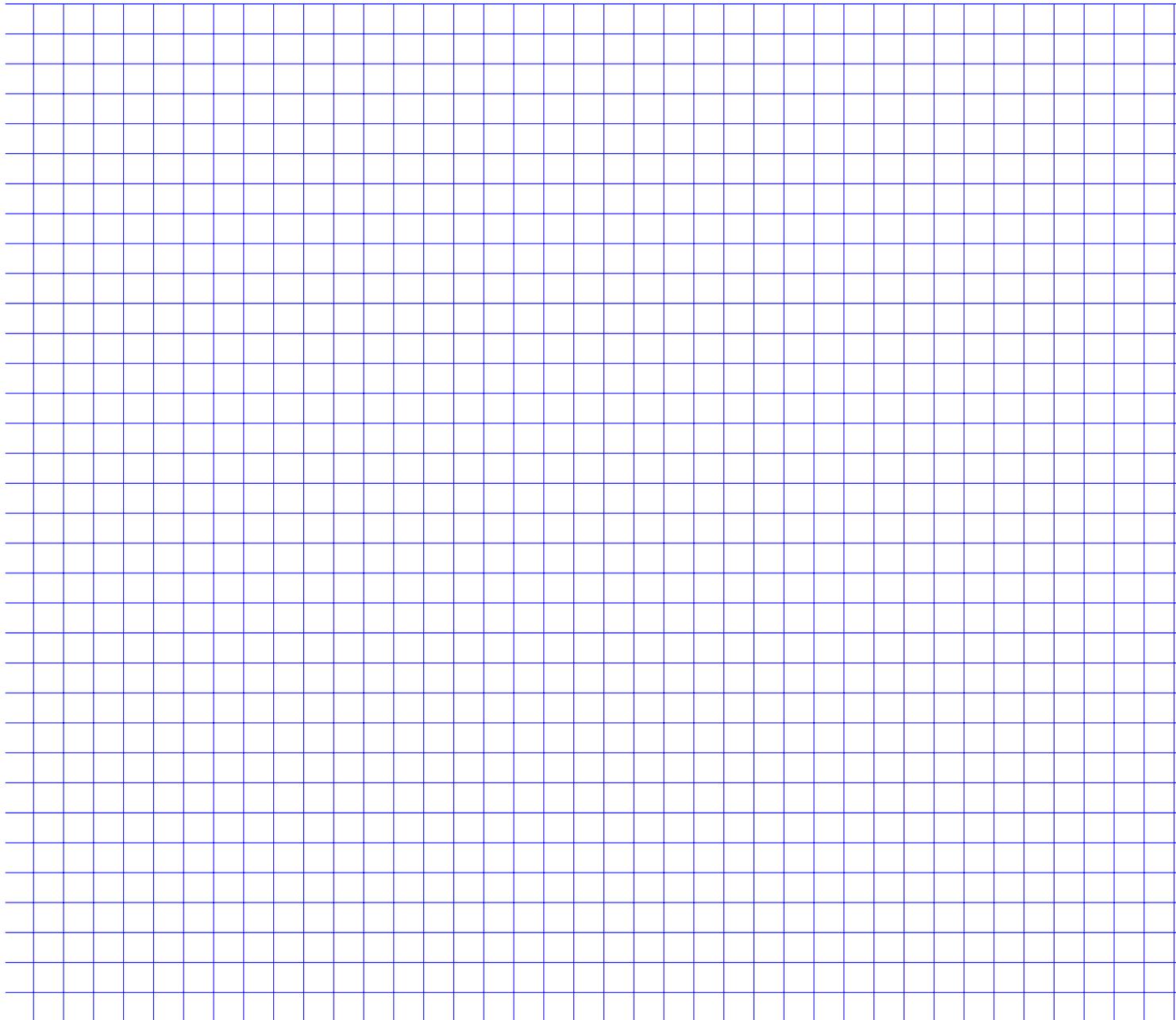
13 Punkte

Gert Gemütlich liest in der Zeitung, dass 50 % aller Männer bis zu ihrem 30. Geburtstag bei ihren Eltern wohnen. Als er den von innen beschlagenen und zum Wäschebehältnis umfunktionierten Müllsack in seiner WG betrachtet, wird er nachdenklich und beginnt zu rechnen:

Wenn er zum nächsten 1. Januar zu seiner Mutter und seinem Vater zurückziehen würde – also genau an seinem 22. Geburtstag – würde er sich die Miete und weitere Ausgaben für den Haushalt sparen. Er rechnet mit einer Summe von 9000 €, die er dadurch jährlich zum Jahresende zu einem Jahreszins von 2 % anlegen könnte.

(Gehen Sie im Folgenden von Ein- und Auszahlungen auf ein Konto mit einem konstanten jährlichen Zinssatz von 2 % aus.)

- Wieviel hätte er so bis zu seinem 30. Geburtstag angespart?
- Wenn er an seinem 30. Geburtstag ausziehen würde: Wie lange könnte er von diesem Konto ab dann monatlich vorschüssig 500 € entnehmen?
- Gert beschließt, so lange bei seiner Mama wohnen zu bleiben, bis er von dem angesparten Geld bis zu seinem 80. Geburtstag jährlich nachschüssig 40 000 € entnehmen kann. Wie lange dürfen die Eltern bei Durchführung dieses Plans das Kinderzimmer für ihn freihalten?

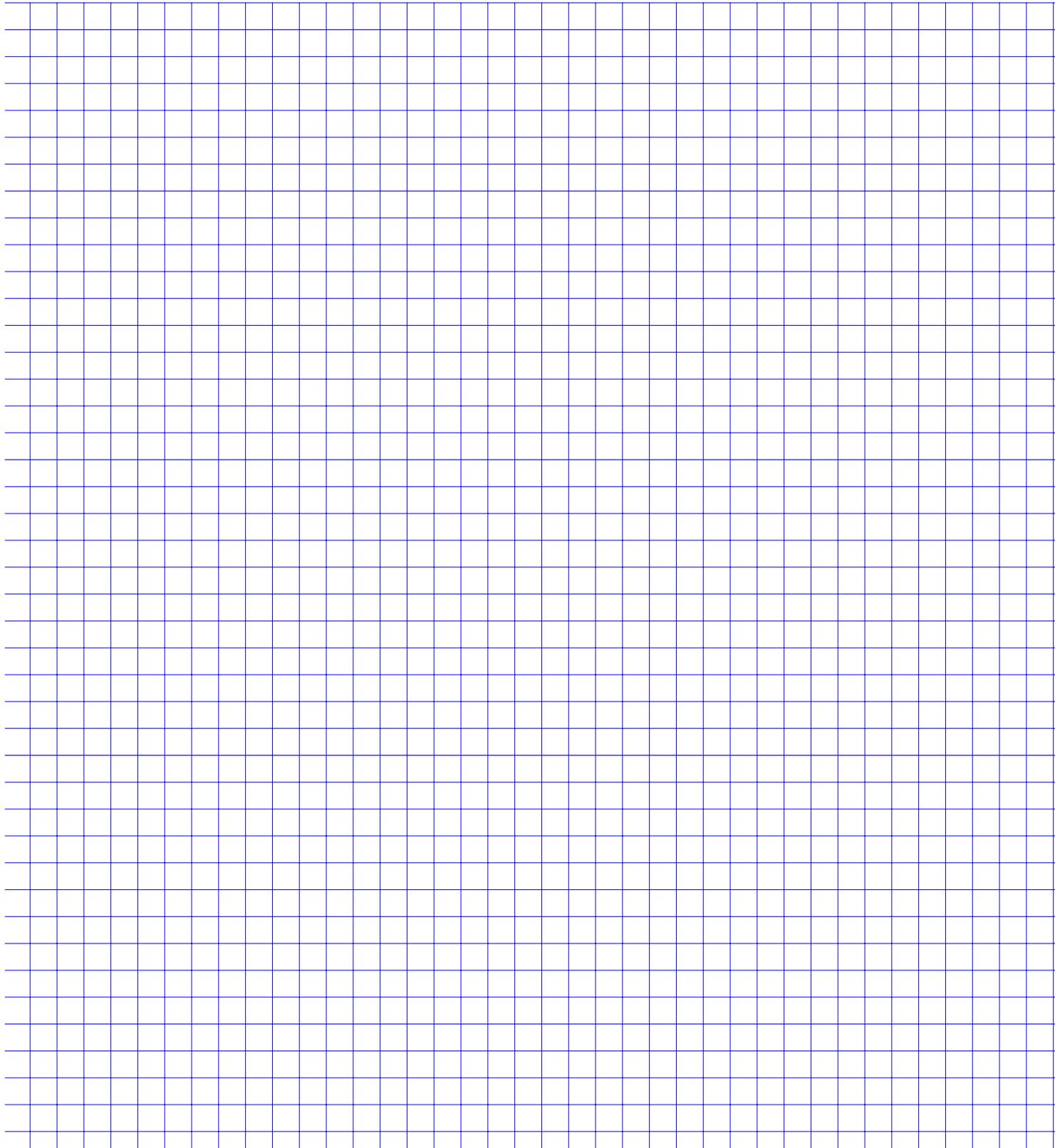


Aufgabe 5**7 Punkte**

Gegeben seien die Funktionen $s, c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$s(x) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \quad \text{und} \quad c(x) = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}).$$

- a) Zeigen Sie, dass $c(x)^2 - s(x)^2 = 1$ gilt.
- b) Bestimmen Sie die Ableitungen der Funktionen s und c , und drücken Sie diese wieder mithilfe der Funktionen s und c aus.



Aufgabe 6

12 Punkte

Gegeben ist die reelle Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^4 - 2x^2 + (2x^2 + 1)y^2.$$

- Bestimmen Sie den Gradienten von f .
- Bestimmen Sie alle Punkte, an denen der Gradient von f gleich 0 ist.
- Bestimmen Sie die Hessematrix $H_f(x, y)$.
- Bestimmen Sie alle Maximal- und Minimalstellen sowie die zugehörigen Werte von f .

