Klausur Wirtschaftsmathematik: Lösungshinweise
PO Studienstart vor WS 2016/17

Studiengang: IM und BW

Aufgabe 1 — 8 Punkte

a) Gegeben sei die invertierbare Matrix F mit

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie damit den Ausdruck $FF^T \left(F^{-1}\right)^T F^{-1}$.
(*Tipp:* Sie dürfen benutzen, dass die Inverse einer symmetrischen Matrix auch symmetrisch ist.)

b) Bestimmen Sie für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & c \\ 0 & -1 & 0 \\ d & -8 & 3 \end{pmatrix}$$

die Konstanten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ so, dass B die inverse Matrix zu A ist.

Lösungshinweis:

a) Einfache Lösung: Hier gilt $F = F^T$ und damit $F^{-1} = \left(F^{-1}\right)^T$

$$\Rightarrow \quad FF^T \left(F^{-1}\right)^T F^{-1} = F \cdot FF^{-1} \cdot F^{-1} = F \cdot E \cdot F^{-1} = E$$

Alternativ (aufwendiger): Bestimmung von

$$F^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und dann Berechnung des gesuchten Ausdrucks; auch damit ergibt sich natürlich $FF^T \left(F^{-1}\right)^T F^{-1} = E$

b) Mit $A \cdot B = E$ erhält man unter anderem die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a + d &= 1 \\ -b &= 1 \\ 2c + 3 &= 1 \\ 2 + d &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \left\} \begin{aligned} a &= 3 \\ b &= -1 \\ c &= -1 \\ d &= -2 \end{aligned} \right.$$

Aufgabe 2 — 8 Punkte

a) Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen

$$a_n = \frac{1}{2^n}\,, \quad b_n = \frac{3n^3+n}{n^4+3} \quad \text{und} \quad c_n = \frac{(1+2n)^2}{(1+3n)^2}.$$

b) Überprüfen Sie die Reihe

$$r_n = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{q}{1+q}\right)^i \quad \text{mit} \quad q > 0$$

auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}(r_n)$.

Lösungshinweis:

a) $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3/n + 1/n^3}{1+3/n^4} = \frac{0+0}{1+0} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+4n+4n^2}{1+6n+9n^2} = \frac{1/n^2+4/n+4}{1/n^2+6/n+9} = \frac{4}{9}$$

b) Zur Konvergenz betrachte Quotientenkriterium:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{q}{q+1}\right)^{k+1}}{\left(\frac{q}{q+1}\right)^{k}}\right| = \frac{q}{q+1} < 1 \quad \text{für alle } q>0\text{ , also ist } r_n \text{ konvergent.}$$

Grenzwert (r_n ist geometrische Reihe):

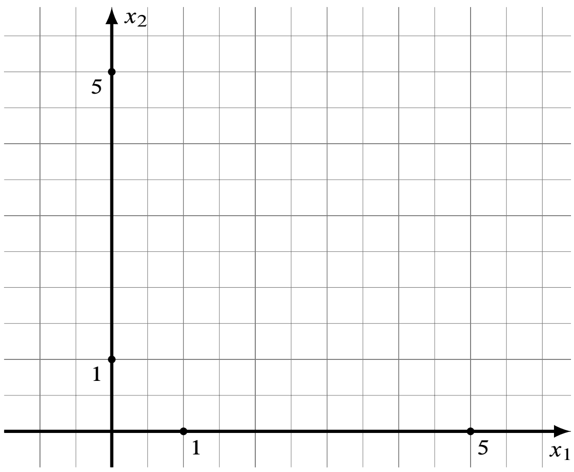
$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{q}{q+1}\right)^{n+1}}{1-\frac{q}{q+1}} = \frac{1-0}{1-\frac{q}{q+1}} = \frac{1}{\frac{q+1-q}{q+1}} = q+1$$

Aufgabe 3 — 12 Punkte

Gegeben ist das folgende lineare Optimierungsproblem mit den Strukturvariablen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$, der Zielfunktion N und den Restriktionen R_1, R_2, R_3, R_4 mit

$$
\begin{array}{rrcrl}
\text{Zielfunktion:} & x_1 + \ \ x_2 & \rightarrow & \max & (N) \\
\text{Restriktionen:} & 5x_1 + 3x_2 & \leq & 15 & (R_1) \\
 & x_1 + \ \ x_2 & \geq & 3 & (R_2) \\
 & x_2 & \leq & 2 & (R_3) \\
 & x_1 - kx_2 & \leq & -1 & (R_4)
\end{array}
$$

Für die Teilaufgaben a) bis c) sei der Wert der Konstanten k in Restriktion R_4 gleich 2.



a) Skizzieren Sie den Zulässigkeitsbereich Z des Problems. Benutzen Sie dazu das vorgegebene Koordinatensystem rechts.

b) Berechnen Sie die relevanten Eckpunkte von Z.

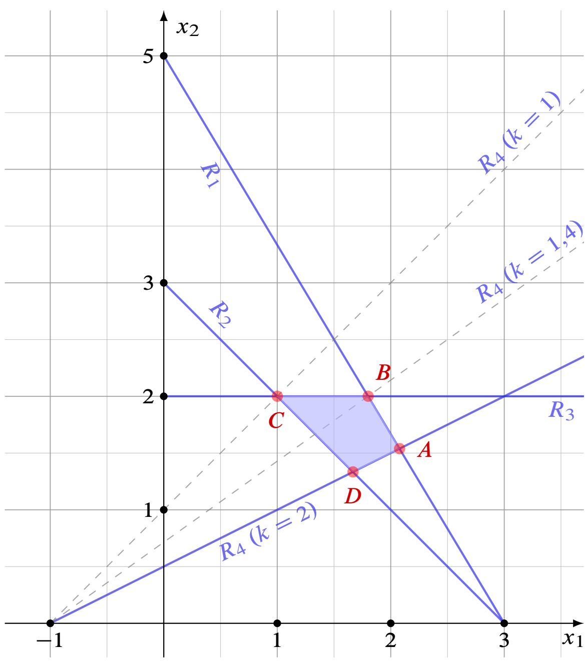
c) Benutzen Sie die Ergebnisse aus Teilaufgabe b) und bestimmen Sie damit die Menge der Optimallösungen des Problems.

d) Für welche $k \in \mathbb{R}$ in Restriktion R_4 ist der Zulässigkeitsbereich $Z = \emptyset$?

e) Für welche $k \in \mathbb{R}$ bleibt das Optimum aus Teilaufgabe c) erhalten?

Lösungshinweis:

a)



b) $A : (R_1) - 5 \cdot (R_4) :\quad x_2 = \frac{20}{13},\ x_1 = \frac{27}{13}$
$B : x_2 = 2 \text{ in } (R_1) :\quad x_1 = \frac{9}{5},\ x_2 = 2$
$C : x_2 = 2 \text{ in } (R_2) :\quad x_1 = 1,\ x_2 = 2$
$D : (R_2) - (R_4) :\quad x_2 = \frac{4}{3},\ x_1 = \frac{5}{3}$

c) $\text{ZF}(A) = 47/13 \approx 3{,}62$,
$\text{ZF}(B) = 19/5 = 3{,}8$,
$\text{ZF}(C) = 3$,
$\text{ZF}(D) = 3$,
optimal ist also B.

d) Wenn R_4 durch C geht ist der Zulässigkeitsbereich Z nur noch $\{C\}$. Ist R_4 steiler ist $Z = \emptyset$. Also: Setze C in R_4 ein: $1 - k \cdot 2 = -1 \ \Rightarrow$ mit $k < 1$ ist $Z = \emptyset$.

e) Wenn R_4 durch B geht ist Optimum gerade noch erhalten. Also: Setze B in R_4 ein: $9/5 - k \cdot 2 = -1 \ \Rightarrow k = 1{,}4$. Also ist B optimal, wenn $k \geq 1{,}4$.

Aufgabe 4 — 13 Punkte

Gert Gemütlich liest in der Zeitung, dass 50 % aller Männer bis zu ihrem 30. Geburtstag bei ihren Eltern wohnen. Als er den von innen beschlagenen und zum Wäschebehältnis umfunktionierten Müllsack in seiner WG betrachtet, wird er nachdenklich und beginnt zu rechnen:

Wenn er zum nächsten 1. Januar zu seiner Mutter und seinem Vater zurückziehen würde – also genau an seinem 22. Geburtstag – würde er sich die Miete und weitere Ausgaben für den Haushalt sparen. Er rechnet mit einer Summe von 9000 €, die er dadurch jährlich zum Jahresende zu einem Jahreszins von 2 % anlegen könnte.

(Gehen Sie im Folgenden von Ein- und Auszahlungen auf ein Konto mit einem konstanten jährlichen Zinssatz von 2 % aus.)

a) Wieviel hätte er so bis zu seinem 30. Geburtstag angespart?

b) Wenn er an seinem 30. Geburtstag ausziehen würde: Wie lange könnte er von diesem Konto ab dann monatlich vorschüssig 500 € entnehmen?

c) Gert beschließt, so lange bei seiner Mama wohnen zu bleiben, bis er von dem angesparten Geld bis zu seinem 80. Geburtstag jährlich nachschüssig 40 000 € entnehmen kann. Wie lange dürfen die Eltern bei Durchführung dieses Plans das Kinderzimmer für ihn freihalten?

Lösungshinweis:

a) $R_n = 9000 \cdot \dfrac{1{,}02^8 - 1}{1{,}02 - 1} = 77\,246{,}72\,€$

b) $R_0 = 77\,246{,}72 = 500 \cdot \left(12 + 0{,}02\frac{13}{2}\right) \cdot \dfrac{1{,}02^n - 1}{1{,}02 - 1} \cdot 1{,}02^{-n}$

$$\Rightarrow n = -\frac{1}{\ln 1{,}02} \cdot \ln\left[1 - \frac{77\,246{,}72 \cdot 0{,}02}{500 \cdot \left(12 + 0{,}02\frac{13}{2}\right)}\right] \approx 14{,}847$$

c) Endwert nach n Jahren Ansparphase gleich Barwert von dann noch $58 - n$ Jahren Entnahmephase:

$$\begin{aligned}
& 9000 \cdot \frac{1{,}02^n - 1}{1{,}02 - 1} = 40\,000 \cdot \frac{1{,}02^{58-n} - 1}{1{,}02 - 1} \cdot 1{,}02^{-(58-n)} \\
\Leftrightarrow\quad & \tfrac{9}{40} \cdot (1{,}02^n - 1) = 1 - 1{,}02^{n-58} \\
\Leftrightarrow\quad & 1{,}02^n \left(\tfrac{9}{40} + 1{,}02^{-58}\right) = \tfrac{9}{40} + 1 \\
\Leftrightarrow\quad & n = \ln\left[\left(\tfrac{9}{40} + 1\right) / \left(\tfrac{9}{40} + 1{,}02^{-58}\right)\right] / \ln 1{,}02 \approx 41{,}17 \text{ Jahre}
\end{aligned}$$

Also müsste er bis zu seinem 63. Geburtstag (22 + 41,17) bei Mama wohnen bleiben.

Aufgabe 5 — 7 Punkte

Gegeben seien die Funktionen $s, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$s(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right) \quad \text{und} \quad c(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right).$$

a) Zeigen Sie, dass $c(x)^2 - s(x)^2 = 1$ gilt.

b) Bestimmen Sie die Ableitungen der Funktionen s und c, und drücken Sie diese wieder mithilfe der Funktionen s und c aus.

Lösungshinweis:

a) $$\begin{aligned} c^2 - s^2 &= \tfrac{1}{4}\left[\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x} - \left(\mathrm{e}^{2x} - 2 + \mathrm{e}^{-2x}\right)\right] \\ &= \tfrac{1}{4} \cdot 4 = 1 \end{aligned}$$

Oder alternativ: $$\begin{aligned} c^2 - s^2 &= (c-s)(c+s) \\ &= \left(\tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right)\right)\left(\tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right)\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= \tfrac{1}{4} \cdot 2\mathrm{e}^{-x} \cdot 2\mathrm{e}^{x} = 1 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} s'(x) &= \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right) = c(x) \\ c'(x) &= \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right) = s(x) \end{aligned}$$

Aufgabe 6 — 12 Punkte

Gegeben ist die reelle Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x^4 - 2x^2 + (2x^2+1)y^2.$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten von f.

b) Bestimmen Sie alle Punkte, an denen der Gradient von f gleich 0 ist.

c) Bestimmen Sie die Hessematrix $H_f(x,y)$.

d) Bestimmen Sie alle Maximal- und Minimalstellen sowie die zugehörigen Werte von f.

Lösungshinweis:

a) Der Gradient von f ist

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x(x^2+y^2-1) \\ 2y(2x^2+1) \end{pmatrix}$$

b) $\nabla f = 0 \quad \Rightarrow \quad (x,y) = (0,0), (\pm 1, 0)$.

c) Für die Hessematrix ergibt sich:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 + 4y^2 & 8xy \\ 8xy & 2(2x^2+1) \end{pmatrix}$$

.

d) Für die kritischen Punkte erhält man:

- $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; indefinit (Sattel) mit $f(0,0) = 0$.
- $H_f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$; positiv definit, jeweils lokales Minimum bei $f(\pm 1, 0) = -1$.