Hochschule Augsburg - Fakultät AW

Professur für
Wirtschaftsmathematik und Statistik

Prof. Dr. Stefan Etschberger

Name: ___________________________

Matrikel-Nr.: ___________________________

Nachholklausur Wirtschafts- und Finanzmathematik

Prüfer	PO Studienstart vor WS 2016/17
Prüfungsdatum	
Prüfungsort	Augsburg
Studiengang	IM und BW
Bearbeitungszeit:	90 Minuten
Punkte:	60
Die Klausur umfasst	6 Aufgaben auf 21 Seiten
Zugelassene Hilfsmittel	Schreibzeug, Taschenrechner, der nicht 70! berechnen kann, ein mit dem Namen versehenes Din-A4 Blatt mit handgeschriebenen Notizen (keine Kopien oder Ausdrucke)

Weitere Regularien:

- Bitte überprüfen Sie *vor* Bearbeitungsbeginn die Vollständigkeit der Klausurangabe.
- Tragen Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein.
- Die Heftung der Klausur darf nicht verändert werden.
- Bitte tragen Sie die Lösung zu den jeweiligen Aufgaben *nur* direkt im Anschluss an die jeweilige Angabe ein. Sollte der Platz dort nicht ausreichen, verwenden Sie die Ersatzblätter am Ende der Klausurangabe.
- Der benutzte Lösungsweg muss klar erkennbar sein.
- Die Klausur ist in ordentlich lesbarer Form zu bearbeiten. Schwer lesbare Teile der Klausur werden als ungültig ersatzlos gestrichen.
- Die Klausur unterliegt der zur Zeit gültigen Prüfungsordnung.
- Bitte verwenden Sie *keine rote Farbe* zur Bearbeitung der Klausur.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
Punkte						

Aufgabe 1 — 10 Punkte

a) Geben Sie die explizite Form der im folgenden rekursiv definierten Folge a_n an:

$$a_n = a_{n-1} \cdot 2 \quad \text{mit} \quad a_0 = 2$$

b) Geben Sie die Grenzwerte der Folgen b_n und c_n an, die folgendermaßen definiert sind:

$$b_n = \frac{1}{\mathrm{e}^n} \quad \text{und} \quad c_n = \frac{(x^2+2)^2 + x^3}{x^4 + x^2 + 1}$$

c) Zeigen Sie, dass die im folgenden definierte Reihe r_n konvergent ist und geben Sie ihren Grenzwert an:

$$r_n = \sum_{i=1}^{n} (1-q)^i \quad \text{mit} \quad q \in (0;1)$$

Aufgabe 2 **10 Punkte**

a) In dem nachfolgenden Tableau zur Berechnung der Inversen von Matrix A fehlen einige Einträge. Bitte ergänzen Sie diese fehlenden Einträge. Die Lösungen dürfen direkt in das Tableau eingetragen werden.

Zeile	A			E			Umformung
(1)		2	4	1		0	
(2)	1		2		1	0	
(3)	4	2		0	0		
(4)	1	2	4	1	0	0	(1)
(5)	0	0	-2	-1		0	(2) $-$ (1)
(6)	0	-6	-14	-4	0	1	(3) $- 4 \cdot$ (1)
(7)	1	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	(4) $+ \frac{1}{3} \cdot$ (6)
(8)	0		$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6} \cdot$ (6)
(9)	0	0	-2	-1	1	0	(5)
(10)	1	0	0				
(11)	0	1	0				
(12)	0	0	1				

b) Bilden Sie die Inverse zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

c) Lösen Sie das Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mithilfe der Inversen von $\mathbf{A}$.

Aufgabe 3 **10 Punkte**

Gegeben ist das folgende lineare Optimierungsproblem mit den Strukturvariablen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$, der Zielfunktion F und den Nebenbedingungen N_1, N_2 und N_3 mit

$$\begin{array}{rrcrl} \text{Zielfunktion:} & mx_1 + 2x_2 & \to & \min & (F) \\ \text{Nebenbedingungen:} & kx_1 + x_2 & \leqq & 5 & (N_1) \\ & x_1 \phantom{{}+2x_2} & \leqq & 5 & (N_2) \\ & -2x_1 + x_2 & \leqq & -1 & (N_3) \\ & x_1 + 3x_2 & \geqq & 11 & (N_4) \end{array}$$

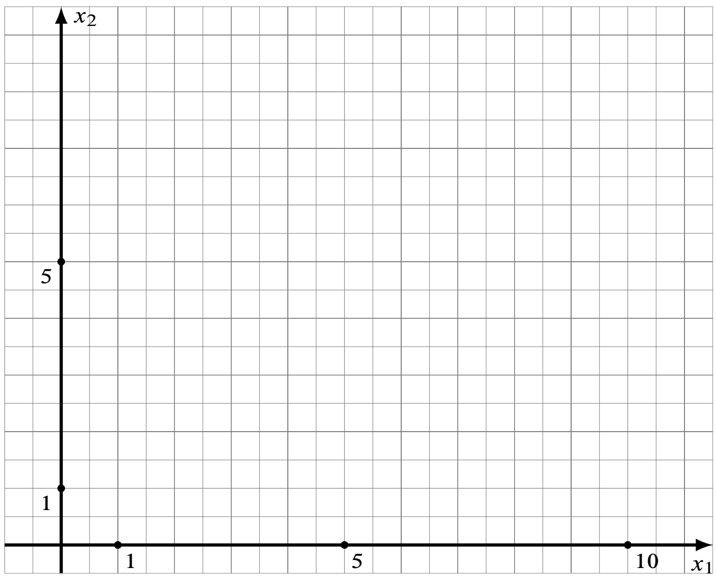
Für die Teilaufgaben a) bis c) sei der Wert der Konstanten k in Restriktion R_1 gleich 0 und der Wert der Konstanten m in der Zielfunktion gleich 1.

a) Skizzieren Sie den Zulässigkeitsbereich Z des Problems. Benutzen Sie dazu das vorgegebene Koordinatensystem rechts.

b) Berechnen Sie die relevanten Eckpunkte von Z.

c) Benutzen Sie die Ergebnisse aus Teilaufgabe b) und bestimmen Sie damit die Menge der Optimallösungen des Problems.

d) Jetzt sei $m = 2/3$. Bestimmen Sie damit alle optimalen Lösungen.



d) Wie klein kann $k \in (-\infty; 0)$ in Nebenbedingung N_1 werden, so dass der Zulässigkeitsbereich des Problems begrenzt bleibt.

Aufgabe 4 — 12 Punkte

Sven Sonneohr hat sich mit einer Spaßpartei als Kandidat für das Europaparlament aufstellen lassen und nach dem Wegfall der 3 %-Hürde tatsächlich ein Mandat als Abgeordneter ergattert.

Sein Plan sieht folgendermaßen aus: Er möchte auf keinen Fall sinnvoll am politischen Geschehen teilnehmen, sondern nur von seinen Privilegien als Parlamentarier profitieren. Er freut sich neben dem monatlichen (steuerfreien) Gehalt von 8000 € auch auf eine zusätzliche Pauschale von 4000 € (ebenfalls steuerfrei), die er erhält, ohne über deren Verwendung Rechenschaft ablegen zu müssen. Daneben bekommt er weitere Zulagen, Sitzungsgelder, Erstattungen für Fahrten und Geld für abrechenbare Sachaufwendungen sowie Übergangsgeld nach dem Ausscheiden.

Er schätzt, dass er dadurch ab dem 1.1.2015 nach Abzug seiner Unkosten 5 Jahre lang jährlich nachschüssig Netto 180 000 € auf ein mit 3 % verzinstes Konto einzahlen kann.

a) Welche Summe hätte er auf diese Weise bis zum 1.1.2020 angespart?

Anschließend möchte er von diesem Konto monatlich Geld entnehmen.

b) Welchen konstanten Betrag könnte er pro Monat ab dem 1.1.2020 vorschüssig entnehmen, wenn das Kapital 55 Jahre lang (bis zu seinem 90. Lebensjahr) reichen soll?

c) Wie lange würde das angesparte Kapital ab dem 1.1.2020 reichen, wenn Karl pro Monat vorschüssig 4000 € entnimmt?

d) Wie lange würde es reichen, wenn er pro Monat vorschüssig 2300 € entnimmt?

Aufgabe 5 — 10 Punkte

Gegeben sei die Funktion $\Theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\Theta(s,t) = s^3 + st^2 - s\,.$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten $\nabla\Theta(s,t)$ und ermitteln Sie alle kritischen Punkte der Funktion Θ, also die Nullstellen des Gradienten.

b) Bestimmen Sie die Hessematrix von Θ und geben Sie für jeden der kritischen Punkte an, ob es sich um ein lokales Extremum oder einen Sattelpunkt handelt oder ob keine Aussage mit Hilfe der Hessematrix möglich ist.

Aufgabe 6 10 Punkte

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = a^2 - x^2,$$

mit $0 < a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie a so, dass die Fläche, die von der Funktion f und der x-Achse eingeschlossen wird 36 ist.