Aufgabe 1 — 10 Punkte

a) Geben Sie die explizite Form der im folgenden rekursiv definierten Folge a_n an:

$$a_n = a_{n-1} \cdot 2 \quad \text{mit} \quad a_0 = 2$$

b) Geben Sie die Grenzwerte der Folgen b_n und c_n an, die folgendermaßen definiert sind:

$$b_n = \frac{1}{\mathrm{e}^n} \quad \text{und} \quad c_n = \frac{(n^2+2)^2 + n^3}{n^4 + n^2 + 1}$$

Dabei bezeichnet e die Eulersche Zahl.

c) Zeigen Sie, dass die im folgenden definierte Reihe r_n konvergent ist und geben Sie ihren Grenzwert an:

$$r_n = \sum_{i=1}^{n} (1-q)^i \quad \text{mit} \quad q \in (0;1)$$

a) $a_n = 2^{n+1}$

b) $b_n = \underbrace{\left(\frac{1}{e}\right)}_{<1}^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$c_n = \frac{n^4 + 4n^2 + 4 + n^3}{n^4 + n^2 + 1} = \frac{1 + 4\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 4\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^4 + \frac{1}{n}}{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^4} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

c) $r_n = \dfrac{1-(1-q)^{n+1}}{1-(1-q)} = \dfrac{1-\overbrace{(1-q)}^{<1}{}^{n+1}}{q} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{q}$

Aufgabe 2 — 10 Punkte

a) In dem nachfolgenden Tableau zur Berechnung der Inversen von Matrix A fehlen einige Ein- [illegible] as Tableau eingetragen werden.

Zeile	A			E			Umformung
(1)	$\boxed{1}$	2	4	1	$\boxed{0}$	0	
(2)	1	$\boxed{2}$	2	$\boxed{0}$	1	0	
(3)	4	2	$\boxed{2}$	0	0	$\boxed{1}$	
(4)	1	2	4	1	0	0	(1)
(5)	0	0	-2	-1	$\boxed{1}$	0	$(2)-(1)$
(6)	0	-6	-14	-4	0	1	$(3)-4\cdot(1)$
(7)	1	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$(4)+\frac{1}{3}\cdot(6)$
(8)	0	$\boxed{1}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}\cdot(6)$
(9)	0	0	-2	-1	1	0	(5)
(10)	1	0	0	$\boxed{0}$	$\boxed{-\frac{1}{3}}$	$\boxed{\frac{1}{3}}$	$\boxed{(7)-\frac{1}{3}(9)}$
(11)	0	1	0	$\boxed{-\frac{1}{2}}$	$\boxed{\frac{7}{6}}$	$\boxed{-\frac{1}{6}}$	$\boxed{(8)+\frac{7}{6}\cdot(9)}$
(12)	0	0	1	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$\boxed{-\frac{1}{2}}$	$\boxed{0}$	$\boxed{-\frac{1}{2}\cdot(9)}$

b) Bilden Sie die Inverse zur Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

c) Lösen Sie das Gleichungssystem $Cx = b$ mit

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mithilfe der Inversen von C.

$$C^{-1} = \frac{1}{1\cdot 8 - 3\cdot 2} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$x = C^{-1}\cdot b = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

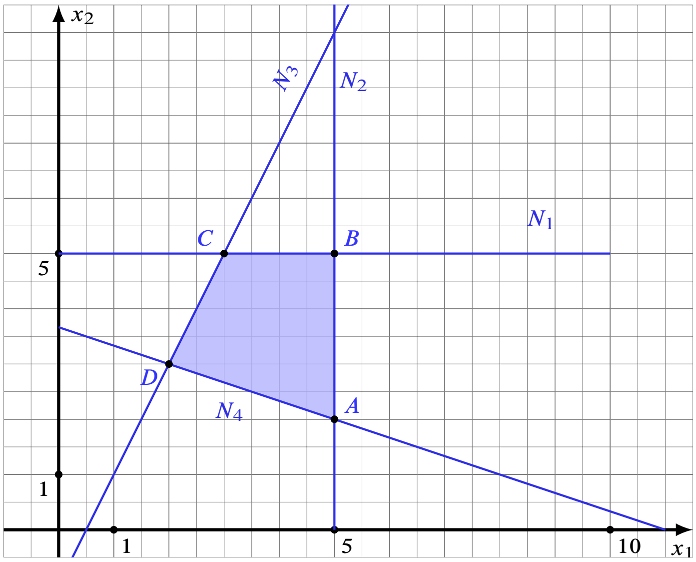
Übungsklausur 2:
PO Studienstart vor WS 2016/17

Aufgabe 3 — 10 Punkte

Gegeben ist das folgende lineare Optimierungsproblem mit den Strukturvariablen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$, der Zielfunktion F und den Nebenbedingungen N_1, N_2 und N_3 mit

$$\begin{array}{rrcrl} \text{Zielfunktion:} & mx_1 + 2x_2 & \to & \min & (F) \\ \text{Nebenbedingungen:} & kx_1 + \ x_2 & \leqq & 5 & (N_1) \\ & x_1 \qquad & \leqq & 5 & (N_2) \\ & -2x_1 + \ x_2 & \leqq & -1 & (N_3) \\ & x_1 + 3x_2 & \geqq & 11 & (N_4) \end{array}$$

Für die Teilaufgaben a) bis c) sei der Wert der Konstanten k in Nebenbedingung N_1 gleich 0 und der Wert der Konstanten m in der Zielfunktion gleich 1.



a) Skizzieren Sie den Zulässigkeitsbereich Z des Problems. Benutzen Sie dazu das vorgegebene Koordinatensystem rechts.

b) Berechnen Sie die relevanten Eckpunkte von Z.

c) Benutzen Sie die Ergebnisse aus Teilaufgabe b) und bestimmen Sie damit die Menge der Optimallösungen des Problems.

d) Jetzt sei $m = 2/3$ und weiterhin $k = 1$. Bestimmen Sie damit alle optimalen Lösungen.

e) Wie klein kann $k \in (-\infty; 0)$ in Nebenbedingung N_1 werden, so dass der Zulässigkeitsbereich des Problems begrenzt bleibt.

Lösungshinweis:

a) siehe Zeichnung

b) $A = (5{,}2), B = (5{,}5), C = (3{,}5), D = (2{,}3)$

c) $\text{ZF}(A) = 9$,
$\text{ZF}(B) = 15$,
$\text{ZF}(C) = 13$,
$\text{ZF}(D) = 8$,
optimal ist also D

d) $m = 2/3 : \text{ZF}(A) = \text{ZF}(D) = 22/3$. Also: A, D und die Verbindungsstrecke sind optimal.

e) Z ist unbegrenzt, wenn N_1 steiler las N_3, also für $k < -2$ (denn $N_1 : x_2 \leqq -kx_2 + 5$).

Aufgabe 4 — 10 Punkte

Sven Sonneohr hat sich mit einer Spaßpartei als Kandidat für das Europaparlament aufstellen lassen und nach dem Wegfall der 3 %-Hürde tatsächlich ein Mandat als Abgeordneter ergattert.

Sein Plan sieht folgendermaßen aus: Er möchte auf keinen Fall sinnvoll am politischen Geschehen teilnehmen, sondern nur von seinen Privilegien als Parlamentarier profitieren. Er freut sich neben dem monatlichen (steuerfreien) Gehalt auch auf eine zusätzliche Pauschale (ebenfalls steuerfrei), die er erhält, ohne über deren Verwendung Rechenschaft ablegen zu müssen. Daneben bekommt er weitere Zulagen, Sitzungsgelder, Erstattungen für Fahrten und Geld für abrechenbare Sachaufwendungen sowie Übergangsgeld nach dem Ausscheiden.

Er schätzt, dass er dadurch ab dem 1.1.2015 nach Abzug seiner Kosten 5 Jahre lang jährlich nachschüssig Netto 180 000 € auf ein mit 3 % verzinstes Konto einzahlen kann.

a) Welche Summe hätte er auf diese Weise bis zum 1.1.2020 angespart?

Anschließend möchte er von diesem Konto monatlich Geld entnehmen.

b) Welchen konstanten Betrag könnte er pro Monat ab dem 1.1.2020 vorschüssig entnehmen, wenn das Kapital 55 Jahre lang (bis zu seinem 90. Lebensjahr) reichen soll?

c) Wie lange würde das angesparte Kapital ab dem 1.1.2020 reichen, wenn Sven pro Monat vorschüssig 4000 € entnimmt?

d) Wie lange würde es reichen, wenn er pro Monat vorschüssig 2300 € entnimmt?

Lösungshinweis:

a) Nachschüssiger Rentenendwert: $R_n = 1{,}8 \times 10^5 \cdot \dfrac{1{,}03^5 - 1}{1{,}03 - 1} \approx 9{,}5564 \times 10^5$ €.

b) Rentenendwert Ansparphase = (monatlich vorschüssiger) Rentenbarwert Entnahmephase; gesucht: monatliche Rate r:

$$R_n = \underbrace{r \cdot (12 + i \cdot \tfrac{13}{2})}_{r_e} \cdot q^{-55} \cdot \frac{q^{55-1}}{q-1} \quad \Leftrightarrow \quad r = R_n \frac{q-1}{(1-q^{-55}) \cdot (12 + i \cdot \frac{13}{2})} \approx 2926{,}81\,€$$

c) Wie b), jetzt Laufzeit n unbekannt und $r = 4000$:

$$R_n = 4000 \cdot (12 + i \cdot \tfrac{13}{2}) \cdot q^{-n} \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} \quad \Leftrightarrow \quad R_n = 4000 \cdot (12 + i \cdot \tfrac{13}{2}) \cdot \frac{1 - q^{-n}}{q-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad q^{-n} = 1 - \frac{R_n \cdot i}{4000 \cdot (12 + \cdot \frac{13}{2})}$$

$$\Leftrightarrow \quad n = -\frac{1}{\ln q} \cdot \ln \left[1 - \frac{R_n \cdot i}{4000 \cdot (12 + i \cdot \frac{13}{2})} \right] \approx 29{,}9765 \approx 30 \text{ Jahre}$$

d) $2300 \cdot (12 + i \cdot \frac{13}{2}) / R_n \approx 0{,}029 < 3\,\%$. Damit reicht das Kapital ewig. (Alternativ: Argument des Logarithmus in Formel negativ, deswegen reicht Kapital ewig)

Aufgabe 5 — 10 Punkte

Gegeben sei die Funktion $\Theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\Theta(s,t) = s^3 + st^2 - s\,.$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten $\nabla\Theta(s,t)$.

b) Ermitteln Sie alle kritischen Punkte der Funktion Θ, also die Nullstellen des Gradienten.

c) Bestimmen Sie die Hessematrix von $\Theta(s,t)$.

d) Geben Sie für jeden der kritischen Punkte an, ob es sich um ein lokales Extremum oder einen Sattelpunkt handelt oder ob keine Aussage mit Hilfe der Hessematrix möglich ist.

a) $\nabla\Theta = \begin{pmatrix} 3s^2 + t^2 - 1 \\ 2st \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $s = 0$ und $t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1 \quad (0, \pm 1)$

$t = 0$ und $3s^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow s = \pm\sqrt{\tfrac{1}{3}} \quad (\pm\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,; 0)$

c) $H_\Theta(s,t) = \begin{pmatrix} 6s & 2t \\ 2t & 2s \end{pmatrix}$

d) $H_\Theta(0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad ad - bc < 0 \Rightarrow$ Sattel

$H_\Theta(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad ad - bc < 0 \Rightarrow$ Sattel

$H_\Theta(-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,; 0) = \begin{pmatrix} -6\sqrt{\tfrac{1}{3}} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{\tfrac{1}{3}} \end{pmatrix}$ $\quad ad - bc > 0,\ a < 0 \Rightarrow$ Max

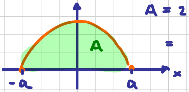
$H_\Theta(+\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,; 0) = \begin{pmatrix} 6\sqrt{\tfrac{1}{3}} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{\tfrac{1}{3}} \end{pmatrix}$ $\quad ad - bc > 0,\ a > 0 \Rightarrow$ Min

Aufgabe 6 — 10 Punkte

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = a^2 - x^2,$$

mit $0 < a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie a so, dass die Fläche, die von der Funktion f und der x-Achse eingeschlossen wird 36 ist.



$A = 2 \cdot \int_0^a (a^2 - x^2)\,dx$

$= 2 \cdot \left[a^2 x - \tfrac{1}{3} x^3 \right]_0^a$

$= 2\left(a^3 - \tfrac{1}{3} a^3\right)$

$= 2 \cdot \tfrac{2}{3} a^3 = \tfrac{4}{3} a^3 = 36 \Leftrightarrow a = 3$