Übungsklausur Wirtschafts- und Finanzmathe
PO Studienstart vor WS 2016/17

Lösungshinweise

Prüfungsdatum: 19. Januar 2015 – Prüfer: Etschberger, Heiden, Jansen

Studiengang: IM und BW

Aufgabe 1 **10 Punkte**

Auf einem Markt konkurrieren zum Zeitpunkt t insgesamt 3 Produkte P_1, P_2 und P_3 mit den jeweiligen Marktanteilen von $x_t^T = \left(\frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{5}{10}\right)$. Die Matrix $A = (a_{ij})_{3,3}$ mit

$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

charakterisiert die anteiligen Käuferfluktuationen zwischen den Produkten, dabei sei $a_{ij} \in [0, 1]$ der Anteil an Käufern von Produkt P_i zum Zeitpunkt t, der zum Zeitpunkt $t + 1$ zu Produkt P_j wechselt.

a) Interpretieren Sie die Koeffizienten a_{12} und a_{21} der Matrix A.

b) Berechnen Sie die Marktanteile der 3 Produkte zum Zeitpunkt $t + 1$.

c) Welche Marktanteile ergeben sich langfristig, wenn sich das Wechselverhalten der Käufer, beschrieben durch die Matrix A, im Zeitablauf nicht ändert, also die Gleichung $x_{t+1}^T = x_t^T \cdot A = x_t^T$ erfüllt ist (stationäre Marktverteilung)?

Hinweise zu c):

- Mit E als einer 3×3-Einheitsmatrix gilt: Die Lösung des Gleichungssystems $x^T \cdot (A-E) = 0$ ist äquivalent zur Lösung des Gleichungssystems $(A-E)^T \cdot x = 0$.
- Bedenken Sie die 4. Gleichung: Die Summe der 3 Marktanteile ist zu jedem Zeitpunkt 100%.

Lösungshinweis:

a) $a_{12} = 0{,}3$ bedeutet: 30 % aller aktuellen P_1-Käufer wechseln im nächsten Zeitraum zu P_2
$a_{21} = 0{,}2$: Von P_2 wechseln 20 % im nächsten Zeitraum zu P_1.

b) $x_{t+1}^T = x_t^T \cdot A = (0{,}29, 0{,}31, 0{,}4)$

c) $(A-E)^T x = 0 \Leftrightarrow = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix} x = 0$

Aufgabe 2 **10 Punkte**

Gegeben ist das folgende lineare Optimierungsproblem mit den Strukturvariablen $x, y \in \mathbb{R}_+$, einer Konstanten $k \in \mathbb{R}$, der Zielfunktion F und den Nebenbedingungen N_1, N_2, N_3 und N_4 mit

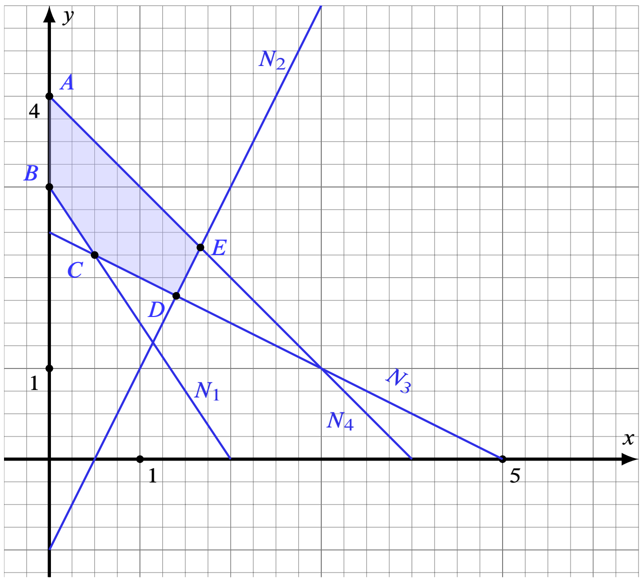
$$\begin{array}{rrcll} \text{Zielfunktion:} & kx + y & \to & \min & (F) \\ \text{Nebenbedingungen:} & 3x + 2y & \geqq & 6 & (N_1) \\ & 2x - y & \leqq & 1 & (N_2) \\ & x + 2y & \geqq & 5 & (N_3) \\ & x + y & \leqq & 4 & (N_4) \end{array}$$

Für die Teilaufgaben a) bis c) sei der Wert der Konstanten k in der Zielfunktion gleich 1.

a) Skizzieren Sie den Zulässigkeitsbereich Z des Problems. Benutzen Sie dazu das vorgegebene Koordinatensystem rechts.

b) Berechnen Sie die relevanten Eckpunkte von Z.

c) Benutzen Sie die Ergebnisse aus Teilaufgabe b) und bestimmen Sie damit die Menge der Optimallösungen des Problems.



Kann k so gewählt werden, dass der Schnittpunkt der Randlinien von

d) N_3 und N_4 bzw. von

e) N_2 und N_4 optimal ist?

Geben Sie k für d) und e) gegebenenfalls an.

Lösungshinweis:

a) siehe Zeichnung

b) $A = (0, 4)$, $B = (0, 3)$, $C = (0.5, 2.25)$, $D = (1.4, 1.8)$, $E(\frac{5}{3}, \frac{7}{3})$

c) $\mathrm{ZF}(A) = 4$,
$\mathrm{ZF}(B) = 3$,
$\mathrm{ZF}(C) = 2{,}75$,
$\mathrm{ZF}(D) = 3{,}2$,
$\mathrm{ZF}(E) = 12/3 = 4$,
optimal ist also C.

d) Das geht nicht, Schnittpunkt ist außerhalb des Zulässigkeitsbereichs.

e) $E = (5/3, 7/3)$ ist optimal, wenn $\mathrm{ZF}(E) \leqq \mathrm{ZF}(A)$ und $\mathrm{ZF}(E) \leqq \mathrm{ZF}(D) \quad \Leftrightarrow$
$k \cdot \frac{5}{3} + \frac{7}{3} \leqq k \cdot 0 + 4 \quad \text{und} \quad k \cdot \frac{5}{3} + \frac{7}{3} \leqq k \cdot \frac{7}{5} + \frac{9}{5} \quad \Leftrightarrow \quad k \leqq 1 \quad \text{und} \quad k \leqq -2 \quad \Leftrightarrow \quad k \leqq -2$

Aufgabe 3 **10 Punkte**

a) Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen

$$a_n = \frac{2}{n!}, \qquad b_n = \sqrt{\frac{4n^2-1}{9n(5+n)}}, \qquad c_n = \left(\frac{1-n}{2n+1}\right)^2$$

b) Gegeben sei die Reihe (t_n) mit

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{p^k}.$$

1. Für welche $p \in \mathbb{R}$ konvergiert (t_n)?
2. Für welches $p \in \mathbb{R}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 10$?

Lösungshinweis:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}, \qquad \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

b)
1. Es muss gelten $\left|\frac{1}{p}\right| < 1$. Daraus folgt $|p| > 1$, also $p \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.
2. $2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = 10 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2p}{p-1} = 10 \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{5}{4}$

Aufgabe 4 **10 Punkte**

Die Eltern von Susi Sorglos möchten ihr ein Studium finanzieren. Dazu schenken sie ihr an ihrem sechsten Geburtstag, dem 1. Januar 2003, eine Kapitalversicherung. Die Eltern verpflichten sich dabei, jährlich vorschüssig ab diesem Datum und an jedem der folgenden Geburtstage einen Betrag von 312 € auf das Versicherungskonto einzuzahlen. Die letzte Einzahlung erfolgt an Susis 18. Geburtstag.

(Gehen Sie im Folgenden von Ein- und Auszahlungen auf ein Konto mit einem konstanten jährlichen Zinssatz von 6% aus.)

a) Über welchen Betrag kann Susi nach der letzten Einzahlung am 1. Januar 2015 verfügen?

b) Susi rechnet damit, dass sie ab dem 1. Januar 2015 bis zum Bachelor 3 Jahre studieren wird. Über welchen Betrag könnte sie monatlich nachschüssig verfügen, wenn Ihr Vermögen zum Beginn Ihres Studiums 10 000 € beträgt?

c) Susi entschließt sich an Ihrem 18. Geburtstag auf die Zuwendung ihrer Eltern zu verzichten, nicht zu studieren und gleich mit ehrlicher Arbeit Geld zu verdienen. Sie möchte erst einige Jahre sparen, dabei rechnet sie damit, pro Jahr 3000 € nachschüssig zurücklegen zu können. Von dem angesparten Geld und den Zinsen (6 % p.a.) möchte sie vor Ihrem 40. Geburtstag eine mehrjährige Weltreise unternehmen.
Wie viele Jahre muss sie arbeiten, bis sie von dem angesparten Geld bis zu Ihrem 40. Geburtstag jährlich nachschüssig 30 000 € entnehmen kann?
(*Hinweise*: Überlegen Sie wie lange das Projekt insgesamt dauert und setzen sie den Endwert der Ansparphase gleich dem Barwert der Weltreisephase.)

Lösungshinweis:

a) Vorschüssige Rente plus die letzte Zahlung am 18. Geburtstag:
$R_n = 312 \cdot \frac{1{,}06^{12}-1}{1{,}06-1} \cdot 1{,}06 + 312 = 5575{,}42\,€$

b) $r_e = r \cdot \left(12 + 0{,}06 \cdot \frac{11}{2}\right) = r \cdot 12{,}33$ und $R_0 = 10.000 = r_e \cdot \frac{1{,}06^3-1}{1{,}06-1} \cdot 1{,}06^{-3}$; damit:

$$r = 10000 \cdot \frac{0{,}06}{12{,}33 \cdot (1 - 1{,}06^{-3})} = 303{,}41\,€$$

c) Endwert Ansparphase ist gleich Barwert Weltreisephase. Gesamtdauer Projekt: 22 Jahre, x Jahre ansparen, $22 - x$ Jahre entnehmen:

$$\begin{aligned}
3000 \cdot \frac{1{,}06^x - 1}{1{,}06 - 1} &= 30\,000 \frac{1{,}06^{22-x} - 1}{1{,}06 - 1} \cdot 1{,}06^{x-22} \\
1{,}06^x - 1 &= 10 \cdot \left(1 - 1{,}06^{x-22}\right) \\
1{,}06^x + 10 \cdot 1{,}06^x \cdot 1{,}06^{-22} &= 11 \\
1{,}06^x &= \frac{11}{1 + 10 \cdot 1{,}06^{-22}} \\
x &= \ln\left(\frac{11}{1+10\cdot 1{,}06^{-22}}\right) \Big/ \ln 1{,}06 \approx 18{,}3542377
\end{aligned}$$

Die Weltreise kann nach der 19. Ansparzahlung, also am 37. Geburtstag starten, Susi kann bis zum 40. Geburtstag damit 3 Jahre auf Weltreise bleiben, bis das Konto vollständig geplündert ist.

Aufgabe 5 **10 Punkte**

Gegeben sei die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot \sqrt{3x^2 + \tfrac{5}{12}}\,.$$

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich von f an.

b) Hat f Nullstellen? Wenn ja: für welche x?

c) Berechnen Sie die erste Ableitung von f.

d) Bestimmen Sie ohne die zweite Ableitung alle Extremalstellen von f.

Lösungshinweis:

a) $D = \mathbb{R}$, da das Argument der Wurzel für kein x negativ wird.

b) f hat keine Nullstellen (Argument der Wurzel ist immer positiv).

c) $$\begin{aligned} f'(x) &= -\mathrm{e}^{-x}\left(3x^2 + \tfrac{5}{12}\right)^{\frac{1}{2}} + \mathrm{e}^{-x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(3x^2 + \tfrac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6x \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{3x^2 + \frac{5}{12}}}\left(-3x^2 - \tfrac{5}{12} + 3x\right) \end{aligned}$$

d) Der Term vor der Klammer ist immer positiv. Nullstellen der Klammer, also für $x^2 - x + \frac{5}{36} = 0$ bei
$x_{1/2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{5}{36}}\right) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} = \begin{cases} 1/6 \\ 5/6 \end{cases}$.
$f'(0) < 0$, also ist f str. mon. fallend für $x \in (-\infty; 1/6)$, f ist str. mon. steigend für $x \in (1/6; 5/6)$ und wieder str. mon. fallend für $x \in (5/6; \infty)$.
Damit hat f ein lokales Minimum bei $x = 1/6$ und ein lokales Maximum bei $x = 5/6$.

Aufgabe 6 **10 Punkte**

Gegeben ist die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$g(s,t) = \frac{1}{3}s^2(s-3) + t(t^2-12)$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten $\nabla g(s,t)$, sowie die kritischen Stellen von g.

b) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix $H_g(s,t)$.

c) Zeigen Sie nun, dass die Funktion g zwei Sattelpunkte, ein lokales Minimum und ein lokales Maximum hat, und geben Sie die jeweiligen Stellen an.

Lösungshinweis:

a) Berechnung des Gradienten:

$$(\nabla g)(s,t) = (s(s-2), 3t^2 - 12)^\top$$

Kritische Stellen sind damit $(0,2)$, $(0,-2)$, $(2,2)$ und $(2,-2)$.

b) Hesse-Matrix:

$$H_g(s,t) = \begin{pmatrix} 2s-2 & 0 \\ 0 & 6t \end{pmatrix}$$

c) Mit $D = \det(H_g) = 6t(2s-2)$ ergibt sich für die vier obigen Punkte:

$$D(0,2) = -24, \quad D(0,-2) = 24, \quad D(2,2) = 24, \quad D(2,-2) = -24$$

Damit sind $(0,2)$ und $(2,-2)$ Sattelpunkte, $(0,-2)$ ist ein relatives Maximum und $(2,2)$ ein relatives Minimum.