Hochschule Augsburg - Fakultät AW

Professur für
Wirtschaftsmathematik und Statistik

Prof. Dr. Stefan Etschberger

Name: ..........................

Matrikel-Nr.: ..........................

# Nachholklausur Wirtschafts- und Finanzmathematik

| | |
|---|---|
| Prüfer | Etschberger, Heiden, Jansen |
| Prüfungsdatum | 7. Juli 2015 |
| Prüfungsort | Augsburg |
| Studiengang | IM und BW |
| Bearbeitungszeit: | 90 Minuten |
| Punkte: | 90 |
| Die Klausur umfasst | 6 Aufgaben auf 17 Seiten |
| Zugelassene Hilfsmittel | Schreibzeug, Taschenrechner, der nicht 70! berechnen kann, ein mit dem Namen versehenes Din-A4 Blatt mit handgeschriebenen Notizen (keine Kopien oder Ausdrucke) |

Weitere Regularien:

- Bitte überprüfen Sie *vor* Bearbeitungsbeginn die Vollständigkeit der Klausurangabe.
- Tragen Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein.
- Die Heftung der Klausur darf nicht verändert werden.
- Bitte tragen Sie die Lösung zu den jeweiligen Aufgaben *nur* direkt im Anschluss an die jeweilige Angabe ein. Sollte der Platz dort nicht ausreichen, verwenden Sie die Ersatzblätter am Ende der Klausurangabe.
- Der benutzte Lösungsweg muss klar erkennbar sein.
- Die Klausur ist in ordentlich lesbarer Form zu bearbeiten. Schwer lesbare Teile der Klausur werden als ungültig ersatzlos gestrichen.
- Die Klausur unterliegt der für Sie zur Zeit gültigen Prüfungsordnung.
- Bitte verwenden Sie *keine rote Farbe* zur Bearbeitung der Klausur.

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | | | | | | |

## Aufgabe 1 **12 Punkte**

Bestimmen Sie mit dem Verfahren von Gauß und Jordan für $x_1, \ldots, x_5 \in \mathbb{R}$ die Menge $L$ aller Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & - & 3x_5 & = & 1 \\
 & & x_2 & & & + & x_4 & - & 3x_5 & = & 0 \\
 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & + & 6x_5 & = & 3
\end{array}$$

## Aufgabe 2 **15 Punkte**

a) Bestimmen Sie die Grenzwerte für $n \to \infty$ der Folgen

$$a_n = \frac{(2n-1)^2(1-n)}{2n(n^2+1)}, \quad b_n = \frac{(n+1)!}{n!(2n-1)}, \quad c_n = \frac{1-3^{-n}}{1-2^{-n}}.$$

Gegeben ist für Teilaufgabe b) und c) die Reihe $(r_n)$ mit

$$r_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{a^j}{3^{j+1}}.$$

b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ konvergiert $(r_n)$?

c) Berechnen Sie für $a = 1$ den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} r_n$.

## Aufgabe 3 **12 Punkte**

Gärtner Blümel will seinen 100 $m^2$ großen Garten mit Kartoffeln und Bohnen bepflanzen. Folgende Daten stehen zur Verfügung:

| | Kartoffeln | Bohnen |
|---|---|---|
| Arbeits- und Materialkosten [€/$m^2$] | 12 | 2 |
| Reingewinn [€/$m^2$] | 20 | 10 |

Herr Blümel möchte

- seinen Reingewinn maximieren (Zielfunktion),
- kann maximal 900 € investieren (Nebenbedingung 1) und außerdem
- nicht mehr als 60% der 100 $m^2$ Anbaufläche für Bohnen beanspruchen (Nebenbedingung 2).
- Die gesamte Anbaufläche ist 100 $m^2$. (Nebenbedingung 3).

a) Formulieren Sie das Problem als lineares Programm mit Zielfunktion und Nebenbedingungen. Bezeichnen Sie dabei die Anbaufläche für Kartoffeln mit $x_1$, die für Bohnen mit $x_2$.

b) Skizzieren Sie den Zulässigkeitsbereich. Markieren Sie die theoretisch möglichen Optimallösungen.

c) Wieviel $m^2$ soll Herr Blümel mit Kartoffeln und wieviel mit Bohnen bepflanzen, damit sein Reingewinn möglichst groß wird?
(*Hinweis*: Berechnung der relevanten Schnittpunkte ist erforderlich, Durchführung des Simplex ist nicht verlangt)

## Aufgabe 4 **17 Punkte**

Anton Arglos hat von seiner Großmutter 30 000 € geschenkt bekommen, um sein Studium zu finanzieren. Nehmen Sie für die Aufgaben a) und b) an, dass Anton sein Studium ausschließlich aus dem Geldgeschenk finanziert und von einem konstanten, jährlichen Zins von 7 % ausgegangen werden kann. Stellen Sie Ihren Rechenweg jeweils ausführlich und nachvollziehbar dar!

a) Wie lang darf Antons Studium dauern, wenn er jährlich nachschüssig 7000 € entnimmt?

b) Anton fällt auf, dass er das Geld eigentlich jährlich vorschüssig benötigt, aber mit 5000 € jährlich auskommt. Wie lang kann sein Studium unter diesen Annahmen dauern?

Am Ende seines Studiums bemerkt der geschäftstüchtige Anton, dass er nun insgesamt ein Vermögen von 50 000 € besitzt. Anton bekommt ein Angebot seiner Hausbank, das Geld als Festgeld zum jährlichen Zinssatz von $i_{\text{Haus}}$ anzulegen. Anton freut sich, da er nun weiß, dass er in 12 Jahren ein Endvermögen von 100 000 € besitzen wird.

c) Wie hoch ist der Zinssatz $i_{\text{Haus}}$, den Anton von seiner Hausbank angeboten bekommt?

d) Die Onlinebank Fastmoney bietet ihm eine Anlage zu einem monatlichen Zins (mit monatlicher Zinsausschüttung) von 0,5 % an. Soll er das Angebot von Fastmoney gegenüber dem Angebot seiner Hausbank bevorzugen? Nehmen Sie (unabhängig von Ihrer Lösung unter Aufgabe c) an, dass die Hausbank Anton einen jährlichen Zins von 6 % anbietet) Begründen Sie Ihre Empfehlung rechnerisch!

Anton entschließt sich, anstatt das Geld anzulegen ein Haus zu kaufen. Hierfür nimmt er zusätzlich einen Kredit von 200 000 € zu einem konstanten Zins von 8 % auf. Der Kredit ist mit gleichbleibenden Tilgungsraten in 20 Jahren zu tilgen.

e) Wieviel Zinsen muss Anton im 15. Jahr bezahlen?

## Aufgabe 5 **17 Punkte**

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x^2+2x}$$

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von $f$.

b) Bestimmen Sie die Extremstelle der Funktion, und geben Sie an, um welche Art von Extremum es sich handelt.

c) Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

d) Gibt es eine Parabel, die durch alle Nullstellen und den Extrempunkt der Funktion $f$ geht? Begründen Sie Ihre Entscheidung und geben Sie ggf. die funktionale Form $p(x)$ der Parabel an.

## Aufgabe 6 **17 Punkte**

Gegeben sei folgende Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(s,t) = (s^2 + t^2) \cdot e^{-t} \, .$$

a) Berechnen Sie den Funktionswert $f(2,3)$.

b) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f$.

c) Berechnen Sie alle kritischen Stellen, also die Nullstellen von $\nabla f$.
(es muss keine Hessematrix von $f$ berechnet werden)

Im Folgenden werde die Funktion

$$g(a,b) = a^3 + a^2 \cdot b - b^2 - 4 \cdot b$$

betrachtet. Zu $g$ wurden bereits die kritischen Stellen $(0,-2)$, $(1,-\frac{3}{2})$ sowie $(-4,6)$ und die folgende Hessematrix $H_g$ berechnet:

$$H_g = \begin{pmatrix} 6a + 2b & 2a \\ 2a & -2 \end{pmatrix}$$

d) Untersuchen Sie die Funktion $g(a,b)$ in den angegebenen kritischen Stellen auf lokale Extrema und Sattelpunkte.