Klausur Wirtschafts- und Finanzmathematik
Lösungshinweise

Prüfungsdatum: 18. Januar 2016 – Prüfer: Etschberger, Heiden, Jansen
Studiengang: IM und BW
Punkte: 15, 15, 15, 15, 15, 15 ; Summe der Punkte: 90

Aufgabe 1 — 15 Punkte

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Teilaufgaben a) bis e) gelte zunächst $\alpha = \beta = \gamma = 2$. Berechnen Sie damit, falls möglich:

a) $A \cdot B$,

b) $B \cdot A$,

c) $B^T \cdot A^T$,

d) $B^{-1} \cdot A^T$.

e) $\left(B \cdot B^T\right)^{-1}$

Jetzt bezeichnen α, β, γ reelle Konstanten mit $\gamma \neq 0$.

f) Berechnen Sie in Abhängigkeit von α, β, γ die inverse Matrix von A.

Lösungshinweis:

a) nicht definiert

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) nicht definiert

d) nicht definiert

e) $\left(B \cdot B^T\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

f) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha/\gamma \\ 0 & 1 & -\beta/\gamma \\ 0 & 0 & -1/\gamma \end{pmatrix}$

Aufgabe 2 **15 Punkte**

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und geben Sie, falls möglich, jeweils den Grenzwert an:

a) $u_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1-i^2}{2(i+4)^2}$

b) $v_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{2^{2i+1}}{5^i}$

c) $w_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{2^{2i}}{i!}$

Lösungshinweis:

a) Der Ausdruck $\frac{1-i^2}{2(i+4)^2}$ ist keine Nullfolge. Es gilt

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1-i^2}{2(i+4)^2} = \lim_{i\to\infty} \frac{1-i^2}{2i^2+16i+32)} = -\frac{1}{2}$$

Damit ist die Reihe divergent.

b) Bei der Reihe handelt es sich um eine geometrische Reihe und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{2^{2i+1}}{5^i} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{2\cdot 4^i}{5^i} = \lim_{n\to\infty} 2\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{4}{5}\right)^i = 2\cdot \frac{1}{1-\frac{4}{5}} = 10.$$

c) Um die Konvergenz zu untersuchen benutzt man das Quotientenkriterium. Es ergibt sich mit $a_i = \frac{2^{2i}}{i!}$

$$\lim_{i\to\infty} \left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| = \lim_{i\to\infty} \left|a_{i+1}\cdot\frac{1}{a_i}\right| = \lim_{i\to\infty} \frac{2^{2(i+1)}}{(i+1)!}\cdot\frac{i!}{2^{2i}} = \lim_{i\to\infty} \frac{2^2}{i+1} = 0.$$

Damit ist die Reihe konvergent. (Nicht verlangt: Der Grenzwert der Reihe ist e^4).

Aufgabe 3 **15 Punkte**

Gegeben ist das folgende lineare Optimierungsproblem mit den Strukturvariablen $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}_+$, der Zielfunktion Z und den Nebenbedingungen N_1, N_2 und N_3 mit

Z	$6x_1$	$+$	$5x_2$	$+$	$4x_3$	$\rightarrow$	max
N_1	$2x_1$	$+$	x_2	$+$	x_3	$\leqq$	180
N_2	x_1	$+$	$3x_2$	$+$	$2x_3$	$\leqq$	300
N_3	$2x_1$	$+$	x_2	$+$	$2x_3$	$\leqq$	240

a) Stellen Sie das Start-Tableau des Simplex-Algorithmus auf.

b) Nach einer Iteration des Simplex-Algorithmus ergibt sich folgendes Tableau (mit der Zielfunktion in Zeile 5):

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3		Operation
5	0	-2	-1	3	0	0	540	$1 + 3 \cdot 2$
6	1	$1/2$	$1/2$	$1/2$	0	0	90	$+1/2 \cdot 2$
7	0	$5/2$	$3/2$	$-1/2$	1	0	210	$3 - 1/2 \cdot 2$
8	0	0	1	-1	0	1	60	$4 - 1 \cdot 2$

Vervollständigen Sie den Simplexalgorithmus bis zum Erreichen einer optimalen Lösung.

c) Geben Sie im Optimum jeweils den Wert der Struktur- und der Schlupfvariablen sowie den Wert der Zielfunktion an.

Lösungshinweis:

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3		Operation
1	-6	-5	-4	0	0	0	0	
2	2	1	1	1	0	0	180	
3	1	3	2	0	1	0	300	
4	2	1	2	0	0	1	240	
5	0	-2	-1	3	0	0	540	$1 + 3 \cdot 2$
6	1	$1/2$	$1/2$	$1/2$	0	0	90	$+1/2 \cdot 2$
7	0	$5/2$	$3/2$	$-1/2$	1	0	210	$3 - 1/2 \cdot 2$
8	0	0	1	-1	0	1	60	$4 - 1 \cdot 2$
9	0	0	$1/5$	$13/5$	$4/5$	0	708	$5 + 4/5 \cdot 7$
10	1	0	$1/5$	$3/5$	$-1/5$	0	48	$6 - 1/5 \cdot 7$
11	0	1	$3/5$	$-1/5$	$2/5$	0	84	$+2/5 \cdot 7$
12	0	0	1	-1	0	1	60	$8 + 0 \cdot 7$

Aufgabe 4 **15 Punkte**

Der Ökonomiestudent Karl hat es verpasst, eine Rechnung für sein neues Notebook (welches 1000 € gekostet hat) zu bezahlen. Nun flattert ihm 6 Monate nach dem Kauf eine Mahnung ins Haus, welche Verzugszinsen in Höhe von 50 € fordert.

a) Wie hoch ist der Zinsfuß der Verzugszinsen?

Der geschäftstüchtige Karl hat die 1000 € während der 6 Monate in eine Anlage investiert, die ihm jährlich eine nominale Verzinsung von 15 % bei monatlicher Zinsausschüttung garantiert.

b) Welchen Betrag hat Karl nach den 6 Monaten durch die Anlage (nach Abzug der Verzugszinsen) hinzuverdient?

Nachdem Karl seine Verzugszinsen bezahlt hat, beschäftigt er sich mit seinen Zukunftsplänen. Er ist zur Zeit dabei, ein vielversprechendes Buch an der Schnittstelle von Ökonomie und Philosophie zu verfassen, welches in exakt 3 Jahren erscheinen wird. Ein Verlag bietet ihm zwei Vertragsoptionen an:

(i) Eine monatlich (vorschüssige) Zahlung von 3000 €, welche Karl ab Erscheinen des Buches für die Dauer von 15 Jahren gezahlt wird. Anschließend fallen die Buchrechte an den Verlag und Karl erhält keine weiteren Zahlungen mehr.

(ii) Eine einmalige Zahlung von 450 000 €, welche Karl zum Zeitpunkt des Erscheinens des Buches erhält.

c) Treffen Sie anhand des Rentenbarwerts eine Entscheidung zwischen den Alternativen (i) und (ii). Gehen Sie hierbei von einem jährlichen Zinssatz von 3 % aus.

Karl entscheidet sich für die Einmalzahlung von 450 000 €.

d) Wie lange kann er ab dem Auszahlungszeitpunkt (gehen Sie davon aus, dass er keine weiteren Einnahmen besitzt) von den 450 000 € leben, falls er jährlich vorschüssig 30 000 € benötigt und hierbei von einem jährlichen Zinssatz von 3 % ausgegangen werden kann?

Lösungshinweis:

a) Zinssatz der Verzugszinsen $i = \frac{K_n - K_0}{K_0 \cdot n} = \frac{1050-1000}{1000 \cdot \frac{6}{12}}$ und somit $i = 10\%$

b) $K = 1000 \cdot (1 + {}^{0,15}/_{12})^6 = 1077{,}38$ und somit hat er 77,38 € verdient, nach Abzug der Verzugszinsen bleiben 27,38 € Gewinn.

c) $r_e = 3000 \cdot (12 + 0{,}03 \cdot \frac{12+1}{2}) = 36\,585$ € bekommt er pro Jahr gezahlt.
$R_0 = r_e \cdot \frac{q^{15}-1}{q-1} \cdot \frac{1}{q^{15}} = 36\,585 \cdot \frac{1{,}03^{15}-1}{1{,}03-1} \cdot \frac{1}{1{,}03^{15}} = 436\,749.36$ €
$R_0 \cdot q^{-3} = 399\,687.53$ €, also weniger als bei (ii) mit $450\,000 \cdot 1.03^{-3} = 411\,813.75$ €.
(oder direkt Vergleich von 436 749.36 mit den 450 000)

d) Vorschüssiger Barwert:

$$R_0 = r' \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q^{-n} \Leftrightarrow 450\,000 = 30\,000 \cdot 1{,}03 \cdot \frac{1{,}03^n - 1}{0{,}03} \qquad \text{Jahre}$$

$$\Leftrightarrow \frac{15 \cdot 0.03}{1{,}03} = 1 - 1{,}03^{-n} \Leftrightarrow n = -\ln\left(1 - \frac{0.45}{1.03}\right) / \ln(1.03) \approx 19.43$$

Aufgabe 5 **15 Punkte**

Gegeben sei die folgende Funktion:

$$f(x) = 5x^5 - 4x^4 - \tfrac{9}{2}x^2$$

a) Berechnen Sie bitte die erste, zweite und dritte Ableitung von $f(x)$ und geben Sie diese an.

b) Zeigen Sie, dass $x = 1$ eine Minimalstelle der Funktion $f(x)$ darstellt. Berechnen Sie auch $f(1)$.

c) An der Stelle $x = 0$ ist die zweite Ableitung $f''(0) = -9$. Bekannt sei zudem $f'(0) = 0$. Ist $x = 0$ ein Extremum der Funktion $f(x)$ und wenn ja, was für eines? Begründen Sie Ihre Antwort!

Gegeben seien im Folgenden die Funktion $g(y)$, sowie die erste und zweite Ableitung von g:

$$g(y) = \frac{2-y}{y^2}, \quad g'(y) = \frac{y-4}{y^3}, \quad g''(y) = \frac{12-2y}{y^4}$$

Bitte beantworten Sie rechnerisch folgende Fragen und begründen Sie Ihre Ausführungen jeweils:

d) Für welche Werte von y ist die Funktion $g(y)$ monoton wachsend bzw. fallend?

e) Für welche Werte von y ist die Funktion $g(y)$ konvex bzw. konkav?

Lösungshinweis:

a) $f'(x) = 25x^4 - 16x^3 - 9x$, und somit Nullstellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$
$f''(x) = 100x^3 - 48x^2 - 9$
$f'''(x) = 300x^2 - 96x$

b) $f'(1) = 0$ und $f''(1) = 100 - 48 - 9 > 0$; somit: $x = 1$ ist ein Minimum. $f(1) = -3.5$

c) $f'(0) = 0$ und $f''(0) < 0$ (konkav). Somit ist $f(0)$ ein lokales Maximum.

d) $g'(y) = \frac{y-4}{y^3} \geqq 0$ für $y \geqq 4$ oder $y < 0$ => g wächst monoton für $y \geqq 4$ und $y < 0$
g fällt monoton für alle $y \in \langle 0, 4]$

e) g konvex: $g''(y) = \frac{12-2y}{y^4} \geqq 0$ und somit für $y \in (-\infty, 6)\backslash\{0\}$
g konkav: $y \in (6, \infty)$.

Aufgabe 6 **15 Punkte**

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = y^4 - 2y^2 + (2y^2 - 1)x^2.$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten und damit die sieben kritischen Stellen der Funktion f.

b) Von einer Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kennen Sie bereits die folgenden fünf kritischen Punkte

$$k_1 = (0,0),\ k_2 = (0,-1),\ k_3 = (0,1),\ k_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1),\ k_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\,,$$

sowie die Hesse-Matrix

$$H_g(x,y) = \begin{pmatrix} 4y^2 - 2 & 8xy \\ 8xy & 4\big(3y^2 + x^2 - 1\big) \end{pmatrix}$$

Untersuchen Sie die fünf Stellen und geben Sie an, ob es sich um ein Maximum, ein Minimum oder einen Sattelpunkt handelt.

Lösungshinweis:

a) Zuerst berechnet man die ersten partiellen Ableitungen / den Gradienten

$$(\nabla f)(x,y) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(2y^2 - 1) \\ 4y(y^2 + x^2 - 1) \end{pmatrix}.$$

Aus $f_x = 0$ folgt, dass entweder $x = 0$ oder $y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. Setzt man diese drei Möglichkeiten in f_y ein und setzt $f_y = 0$, so ergeben sich die folgenden kritischen Stellen:

$$(0,0),\quad (0,1),\quad (0,-1),\quad (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}),\quad (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}),\quad (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}),\quad (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}})$$

b) Man setzt die kritischen Stellen in die Hesse-Matrix ein und untersucht diese dann auf Definitheit. Es ergibt sich:

$$H_g\,(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \text{negativ definit} \implies$$

$$H_g\,(0,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \text{positiv definit} \implies \text{Minimum}$$

$$H_g\,(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \text{indefinit} \implies \text{Minimum}$$

$$H_g\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{indefinit} \implies \text{Sattelpunkt}$$

$$H_g\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{indefinit} \implies \text{Sattelpunkt}$$