Nachholklausur Wirtschafts- und Finanzmathematik
Lösungshinweise

Prüfungsdatum: 7. Juli 2016 – Prüfer: Burkart, Etschberger, Jansen
Studiengang: IM und BW
Punkte: 15, 15, 15, 15, 18, 12 ; Summe der Punkte: 90

Aufgabe 1 — 15 Punkte

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Inverse von A unter Benutzung des Algorithmus von Gauß und Jordan.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$Ax = b \quad \text{mit} \quad b = (1{,}2{,}3)^\top ,$$

indem Sie die Lösung aus Teilaufgabe a) verwenden.

c) Sei B eine nicht invertierbare 3×3-Matrix mit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass für die Matrix C mit $C = A \cdot B$ keine inverse Matrix existiert.

Lösungshinweis:

```r
A = matrix(c(2, -1,0,
             3,-2,0,
             1,2,-1), nrow=3, byrow=T)

# a)
A.inv = solve(A)
A.inv

##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    2   -1    0
## [2,]    3   -2    0
## [3,]    8   -5   -1

# b)
x = A.inv %*% c(1,2,3)
as.vector(x)

## [1]  0 -1 -5
```

```r
# c)

B = matrix(c(0,1,0,
             0,-1,1,
             0,0,-1), nrow=3, byrow=T)
C = A %*% B
C # kein voller Rang

##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    0    3   -1
## [2,]    0    5   -2
## [3,]    0   -1    3
```

Aufgabe 2 **15 Punkte**

a) Entscheiden Sie, ob die Folgen (a_n), (b_n) mit

$$a_n = \frac{(2n-1)^3}{n^2 - 7n^3}, \qquad b_n = 1 - \frac{2n!}{3^n}$$

konvergieren und bestimmen Sie ggf. deren Grenzwert.

b) Gegeben ist die rekursive Definition einer Folge (c_n) mit

$$c_{n+1} = \frac{n}{5} \cdot c_n, \qquad c_0 = -\frac{1}{3}.$$

Geben Sie eine explizite Form von (c_n) an.

c) Der Wert der zweiten Partialsumme einer konvergenten, geometrischen Reihe (s_n) sei

$$s_2 = \sum_{i=0}^{2} q^i = \frac{37}{16}.$$

i) Berechnen Sie den Wert von q und begründen Sie warum (s_n) durch die Angabe von s_2 eindeutig ist.

ii) Bestimmen Sie den Grenzwert $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ von (s_n).

Lösungshinweis:

a) ► Bei a_n ergibt sich nach Ausmultiplizieren des Zählers (Binomialsatz):

$$a_n = \frac{8n^3 - 6n^2 + 6n - 3}{-7n^3 + n^2}, \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{8}{7}.$$

► Da $n!$ schneller wächst als 3^n ist $\frac{2!}{3^n}$ divergent, und die Folge b_n hat keinen Grenzwert.

b) Man kann die Folge wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \frac{n}{5} \cdot \frac{n-1}{5} \cdot \frac{n-2}{5} \cdot \dots \cdot \frac{1}{5} \cdot c_0 \\ &= \frac{n!}{5^n} c_0 \\ &= -\frac{n!}{3 \cdot 5^n}. \end{aligned}$$

c) 1. Es gilt:

$$\frac{37}{16} \overset{!}{=} s_2 = 1 + q + q^2$$

Löst man dies mittels quadratischer Ergängung / p-q-Formel / Mitternachtsformel, so ergeben sich die beiden Lösungen: $q_1 = 3/4$ oder $q_2 = -7/4$. Da bekannt ist, dass die Reihe konvergiert muss $|q| < 1$ sein, und damit ist nur die Lösung $q = 3/4$ möglich.

2. Der Grenzwert der Folge ist dann

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^i = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 4.$$

Aufgabe 3 **15 Punkte**

Aufregung am Nordpol: Viele Kinder litten Umfragen zufolge unmittelbar nach dem Nikolausabend des vergangenen Jahres an Unwohlsein. Dieses Jahr will der Nikolaus die Anzahl a der Äpfel und die Anzahl s der Schokoladennikoläuse, die er den Kindern bringt so optimieren, dass das Wohlbefinden der Kinder maximal wird. Dabei gibt es pro Fahrt mit dem Schlitten folgende Einschränkungen zu beachten:

- Die Rentiere schaffen es maximal 2150 kg Zuladung auf dem Schlitten zu transportieren. Der Nikolaus wiegt 150 kg, ein Apfel wiegt 250g, ein Schokonikolaus 50g.
- Damit die alten Äpfel vom letzten Jahr vollständig mitverwertet werden muss er mindestens 2000 Äpfel mitnehmen.
- Schokoladennikoläuse bestellt der Nikolaus günstig für 0,05 € im Internet, während er für die Äpfel (Bioqualität) 1 € pro Stück bezahlen muss. Insgesamt darf er pro Fahrt ein Budget von 4000 € nicht überschreiten.

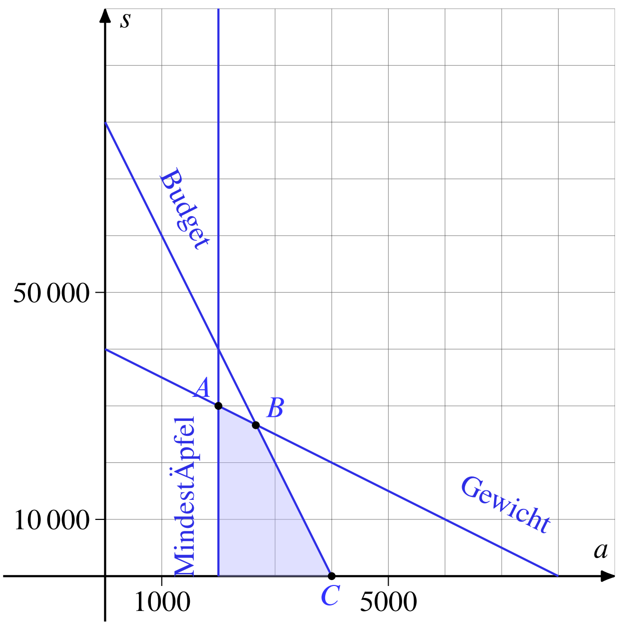
Das zu maximierende Wohlbefinden der Kinder nach dem Besuch des Nikolaus ist gegeben durch die Funktion

$$\mathrm{ZF}(a, s) = 30 \cdot a + 3 \cdot s \ \rightarrow \max$$

a) Formulieren Sie das Problem als lineares Programm mit Zielfunktion und 3 Nebenbedingungen.

b) Skizzieren Sie den Zulässigkeitsbereich. Markieren Sie die theoretisch möglichen Optimallösungen und berechnen Sie deren Koordinaten.

c) Wieviel Äpfel und wieviele Schokonikoläuse muss der Nikolaus pro Fahrt minehmen, so dass es den Kindern hinterher möglichst gut geht?



Lösungshinweis:

a)

Zielfunktion	$30a +$	$3s$	$\rightarrow$	max
NB 1 (Gewicht)	$0{,}25a +$	$0{,}05s$	$\leqq$	2000
NB 2 (Budget)	$a +$	$0{,}05s$	$\leqq$	4000
NB 3 (Äpfel)	a		$\geqq$	2000

b) Siehe Skizze:

c) $A = (2000, 30\,000)$,
$B = \left(\frac{8000}{3}, \frac{80\,000}{3}\right) \approx (2666.67, 26666.67)$,
$C = (4000, 0)$. Damit
$\mathrm{ZF}(A) = 30 \cdot 2000 + 3 \cdot 30\,000 = 150\,000$,
$\mathrm{ZF}(B) = 30 \cdot \frac{8000}{3} + 3 \cdot \frac{80\,000}{3} = 160\,000$
$\mathrm{ZF}(C) = 30 \cdot 4000 + 3 \cdot 0 = 120\,000$
also ist B optimal.

Aufgabe 4 **15 Punkte**

Herr Berger eröffnet am Tag der Geburt seiner Tochter Berta ein Konto, bei dem die Zinsen nach Maßgabe der Sparbuchmethode berechnet und jeweils zum Jahresende gutgeschrieben werden. Der zeitlich konstante Zinssatz beträgt 5 % pro Jahr. Unmittelbar nach Kontoeröffnung zahlt Herr Berger 40 000 DM auf das Konto ein. Weitere Buchungen (außer den jährlichen Zinsgutschriften) erfolgen nicht. Am 28.2.2017 löst Berta das Konto auf und erhält 70 000 € ausbezahlt.

a) Wieviel *ganze* Jahre sind von Einzahlung bis Abhebung vergangen?

b) Wieviele Zinstage sind im Einzahlungsjahr angefallen?

c) An welchem Tag wurde Berta geboren?

*H*inweise:

- *Bankgebühren für Kontoführung, Löschung etc. sind zu vernachlässigen.*
- *Der Umrechnungsfaktor von DM zu € beträgt 1,95583 zu 1.*
- *Tipp zu a): Vernachlässigen Sie zunächst den unterjährigen Zins*

Lösungshinweis:

a) 40 000 DM entspricht $K_0 = {}^{40\,000}/_{1.95583} = 20\,451.68$ €
Ganze Jahre:

$$K_n = K_0 \cdot q^n \Leftrightarrow n = \frac{\ln(K_n) - \ln(K_0)}{\ln q} = \frac{\ln(70\,000) - \ln(20\,451.68)}{\ln(1.05)} \approx 25\,\text{Jahre}$$

b) Jetzt genau: 57 Zinstage im Auszahlungsjahr, gemischte Verzinsung:

$$70\,000 = 20\,451.68 \cdot \left(1 + 0.05 \cdot \frac{\Delta t_1}{360}\right) \cdot 1.05^{25} \cdot \left(1 + 0.05 \cdot \frac{57}{360}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{70\,000}{20\,451.68} \cdot 1.05^{-25} \cdot \left(1 + 0.05 \cdot \frac{57}{360}\right)^{-1} - 1 = 0.05 \cdot \frac{\Delta t_1}{360}$$

$$\Rightarrow \Delta t_1 \approx 20.120\,473\,6$$

Also Geburtstag am 10.12.1991 (auch in Ordnung ein Tag später)

Aufgabe 5 **18 Punkte**

Gegeben sei die Funktion f mit folgender Funktionsgleichung:

$$f(x) = e^{-x} \cdot \ln\left(x^2\right)$$

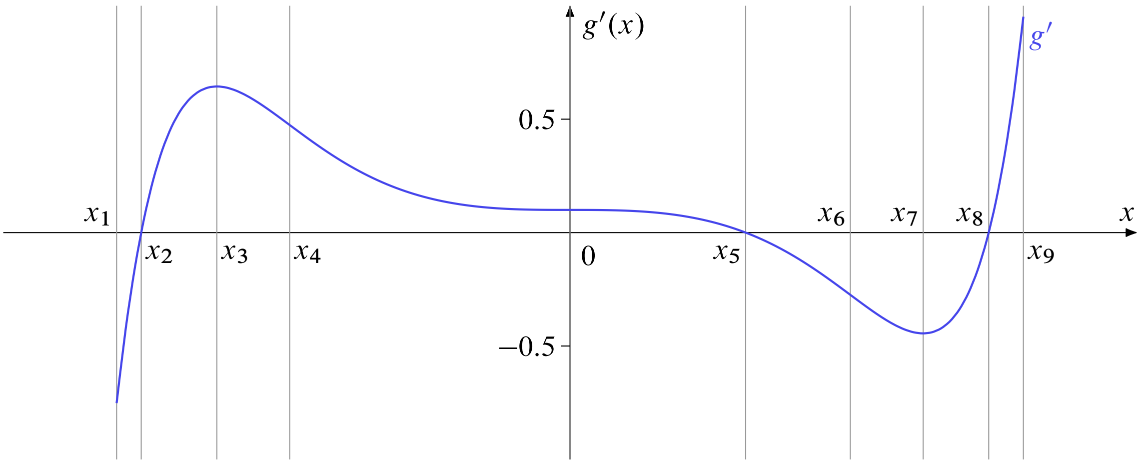
a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $D_f \subset \mathbb{R}$ von f an.

b) Berechnen Sie die Nullstellen von f.

c) Bestimmen Sie die erste Ableitung f' und fassen Sie Ihr Ergebnis so weit wie möglich zusammen.

d) Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten von f für $x \to -\infty$.

Für eine andere Funktion, die stetige und zweimal stetig differenzierbare Funktion $g : [x_1, x_9] \to \mathbb{R}$, ist lediglich der Graph ihrer *ersten Ableitung* g' gegeben:



Die folgenden Teilaufgaben beziehen sich auf die der Ableitung g' zugrundeliegenden Funktion g.

e) Geben Sie die x-Werte der lokalen Minima von g an.

f) Geben Sie die x-Werte der lokalen Maxima von g an.

g) In welchem (bzw. welchen) Intervall(en) ist g monoton wachsend?

h) In welchem (bzw. welchen) Intervall(en) ist g monoton fallend?

i) In welchem (bzw. welchen) Intervall(en) ist g konvex?

j) In welchem (bzw. welchen) Intervall(en) ist g konkav?

Lösungshinweis:

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) $f(x) = e^{-x} \cdot \ln\left(x^2\right) = 0$ für $\ln\left(x^2\right) = 0$
$\Rightarrow x^2 = 1 \quad \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$

c) $$f'(x) = e^{-x} \cdot (-1) \cdot \ln\left(x^2\right) + e^{-x} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x$$
$$= -e^{-x} \cdot \ln\left(x^2\right) + e^{-x} \cdot \frac{2}{x}$$
$$= e^{-x}\left(\frac{2}{x} - \ln\left(x^2\right)\right)$$

d) $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\Big[\underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty} \cdot \underbrace{\ln\left(x^2\right)}_{\to+\infty}\Big] = +\infty$$

e) Minimalstellen: x_2, x_8

f) Maximalstellen: x_1, x_5, x_9

g) g monoton wachsend für
$x \in [x_2, x_5] \cup [x_8, x_9]$

h) g monoton fallend für
$x \in [x_1, x_2] \cup [x_5, x_8]$

i) g konvex für $x \in [x_1, x_3] \cup [x_7, x_9]$

j) g konkav für $x \in [x_3, x_7]$

Aufgabe 6 — 12 Punkte

Im Folgenden ist der Gradient der zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2(y-1)^2(x-2) + e^x - 1 \\ 2(y-1)\big(1 + (x-2)^2\big) \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte (x, y) mit $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(Ohne nachvollziehbaren Rechenweg werden keine Punkte vergeben!)

b) Bestimmen Sie die Hessematrix $H_f(x, y)$.

c) Bestimmen Sie alle Maximal- und Minimalstellen von f.

Lösungshinweis:

a) $(x, y) = (0, 1)$

b) $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2(y-1)^2 + e^x & 4(y-1)(x-2) \\ 4(y-1)(x-2) & 2\big(1 + (x-2)^2\big) \end{pmatrix}$

c) $H_f(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ ist positiv definit, also besitzt f ein lokales Minimum im Punkt $(x, y) = (0, 1)$.