Klausur Wirtschafts- und Finanzmathematik
Lösungshinweise

Prüfungsdatum: 18. Januar 2017 – Prüfer: Burkart, Etschberger, Jansen
Studiengang: IM und BW
Punkte: 13, 10, 20, 17, 16, 14 ;   Summe der Punkte: 90

Aufgabe 1 — 13 Punkte

a) Bestimmen Sie die Wahrheitswerte der folgenden aus den Aussagen A, B zusammengesetzten Aussagen. Tragen Sie dazu in der folgenden Wahrheitstabelle in die Kästchen (☐) jeweils w (wahr) beziehungsweise f (falsch) ein.

A B	w w	w f	f w	f f
$\mathsf{A} \Leftrightarrow \mathsf{B}$	☐	☐	☐	☐
$\overline{\mathsf{A}}$	☐	☐	☐	☐
$\overline{\mathsf{A}} \wedge \mathsf{B}$	☐	☐	☐	☐
$(\mathsf{A} \Leftrightarrow \mathsf{B}) \Rightarrow (\overline{\mathsf{A}} \wedge \mathsf{B})$	☐	☐	☐	☐

b) Gegeben sei die Aussage

$K(x)$: *Student x ist glücklich über die Aufgaben in der Mathe-Klausur.*

Formulieren Sie die Aussage

Kein Student x ist nicht glücklich über die Aufgaben in der Mathe-Klausur.

- als Existenzaussage (mit dem Existenzquantor $\bigvee_x$) und
- als Allaussage (mit dem Allquantor $\bigwedge_x$).

c) Die Aussage

$$A(n): \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot k^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n^2+n}{2}$$

soll mittels vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$ gezeigt werden. Überprüfen Sie dazu, dass $A(n)$

- für $n = 1$ wahr ist.
- Beweisen Sie den Induktionsschritt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

Lösungshinweis:

a) Wahrheitstabelle:

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$\mathsf{A} \Leftrightarrow \mathsf{B}$	w	f	f	w
$\overline{\mathsf{A}}$	f	f	w	w
$\overline{\mathsf{A}} \wedge \mathsf{B}$	f	f	w	f
$\big(\mathsf{A} \Leftrightarrow \mathsf{B}\big) \Rightarrow \big(\overline{\mathsf{A}} \wedge \mathsf{B}\big)$	f	w	w	f

b) $\overline{\bigvee_x \overline{K(x)}} \quad \Leftrightarrow \quad \bigwedge_x K(x)$

c)
- Induktionsanfang $A(1):\ \sum_{k=1}^{1} (-1)^{k-1} \cdot k^2 = (-1)^0 \cdot 1^2 = (-1)^{1-1} \cdot \frac{1^2+1}{2}$
- Induktionsschritt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \cdot k^2 &= (-1)^{(n+1)-1} \cdot (n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot k^2 \\
&\overset{A(n)}{=} (-1)^n \cdot (n+1)^2 + (-1)^{n-1} \cdot \frac{n^2+n}{2} \\
&= (-1)^n \cdot \left(n^2 + 2n + 1 - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right) \\
&= (-1)^n \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \big(n^2 + 2n + 1 \ \ + \ \ n + 1\big) \\
&= (-1)^n \cdot \frac{(n+1)^2 + (n+1)}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 **10 Punkte**

a) Gegeben sei die Folge (a_n) für $n \in \mathbb{N}_0$ mit der rekursiven Definition

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ a_n &= (-1)^n \cdot \frac{1}{a_{n-1}} \end{aligned}$$

a.1) Bestimmen Sie a_1, a_2, a_3, a_4.

a.2) Entscheiden und begründen Sie, ob (a_n) konvergiert. Geben Sie ggf. den Grenzwert an.

b) Prüfen Sie mithilfe des Quotientenkriteriums, ob die Reihe (s_n) konvergiert:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{2^n}{(n-1)!}$$

c) Geben Sie R-Befehle an, mit denen Sie den Wert von s_{13} bestimmen können.
(*Hinweis: die R-Funktion für die Fakultät $n!$ heißt* `factorial(n)`.)

Lösungshinweis:

a) a.1) $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = -2$, $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_4 = 2$

a.2) 4 Häufungspunkte: $-\frac{1}{2}, -2, \frac{1}{2}, 2$
$\Rightarrow$ kein Grenzwert, (a_n) divergent

b) Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{2^{n+1} \cdot (n-1)!}{n! \cdot 2^n}\right| = \left|\frac{2}{n}\right| \to 0 \text{ für } n \to \infty \quad \Rightarrow (s_n) \text{ konvergent}$$

c)
```r
# Loesung in R
n = 1:13
sum( 2^n / factorial(n-1) )

## [1] 14.77811

# oder als Funktion
s = function(n) {
  n.Liste = 1:n
  sum( 2^(n.Liste) / factorial((n.Liste)-1) )
}
s(13)

## [1] 14.77811
```

Aufgabe 3 **20 Punkte**

Betrachten Sie die Funktion $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit

$$f_a(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^{ax}$$

Die Aufgabenteile a), b) sollen in Abhängigkeit der Konstante $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gelöst werden:

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion f_a.

b) Die Funktion f_a hat zwei lokale Extrema. Bestimmen Sie deren Lage und entscheiden Sie jeweils, ob es sich um ein Maximum oder ein Minimum handelt.
(Hinweis: Benutzen Sie für die Bestimmung der Art der Extrema die zweite Ableitung.)

Für die nächsten Aufgabenteile wird f_a für $a = -1$ gemäß

$$g(x) = f_{a=-1}(x)$$

betrachtet. Gegeben ist zusätzlich die erste Ableitung von g mit

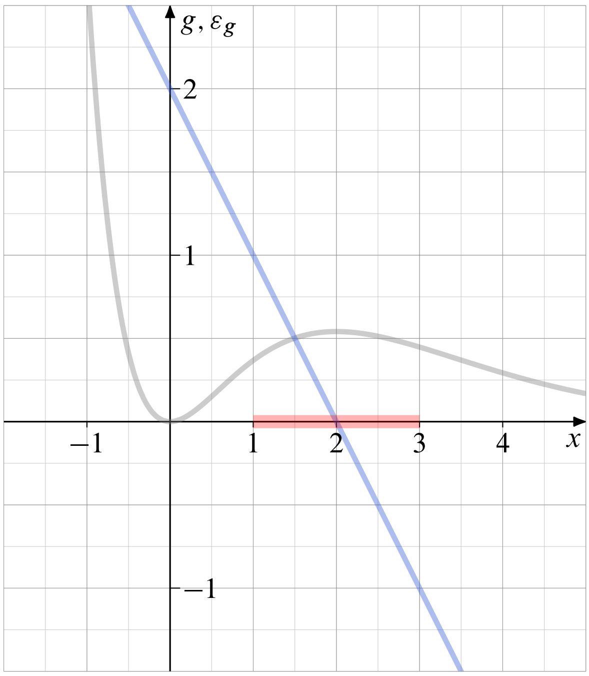
$$g'(x) = (2x - x^2) \cdot \mathrm{e}^{-x}$$

(diese müssen Sie nicht nachrechnen).

c) Bestimmen Sie die Funktionsterme der Änderungsrate $\varrho_g(x)$ und der Elastizität $\varepsilon_g(x)$ von g.

d) Für welche x ist g elastisch bzw. uneleastisch?

e) Zeichnen Sie die Graphen von g und von ε_g in das nebenstehende Koordinatensystem und markieren sie auf der x-Achse den Bereich der Werte von x für die g unelastisch ist.



R

f) Geben Sie zwei R-Befehle an, mit denen die Graphen von g und von ε_g zusammen in *einem* Koordinatensystem dargestellt werden.

Lösungshinweis:

a) doppelte Nullstelle bei $x = 0$, denn e^x hat keine Nullstelle.

b) Bestimmung der Ableitungen

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cdot e^{ax} + x^2 \cdot a e^{ax} \\ &= x \cdot (2 + ax) \cdot e^{ax} \\ f''(x) &= 2e^{ax} + 2axe^{ax} + 2axe^{ax} + a^2x^2e^{ax} \\ &= (2 + 4xa + a^2x^2)e^{ax} \end{aligned}$$

Aus der ersten Ableitung ergeben sich $x = 0$ und $x = -\frac{2}{a}$ als mögliche Kandidaten für Extrema. Setzt man die beiden Stellen in die f'' ein, so ergibt sich $f''(0) = 2 > 0$ und $f''(-\frac{2}{a}) = -2e^{-2} < 0$. damit ist die Stelle $x = 0$ ein lokales Minimum und die Stelle $x = -\frac{2}{a}$ ein lokales Maximum.

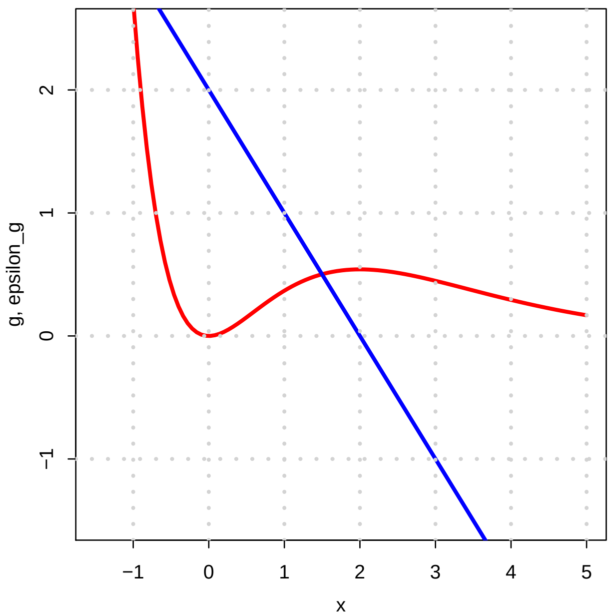
c) Für die Änderungsrate ϱ_f und die Elastizität ϵ_f ergibt sich

$$\begin{aligned} \varrho_f(x) &= \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x(2-x)e^{-x}}{x^2 \cdot e^{-x}} = \frac{2-x}{x} \\ \epsilon_f(x) &= x \cdot \varrho_f(x) = 2 - x \end{aligned}$$

d) Eine Funktion ist in x elastisch, wenn $|\epsilon_f(x)| > 1$ und unelastisch, falls $|\epsilon_f(x)| < 1$ was das gleiche ist wie $-1 < \epsilon_f(x) < 1$. Letzteres ist leicht zu untersuchen: Für $1 < x < 3$ ist die Funktion unelastisch. Elastisch ist die Funktion dann für $x < 1$ und $x > 3$.

e) siehe Skizze

f)
```
plot(c(-1.5,5), c(-1.5, 2.5), type="n",
     xlab = "x", ylab = "g, epsilon_g")                  # nicht verlangt
curve(x^2*exp(-x), from=-1, to=5, lwd=3, col="red", add=T)
curve(-x+2, , add=T, lwd=3, col="blue")
grid(lwd=3)                                               # nicht verlangt
```



Aufgabe 4 **17 Punkte**

Der Nikolaus wollte das Geld, das er während der letzten Saison als Trinkgeld zugesteckt bekommen hat möglichst gewinnbringend anlegen. Nach einem totsicheren Tipp seiner Weihnachtswichtel hat er sein ganzes Erspartes in die Firma *Rudolph Enterprises* gesteckt. Mittlerweile ist die Firma pleite und das Geld ist futsch. Zu allem Überfluss muss der Weihnachtsschlitten repariert werden, Kostenpunkt 200 000 €. Der Nikolaus muss sich das Geld von der Nordpolbank zu einem jährlichen Zins von 11 % leihen. Die Schuldsumme soll annuitätisch zurückbezahlt werden mit einer Anfangstilgung (Tilgung im ersten Jahr) von 2 %.

a) Wie hoch ist die Annuität A?

(*Hinweis*: Falls Sie a) nicht lösen können, rechnen Sie bitte mit dem (falschen) Ergebnis $A = 23\,000$ € weiter)

b) Stellen Sie die 14. Zeile des Tilgungsplans auf.

c) Wie lange dauert es, bis die Schuld komplett getilgt ist?

d) Wie hoch ist die Restschuld zu Beginn des letzten Jahres? Wie hoch ist die Annuität im letzten Jahr?

Lösungshinweis:

Richtiger Tilgungsplan ($A = 26\,000$):

```
## [1]  1  2  3 14 18
##    Jahr Restschuld     Zins  Tilgung Annuitaet
## 1     1  200000.00 22000.00  4000.00  26000.00
## 2     2  196000.00 21560.00  4440.00  26000.00
## 3     3  191560.00 21071.60  4928.40  26000.00
## 14   14   95153.45 10466.88 15533.12  26000.00
## 18   18   21996.63  2419.63 21996.63  24416.26
```

Falscher Tilgungsplan ($A = 23\,000$):

```
## [1]  1  2  3 14 18 31
##    Jahr  Restschuld     Zins Tilgung Annuitaet
## 1     1 200000.0000 22000.00 1000.00 23000.000
## 2     2 199000.0000 21890.00 1110.00 23000.000
## 3     3 197890.0000 21767.90 1232.10 23000.000
## 14   14 173788.3622 19116.72 3883.28 23000.000
## 18   18 155499.1572 17104.91 5895.09 23000.000
## 31   31    979.1221   107.70  979.13  1086.826
```

Aufgabe 5 **16 Punkte**

In einer Fabrik werden 3 Waren W_1, W_2, W_3 hergestellt. Im betrachteten Zeitraum

(1) werden insgesamt 100 Einheiten hergestellt

(2) und zu einem Gesamtpreis von 654 € verkauft, wobei für eine Einheit von W_1 jeweils 3 €, für W_2 je 6 € und für W_3 je 9 € Umsatz erzielt wird.

(3) Die Herstellungskosten belaufen sich für W_1 und W_3 pro Einheit auf 2 € und für W_2 auf 3 €. Fixkosten fallen nicht an. Insgesamt ergibt sich ein Gewinn von 392 €.

a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem zu diesem Problem auf. Bezeichnen Sie dabei die Anzahl der hergestellten und verkauften Einheiten für W_1, W_2, W_3 jeweils mit x_1, x_2, x_3. (*Hinweis zu Gleichung (3): Wie hoch sind die Gesamtkosten?*)

b) Bestimmen Sie unter Verwendung des Algorithmus von Gauß und Jordan wie viele Einheiten von W_1, W_2 und W_3 hergestellt und verkauft werden.

Lösungshinweis:

a) Man erhält aus den obigen Angaben drei Gleichungen. Mit x_i mit $i = 1, 2, 3$ bezeichnet man die Anzahl des jeweiligen Warentyps

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
(1) & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 100 \\
(2) & 3x_1 & + & 6x_2 & + & 9x_3 & = & 654 \\
(3) & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 654 - 392 = 262
\end{array}$$

b) Gauß-Jordan-Algorithmus

	x_1	x_2	x_3		Operation
1	$\boxed{1}$	1	1	100	
2	3	6	9	654	
3	2	3	2	262	
4	1	1	1	100	1
5	0	3	6	354	2 $- 3 \cdot$ 1
6	0	$\boxed{1}$	0	62	3 $- 2 \cdot$ 1
7	1	0	1	38	4 $-$ 6
8	0	1	0	62	6
9	0	0	$\boxed{6}$	168	5 $- 3 \cdot$ 6
10	1	0	0	10	7 $- \frac{1}{6} \cdot$ 9
11	0	1	0	62	8
12	0	0	1	28	$\frac{1}{6} \cdot$ 9

Daraus folgt $x_1 = 10$, $x_2 = 62$,und $x_3 = 28$.

Aufgabe 6 **14 Punkte**

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Außerdem sei bekannt, dass $\det B = 52$ gilt (das muss nicht nachgerechnet werden).

Berechnen Sie

a) $A \cdot B$

b) $\det A$

c) $\det(A \cdot B)$

d) $\det(B^T \cdot A^T \cdot B^{-1})$

Lösungshinweis:

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & -2 & 4 & 4 \\ -2 & -8 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

b) $$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 0 + (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot 0 \\ &= (1) \cdot 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 0 + (1) \cdot 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 \\ &= 13 \end{aligned}$$

c) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = 13 \cdot 52 = 676$

d) $\det(B^T \cdot A^T \cdot B^{-1}) = \dfrac{\det(B) \cdot \det(A)}{\det(B)} = \det(A) = 13$ (siehe b)