Klausur Wirtschafts- und Finanzmathematik
Lösungshinweise

Prüfungsdatum: 17. Januar 2018 – Prüfer: Burkart, Etschberger, Henle
Studiengang: IM und BW
Punkte: 12, 17, 22, 12, 15, 12 ; Summe der Punkte: 90

Aufgabe 1 — 12 Punkte

a) Überprüfen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, für welche $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Aussagen jeweils wahr sind:

$$\mathsf{A}_1(n): \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

$$\mathsf{A}_2(n): (a+b)^n \geqq a^n + b^n \qquad \text{für } a, b \geqq 0$$

b) Bestimmen Sie die Wahrheitswerte der folgenden aus den Aussagen A, B zusammengesetzten Aussagen. Tragen Sie dazu in der folgenden Wahrheitstabelle in die Kästchen (▭) jeweils w (wahr) beziehungsweise f (falsch) ein.

A B	w w	w f	f w	f f
$\mathsf{B} \Rightarrow \mathsf{A}$	w	w	f	w
$\mathsf{B} \vee \mathsf{A}$	w	w	w	f
$\overline{\mathsf{A} \vee \mathsf{B}}$	f	f	f	w
$\overline{\mathsf{A} \vee \mathsf{B}} \Leftrightarrow \mathsf{A}$	f	f	w	f

Lösungshinweis:

a)
- A_1: Induktionsanfang $n=1$: $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1 = 1^2$
  Ind. Schritt:
  $$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2n+1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$$
- A_2: Induktionsanfang $n=1$: $(a+b)^1 = a^1 + b^1 \geqq a^1 + b^1$
  Ind. Schritt:
  $$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b)\\ &\geqq (a^n+b^n)(a+b)\\ &= a^{n+1} + a^n b + b^n a + b^{n+1}\\ &\geqq a^{n+1} + b^{n+1}\end{aligned}$$

b) Wahrheitstabelle s.o.

Aufgabe 2 — 17 Punkte

Gegeben sind für $n \in \mathbb{N}$ die Folgen (a_n), (b_n) sowie die Reihen (s_n), (t_n) mit

$$a_n = (-1)^n \frac{n^2}{2n^2+1}, \qquad b_n = \frac{1-n^3}{n^3+5n},$$
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1-i^3}{i^3+5i}, \qquad t_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{5^i+2^i-3^i}{6^i}.$$

R

a) Schreiben Sie die Ausgabe der folgenden Zeilen R-Code auf:

```
n = c(1:3, 10, 11, 100, 101)
an = function(n) {(-1)^n * (n^2) / (2*n^2 + 1)}
data.frame(n, an=an(n))
```

```
##     n         an
## 1   1 -0.3333333
## 2   2  0.4444444
## 3   3 -0.4736842
## 4  10  0.4975124
## 5  11 -0.4979424
## 6 100  0.4999750
## 7 101 -0.4999755
```

b) Untersuchen Sie (a_n), (b_n) auf Konvergenz. Geben Sie ggf. den Grenzwert an.

c) Untersuchen Sie auch (s_n), (t_n) auf Konvergenz. Geben Sie ggf. den Grenzwert an.

Lösungshinweis:

a) ► $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2n^2+1} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{2+(1/n^2)} = \pm\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Häufungspunkte $\pm\frac{1}{2} \Rightarrow$ nicht konvergent

► $\lim_{n\to\infty} \frac{1-n^3}{n^3+5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1/n^3)-1}{1+(5/n^2)} = -1$

$\Rightarrow$ konvergent, Grenzwert $= -1$

b) ► Die Folge (b_i) ist keine Nullfolge, somit ist die Reihe s_n divergent.

► $$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{5^i+2^i-3^i}{6^i} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} (5/6)^i + \sum_{i=0}^{n} (1/3)^i - \sum_{i=0}^{n} (1/2)^i \right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-(5/6)^{n+1}}{1-(5/6)} + \frac{1-(1/3)^{n+1}}{1-(1/3)} - \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-(1/2)} \right)$$

$\Rightarrow$ konvergent, Grenzwert $= 11/2$

Aufgabe 3 **22 Punkte**

Betrachtet wird die Kostenfunktion $K\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ in Abhängigkeit von der Produktionsmenge $x \geqq 0$ mit

$$K(x) = 4 + \tfrac{3}{10}x - \tfrac{1}{20}x^2 + \tfrac{1}{300}x^3$$

a) Bestimmen Sie den Funktionsterm der ersten Ableitung von K.

b) Für welche x ist K (streng) monoton steigend bzw. fallend? Geben Sie ggf. vorhandene Extremwerte von K an.

c) Berechnen sie den Funktionsterm der Elastitizität $\varepsilon_K(x)$ von K.

d) Sind die Kosten für $x = 10$ elastisch?

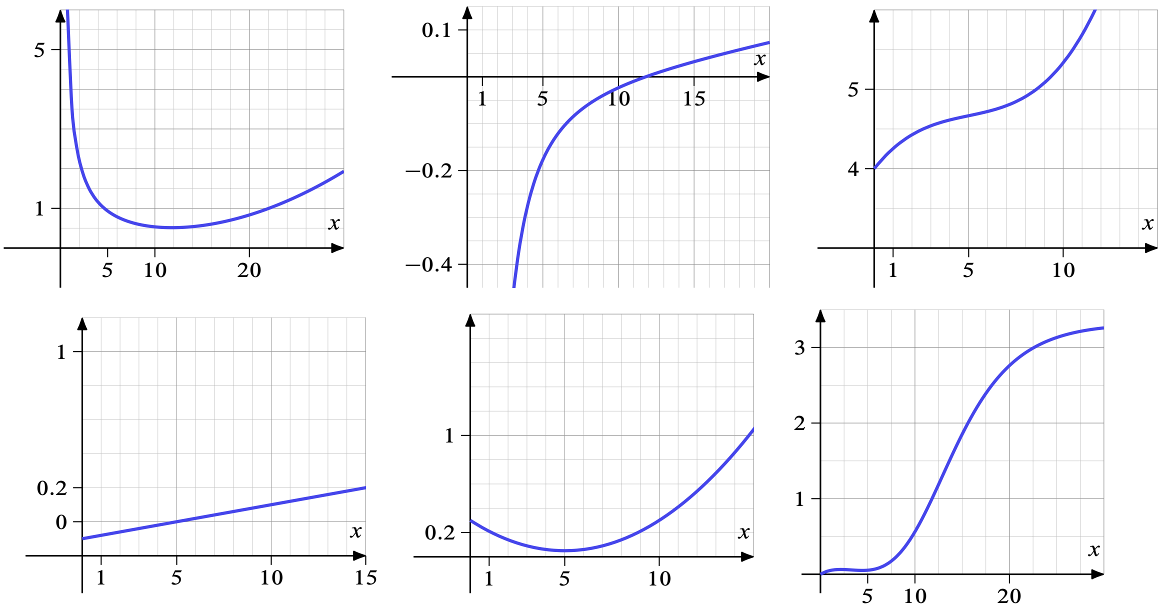
e) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von $K(x)$: Für welche x ist die Kostenfunktion $K(x)$ konvex, für welche x konkav?

Die Stückkostenfunktion $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert über $c(x) = \frac{K(x)}{x}$.

f) Geben Sie den Funktionsterm von $c(x)$ an.

g) Stimmt es, dass die Stückkosten für $x \approx 11.805$ global minimal sind?
(*Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $c'(x)$ nur eine reelle Nullstelle hat.*)

Gegeben sind jetzt folgende Funktionsgraphen:



h) Ordnen Sie den Graphen die Funktionen $K, K', K'', \varepsilon_K, c, c'$ zu. Schreiben Sie dazu jeweils den zugehörigen Funktionsbezeichner in den Graph.
(*Hinweis: Ein falsch eingetragener Bezeichner gibt -1 Punkt, ein richtiger $+0.5$ Punkte.*)

Lösungshinweis:

a) Ableitung von K:
$$K'(x) = \frac{3}{10} - \frac{1}{10}x + \frac{1}{100}x^2 = \frac{1}{100}(30 - 10x + x^2)$$

b) $K'(x)$ hat damit keine Nullstellen, denn
$$x_{1/2} = \frac{1}{2}\left(10 \pm \sqrt{100 - 120}\right) \notin \mathbb{R}$$
Da $K'(0) > 0$ ist K somit für alle x streng monoton steigend.

c) Für die Elastizität gilt:
$$\varepsilon_K(x) = \frac{K'(x) \cdot x}{K(x)} = \frac{\frac{3}{10}x - \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{100}x^3}{4 + \frac{3}{10}x - \frac{1}{20}x^2 + \frac{1}{300}x^3}$$

d) $\varepsilon_K(10) = 0.5625 < 1$. Also ist K für $x = 10$ unelastisch.

e) Für die zweite Ableitung von K gilt:
$$K''(x) = -\frac{1}{10} + \frac{1}{50}x = \frac{1}{50}(x - 5)$$
Also ist K für $0 \leqq x < 5$ streng konkav und für $x > 5$ streng konvex. Wendepunkt bei $x = 5$.

f) $c(x) = \frac{4}{x} + \frac{3}{10} - \frac{1}{20}x + \frac{1}{300}x^2$

g) Für die erste Ableitung von $c(x)$ gilt:
$$c'(x) = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{20} + \frac{1}{150}x \quad \Rightarrow \quad c'(12) = -\frac{1}{36} - \frac{1}{20} + \frac{2}{25} \approx 0$$
Für $x < 12$ ist $c'(x) < 0$ und für $x > 12$ ist $c'(x) > 0$. Also hat $c(x)$ bei $x \approx 12$ ein lokales Minimum.

h) Der Reihe nach: $c, c', K, K'', K', \varepsilon_K$

Aufgabe 4 **12 Punkte**

Eva feiert heute, am 1. Januar 2018, ihren 18. Geburtstag. Sie möchte ab heute für Ihr Alter vorsorgen, eröffnet zu diesem Zweck ein Konto und beginnt sofort regelmäßig zu sparen, um dann im Alter von dem angesparten Geld inkl. Zinsen regelmäßig einen konstanten Betrag zu entnehmen, bis der Kontostand 0 € beträgt.

Gehen Sie im Folgenden von einem jährlichen Zinssatz von 1 % aus.

a) Die Entnahmephase soll an Evas 68. Geburtstag beginnen. Bis dahin zahlt sie monatlich, jeweils zum Monatsbeginn, 300 € ein. Wie hoch ist dann der Kontostand?

b) Welchen Betrag kann Eva ab Ihrem 68. Geburtstag monatlich vorschüssig abheben, wenn der Kontostand an Ihrem 98. Geburtstag 0 € betragen soll.

c) Wie lange könnte sie in der Entnahmephase monatlich nachschüssig 900 € entnehmen?

Lösungshinweis:

ICMA:

a) $q_M = \sqrt[12]{1.01} \approx 1.0008295$, $n = 50 \cdot 12 = 600$

$$\Rightarrow R_n^A = 300 \cdot \frac{q_M^{600} - 1}{q_M - 1} \cdot q_M \approx 233\,322.58\,€$$

b) $$R_n^A = R_0^E = r \cdot \frac{q_M^{30\cdot 12} - 1}{q_M - 1} \cdot q_M^{-30\cdot 12} \cdot q_M$$

$$\Leftrightarrow r = R_0^E \cdot \frac{1 - q_M^{-1}}{1 - q_M^{-360}} \approx 749.35\,€$$

c) $$n = -\log_{q_M}\left[1 - \frac{R_0^E}{r} \cdot (q_M - 1)\right] \approx 292.02 \text{ Monate, also ca. 24 Jahre und 4 Monate.}$$

Rentenersatzrate:

a) $r_e = 300 \cdot \left(12 + 0.01 \cdot \frac{13}{2}\right) \approx 3619.50\,€$

$$\Rightarrow R_n^A = 3619.50 \cdot \frac{1.01^{50} - 1}{1.01 - 1} \approx 233\,324.49\,€$$

b) $$R_n^A = R_0^E = r \cdot \left(12 + 0.01 \cdot \frac{13}{2}\right) \cdot \frac{1.01^{30} - 1}{1.01 - 1} \cdot 1.01^{-30}$$

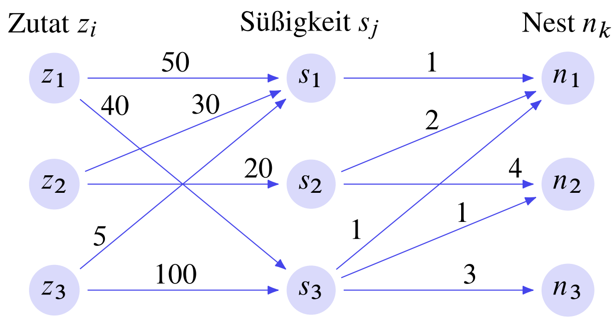
$$\Leftrightarrow r = r_A \cdot \frac{q^{50} - 1}{1 - q^{-30}} \approx 749.35\,€$$

c) $r_e = 900 \cdot \left(12 + i \cdot \frac{11}{2}\right) \approx 10\,849.50$

$$n = -\log_q\left[1 - \frac{R_0^E}{r_e} \cdot i\right] \approx 24.34 \text{ Jahre, also ca. 24 Jahre und 4 Monate.}$$

Aufgabe 5 **15 Punkte**

Da Ostern dieses Jahr so früh wie selten ist, läuft die Osternestproduktion der Firma „Oster & Hase" bereits auf Hochtouren. Produziert wird dabei in zwei Schritten: Zunächst werden aus den Zutaten Zucker (Menge z_1 in Gramm), Kakao (z_2) und Likör (z_3) verschiedene Süßigkeiten hergestellt. Hiervon gibt es drei verschiedene Arten: Osterhasen (Anzahl s_1), Schokoeier (s_2) und Schokolikör (s_3). Aus den Süßigkeiten werden dann drei Arten von Osternestern (Anzahl n_k, mit $k = 1, 2, 3$) zusammengestellt, die sich in der Anzahl und Art der Süßigkeiten je Nest unterscheiden. Die benötigten Zutaten je Süßigkeit (in Gramm) und Stückzahlen der Süßigkeiten je Nest können aus folgendem Graphen abgelesen werden:



In den Matrizen $A = (a_{ij})_{3,3}$ und $B = (b_{jk})_{3,3}$ bedeute

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \text{Menge an Zutaten } z_i \text{ zur Herstellung einer Einheit von Süßigkeit } s_j, \\ b_{jk} &= \text{Menge an Süßigkeiten } s_j \text{ in einem Osternest } n_k \end{aligned}$$

a) Geben Sie die Matrizen A, B an.

b) Berechnen Sie aus den Matrizen A und B die Matrix C mit den Komponenten c_{ik}, aus der Sie direkt den Verbrauch an Zutat z_i je Nest n_k ablesen können.

c) Wieviel Zutaten z_1, z_2, z_3 werden jeweils benötigt, wenn Herr Hase von den drei Nesttypen $(n_1, n_2, n_3) = (10, 20, 30)$ Stück ausliefern muss.

Lösungshinweis:

a) $A = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 40 \\ 30 & 20 & 0 \\ 5 & 0 & 100 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 90 & 40 & 120 \\ 70 & 80 & 0 \\ 105 & 100 & 300 \end{pmatrix}$

c) $z = A \cdot B \cdot n = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 40 \\ 30 & 20 & 0 \\ 5 & 0 & 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5300 \\ 2300 \\ 12050 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6 **12 Punkte**

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 9 & 7 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Formulieren Sie das Eigenwertproblem der Matrix A.

b) Berechnen Sie den/die zur Matrix A zugehörigen Eigenwert(e).

c) Berechnen Sie den zum Eigenwert $\lambda = 0$ gehörenden Eigenvektor v zu Matrix B.

Lösungshinweis:

a) $Ax = \lambda x \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 9 & 7 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

b) $\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 3 & 9-\lambda & 7 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow (-1-\lambda)(9-\lambda)(-\lambda) - (-2(9-\lambda)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (9-\lambda)\left[(-\lambda)(-1-\lambda)+2\right] = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 9$

Berechnung von λ_2, λ_3:

$(-\lambda)(-1-\lambda)+2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 + \lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2, \lambda_3 = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1-8}\right) \notin \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lambda_1$ ist einziger reeller Eigenwert.

c) $\begin{pmatrix} 3 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

I) $3v_1 - \frac{3}{4}v_2 = 0$, II) $0v_1 + 0v_2 = 0$

$\Rightarrow 4v_1 = v_2 \quad \Rightarrow v = \begin{pmatrix} a \\ 4a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$