Klausur Wirtschafts- und Finanzmathematik
Lösungshinweise

Prüfungsdatum: 9. Juli 2018 – Prüfer: Burkart, Etschberger, Henle
Studiengang: BW, IM
Punkte: 14, 15, 19, 13, 19, 10 ; Summe der Punkte: 90

Aufgabe 1 — 14 Punkte

a) Bestimmen Sie die Wahrheitswerte der folgenden aus den Aussagen A, B zusammengesetzten Aussagen. Tragen Sie dazu in der folgenden Wahrheitstabelle in die Kästchen ☐ jeweils w (wahr) beziehungsweise f (falsch) ein.

A	w	w	f	f
B	w	f	w	f
$\overline{\mathsf{B}}$	f	w	f	w
$\overline{\mathsf{B}} \vee \mathsf{A}$	w	w	f	w
$\overline{\mathsf{B}} \Leftrightarrow \mathsf{A}$	f	w	w	f
$(\overline{\mathsf{B}} \vee \mathsf{A}) \Rightarrow (\overline{\mathsf{B}} \Leftrightarrow \mathsf{A})$	f	w	w	f

b) Gegeben ist die Menge $M = \{\emptyset, 0, \{1, 0\}\}$. Geben Sie den Wahrheitsgehalt jeder Aussage jeweils im nebenstehenden Kästchen ☐ mit w (wahr) beziehungsweise f (falsch) an.

$1 \subseteq M$	f	$\{1\} \subseteq M$	f	$\emptyset \in M$	w
$\emptyset \subseteq M$	w	$\{\emptyset\} \subseteq M$	w	$\{0\} \subseteq M$	w

c) Gegeben ist die Reihe (s_n) für $n \in \mathbb{N}$ mit $s_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i$.

c.1) Mit den folgenden Zeilen R-Code soll eine *Wertetabelle* und der *Funktionsgraph* für die ersten 20 Partialsummen von (s_n) dargestellt werden. Darin sind genau 4 Fehler enthalten und es fehlt ein Befehl. Markieren *und korrigieren* Sie diese Fehler und ergänzen Sie den fehlenden Befehl. (Sie können die Korrekturen gerne direkt am Code durchführen, sofern alles leserlich dargestellt ist.)

```
ai = function(i) {2^i}
sumn = function(n) { sum(   (0:(n-1)) )}

# mit sapply funktioniert die Funktion
# auch mit einem Vektor als Argument
sn = function(n){ sapply(n, sum_n) }

n = 1-20
```

```
# Wertetabelle und plot:
data.frame(n, sn() )

grid()
```

c.2) Stellen Sie (s_n) in einer Schreibweise ohne Summenzeichen als explizite Folge dar.

c.3) Setzen Sie die Schreibweise mit Summenzeichen (aus der Angabe) mit Ihrer Schreibweise ohne Summenzeichen (aus der obigen Teilaufgabe) gleich und beweisen Sie die Gültigkeit der Gleichung mit Hilfe vollständiger Induktion.

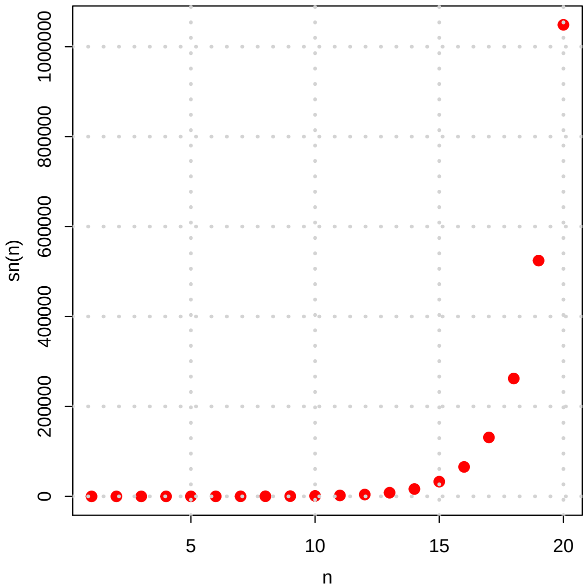
Lösungshinweis:

a) s.o.

b) s.o.

c) c.1)

```
ai = function(i) {2^i}
sumn = function(n) { sum( ai(0:(n-1)) )}

# mit sapply funktioniert die Funktion sumn
# auch mit einem Vektor als Argument
sn = function(n){ sapply(n, sumn) }

n = 1:20

data.frame(n, sn(n))

##     n   sn.n.
## 1   1       1
## 2   2       3
## 3   3       7
## 4   4      15
## 5   5      31
## 6   6      63
## 7   7     127
## 8   8     255
## 9   9     511
## 10 10    1023
## 11 11    2047
## 12 12    4095
## 13 13    8191
## 14 14   16383
## 15 15   32767
## 16 16   65535
## 17 17  131071
## 18 18  262143
## 19 19  524287
## 20 20 1048575

plot(n, sn(n), col="red", lwd=2, pch=19)
grid()
```



c.2) (s_n) ist eine geometrische Reihe: $s_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 1 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} = (-1) \cdot (1-2^n) = 2^n - 1$
Alternativ: erste Folgeglieder notieren und explizite Form erschließen

c.3) Induktionsannahme $A(n): \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$

Induktionsanfang $A(1): \sum_{i=0}^{1-1} 2^i = 2^0 = 1 = 2^1 - 1$

Induktionsschritt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$: $\left(\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1\right) \Rightarrow \left(\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1\right)$
Beweis:

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i + 2^n \overset{A(n)}{=} 2^n - 1 + 2^n = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$$

Aufgabe 2 — 15 Punkte

a) Für eine arithmetische Folge $\left(a_n\right)$ und der Differenz $d \in \mathbb{R}$ gilt bekanntlich für alle $n \in \mathbb{N}_0$ der folgende rekursive Zusammenhang:

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Formulieren Sie diesen Zusammenhang in expliziter Form.

b) Gegeben ist die Folge $\left(b_n\right)$ für $n \in \mathbb{N}$ mit:

$$b_n = 3 \cdot (-1)^n + (-1)^{n-1}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils Ihre Antworten.

b.1) $\left(b_n\right)$ ist eine arithmetische Folge.

b.2) $\left(b_n\right)$ ist eine geometrische Folge.

b.3) $\left(b_n\right)$ besitzt einen Grenzwert.

b.4) Die auf $\left(b_n\right)$ aufbauende Reihe $\left(r_n\right)$ mit $r_n = \sum_{i=1}^{n}\left(3 \cdot (-1)^n + (-1)^{n-1}\right)$ ist konvergent.

Lösungshinweis:

a) $a_2 - a_1 = d,\ a_3 - a_2 = d \ \Rightarrow\ a_3 = a_1 + 2 \cdot d$

$\Rightarrow$ allgemein also: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

b) b.1) falsch, da z. B. $b_3 - b_2 = -2 - 2 = -4 \quad \neq \quad b_2 - b_1 = 2 - (-2) = +4$

b.2) wahr, da $\frac{b_{n+1}}{b_n} = -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b.3) falsch, da $\left(b_n\right)$ nicht konvergent, sondern alternierende Folge mit den beiden Häufungspunkten ± 2, die abwechselnd erreicht werden

b.4) $\left(b_n\right)$ ist keine Nullfolge $\Rightarrow$ $\left(r_n\right)$ ist divergent

Aufgabe 3 **19 Punkte**

Gegeben sei die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^2 + 8x + 7}{-x + 1}$$

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $D_f \subset \mathbb{R}$ von f an.

b) Berechnen Sie die Nullstellen von f.

c) Führen Sie eine Polynomdivision (mit Rest) mit dem Funktionsterm von f durch und untersuchen Sie damit das asymptotische Verhalten von f für $x \to \pm\infty$.

d) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion f: Für welche x ist die Funktion f monoton fallend, für welche x monoton steigend?

e) Die Funktion f hat zwei lokale Extrema. Bestimmen Sie deren Lage und entscheiden Sie, ob es sich jeweils um ein Maximum oder ein Minimum handelt.
(Hinweis: Benutzen Sie für die Bestimmung der Art der Extrema die zweite Ableitung von f.)

Lösungshinweis:

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) Nullstellen: -1 und -7

c) $f(x) = -x - 9 - \dfrac{16}{x-1} \underbrace{\rightarrow}_{x \to \pm\infty} -x - 9$

d) $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 15}{(-x+1)^2}$
Nullstellen von $f'(x)$: -3 und 5
$f''(x) = \dfrac{32}{(-x+1)^3}$
$f''(-3) > 0 \Rightarrow f(x)$ hat bei $x = -3$ ein lok. Min. und
$f''(5) < 0 \Rightarrow f(x)$ hat bei $x = 5$ ein lok. Max.

e) $f'(x) \leq 0$ für $x \in [-\infty; -3] \Rightarrow f(x)$ für $x \in [-\infty; -3]$ mon. fallend
$f'(x) \geq 0$ für $x \in [-3; 1[$ und $f'(x) \geq 0$ für $x \in]1; 5] \Rightarrow f(x)$ für $x \in [-3; 1[$ und $x \in]1; 5]$ mon. steigend

$f'(x) \leq 0$ für $x \in [5; \infty] \Rightarrow f(x)$ für $x \in [5; \infty]$ mon. fallend

Aufgabe 4 — 13 Punkte

Im folgenden gelte ein jährlicher Kalkulationszinssatz von $i = q - 1$. Kreuzen Sie pro Aussage jeweils genau einmal wahr oder falsch an.

a) Zwei Geldbeträge A_{t_1}, A_{t_2}, die jeweils zu den Zeitpunkten $t_1 < t_2$ gezahlt werden heißen finanzmathematisch äquivalent, genau dann wenn

	wahr	falsch
A_{t_1} sich von A_{t_2} um $i \cdot (t_2 - t_1)$ unterscheidet.		X
A_{t_1} und A_{t_2} gleich hoch sind.		X
$A_{t_1} : A_{t_2} = q^{t_1 - t_2}$.	X	
$A_{t_1} \cdot q^{t_2} = A_{t_2} \cdot q^{t_1}$.	X	

b) Zu einem Investitionsprojekt mit den Zahlungen A_t zu den Zeitpunkten $t = 0, \ldots, n$ und einem Kalkulationszinssatz $i = q - 1$ bezeichnet man den Kapitalwert als

	wahr	falsch
die Summe der diskontierten Zahlungen $\sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{-t}$.	X	
die Summe der aufgezinsten Zahlungen $\sum_{t=0}^{n} A_t \cdot q^{n-t}$.		X
die Summe der Zinsen der Zahlungen $\sum_{t=0}^{n} A_t \left(q^{n-t} - 1\right)$.		X

c) Bei einer Investition mit den Zahlungen A_t $(t = 0, \ldots, n)$ bezeichnet man den *internen Zins* als den Zinssatz $i = q - 1 \neq 0$, bei dem

	wahr	falsch
der Kapitalwert gleich dem Barwert aller negativen Zahlungen ist.		X
der Kapitalwert gleich 0 ist.	X	
die aufsummierten diskontierten künftigen (positiven) Rückflüsse der Summe der diskontierten (negativen) Investitionen entsprechen.	X	

d) Mit welchem Monatszinsfaktor q_{Monat} rechnen Sie bei regelmäßigen, konstant hohen monatlichen Zahlungen bei einem nominalen Jahreszinsfaktor von $q = i + 1$ und monatlicher Zinsabrechnung?

	wahr	falsch
$q_{\text{Monat}} = \dfrac{i}{12} + 1$		X
$q_{\text{Monat}} = \sqrt{q/12}$		X
$q_{\text{Monat}} = \sqrt[12]{i + 1}$	X	

Lösungshinweis:

Aufgabe 5 **19 Punkte**

Ein Betrieb stellt die Produkte P_1, P_2, P_3 her. Zur Fertigung müssen diese Produkte jeweils mit den Maschinen M_1, M_2, M_3 bearbeitet werden.

Für die Fertigstellung einer Einheit des Produkts P_1 werden mit Maschine M_1 genau 3 Stunden, mit M_2 genau 2 Stunden und mit M_3 genau 1 Stunde benötigt.

Eine Einheit des Produkts P_2 braucht mit den Maschinen M_1 und M_3 jeweils 2 Stunden.

Eine Einheit des Produktes P_3 wird in 3 Stunden mit der Maschine M_1, in 5 Stunden mit M_2 und in 4 Stunden mit M_3 fertiggestellt.

Jede der drei Maschinen läuft genau 120 Stunden.

a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem zu diesem Problem auf. Bezeichnen Sie dabei mit x_1 die Anzahl der Einheiten des Produkts P_1, mit x_2 die Anzahl der Einheiten des Produkts P_2 und mit x_3 die Anzahl der Einheiten des Produkts P_3.

Jetzt ist folgendes lineares Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} G_1: & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 120 \\ G_2: & 2x_1 & + & & & 5x_3 & = & 120 \\ G_3: & 7x_1 & + & 2x_2 & + & 13x_3 & = & 360 \end{array}$$

b) Bestimmen Sie unter Verwendung des Algorithmus von Gauß und Jordan alle Lösungen des Gleichungssystems.

c) Wie ändert sich die Lösungsmenge, wenn Sie zusätzlich die Gleichung

$$G_4: \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 45$$

mit in das Gleichungssystem aufnehmen?

Lösungshinweis:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} G_1: & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 120 \\ G_2: & 2x_1 & + & & & 5x_3 & = & 120 \\ G_3: & 7x_1 & + & 2x_2 & + & 13x_3 & = & 360 \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3		Operation
①	3	2	3	120	
②	2	0	5	120	
③	7	2	13	360	
④	1	$2/3$	1	40	$+1/3 \cdot$ ①
⑤	0	$-4/3$	3	40	② $- 2/3 \cdot$ ①
⑥	0	$-8/3$	6	80	③ $- 7/3 \cdot$ ①
⑦	1	0	$5/2$	60	④ $+ 1/2 \cdot$ ⑤
⑧	0	1	$-9/4$	-30	$-3/4 \cdot$ ⑤
⑨	0	0	0	0	⑥ $- 2 \cdot$ ⑤

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
G_1: & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 120 \\
G_2: & 2x_1 & + & & & 5x_3 & = & 120 \\
G_3: & 7x_1 & + & 2x_2 & + & 13x_3 & = & 360 \\
G_4: & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 45
\end{array}
$$

	x_1	x_2	x_3		Operation
①	3	2	3	120	
②	2	0	5	120	
③	7	2	13	360	
④	1	1	1	45	
⑤	1	1	1	45	① $- 3 \cdot$ ④
⑥	0	-1	0	-15	② $- 2 \cdot$ ④
⑦	0	-2	3	30	③ $- 7 \cdot$ ④
⑧	0	-5	6	45	$+1 \cdot$ ④
⑨	1	0	1	30	⑤ $+ 1 \cdot$ ⑥
⑩	0	1	0	15	$-1 \cdot$ ⑥
⑪	0	0	3	60	⑦ $- 2 \cdot$ ⑥
⑫	0	0	6	120	⑧ $- 5 \cdot$ ⑥
⑬	1	0	0	10	⑨ $- 1/3 \cdot$ ⑪
⑭	0	1	0	15	⑩ $+ 0 \cdot$ ⑪
⑮	0	0	1	20	$+1/3 \cdot$ ⑪
⑯	0	0	0	0	⑫ $- 2 \cdot$ ⑪

Aufgabe 6 **10 Punkte**

Gegeben ist folgende Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte sowie die Eigenvektoren zu S.

Lösungshinweis:

Lösung: Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 0.526 \\ 0.851 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -0.851 \\ 0.526 \end{pmatrix}$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 2.618034$, $\lambda_2 = 0.381966$